
Ein Modul zur vollautomatischen Darstellung des Erdschwerefeldes

H. Sünkel

TU Graz

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt in Kürze ein intelligentes Computer-Programmsystem, welches für Zwecke der automatischen Bestimmung und Darstellung von Schwerefeldflächen (wie Geoid, Schwereanomalienfeld, Lotabweichungsfeld in vorgegebenem Niveau, etc.) entwickelt wurde. Das System verarbeitet Erdschwerefeldinformation in Form eines (im allgemeinen mit Meßfehlern behafteten) heterogenen Satzes linearer Funktionale des anomalen Gravitationspotentials und liefert Schwerefeldflächen in Form von Profilen, Isoliniendarstellungen oder 3-dimensionalen Darstellungen.

Das der Verarbeitung zugrunde liegende mathematische Modell ist Kollokation nach kleinsten Quadraten. Prädiziert wird ein regelmäßiges Rechteckgitter von Funktionswerten der entsprechenden Fläche. Die Darstellung der Flächen erfolgt glatt durch Verwendung bikubischer Spline-Funktionen, welche die Interpolationsaufgabe im Rechteckgitter übernehmen.

GSPP besitzt als integrierten Bestandteil eine Kontrolleinheit, welche alle erforderlichen Entscheidungsprozesse (z.B. die Wahl und/oder Überprüfung von ca. 150 Eingabeparametern, etc.) übernimmt, sodaß die Denkleistung des Anwenders auf ein absolutes Minimum reduziert werden kann.

Das System wurde zwar für geodätische Zwecke entwickelt, aber wegen seiner Vielseitigkeit und Flexibilität ist eine Anwendung auf anderen Gebieten nicht nur denkbar, sondern bietet sich geradezu an.

1. EINFÜHRUNG

Die Entwicklung neuer Meßtechniken besonders während des letzten Jahrzehnts, welche in kurzen Zeiträumen halbautomatisch bis automatisch eine sehr große Menge an Schwerefelddaten liefern, haben die physikalische Geodäsie vor neue Probleme gestellt :

- a) der optimalen Kombination aller verfügbaren Daten und
- b) der globalen bis lokalen Darstellung des Erdschwerefeldes.

Es ist ein Irrglaube anzunehmen, daß diese beiden Probleme bereits zur vollsten Zufriedenheit gelöst sind. Zwar erlaubt das von Krarup (1969) und Moritz (1970) entwickelte Modell der Kollokation nach kleinsten Quadraten die Kombination aller linearer Funktionale des Schwerepotentials und die optimale Vorhersage von (nicht gemessenen) Schwerefeldgrößen; die praktische Realisierung muß allerdings von der mathematischen Klarheit notgedrungen einige Abstriche machen : die uns zur Zeit zur Verfügung stehenden Schwerefelddaten haben die Millionengrenze längst überschritten. Eine optimale Kombination all dieser Daten würde theoretisch eine Inversion einer Matrix mit Dimension = Anzahl der Daten erfordern -- ein illusorisches Unterfangen. In der Praxis heißt dies : zur Vorhersage einer Schwerefeldgröße werden nur bestimmte Datengruppen herangezogen (z.B. nur "lokale" Daten in der Umgebung des Prädiktionspunktes). Dieser Selektionsprozess folgt zur Zeit noch eher Erfahrungswerten als theoretischen Überlegungen.

Das zweite Problem, die Darstellung des Erdschwerefeldes, gewinnt zunehmend an Bedeutung, zumal die für die nächste Dekade geplanten Schwerefeldsensoren (z.B. Inertialnavigationssysteme, etc.) ein bereits recht verfeinertes Modell des Erdschwerefeldes als Input benötigen. Theoretisch ist auch dieses Problem so gut wie gelöst : Da das anomale Gravitationspotential im Außenraum bezüglich der Erdoberfläche der Laplace'schen Differentialgleichung genügt, diese wiederum räumliche Kugelfunktionen als Lösung besitzt, läßt sich theoretisch jede Schwerefeldgröße durch eine Linearkombination einer unendlichen

Anzahl an Kugelfunktionen darstellen. Mehrere Tatsachen schließen aber diese Möglichkeit aus : erstens stehen dem unendlichen Satz an Unbekannten (Kugelfunktionskoeffizienten) ein endlicher, wenn auch großer, Datensatz gegenüber; eine optimale Lösung dieses "improperly posed problem" mündet wiederum in die Kollokation nach kleinsten Quadraten (Moritz, 1978); zweitens sind Kugelfunktionen wegen ihrer nicht-lokalen Eigenschaften völlig ungeeignet zur Darstellung lokaler Formen; und drittens sind Kugelfunktionsentwicklungen sehr hohen Grades numerisch nicht vertretbar, da die Berechnung Legendre'scher Funktionen extrem zeitaufwendig ist und darüberhinaus nicht unerhebliche Stabilitätsprobleme aufwirft. Im Klartext heißt dies : man wird vermutlich gezwungen sein, zumindest für die Zwecke der lokalen Darstellung des Erdschwerefeldes, sich von streng harmonischen Funktionen zu lösen und sogenannte schwache Lösungen zu finden, welche zwar für das entsprechende Variationsproblem zugelassen sind, aber dennoch nicht harmonisch sind.

GSPP, das geodätische Flächen-Prädiktions- und Plotsystem, bietet in gewisser Weise eine hybride Lösung an ; es prädiziert a) lokal unter Heranziehung eines lokal beschränkten Datensatzes Schwerefeldflächen in Form von Funktionswerten auf einem regelmäßigen Rechteckgitter nach dem Modell der Kollokation nach kleinsten Quadraten, liefert also suboptimale Lösungen, und stellt b) die Schwerefeldflächen glatt durch die nicht-harmonische Interpolationsfunktion des bikubischen Spline dar. Die numerische Darstellung, welche für die weitere Verarbeitung von Bedeutung ist, ist also eine matrizielle; die Interpretation von Ergebnissen aber erfordert mehr : Interpretation und Schlußfolgerungen basieren meist auf graphischen Darstellungen. Um diesen Bedürfnissen Rechnung zu tragen, liefert GSPP 1-, 2- und 3-dimensionale Darstellungen von Erdschwerefeldflächen in Form von Profilen (1-D), Isolinien Darstellungen (2-D) und räumlichen Darstellungen (3-D).

Ein System, welches imstande sein soll, all diese (und noch viele andere hier nicht erwähnte) Probleme in geschlossener Form zu lösen, verfügt natürlich über eine sehr große Anzahl an Frei-

heitsgraden (Parametern), welche vom Anwender kaum noch zu überblicken sind : zumindest 6 Parameter der Kovarianzfunktion, 4 Parameter des normalen Schwerfeldes, etwa 10 Parameter für die Datenorganisation, ca. 10 Prädiktions- und Regressionsparameter, ca. 10 Flächendarstellungsparameter, ca. 30 Profilparameter, ca. 50 Isolinienparameter, ca. 30 3-D-Parameter.

