Nachtrag zur Sitzung vom 11. März 1892.

Hr. F. M. Stapff:

Ueber die Zunahme der Dichtigkeit der Erde nach ihrem Inneren.

Am 11. März d. J. theilte ich der physikalischen Gesellschaft ein einfaches Gesetz der Dichtigkeitszunahme mit, welches unter einer weiter unten formulirten Voraussetzung für jeden kugelförmigen Körper gelten muss, dessen Dichtigkeit stetig von aussen nach innen zunimmt. Dass diese Bedingung für die Erde stricte zutrifft, muss zwar bezweifelt werden (CALLANDREAU kommt sogar zu dem Resultat, dass die Dichte im Inneren der Erde durch eine continuirliche Function nicht ausdrückbar ist, wenn die Beobachtungen eine von 1/298 nur wenig abweichende Abplattung ergeben; Compt. rend. 1885,

p. 1204); aber wenn auch die Dichtigkeit in successiven Lagen sprungweise zunimmt, muss sich eine stetige Curve ermitteln lassen, welche besser als jede andere die mittlere Dichtigkeitszunahme ausdrückt, und welche dem allgemeinen Gesetz unterworfen sein soll.

Gestattet man sich die Annahme, dass die Differenz zwischen der Dichtigkeit γ_0 an der Oberfläche eines Kugelkernes und der mittleren Dichtigkeit γ_1 desselben, welche Differenz an der Erdoberfläche $= \Gamma - \Gamma_0$, an dem Centrum aber $= 0$ ist, mit dem Cubus des Radius des Kernes wächst, so wird

$$\gamma_0 = (2\,\Gamma - \Gamma_0) - (\Gamma - \Gamma_0)\frac{2\,r^3}{R^3},$$

worin γ_0 die Dichtigkeit an der Oberfläche des Kernes vom Radius r bedeutet, Γ die mittlere Dichtigkeit der ganzen Kugel, Γ_0 ihre Oberflächendichtigkeit, R den Radius der ganzen Kugel. Es folgt hieraus die centrale Dichtigkeit $\Gamma_\infty = 2\,\Gamma - \Gamma_0$; und die mittlere der ganzen Kugel

$$\Gamma = \frac{\Gamma_\infty + \Gamma_0}{2}.$$

Nimmt man noch erfahrungsgemäss $\Gamma = 2\,\Gamma_0$ an, so wird

$$\Gamma_\infty = \frac{3\,\Gamma}{2} = 3\,\Gamma_0\,;$$

und

$$\gamma_0 = \Gamma\left(\frac{3\,R^3 - 2\,r^3}{2\,R^3}\right).$$

Für die mittlere Dichtigkeit γ_1 des Kernes ergibt sich

$$\gamma_1 = \Gamma\left(\frac{3\,R^3 - r^3}{2\,R^3}\right);$$

und für die mittlere Dichtigkeit γ der äusseren Schale

$$\gamma = \Gamma\left(\frac{2\,R^3 - r^3}{2\,R^3}\right).$$

In der Beweisführung war damals ein Irrthum untergelaufen, auf welchen Hr. Dr. F. Richarz mich freundlichst aufmerksam machte und welchen Rev. O. Fisher beseitigt hat, der sich auf meine Bitte mit dankenswerther Bereitwilligkeit des Problems annahm.

Wenn r um dr zunimmt, so kommt zum Kern eine dünne

Schale von der Dichtigkeit γ_0, welche der Entfernung r vom Centrum entspricht. Daher wird ~~seine~~ die Masse des Kernes

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 \gamma_1 + 4\pi r^2 dr \gamma_0,$$

und seine Dichtigkeit

$$\gamma_1 + d\gamma_1 = \frac{\tfrac{4}{3}\pi r^3 \gamma_1 + 4\pi r^2 dr \gamma_0}{\tfrac{4}{3}\pi (r + dr)^3} = \frac{r^3 \gamma_1 + 3 r^2 dr \gamma_0}{r^3 + 3 r^2 dr}$$

$$= \left(\gamma_1 + \frac{3dr}{r}\gamma_0\right)\left(1 - \frac{3dr}{r}\right) = \gamma_1 + \frac{3dr}{r}(\gamma_0 - \gamma_1).$$

