

Aus dem Vortragssaale des Club.*)

21. April. Hr. Prof. Dr. OSKAR SIMONY:
Ueber die Frage des vierdimensionalen Raumes vom mathematischen Standpunkte. — Um zunächst den *Begriff des vierdimensionalen Raumes* in möglichst einfacher Weise zu entwickeln, discutirte der Vortragende die bekannte empirische Formel:

$$(I) \dots \lambda = \frac{Pa}{FE}$$

nach der sich die jeweilige Verlängerung λ berechnen lässt, welche ein elastischer cylindrischer Stab von der Länge a , dem Querschnitte F und dem Elasticitätsmodulus E durch eine in der Richtung seiner Axe wirksame Zugkraft P erfährt. Zieht man *erstlich* nur jene Verlängerungen in Betracht, welche *ein und derselbe* Stab unter der Wirkung *verschiedener* Zugkräfte erleidet, so erscheint λ als eine Function einer *einzig*en veränderlichen Grösse P , und die geometrische Interpretation der Gleichung (I) bedingt die Einführung einer Mannigfaltigkeit, in welcher die Lage jedes Punktes in Bezug auf *zwei derselben* Mannigfaltigkeit angehörige, einander rechtwinklig durchschneidende gerade Linien durch *zwei* Coordinaten: x, y vollständig bestimmt wird. Eine solche Mannigfaltigkeit heisst *zweidimensional* und kann durch jede beliebige *Ebene* vorgestellt werden. Berücksichtigt man *zweitens* alle Verlängerungen, welche elastische Stäbe von *gleichem* Materiale und *gleichen* Querschnitten, aber *verschiedenen* Längen unter der Wirkung *verschiedener* Zugkräfte erfahren, so wird λ zu einer Function *zweier* veränderlicher Grössen: P, a , und die geometrische Interpretation von (I) erfordert die Einführung einer Mannigfaltigkeit, in welcher die Lage jedes Punktes in Bezug auf *drei derselben* Mannigfaltigkeit angehörige, einander rechtwinklig durchschneidende gerade Linien durch *drei* Coordinaten: x, y, z vollständig bestimmt wird. Jede solche Mannigfaltigkeit wird als *dreifach ausgedehnte* Mannigfaltigkeit oder auch als *dreidimensionaler* Raum bezeichnet. Denkt man sich *drillens* elastische Stäbe aus gleichem Materiale, aber von *verschiedenen* Längen und *verschiedenen* Querschnitten der Wirkung *verschiedener* Zugkräfte unterworfen, so erscheint λ als eine Function von *drei* veränderlichen Grössen: P, a, F , und die geometrische Interpretation von (I) bedingt die Einführung einer Mannigfaltigkeit,

in welcher die Lage jedes Punktes in Bezug auf *vier derselben* Mannigfaltigkeit angehörige, einander rechtwinklig durchschneidende gerade Linien durch *vier* Coordinaten: x, y, z, u vollständig bestimmt wird. Man nennt eine solche Mannigfaltigkeit eine *vierfach ausgedehnte* Mannigfaltigkeit oder auch einen *vierdimensionalen Raum*, wobei das Wort ‚Raum‘ natürlich nicht mehr in seinem *empirischen, speciellen* Sinne zu nehmen ist. Hienach repräsentirt der Begriff des vierdimensionalen Raumes eine einfache Specialisirung des Gattungsbegriffes einer *n-fach* ausgedehnten Mannigfaltigkeit, d. h. einer solchen, in welcher die Lage jedes Punktes in Bezug auf *n derselben* Mannigfaltigkeit angehörige, einander rechtwinklig durchschneidende gerade Linien durch *n* Coordinaten vollständig bestimmt wird.**) Auf Grundlage der hier angedeuteten Auffassungsweise *höherer Mannigfaltigkeiten* lassen sich nunmehr für verschiedene geometrische Gebilde gewisse Formveränderungen *analytisch* untersuchen, welche durch eine Uebertragung dieser Gebilde aus dem *empirischen* Raume beispielsweise in eine *vierfach ausgedehnte* Mannigfaltigkeit ermöglicht würden,***) und so neue, charakteristische Eigenschaften der letzteren *vorläufig analytisch* feststellen. Um dies an zwei besonders interessanten Beispielen zu erläutern, demonstrirte der Vortragende zunächst die Erscheinungen, welche ringförmig geschlossene, *verdrehte* Bänder bei in sich selbst zurückkehrenden Längsschnitten zeigen. Gemäss den beiden, diese Erscheinungen beherrschenden *allgemeinen* Gesetzen †)