Es bestand daher die - wenn auch hochgesteckte - aber dennoch berechnete Forderung, die Parameterwahl dem System zu überlassen. GSPP erfüllt diese Forderung zur Gänze. Logische menschliche Entscheidungsprozesse wurden im Aufbau und Ablauf analysiert und in FORTRAN übersetzt. Vom Anwender definierte Parameter passieren eine Kontrolleinheit, in welcher nicht definierte Parameter möglichst sinnvoll definiert, und vorgegebene Parameter auf Konsistenz überprüft und bei Bedarf korrigiert werden.

Danach folgt (im allgemeinen) die globale Organisation der vorliegenden Daten nach ihrer räumlichen Lage. An den Prädiktionsprozess schließt der Flächendarstellungsteil. Dann spaltet sich der Weg auf in drei Teile : den Profilteil, welcher die Fläche in Form von Profilen darstellt, den Isolinienteil, und den 3-D-Teil, der räumliche Darstellungen erzeugt.

In den folgenden Abschnitten wird skizzenhaft auf diese hier angedeuteten Prozesse eingegangen.

2. DATENORGANISATION

Aus im Vorhergehenden erwähnten Gründen werden kaum jemals alle zur Verfügung stehenden Daten gleichzeitig zur Prädiktion einer einzelnen Schwerfeldgröße herangezogen. Im allgemeinen wird eine lokal beschränkte Datenmenge zur Prädiktion ausreichend sein. (Daten, welche auf den hochfrequenten Spektralbereich des Erdschwerfeldes ansprechen, haben lokalen

Charakter und tragen daher nur lokal zur Vorhersage bei; Daten, welche auf den niedrigfrequenten Spektralbereich des Erdschwerefeldes ansprechen, sind blind bezüglich lokaler Formen -- solche Daten werden meist vom überwiegenden Satz des mittel- und hochfrequenten Bereiches abgespalten und die zugehörige Fläche durch globale harmonische Funktionen repräsentiert.)

Ein lokaler Bereich wiederum wird als kreisförmiges (oder rechteckiges) Gebiet mit dem Mittelpunkt im Berechnungspunkt (Prädiktionspunkt) verstanden. Um zu bestimmen, ob ein Datenpunkt innerhalb oder außerhalb eines derartigen Prädiktionsgebietes liegt oder nicht, ist es erforderlich, dessen Abstand vom Prädiktionspunkt zu bestimmen. Entfernungsberechnungen beinhalten Subtraktionen, Multiplikationen und trigonometrische Funktionen. Da die Anzahl dieser Operationen sowohl linear mit der Gesamtzahl der Daten als auch linear mit der (meist sehr großen) Anzahl der Prädiktionspunkte (=Funktionswerte der Schwerefeldfläche an den Gitterpunkten) steigt, würde bereits in relativ kleinem Rahmen viel unnötige Rechenzeit vergeudet, nur um überhaupt festzustellen, welche Daten zur Prädiktion nicht herangezogen werden sollen.

Um dies zu vermeiden, werden die Daten vor ihrer Verarbeitung durch das System organisiert : der gesamte Datenbereich wird in kleine Teilrechtecke unterteilt; parallel zu den Daten werden a) Zeiger generiert, welche für jedes Teilrechteck zu den entsprechenden Daten innerhalb dieses Teilrechteckes zeigen, und b) Zähler, welche die Anzahl der Daten innerhalb eines jeden Teilrechteckes zählen. Die Daten werden also nicht physikalisch sortiert -- es wird lediglich Zusatzinformation in Form von Zeigern und Zählern generiert, ein Prozess, welcher nur minimale Rechenleistung erfordert und daher extrem schnell abläuft: GSPP organisiert 100 000 Daten innerhalb von 1.5 sec . (Diese Zeitangabe bezieht sich so wie alle anderen in dieser Arbeit auf eine AMDAHL 470 Rechenanlage der Ohio State University, Columbus, Ohio.)

3. PRÄDIKTION

Der allgemeinste Fall der Kollokation nach kleinsten Quadraten sieht die geschlossene Verarbeitung eines mit Meßfehlern behafteten heterogenen Datensatzes vor. In manchen Anwendungen wird aber lediglich mit (nahezu fehlerfreien) homogenen Daten gearbeitet (z.B. Prädiktion von Schwereanomalien, etc.). Für derartige Ausnahmefälle sieht GSPP neben der optimalen Methode der Kollokation nach kleinsten Quadraten auch noch eine inversionsfreie und daher sehr schnelle Methode der Interpolation auf Grund gewichteter Entfernungen zwischen Daten- und Prädiktionspunkt vor. Ein prädizierter Wert ist demnach das gewichtete Mittel von Funktionswerten aus der Nachbarschaft,

$$f_P = \frac{\sum w_i f_i}{\sum w_i}$$

mit f_i ... Daten (homogener fehlerfreier Satz),
 w_i ... Gewichte.

Als Gewichtsfunktion fungiert im wesentlichen die Potenz q der Entfernung s_{pi} ; je höher die Potenz q , umso stärker das Gewicht. Es läßt sich auf Grund theoretischer Überlegungen zeigen, daß q in den Grenzen $1 \leq q < \infty$ liegen muß. ($q=1$ reproduziert einerseits die Daten und versucht andererseits eine horizontale Fläche mit Funktionswert=(ungewichteter) Mittelwert aller Daten zwischen den Datenpunkten herzustellen; $q \rightarrow \infty$ "interpoliert" als Treppenfunktion zwischen den Daten, wobei die Daten jeweils die Treppenmitte bilden.) Ein guter Erfahrungswert spricht für $3 \leq q \leq 4$ und liefert (optisch) ansprechende, numerisch aber schwach gesicherte Ergebnisse. Daher kann diese Art von Interpolation nur für sehr glatte Flächen empfohlen werden, welche durch dichtes Datenmaterial hinlänglich gut beschrieben werden (z.B. Interpolation von Satelliten-Altimeterdaten).

Ungleich aufwendiger ist die Lösung nach der Methode der Kollokation nach kleinsten Quadraten. Kurz zum Prinzip :
Das anomale Gravitationspotential ist Element eines Hilbert-

Raumes mit reproduzierendem Kern. Da das Potential im Außenraum bezüglich der Erdoberfläche harmonisch ist, ist auch der reproduzierende Kern harmonisch. Wenn der reproduzierende Kern gleichzeitig Kovarianzfunktion des Potentials ist, so ist die darauf aufbauende Prädiktion optimal bezüglich der Varianz des Prädiktionsfehlers (Moritz, 1978). Bezeichnet man diese Kovarianzfunktion (Kern) mit $K(P,Q)$, wobei P und Q Punkte im Definitionsbereich von K bezeichnen, so gilt

$$\begin{aligned} K(P,Q) &= K(Q,P) && \text{(Symmetrie)} \\ K(\cdot,Q) &= K(P,\cdot) = 0 && \text{(Harmonizität)}. \end{aligned}$$

K muß darüberhinaus positiv definit sein. Die gebräuchlichste Form von K ist gegeben durch

$$K(P,Q) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi_{PQ})$$

mit $k_n \dots$ nicht-negative Koeffizienten (garantieren die positive Semidefinitheit),
 $r_P, r_Q \dots$ Moduli der Radiusvektoren der Punkte P und Q ,
 $\psi_{PQ} \dots$ sphärische Distanz zwischen P und Q ,
 $P_n \dots$ Legendre'sches Polynom vom Grad n ,
 $R_B \dots$ Radius der Bjerhammar-Kugel (einwenig kleiner als die mittlere Erdkugel).