(1) $$d\gamma_1 = \frac{3\,dr}{r}(\gamma_0 - \gamma_1); \quad \text{oder} \quad \gamma_0 - \gamma_1 = \frac{r\,d\gamma_1}{3\,dr}.$$

An der Oberfläche, wo $r = R$, wird $\gamma_1 - \gamma_0 = \Gamma - \Gamma_0$; am Centrum, wo $r = 0$, aber $= 0$; und für zwischenliegende Punkte nehmen wir an, dass die Differenz mit irgend einer Potenz n von r/R wächst, also

(2a) $$\gamma_1 - \gamma_0 = (\Gamma - \Gamma_0)\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Die numerischen Werthe für die Oberflächendichtigkeit Γ_0 schwanken in weiten Grenzen (v. Humboldt 1,6; Laplace 3; Plana 1,877; Naumann 2,5; Airy und Miller 2,56; v. Waltershausen 2,66; Mallet 2,69; James 2,75; Harkness (Mittelwerth) 2,56 $\pm$ 0,16); theils, weil diese uns nächstliegende Constante nur schwierig (unter dem Meeresboden gar nicht) direct zu bestimmen ist; theils, weil ihre Definition unklar ist, insofern die Oceane bald mit berücksichtigt sind (v. Humboldt, Naumann), bald ausgeschlossen. Letzteres ist in unserem Falle das richtige, und deshalb verdienen unter den vorstehenden die höheren Werthe den Vorzug, besonders James': 2,75. Derselbe ist aber nahezu die Hälfte eines runden Werthes für die mittlere Dichtigkeit der Erde, und es dürfte angemessen sein (nach O. Fisher's Vorgang in Physics of the Earth's crust; I. ed., 1881, p. 20) geradezu anzunehmen, dass $\Gamma_0 = \Gamma / 2$. Ein grösserer Fehler als durch Einführen irgend eines anderen (beobachteten?) Werthes für Γ_0 kann dadurch nicht erwachsen; die Rechnungen gestalten sich bei dieser Annahme aber leichter und übersichtlicher. Unter dieser Annahme wird aus vorgehender Gleichung

(2b) $$\gamma_1 - \gamma_0 = \left(\Gamma - \frac{\Gamma}{2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n = \frac{\Gamma}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Durch Verbindung von Gleichungen (1) und (2) folgt

$$\frac{r\,d\gamma_1}{3\,d\,r} = -\frac{\Gamma}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

$$d\gamma_1 = -\frac{3\,\Gamma}{2\,r}\left(\frac{r}{R}\right)^n d\,r = -\frac{3\,\Gamma}{2}\cdot\frac{r^{n-1}}{R^n}\cdot d\,r.$$

Integrirt:

(3) $$\gamma_1 = -\frac{3\,\Gamma}{2\,n}\left(\frac{r}{R}\right)^n + C.$$

An der Oberfläche, wo $r = 1$ und $\gamma_1 = \Gamma$, wird hiernach

$$\Gamma = -\frac{3\,\Gamma}{2\,n\,R^n} + C.$$

(4) $$C = \Gamma + \frac{3\,\Gamma}{2\,n} = \Gamma\frac{(2\,n+3)}{2\,n},$$

wenn $R = 1$. Am Mittelpunkte, wo $\gamma_1 = \Gamma_\infty$ und $r = 0$, wird

(5) $$\Gamma_\infty = C = \Gamma\frac{(2\,n+3)}{2\,n}$$

$$2\,n\,\Gamma_\infty = 2\,n\,\Gamma + 3\,\Gamma.$$

(6) $$n = \frac{3\,\Gamma}{2\,(\Gamma_\infty - \Gamma)}.$$

Setzt man noch $\Gamma_\infty = \alpha\,\Gamma$, so wird

(6b) $$n = \frac{3\,\Gamma}{2\,\Gamma(\alpha - 1)} = \frac{3}{2\,(\alpha - 1)}$$

und

(4b) $$\alpha = \frac{2\,n+3}{2\,n}.$$

Durch Einführen des Werthes für die Constante C nach (4) in Gleichung (3) erfolgt