*) Wer sich über die *mathematische* Behandlung derartiger Grössen näher informieren will, lese in erster Linie den classischen Vortrag Riemann's: ‚Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen‘ (Riemann's gesammelte mathematische Werke, p. 254–268) und die Abhandlung Prof. Dr. Hoppe's: ‚Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen‘ (Archiv der Mathematik und Physik, 64. Bd., p. 189–213).

**) S. hier z. B. die lehrreiche Abhandlung von Prof. H. Durège über die Hoppe'sche Knotencurve (Sitzungsber. d. Wiener Akademie, math.-naturw. Classe, 82. Bd., 1. Heft, p. 135–146) und die Bemerkungen Prof. R. Hoppe's, betreffend die Auflösung eines Knotens in vierter Dimension (Archiv für Mathematik und Physik, 65. Bd., p. 423–426), welche sich teilweise auf dessen frühere Arbeit: ‚Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen‘ (Archiv für Mathematik und Physik, 65. Bd., p. 373–384) stützen.

***) Eine *vollkommen elementare* aber dessen ungeachtet *mathematisch strenge* Entwicklung des Begriffes: *Vierdimensionaler Raum* findet sich in der soeben erschienenen dritten Auflage der Broschüre Simony's: ‚Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen und verwandter merkwürdiger Probleme‘. (Wien, Verlag von Gerold & Comp. 1881.)

†) Eine *ausführliche* Ableitung derselben ist in der zu vor citirten Broschüre Simony's enthalten.

*) Diese Auszüge aus den Vorträgen sind in der Regel von den Herren Vortragenden selbst verfasst.

kann in jedem derartigen Bande *ohne* Ausführung eines *Querschnittes* ein Knoten erzeugt werden, falls die Gesamtverdrehung des Bandes $3 \times 180^\circ$ oder $5 \times 180^\circ$, $7 \times 180^\circ$ etc. beträgt, während dies bei einer Gesamtverdrehung von $2 \times 180^\circ$, $4 \times 180^\circ$, $6 \times 180^\circ$ etc. in unserem empirischen Raume unmöglich ist. Würde jedoch das betreffende Band aus dem letzteren in eine *vierdimensionale* Mannigfaltigkeit übertragen, so liesse sich, wie eine analytische Untersuchung lehrt, *auch bei einer Gesamtdrehung um ein gerades Vielfaches von 180° ein Knoten in dem Bande erzeugen*, wodurch ein neuer, wesentlicher Unterschied einer solchen Mannigfaltigkeit vor dem empirischen Raume markirt erscheint. Ebenso könnte bereits in einer *vierdimensionalen* Mannigfaltigkeit ein elastischer Ring *ohne Aufhebung des Zusammenhanges* seiner Theile mit einem Knoten versehen werden, während dies, wie der Vortragende an drei Kautschukringen mit kreisförmigen Querschnitten experimentell nachwies, im empirischen Raume *ohne Öffnung* des Ringes nur mittelst gewisser, längs dessen Mittellinie in sich selbst zurücklaufender Schnitte, und zwar am einfachsten *in der Weise* möglich wird, dass man hiebei die Ebene des Schnittes *während eines einzigen Umlaufes* entweder um $3 \times 180^\circ$ oder um $5 \times 180^\circ$, $7 \times 180^\circ$ etc. dreht. Anknüpfend an einen bekannten physikalischen Versuch, durch welchen die Existenz von für unser Auge unsichtbaren ultravioletten Lichtstrahlen dargethan wird,*) hob der Vortragende schliesslich noch hervor, dass aus der *Denkbarkeit* höherer Mannigfaltigkeiten natürlich noch nicht deren *Wirklichkeit* erschliessbar sei, sondern für die letztere erst dann ein *mathematischer* Beweis *versucht* werden könnte, wenn ein mathematisch charakterisierbares Gebilde *factisch* solche Formveränderungen erlitt, deren analytische Verfolgung ohne Einführung *von mehr als drei* veränderlichen Coordinaten unmöglich wäre, z. B. also, wenn in einem Kautschukringe durch die Wirkung irgend welcher Kräfte ohne Aenderung seines Querschnittes und ohne Öffnung desselben ein Knoten erzeugt würde.