Die Symmetrie ist unmittelbar durch einerseits das Produkt der Moduli der Radiusvektoren $r_P r_Q$ und andererseits durch die Symmetrie des Cosinus der sphärischen Distanz ersichtlich. Die Gradvarianzen k_n stehen in direkter Beziehung zu den Kugelfunktionskoeffizienten des Störpotentials und gehen als möglichst realitätsbezogenes Modell in K ein. Unbedingte Forderung an $\{k_n\}$ muß sein, daß die damit definierte unendliche Reihe in geschlossener Form darstellbar ist. Somit ist die Kovarianz des Störpotentials zwischen zwei Punkten P und Q , $K(P,Q)$, lediglich von zwei Größen abhängig, dem

Produkt der Moduli der Radiusvektoren $r_P r_Q$ und der sphärischen Distanz zwischen P und Q , ψ_{PQ} .

Bezeichnet man nun mit L und M Vektoren linearer Funktionale, so lassen sich die wesentlichen Formeln der Kollokation nach kleinsten Quadraten wie folgt darstellen :

$$Mf = ML^T K(\cdot, \cdot) [LL^T K(\cdot, \cdot) + D]^{-1} l ,$$

$$E_{SS} = MM^T K(\cdot, \cdot) - ML^T K(\cdot, \cdot) [LL^T K(\cdot, \cdot) + D]^{-1} LM^T K(\cdot, \cdot)$$

In diesem Zusammenhang bedeuten

- l ... Daten (lineare Funktionale des Störpotentials),
- D ... a priori Fehlerkovarianzmatrix der Daten (im allgemeinen diagonal),
- f ... Störpotential,
- Mf ... =s, prädiziertes lineares Funktional des Störpotential,
- E_{SS} ... geschätzte Kovarianzmatrix der Prädiktionsfehler (Diagonale = Varianzen der Prädiktionsfehler).

Die linearen Funktionale $\{L_i\}$, $\{M_i\}$ bestehen aus Operationsvorschriften wie : Entwicklung von K an einem bestimmten Punkt P_i oder Differentiation von K an einem bestimmten Punkt P_i oder Integration von K über ein bestimmtes Linienelement oder eine bestimmte Fläche bezüglich P . L bezieht sich in diesem Zusammenhang immer auf die Meßgröße, M auf die zu prädizierende Größe.

Das wesentliche Problem ist nun zweifacher Natur : erstens ist für eine optimale Prädiktion theoretisch eine Inversion einer Matrix $[LL^T K(\cdot, \cdot) + D]$ erforderlich, deren Dimension der des Datenvektors entspricht. Und zweitens - was sehr oft nicht beachtet wird - ist die Berechnung der Kovarianzen $LL^T K(\cdot, \cdot)$ sowie $ML^T K(\cdot, \cdot)$, $MM^T K(\cdot, \cdot)$ recht zeitraubend.

Den ersten Gegner, die Inversion einer im allgemeinen sehr großen Matrix, versucht man sich meist dadurch vom Hals zu schaffen, daß man jeweils nur ein lokales "sample" des gesamten Datensatzes bei der Prädiktion berücksichtigt. Eine derartige lokale Prädiktion arbeitet im allgemeinen mit ca. 100 Daten. Dies mag billig sein für eine kleine Anzahl an Prädiktionen. Im Falle einer Prädiktion einer ganzen Fläche, welche durch ein sehr dichtes Gitter an Funktionswerten repräsentiert wird, ist selbst eine derartige lokale Lösung mit enorm hohem Zeitaufwand verbunden. (Pro Gitterpunkt ist eine Inversion einer Matrix in der Größenordnung von 100×100 erforderlich.) Um diesen Nachteil aus dem Weg zu räumen, wurde eine Methode der "gleitenden Inversen" entwickelt (Sünkel, 1980a), welche auf folgendem Prinzip beruht: Da Gitterpunkte stets dicht liegen (um die Fläche hinlänglich gut zu repräsentieren), unterscheiden sich die Kovarianzmatrizen zweier benachbarter Gitterpunkte bei halbwegs homogener Datenverteilung nur insofern, als einige Daten (und damit Kovarianzen) im einen Punkt durch einige andere Daten (und damit Kovarianzen) im anderen Punkt ersetzt werden; der Großteil des verwendeten Datensatzes (und damit Kovarianzen) ist jedoch für beide Punkte identisch und bildet sozusagen den Kern der Kovarianzmatrix. Wenn die Inverse dieses Kerns bekannt ist, so bedarf es nur der Inversion einer kleinen Matrix mit Dimension = Anzahl der verwendeten Daten minus Dimension des Kerns - zusammen mit einigen wenigen Matrizenprodukten - , um die Änderung der Inversen der Kovarianzmatrix vom einen Gitterpunkt zum nächsten zu bestimmen. Zusammen mit einem optimalen Matrizen-Umordnungsalgorithmus ist dieses Verfahren äußerst effizient und zeitsparend. Es ist ein wesentlicher Bestandteil von GSPP.

Dennoch verbleiben noch als Handicap die relativ aufwendigen Kovarianzberechnungen. Theoretische Untersuchungen zur Möglichkeit der Approximation der Kovarianzfunktion durch nicht-positiv definite Funktionen (Sünkel, 1978) sowie die programmtechnische Realisierung (Sünkel, 1979) reduzieren nun-

mehr den bisherigen Rechenaufwand für Kovarianzen auf etwa 1/10; (die Berechnung einer Kovarianz zwischen zwei Größen des Störfeldes dauert jetzt etwa 10^{-4} sec.) GSPP bietet zweierlei Möglichkeiten an : die strenge (und teure) (Tscherning, 1976) sowie die genäherte (und schnelle, dafür aber speicherintensive) Berechnung der Kovarianzen (Sünkel, 1979).

Die Auffindung der zur Prädiktion zu verwendenden Daten erfolgt mit Hilfe der während der Datenorganisation generierten Zeiger und Zähler. GSPP prädiziert danach ein regelmäßiges Gitter von Funktionswerten, welches in Verbindung mit einem entsprechenden Interpolationsalgorithmus die Fläche repräsentiert. Die Art und das Niveau der Schwerefeldfläche müssen vom Anwender festgelegt werden.