(7) $$\gamma_1 = \Gamma\frac{(2\,n+3)}{2\,n} - \Gamma\frac{3}{2\,n}\left(\frac{r}{R}\right)^n = \Gamma\left(\frac{(2\,n+3)\,R^n - 3\,r^n}{2\,n\,R^n}\right)$$

und durch Substitution von

$$\gamma_0 = \gamma_1 - \frac{\Gamma}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

nach Gleichung (2b) in Gleichung (7):

(8) $$\left\{\begin{aligned} \gamma_0 &= \Gamma\left(\frac{(2\,n+3)\,R^n - 3\,r^n}{2\,n\,R^n}\right) - \frac{\Gamma}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^n \\ = \gamma_0 &= \Gamma\left(\frac{(2\,n+3)\,R^n - (n+3)\,r^n}{2\,n\,R^n}\right). \end{aligned}\right.$$

Für n kann man in Gleichungen (7) und (8) auch $3\Gamma/2(\Gamma_\infty - \Gamma)$ oder $3/2(\alpha - 1)$ einführen, wonach vorgehende Gleichungen lauten

$$(7b,c)\begin{cases}\gamma_1 = \Gamma_\infty\left(\dfrac{R^{\frac{3\Gamma}{2(\Gamma_\infty - \Gamma)}} - r^{\frac{3\Gamma}{2(\Gamma_\infty - \Gamma)}}}{R^{\frac{3\Gamma}{2(\Gamma_\infty - \Gamma)}}}\right) + \Gamma\left(\dfrac{r}{R}\right)^{\frac{3\Gamma}{2(\Gamma_\infty - \Gamma)}} \quad \text{oder} \\ \gamma_1 = \Gamma\left(\dfrac{\alpha R^{\frac{3}{2(\alpha-1)}} - (\alpha - 1) r^{\frac{3}{2(\alpha-1)}}}{R^{\frac{3}{2(\alpha-1)}}}\right),\end{cases}$$

resp.:

$$(8b)\qquad \gamma_0 = \Gamma\left(\frac{2\alpha R^{\frac{3}{2(\alpha-1)}} - (2\alpha - 1) r^{\frac{3}{2(\alpha-1)}}}{2 R^{\frac{3}{2(\alpha-1)}}}\right).$$

Aus jedem der vorstehenden Ausdrücke für γ_1 findet sich der entsprechende für γ (mittlere Dichte der äusseren Hülle) durch Einsetzen desselben in die Gleichung

$$(9)\qquad \Gamma R^3 = \gamma_1 r^3 + \gamma (R^3 - r^3),$$

z. B. bei Benutzung von Gleichung (7):

$$\Gamma R^3 = \Gamma\left(\frac{(2n+3)R^n - 3r^n}{2nR^n}\right) r^3 + \gamma(R^3 - r^3);$$

woraus

$$\gamma = \Gamma\left(\frac{R^3 - \frac{2n+3}{2n} r^3 + \frac{3}{2n} \cdot \frac{r^{n+3}}{R^n}}{R^3 - r^3}\right).$$

$R = 1$ gesetzt:

$$(10)\qquad \gamma = \Gamma\left(\frac{2n - (2n+3)r^3 + 3r^{n+3}}{2n(1 - r^3)}\right)$$

Setzt man auch in Gleichung (7) $R = 1$, so wird

$$\gamma_1 = \Gamma\left(\frac{(2n+3) - 3r^n}{2n}\right);$$

und durch Combination mit Gleichung (10) folgt hieraus:

$$\gamma_1 - \gamma = \Gamma\left(\frac{(2n+3) - 3r^n}{2n}\right) - \Gamma\left(\frac{2n - (2n+3)r^3 + 3r^{n+3}}{2n(1 - r^3)}\right)$$

$$(11)\qquad \gamma_1 - \gamma = \Gamma \cdot {}^3/_2 \frac{(1 - r^n)}{n(1 - r^3)}.$$