25. April. Hr. Prof. Dr. WILHELM NEUMANN: *Die Palästinafahrten der Habsburgerfürsten an der Wende des XIV. und XV. Jahrhunderts.* — Die Palästinafahrten im XIV. Jahrhundert waren reine Andachtsfahrten gewor-

den, weil nach dem Falle von Accon im Jahre 1291 das heilige Land den Christen unwiederbringlich verloren war und das Abendland weder Lust noch Zeit hatte, an einen Kreuzzug zu denken, wie sehr auch die Päpste an dem Zustandekommen eines Kreuzzuges arbeiteten und sogar das Recht für sich reservirten, den Handelsstaaten die Erlaubniss zum Handel nach Aegypten zu geben oder vorzuenthalten; ja selbst der einzelne Pilger bedurfte, um den heiligen Boden Palästinas zu betreten, der päpstlichen Erlaubniss. Alle Anstrengungen der Päpste, der Könige von Cypern und der Kaiser von Byzanz bewogen die Fürsten Europas nicht zum Zuge gegen Aegypten, hatte man ja doch an den Preussenkämpfen und später an den Türkenkriegen genug kreuzzugsähnliche Kriege, abgesehen davon, dass man in Europa selbst Arbeit in Hülle und Fülle hatte und keine überschüssigen Kräfte für die Wiederoberung des heiligen Landes besass. Es ist natürlich, dass in dieser Zeit die Palästinafahrten der drei Habsburgerfürsten Albrecht IV., Ernst des Eisernen und Friedrichs des Jüngeren von Steiermark ebenfalls nur reine Betfahrten wurden und sehr bescheidene obendrein, da auf die Pilger ein bedeutend grösserer Druck ausgeübt wurde als je vor den Kreuzzügen und die Glieder hoher Familien in sehr bescheidenem Aufzuge die Reise unternehmen mussten, da sie sonst Gefahr liefen, von den Sarazenen entweder fürchterlich gebrandschatzt oder gefangen, ja selbst getödtet zu werden. Dass die drei Habsburgerfürsten sich zu Rittern des heiligen Grabes schlagen liessen, hätte zu anderer Zeit Folgen für einen Kreuzzug haben können, weil die Ritter sich verpflichteten, an einem Kreuzzuge für das heilige Grab theilzunehmen; damals war das Gelübde gegenstandslos, ein rein religiöser Act. Die Palästinafahrt des Herzogs Albrecht IV. fällt in die Zeit von Ende August bis Anfangs December 1398. Herzog Ernst der Eiserne unternahm diese Reise von Ende Juli bis Ende November 1414, und Herzog Friedrichs Reise währte von der ersten Hälfte August bis in die zweite Hälfte des December 1436. Albrecht IV. hatte wohl Anfangs geträumt, seinem Vater wenigstens in der selbstständigen Herrschaft über das eigentliche Oesterreich nachfolgen zu können, unabhängig von dem Senior des Hauses, dem Herzoge Wilhelm; aber durch einen 1395 zwischen Albrecht III. und Wilhelm geschlossenen Vertrag, der einer Bevormundung Albrecht IV. sehr ähnlich sah, wurde die Schwächung der österreichischen Hausmacht verhindert. Albrecht, zu der selbstständigen Regierung sei-

*) S. hier z. B. Zeuner's mechanische Wärmetheorie, 2. Auflage, p. 3, 4.