4. GLATTE DARSTELLUNG VON FLÄCHEN

Um Isolinien oder 3-dimensionale Darstellungen von einer Fläche ableiten zu können, welche in Form einer Matrix (funktionswerten an den Gitterpunkten) gegeben ist, muß eine geeignete Interpolationsfunktion gewählt werden. Die Interpolationsfunktion soll *einfach*, *glatt* und *lokal* sein. Einfach, um das Auffinden von Isolinien so leicht wie möglich zu machen, *glatt*, um womöglich Stetigkeit von Gradienten zu gewährleisten, und *lokal*, um die Anpassungsfähigkeit an die zu erwartenden Unregelmäßigkeiten der Fläche zu sichern. Die einfachste stetige Interpolationsfunktion ist die bilineare Funktion : sie ist stetig und hat streng lokalen Charakter, aber sie ist nicht *glatt*. Ein biquadratisches Element ist stetig in den Gradienten, hat aber einige Nachteile, welche seine Anwendung erschweren (Sünkel, 1980b). Ein bikubisches Element ist besonders geeignet, wenn es als Teil einer bikubischen Spline-Funktion betrachtet wird : es ist noch relativ einfach, relativ lokal und zweimal stetig differenzierbar nach beiden unabhängigen Veränderlichen.

Elemente höherer als dritter Ordnung sind zwar noch glatter, dafür aber mit zunehmender Ordnung komplizierter und weniger lokal - sie nehmen mehr und mehr das Verhalten einziger Polynome an. Aus diesen Gründen wurde ein bikubischer Spline als Interpolationsfunktion zwischen dem regelmäßigen Gitter von Funktionswerten gewählt. Eine solche Funktion ist eindeutig, wenn bestimmte Randbedingungen vorliegen (Ableitung entlang der Normalen zu den Rändern des Gebietes). Im allgemeinen kennt man derartige Randwerte nicht; daher nimmt man verschwindende Krümmung entlang des gesamten Randes an. Dies geschieht auch in GSPP.

Jeder interpolierte Funktionswert kann dann durch

$$f(x,y) = \underline{x}^T \underline{A} \underline{y}$$

erhalten werden, wobei

\underline{A} ... eine 4×4 Koeffizientenmatrix, und
 \underline{x} , \underline{y} ... 4×1 Vektoren bedeuten, welche die Koordinateninformation des Punktes $P(x,y)$ tragen.

Da die Interpolationsfunktion zweimal stetig differenzierbar ist (über den gesamten Definitionsbereich), liefert eine solche Darstellung auch Werte für Ableitungen von f (Ableitungen der Fläche)

$$D^\alpha f = D^{\alpha_1}(\underline{x}^T) \underline{A} D^{\alpha_2}(\underline{y})$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$; $\alpha_1, \alpha_2 \leq 2$.

Sehr effiziente Algorithmen wurden für den Spline-Darstellungsprozess sowie für den Interpolations/Differentiationsvorgang entwickelt (Späth, 1973; Sünkel, 1980a) : die Berechnung der Spline-Definitionswerte dauert für ein Feld der Größe 100×100 weniger als 1 sec; der Interpolations/Differentiationsvorgang benötigt etwa 10^{-4} sec pro Punkt.

5. ISOLINIENBERECHNUNG UND ISOLINIENDARSTELLUNG

Das Auffinden von Isolinien besteht aus dem Schneiden einer Fläche mit horizontalen Ebenen. Das bikubische Element als Interpolationsfunktion erlaubt keinen einfachen direkten Weg der Isolinienberechnung. Das einzige Element, welches eine einfache Lösung zuläßt, ist das bilineare Element (Sünkel, 1977). Daher approximiert GSPP für die Zwecke der Schichtenlinienberechnung und Berechnung der dreidimensionalen Darstellung der Fläche das bikubische Polynom durch ein sehr dichtes Netz interpolierender bilinearer Elemente. Die Schnittlinien zwischen den bilinearen Elementen und den horizontalen Ebenen werden dann als Approximationen der tatsächlichen Isolinien betrachtet. Die Dichte der bilinearen Elemente wird von GSPP so gewählt, daß approximierete Isolinien von exakten optisch nicht zu unterscheiden sind. Darüberhinaus werden die Isolinien von GSPP unter Verwendung eines kubischen stückweisen Parameter-Spline geglättet.

Eine sehr große Anzahl von Optionen steht zur Verfügung; im folgenden sollen nur einige wesentliche aufgezählt werden.

a) Transformation $x' = x'(x,y)$, $y' = y'(x,y)$

Im allgemeinen werden die Koordinaten der Datenpunkte als kartesische Koordinaten interpretiert; der Maßstabsfaktor ist weder orts- noch richtungsabhängig. In vielen geodätischen Anwendungen sind die Koordinaten aber krummlinig und eine bestimmte Abbildung ist oft gefordert. Offenbar gibt es eine unendliche Zahl von Abbildungen; daher wurde GSPP so konzipiert, daß der Anwender die von ihm gewünschte Abbildung in Form einer Abbildungsgleichung über ein Unterprogramm festlegt; die Isolinien werden dann nach diesen Abbildungsgleichungen transformiert. (Fig. 5.1).

b) Beschränkung der Isolinien auf vorgegebene Gebiete

Der einfachste Fall besteht in der Beschränkung der Isolinienzeichnung auf ein rechteckiges Fenster, welches parallel zu den Koordinatenlinien verläuft. Der allgemeine (und

programmtechnisch äußerst anspruchsvolle) Fall der Beschränkung der Isolinenzeichnung auf eine beliebige Anzahl von beliebig geformten Gebieten wurde in GSPP ebenfalls verwirklicht (Fig. 5.2).

c) Isolinen der differenzierten Fläche können bis zur höchstmöglichen Ableitung $D_x^2 D_y^2 f$ erhalten werden.

d) Andere Optionen

Überlagerung verschiedener Arten von Datenzeichnungen (mit und ohne Abbildung),

Überlagerung von Gitterzeichnungen verschiedenster Art (mit und ohne Abbildung) mit Skalenmarken, Skalierung, Beschriftung, etc.

Eine weitere angenehme Möglichkeit ist die automatische Titel- und Beschriftungszeichnung mit automatischer Zentrierung oder links- sowie rechtsbündiger Ausgabe mit automatischer Reduktion der Schriftgröße, falls der Titel die Länge der Zeichnung überschreitet.