Aus Gleichungen (11) und (2b) erhalten wir noch:

$$(12) \qquad \frac{\gamma^1 - \gamma}{\gamma^1 - \gamma_0} = \frac{3(1 - r^n)}{n(r^n - r^{n+3})}$$

Ursprünglich hatte ich, anstatt mit einem beliebigen Exponenten n, mit dem bestimmten Werthe $n = 3$ operirt und war etwas umständlich zu den in der Einleitung aufgestellten Ausdrücken gekommen, welche aus den vorstehenden allgemeinen ohne weiteres folgen, wenn man in Gleichungen (7), (8), (10), $n = 3$ setzt. Was mich veranlasste $n = 3$ zu wählen, soll weiter unten erörtert werden; hier sei darauf hingewiesen, dass der für γ^0 entwickelte Ausdruck mit dem auf ganz anderem Wege von LIPSCHITZ hergeleiteten übereinstimmt. Auf LIPSCHITZ' Arbeit, in CRELLE's Journal, 1862, p. 1, machte mich Hr. Dr. RICHARZ aufmerksam, als ich die eingangs stehenden Gleichungen auf meine Weise gefunden hatte. In den hier benutzten Symbolen lautet LIPSCHITZ's Ausdruck:

$$\gamma_0 = \Gamma_0 \left(\frac{(n+3)\frac{\Gamma}{\Gamma_0} - 3}{n} - \frac{(n+3)\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} - 1\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n}{n} \right).$$

Setzt man darin $\Gamma_0 = \Gamma / 2$, so wird:

$$\gamma_0 = \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{(n+3)\,2 - 3 - (n+3)\left(\frac{r}{R}\right)^n}{n} \right)$$

$$= \Gamma \left(\frac{(2n+3)R^n - (n+3)r^n}{2nR^n} \right);$$

d. i. obenstehende Gleichung (8).

Bei der Wahl eines bestimmten numerischen Werthes für n können nur positive Zahlen in Betracht kommen; denn negative zwischen 0 und $-1^1/_2$ ergeben unfassbare negative Dichtigkeiten, und negative zwischen $-1^1/_2$ und $-\infty$ ergeben positive Dichtigkeiten, welche gegen die Voraussetzung nach innen abnehmen. A priori möglich sind also alle ganzen oder gebrochenen Exponenten zwischen $+0$ und $+\infty$. Den Zusammenhang derselben und der Coefficienten α, welche ausdrücken wie viel grösser als die mittlere Dichtigkeit die jemalige Dichtigkeit am Mittelpunkt wird, lässt folgendes Täfelchen übersehen.[1])

1) Der Coefficient α, welcher einem gewissen positiven Exponenten n zukommt, ergänzt sich mit dem, demselben negativen Exponenten zukommenden, α stets zu 2.

$n = \pm$	0	$^1/_4$	$^1/_2$	1	$1^1/_2$	2	$2^1/_2$	3	$3^1/_2$	4	$4^1/_2$	5	$5^1/_2$	6	12	24	50	100	∞
$+n$ α wenn:	∞	7	4	$2^1/_2$	2	$1^3/_4$	$1^3/_5$	$1^1/_2$	$1^3/_7$	$1^3/_8$	$1^1/_3$	$1^3/_{10}$	$1^3/_{11}$	$1^1/_4$	$1^1/_8$	$1^1/_{16}$	1,03	1,015	1 +
	−	−	−	−		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$-n$	∞	5	2	$^1/_2$	0	$^1/_4$	$^2/_5$	$^1/_2$	$^4/_7$	$^5/_8$	$^2/_3$	$^7/_{10}$	$^8/_{11}$	$^3/_4$	$^7/_8$	$^{15}/_{16}$	0,97	0,985	1 −

Aus physikalischen Gründen ist die Reihe des Exponenten, welche wirklich in Frage kommen, weiter beschränkt. T. J. Stieltjes zeigte (Verh. en Medel. d. K. Ak. van Wetenschapen, 1885 (3) 1, p. 272; hier nach Geographisches Jahrbuch, 1887 p. 212), dass unter der Voraussetzung von $\Gamma = 5{,}56$; $\Gamma_0 = 2{,}6$, und dem Verhältniss der beiden Hauptträgheitsmomente der Erde $C : A = 1{,}00324256$, die Dichten am Erdmittelpunkt und in halber Entfernung von der Erdoberfläche innerhalb der Grenzen $7 < \Gamma\infty < 11$ und $7{,}00 < \gamma_0$ (für $R/2$) $< 7{,}84$ liegen müssen, oder äussersten Falles: innerhalb der Grenzen $7{,}6 < \Gamma\infty < 12{,}2$, und $7{,}5 < \gamma_0$ (für $R/2$) $< 8{,}3$. Nehmen wir aber auch hier $\Gamma / \Gamma_0 = 2$ an, anstatt (wie Stieltjes) $5{,}56 / 2{,}6 = 2{,}14$, so werden vorstehende Grenzwerthe auf ungefähr $2{,}00 / 2{,}14 = 0{,}935$ reducirt, d. h. auf $6{,}54 < \Gamma\infty < 10{,}28$ und $6{,}54 < \gamma_0$ (für $R/2$) $< 7{,}33$; oder äussersten Falles: $7{,}10 < \Gamma\infty < 11{,}4$ und $7{,}0 < \gamma_0$ (für $R/2$) $< 7{,}76$. Den Grenzwerthen 7,1 und 11,4 für die Centraldichtigkeit kommt zu

$$\alpha \ \frac{7{,}10}{5{,}56} = 1{,}28 \ \ldots\ldots \frac{11{,}4}{5{,}56} = 2{,}05$$

$$n \qquad = 5{,}36 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ 1{,}43$$

und mit Hülfe von Gleichung (8) findet man, dass dieselben Grenzexponenten auch den Dichtigkeitsgrenzen in halber Entfernung von Oberfläche zu Mittelpunkt genügen.

Die meisten für den Erdmittelpunkt berechneten Dichtigkeiten[1]) gruppiren sich um den Mittelwerth $10{,}2 \pm 0{,}7$ und

1) Von Plana's Zahl 16,73 wird abgesehen, weil sie die offenbar zu niedrige Oberflächendichtigkeit 1,877 involvirt. v. Waltershausen's Formel $\gamma_0 = \Gamma\infty - (\Gamma\infty - \Gamma_0)\, r^2$, mit $\Gamma\infty = 9{,}59$, $\Gamma_0 = 2{,}66$ ist dagegen berücksichtigt. Dieselbe ist gleichfalls nur ein specieller Fall unserer Gleichung (8), welche für den Exponenten 2 lautet:

$$\gamma_0 = \Gamma\left(\frac{7\,R^2 - 5\,r^2}{4\,R^2}\right).$$

Dasselbe wird aus v. Waltershausen's Gleichung, wenn in derselben $\Gamma\infty = \alpha\,\Gamma$ und $\Gamma_0 = (\Gamma / 2)$; ferner $\alpha = (2\,n + 3) / 2\,n$ (Gleichung (4)); endlich $n = 2$ eingesetzt wird.

setzen als mittlere Dichtigkeit der ganzen Erde 5,54 ± 0,05 voraus. Wären sie nach einer unserer Gleichungen, z. B. (5):

$$\Gamma_\infty = \Gamma\left(\frac{2n+3}{2n}\right)$$

berechnet, so hätte der Exponent n äussersten Falles zwischen 1,52 und 2,15 gewählt werden müssen, wodurch obige Grenze noch weiter eingeschnürt ist. Diese enge Begrenzung beruht aber auch darauf, dass den meisten dieser Berechnungen dieselbe Hypothese der Dichtigkeitszunahme mit zunehmendem Drucke zu Grunde liegt, und sie erweitert sich, sobald man von dieser Hypothese absieht. Mir scheint dieselbe unzulässig, theils weil sie zu der sehr unwahrscheinlichen Consequenz führt, dass die Zusammendrückbarkeit der Materie unbegrenzt ist; theils weil die Erde, soweit der Beobachtung zugänglich, aus an und für sich ungleich schweren Stoffen besteht, welche sich möglichst nach ihrem specifischen Gewicht gruppiren werden, mit oder ohne Verdichtung durch Druck. Diese Ueberlegung trieb dazu, nach einem Dichtigkeitsgesetz zu suchen, welches von der Druck- und Dichtigkeitshypothese Laplace's wenigstens nicht ausgeht.