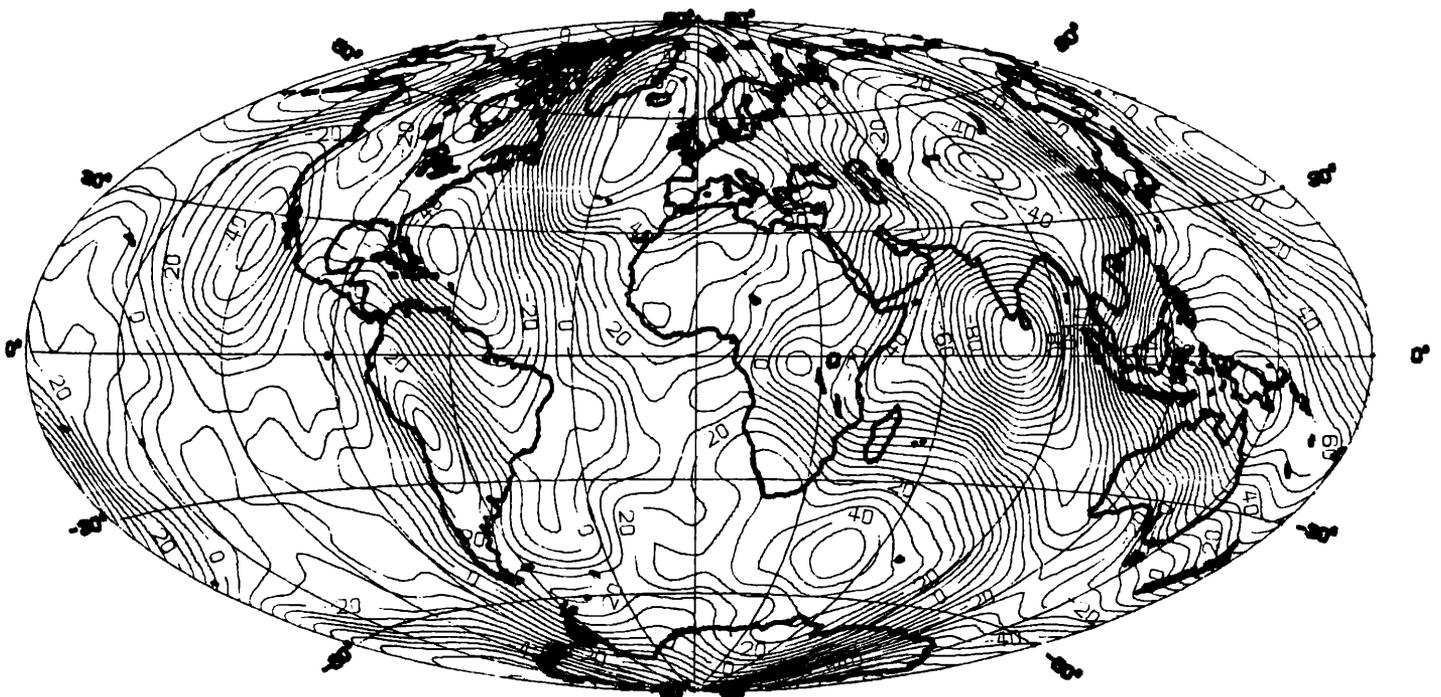


Fig. 5.1 Goddard Earth Model GEM 10 in Hammer-Projektion

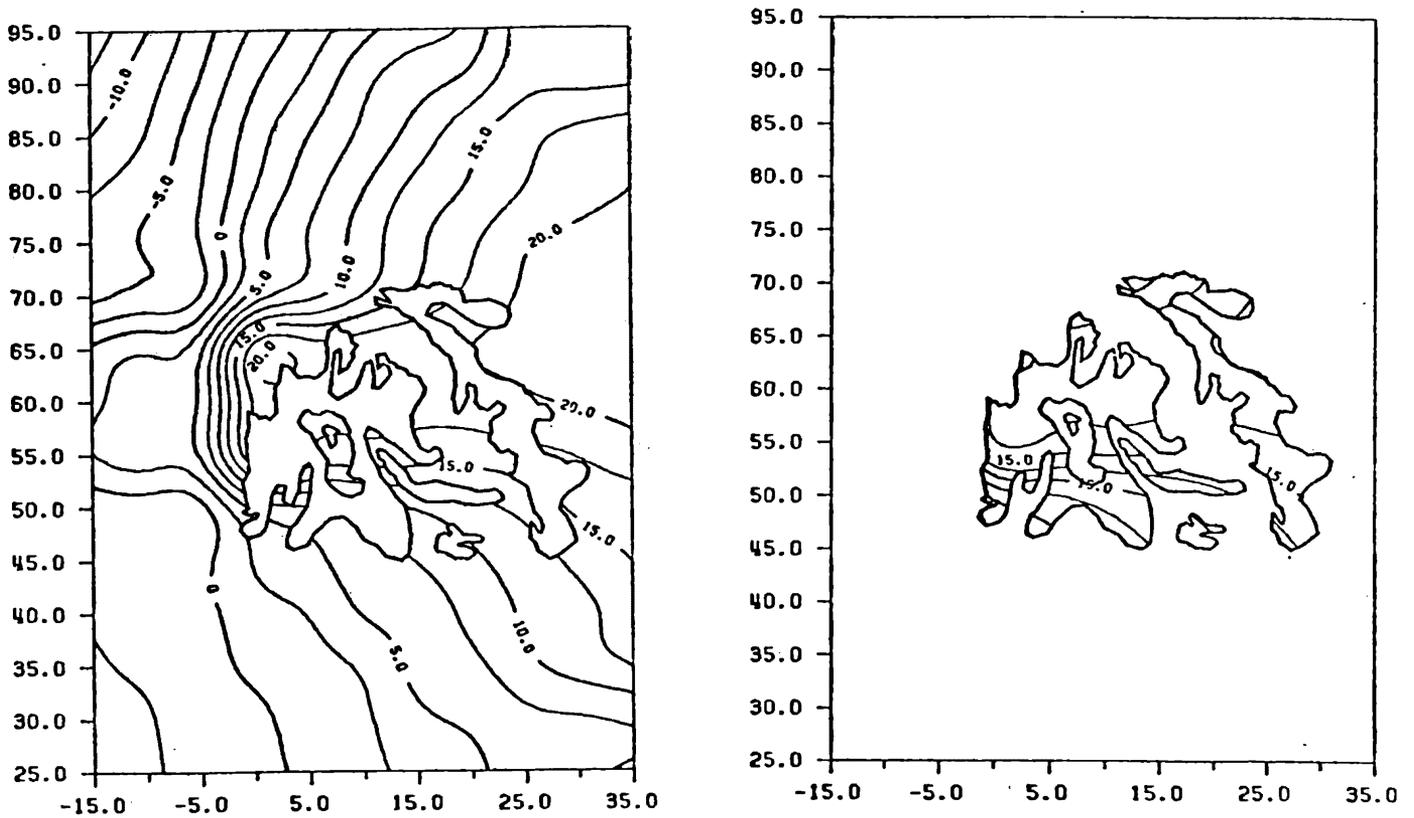


Fig. 5.2 Beschränkung der Isolinienzeichnung auf beliebige Gebiete

6. 3-DIMENSIONALE DARSTELLUNGEN

Eine dreidimensionale Darstellung einer Fläche wird als eine Projektion einer zweidimensionalen Fläche auf eine Ebene verstanden. Die Ebene kann im Raum beliebig orientiert sein. Die Fläche kann entweder explizit durch die Funktionswerte an den Gitterpunkten oder implizit durch einen heterogenen Datensatz unregelmäßig verteilter und im allgemeinen mit Meßfehlern behafteten Schwerefelddaten gegeben sein. Im letzten

Fall passieren die Daten zunächst den Prädiktionsteil.