Ich habe zunächst mit dem Exponenten $n = 3$ operirt (vgl. Einleitung und Gleichung 2b), weil derselbe in das Gefüge der, von jeder Hypothese unabhängigen, Fundamentalgleichung (9) am besten passt; zu einigen überraschend einfachen Beziehungen führt, und Dichtigkeitswerthe für das Erdinnere ergibt, welche geologisch sehr gerechtfertigt erscheinen.

Das Dichtigkeitsgesetz mit dem Exponenten $n = 3$ ergibt als mittlere Dichtigkeit die Differenz zwischen centraler und Oberflächendichtigkeit; oder das arithmetische Mittel zwischen Oberflächendichtigkeit und Centraldichtigkeit. Denn führt man in Gleichung (8) $n = 3$ und $r = 0$ ein, so wird

$$\gamma_0 = \Gamma_\infty = \Gamma\left(\frac{(2.3+3)R^3 - (3+3).0}{2.3.R^3}\right) = \Gamma\frac{9R^3}{6R^3} = 1^1/_2\,\Gamma;$$

und da nach Voraussetzung $^1/_2\,\Gamma \doteq \Gamma_0$, so wird $\Gamma_\infty = \Gamma + \Gamma_0$, oder $\Gamma = \Gamma_\infty - \Gamma_0$. Ferner

$$\Gamma_\infty + \Gamma_0 = \Gamma + 2\Gamma_0 = 2\Gamma; \quad \frac{\Gamma_\infty + \Gamma_0}{2} = \Gamma.$$

Die Differenz zwischen der mittleren Dichtigkeit γ_1 eines Kernes und der mittleren Dichtigkeit γ seiner Schale ist constant, nämlich $= \Gamma / 2 = \Gamma_0$. Denn setzt man in Gleichung (11) $n = 3$, so wird

$$\gamma_1 - \gamma = \Gamma \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{1 - r^3}{3(1 - r^3)} \right) = \frac{\Gamma}{2}.$$

Das Verhältniss zwischen der Differenz der mittleren Dichtigkeit des Kernes und seiner Schale einerseits, der Differenz der mittleren Dichtigkeit des Kernes und seiner Oberflächendichtigkeit andererseits, nämlich (nach Gleichung 12)

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma_0} = \frac{3(1 - r^n)}{n(r^n - r^{n+3})},$$

ist für $n = 3$

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma_0} = \frac{1}{r^3};$$

oder da hier $R^3 = 1$ vorausgesetzt wurde,

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma_0} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Dieser Ausdruck wird aber jenem für $\gamma_1 - \gamma_0$, nach Gleichung (2a) analog, wenn man in ihm $\gamma_1 - \gamma_0$ durch $\Gamma - \Gamma_0$ ersetzt; deshalb war es angezeigt, zunächst den Exponenten $n = 3$ in (2a) zu wählen.

Für $\Gamma = 5{,}5832$ [1]) gibt die Formel

$$\gamma_0 = \Gamma \left(\frac{3R^3 - 2r^3}{2R^3} \right)$$

Dichtigkeiten, welche nahe der Oberfläche sehr rasch zunehmen, nahe dem Mittelpunkt aber sehr langsam:

$\frac{r}{R} =$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$\gamma_0 =$	2,792	4,305	5,517	6,460	7,169	7,677	8,018	8,224	8,330	8,369	8,375.

Die hieran sich knüpfenden geologischen Schlussfolgerungen übergehe ich aber, weil Zweckmässigkeitsgründe allein das cubische Dichtigkeitsgesetz nicht halten können, so lange seine physikalische Nothwendigkeit nicht erwiesen ist.

1) Diesen Werth Reich's benutze ich hier und im Folgenden, weil er den von Harkness (5,576 ± 0,016) und Helmert (5,6 ± 0,05) berechneten Mittelwerthen der besten vorhandenen Dichtigkeitsbestimmungen am nächsten kommt.