Wie im Fall der Isoliniendarstellung wird auch hier die Fläche als bikubischer Spline dargestellt, welcher durch die (prädizierten) Funktionswerte an den Gitterpunkten gegeben ist. Die Spline-Fläche wird sodann durch ein dichtes Netz bilinearer Elemente approximiert.

Bis zu diesem Schritt unterscheidet sich die 3-D Prozedur nicht von der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Isolinen-Prozedur. Im Falle der Isoliniendarstellung wurden die bilinearen Elemente mit einer Schar horizontaler Ebenen zum Schnitt gebracht, in der 3-dimensionalen Darstellung werden die bilinearen Elemente auf eine im Raum beliebig orientierte Ebene projiziert. Die von GSPP zur Verfügung gestellte Basisprojektion ist eine axonometrische; es ist jedoch so ähnlich wie im Fall der Abbildung von Isolinen möglich, eine beliebige andere Projektion (wie zum Beispiel eine Zentralprojektion) durch Vorgabe der entsprechenden Projektionsgleichungen festzulegen.

GSPP ordnet automatisch möglichst vernünftige Werte den Maßstabs-, Verschiebungs- und Orientierungsparametern zu (es sei denn, daß diese Aufgabe der Anwender selbst übernimmt) und verwendet einen Algorithmus zur Unterdrückung unsichtbarer Linien.

Die Projektionsinformation (Blickrichtung) wird automatisch ausgegeben; die Titeloptionen sind mit denen im Abschnitt 5 beschriebenen identisch.

Fig. 6.1 zeigt ein Beispiel einer 3-D Darstellung einer Fläche, welche von einem heterogenen Satz unregelmäßig verteilter Schwerefelddaten automatisch abgeleitet wurde.

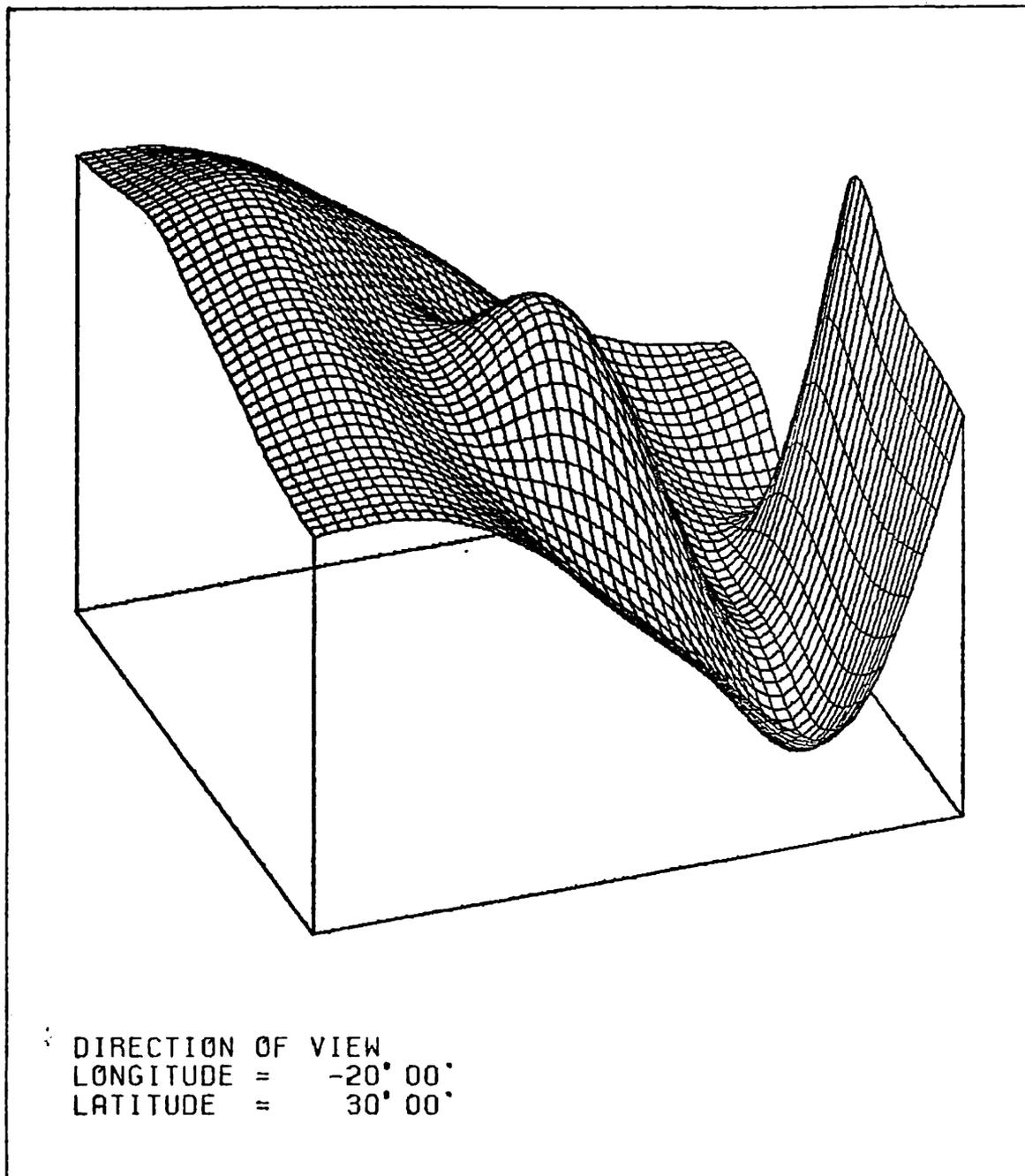


Fig. 6.1 3-dimensionale Darstellung einer Fläche

7. PROFILDARSTELLUNGEN

Der Begriff "Profil" wird im allgemeinen als eine Kurve verstanden, welche aus dem Schnitt einer beliebigen Fläche mit einer vertikalen Ebene hervorgeht. GSPP versteht unter einem Profil nicht unbedingt eine Schnittkurve. Ist eine Kurve gegeben durch ein Vektorpaar (x, y) mit $y_i = y(x_i) \dots$ Funktionswerte an der

Stelle x_i , so sprechen wir über ein "explizit" definiertes Profil. Wenn ein Profil über eine Fläche definiert ist (oder Daten, welche die Fläche in bestimmter Weise repräsentieren), zusammen mit Start- und Endpunkt des Profils, so sprechen wir über ein "implizit" definiertes Profil. Wenn sich mehrere explizite Profile überlagern, so sprechen wir über ein "Vielfachprofil".

GSPP kann diese drei Arten verbunden mit einer großen Zahl an Optionen liefern.

Was explizite Profile anlangt, so werden drei verschiedene Profildarstellungen von GSPP angeboten : eine einfache Profildaten-Zeichnung, eine stückweis lineare Zeichnung und eine glatte Darstellung in Form eines kubischen Spline.

Ableitungen der Profile können bis zur zweiten Ableitung angefordert werden; sie werden stets von der Spline-Darstellung abgeleitet.

Die Zeichnung des Profils erfolgt in einem Fenster, welches vom Anwender festgelegt werden kann; die Kurve wird automatisch abgeschnitten, sobald sie das Zeichenfenster verläßt.

In Analogie zum überlagerten Koordinatengitter in der Isolinienzeichnung können kleine Kreuze an den Schnittpunkten der Gitterlinien unterhalb des Profils ausgegeben werden. Die Zeichnung einer Nulllinie ist ebenfalls vorgesehen.

Um die Identifizierung der verschiedenen Kurven in einem Vielfachplot zu erleichtern, sind zwei weitere Eigenschaften eingebaut : die Profile können durch zentrierte Symbole gekennzeichnet werden, jedes Profil durch ein spezifisches Symbol. Am rechten Ende des Profils wird eine Legende ausgegeben, die jedes Symbol (und damit Profil) mit der Reihenfolge der Eingabe identifiziert. Fig. 7.1 zeigt ein Beispiel eines Profil-Vielfachplots.

Implizit definierte Profile werden von einer Flächen-darstellung in Form eines bikubischen Spline abgeleitet. Neben der Zeichnung von Flächenprofilen können auch Profile jeder Flächenableitung $D_x^{\alpha_1} D_y^{\alpha_2} f$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \leq 2$ und ebenso Pro-

file $D_S^\alpha f$, $\alpha \leq 2$, wobei D_S die Ableitung entlang der Profil-

```
COVARIANCE FUNCTION OF FREE AIR GRAVITY ANOMALIES, MODEL T2
A-607.0
S-0.998444
#1 ... N- 2 DEGREE VARIANCES SUBTRACTED
#2 ... N- 36 DEGREE VARIANCES SUBTRACTED
#3 ... N- 72 DEGREE VARIANCES SUBTRACTED
#4 ... N-180 DEGREE VARIANCES SUBTRACTED
```

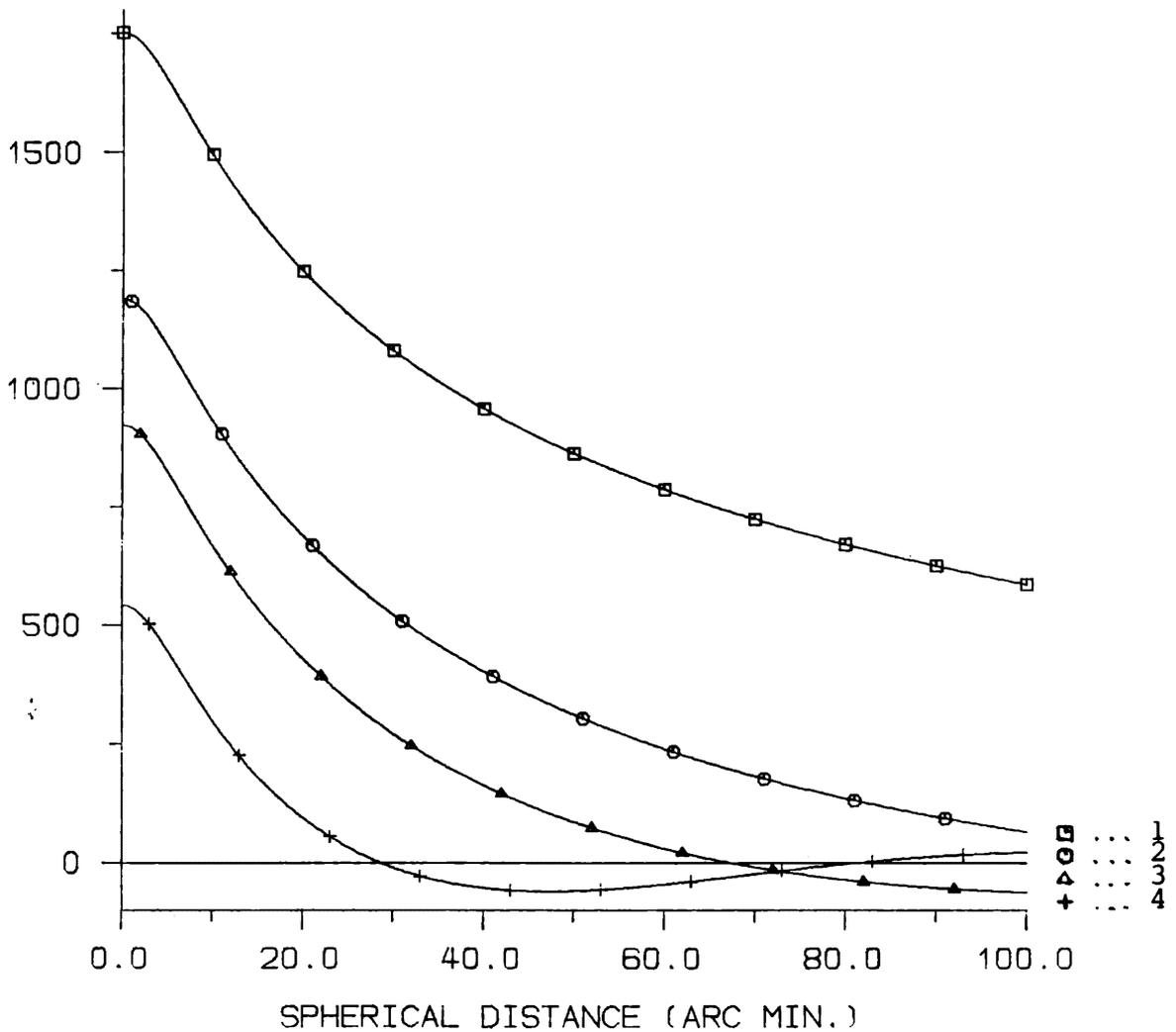


Fig. 7.1 Profil-Vielfachplot mit Identifizierung

Einige Eigenschaften beziehen sich ausschließlich auf Zeichnungen implizit gegebener Profile : da GSPP den Plot von bis zu 100 Profilen mit einem einzigen Aufruf vorsieht, ist es unbedingt notwendig, die verschiedenen Profile voneinander

unterscheiden zu können. Dies erfolgt automatisch durch Ausgabe der Start- und Endpunkt-Information unterhalb des jeweiligen Profils (siehe Fig. 7.2).

Wir erinnern uns, daß im Fall der Isoliniendarstellung einer Fläche ein rechteckiges Zeichenfenster gewählt werden kann (siehe Abschnitt 5). Wenn ein solches Fenster definiert wurde und das Flächenprofil innerhalb dieses Fensters verläuft, werden Kreuze an den Schnittpunkten der Gitterlinien gezeichnet. An jenen Stellen, an welchen das Profil das Fenster verläßt, erscheinen im Profilplot vertikale Balken; außerhalb des Fensters, aber innerhalb des Definitionsbereichs der Fläche, werden an den Schnittpunkten der Gitterlinien Punkte gezeichnet (siehe Fig. 7.2).