Führt man in

$$\gamma_0 = \Gamma\left(\frac{(2\,n+3)\,R^n - (n+3)\,r^n}{2\,n\,R^n}\right)$$

beliebige, zwischen 1 und 3 liegende Werthe für n ein, so schneiden sich die sämmtlichen denselben entsprechenden Curven zwischen $r/R = 0{,}6 \ldots. 0{,}65$, oder sie liegen einander in dieser Kugelschale so nahe, dass sie, innerhalb derselben, für gleiche Werthe von r Dichtigkeiten ausdrücken, welche nur wenige Hundertel von einander abweichen. Da das allgemeine Dichtigkeitsgesetz richtig construirt ist, die einzusetzenden n die angegebenen Grenzen aber nicht überschreiten sollen, so sind die Dichtigkeiten zwischen 0,6 und 0,65 r gegeben, sobald die mittlere Dichtigkeit der ganzen Erde bekannt ist, und zwar mit nicht grösserer Unsicherheit als irgend ein beobachteter Werth für Γ. Wir behandeln deshalb denjenigen Werth von γ_0, welchem alle diese Curven für ein gewisses r (zwischen 0,6 und 0,65) am nächsten kommen, wie eine empirisch ermittelte Constante, und gewinnen so ein neues Element für Berechnung der Dichtigkeit am Erdmittelpunkt.

Die Dichtigkeitscurve für

$n = 3$	schneidet sich mit jener für	$n = 2^1/_2$	bei $\frac{r}{R}$	$= 0{,}6500$
$n = 3$	„ „ „ „ „	$n = 2$	„ „	$= 0{,}6403$
$n = 3$	„ „ „ „ „	$n = 1^1/_2$	„ „	$= 0{,}6300$
$n = 3$	„ „ „ „ „	$n = 1$	„ „	$= 0{,}6181$
$n = 2^1/_2$	„ „ „ „ „	$n = 2$	„ „	$= 0{,}6321$
$n = 2^1/_2$	„ „ „ „ „	$n = 1^1/_2$	„ „	$= 0{,}6215$
$n = 2^1/_2$	„ „ „ „ „	$n = 1$	„ „	$= 0{,}6095$
$n = 2$	„ „ „ „ „	$n = 1^1/_2$	„ „	$= 0{,}6118$
$n = 2$	„ „ „ „ „	$n = 1$	„ „	$= 0{,}6000$
$n = 1^1/_2$	„ „ „ „ „	$n = 1$	„ „	$= 0{,}6088$
	Mittlere Lage des Intersectionspunktes		$\frac{r}{R}$	$= 0{,}6222$

Die Dichtigkeiten γ_0, welche in dieser Tiefe nach den verschiedenen Curven statthaben, wenn $\Gamma = 5{,}583$, sind für

$n = 3$	$\gamma_0 = 7{,}0297$.	Differenz mit dem Mittelwerth	$-\,0{,}0147$
$n = 2^1/_2$	$\gamma_0 = 7{,}0575$	„ „ „ „	$+\,0{,}0131$
$n = 2$	$\gamma_0 = 7{,}0686$	„ „ „ „	$+\,0{,}0242$
$n = 1^1/_2$	$\gamma_0 = 7{,}0558$	„ „ „ „	$+\,0{,}0114$
$n = 1$	$\gamma_0 = 7{,}0100$	„ „ „ „	$-\,0{,}0344$
Mittelwerth	$\gamma_0 = 7{,}0444 \pm 0{,}0106$		$\pm\,0{,}0249$

Also ist der Mittelwerth γ_0 mit kleinerem Fehler behaftet als die Mittelzahlen für Γ nach Harkness ($\pm\,0{,}016$) und

Helmert ($\pm$ 0,05), soweit von dem Fehler des in Rechnung gebrachten Γ abgesehen wird.

Die Centraldichtigkeit Γ_∞ lässt sich nun empirisch und näherungsweise so bestimmen:

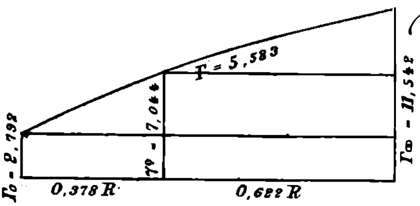
$$\Gamma = 5{,}5832 = {}^2/_3\,(7{,}0444 - 2{,}7916)(1 - 0{,}6222) + (7{,}0444 - 2{,}7196)\,.\,0{,}6222 + {}^2/_3\,(\Gamma_\infty - 7{,}0444)\,.\,0{,}6222$$

$$5{,}5832 = 0{,}4148\,\Gamma_\infty + 0{,}7954$$

$$\Gamma_\infty = \mathbf{11{,}5424.}$$

Die Centraldichtigkeit ist also

$$\frac{11{,}5424}{5{,}5832} = \mathbf{2{,}0673}$$



mal so gross als die mittlere Dichtigkeit Γ, und diesem Coefficienten α entspricht nach Gleichung (6) der Exponent

$$n = \frac{3}{2(2{,}0673 - 1)} = \mathbf{1{,}4054}$$

oder rund $^7/_5$.

Der verlockende Exponent 3 ist also nicht stichhaltig. Anstatt des hier roh geschätzten Werthes 1,4054 ergibt sich, ohne Zuziehung einer physikalischen Hypothese, ein richtigerer Exponent durch Umkehrung der Gleichung (8):

$$\gamma_0 = \Gamma\left(\frac{(2\,n + 3)\,R^n - (n + 3)\,r^n}{2\,n\,R^n}\right),$$

wenn darin γ_0, Γ, r als bekannt angenommen, und $R = 1$ gesetzt wird; nämlich:

$$\text{(14)} \qquad \frac{2\,(\gamma_0 - \Gamma)}{\Gamma} = \frac{3 - (3 + n)\,r^n}{n}.$$

Für $r = 0{,}6222$ haben wir $\gamma_0 = 7{,}0444$ gefunden; für $\Gamma = 5{,}5832$ gewählt; und als ersten Näherungswerth für n benutzen wir 1,4054. Dieser zeigt sich zu gross, 1,3 zu klein; dagegen ist bis auf die vierte Decimale (excl.) zutreffend $\boldsymbol{n} = \mathbf{1{,}3238.}$ Probe:

$$2\,\frac{(7{,}0444 - 5{,}5832)}{5{,}5832} = \frac{3 - (3 + 1{,}3238)\;.\,0{,}6222^{1{,}3238}}{1{,}3238}$$

$$0{,}5234 = 0{,}52334.$$

Diesem n kommt nach Gleichung (4) der Werth

$$\alpha = \frac{2n+3}{2n} = \frac{2,6476+3}{2,6476} = \mathbf{2,1331}$$

zu; daher Centraldichtigkeit:

$$\Gamma\infty = 5,5832 \,.\, 2,1331 = \mathbf{11,9095}.$$

Das Dichtigkeitsgesetz (8) mit dem Exponenten $n = 1,3238$ lautet:

(15)

$$\gamma_0 = \Gamma\left(\frac{(2,6476+3)-(1,3238+3)\,r^{1,3238}}{2,6476}\right)$$
$$= \Gamma(2,1331 - 1,6331 \,.\, r^{1,3238}),$$

oder, wenn man sich die Abrundung $1,3238 = {}^4/_3$ erlauben dürfte:

$$\gamma_0 = \Gamma\left(\frac{({}^8/_3+3)-({}^4/_3+3)\,.\,r^{4/3}}{{}^8/_3}\right) = \Gamma\left(\frac{17-13\,.\,r^{4/3}}{8}\right)$$
$$= \Gamma(2,125 - 1,625 \,.\, r^{4/3}).$$

Die einzige unbewiesene Vo~~r~~aussetzung ist hierbei, dass Oberflächendichtigkeit gleich halber mittlerer Dichtigkeit; doch ist zu bemerken, dass ein Werth γ_0, welchem viele Werthe von n nahezu entsprechen können, zur Ermittelung des Exponenten n nach dieser Methode weniger geeignet ist; ferner, dass der Mittelzahl $\gamma_0 = 7,0444$ noch ein zweiter Werth für n zukommt.