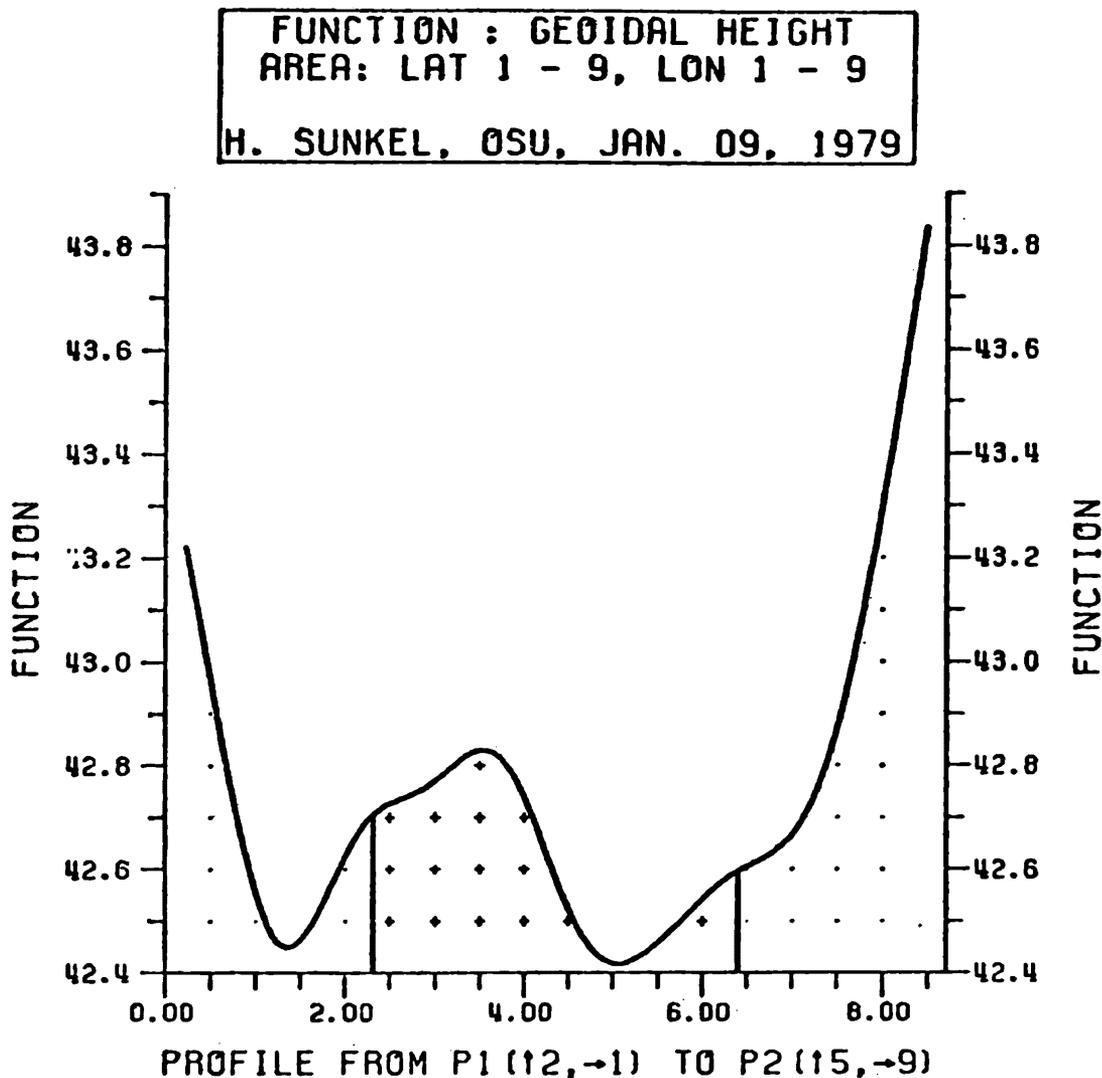


Fig. 7.2 Implizit gegebenes Profil mit Zeichenfenster

8. DIE SYSTEM-KONTROLLEINHEIT

Ein integriertes System dieser Größe, welches eine derartige Vielfalt verschiedener Probleme zu lösen imstande ist - nur die wirklich wesentlichen wurden in dieser Arbeit beschrieben - ist von Natur aus recht komplex. Es verfügt über eine große Zahl an Parametern. All diese Parameter richtig zu wählen, ist für den Anwender ein echtes Problem. Daher war es ein erklärtes Ziel, das System GSPP so intelligent zu gestalten, daß es fähig ist, von sich aus allen Parametern die geeignetsten Werte zuzuweisen, vom Anwender festgelegte Parameterwerte auf Konsistenz zu überprüfen und gegebenenfalls zu korrigieren. Solch ein System wird aus guten Gründen für intelligent erklärt : viele Prozesse, die mit der Wahl von Parameterwerten zusammenhängen, sind nichts anderes als Übersetzungen menschlicher Entscheidungsprozesse in eine Computersprache - ein Vorhaben, dessen Realisierung in so manchen Fällen über recht steile und steinige Wege führte.

Um Information über anwenderdefinierte und programmdefinierte (oder programm-korrigierte) Parameterwerte zu erhalten, verfügt GSPP über einen ausführlichen Dokumentations- teil, welcher im allgemeinen über den Bildschirm oder jede beliebige andere Ausgabeeinheit ausgegeben wird. Dieser Dokumentationsteil besteht aus drei Teilen, dem Input-, Informations- und Outputteil. Der Inputteil listet alle wesentlichen Parameter zusammen mit den vom Anwender zugewiesenen Werten; unter dem Informationsteil berichtet GSPP über etwaige Änderungen oder wichtige Informationen, welche während des Rechenablaufs notwendig sind (z.B. Änderung eines Maßstabsfaktors bei errechneter Überschreitung des Zeichenblattes, Änderung des Grads der Kugelfunktionsentwicklung bei festgestelltem Fehlen von Koeffizienten, etc.). Der Outputteil listet in gleicher Weise wie der Inputteil alle Parameter zusammen mit den aktuellen vom System verwendeten Werten; jede Parameteränderung bezüglich des Input wird durch ein Symbol markiert.

Die Kontrolleinheit von GSPP erwies sich als sehr brauchbar und hilfreich nicht nur für Anfänger, die mit dem System vertraut werden wollen, sondern auch für Anwender, die schnelle Antwort auf ihre Probleme erwarten. Es stellte sich heraus, daß in den meisten Fällen der Anwender mit den vom System gewählten Parameterwerten einverstanden ist. Der mit GSPP vertraute Anwender wird es als große Hilfe empfinden, daß alle seine Entscheidungen überprüft und notfalls korrigiert werden. Sehr selbstsichere Anwender haben natürlich die Möglichkeit, die Kontrolleinheit abzuschalten.

Neben den bisher besprochenen Problemlösungen, welche im Ablauf von GSPP vollintegriert sind, besteht auch die Möglichkeit verschiedene Probleme in isolierter Form zu lösen (z.B. : Datenorganisation, Prädiktion, Berechnung von Prädiktionsfehlern, Berechnung der Datenreproduktionsfehler, Berechnung von Regressionspolynomen etwa zur Trendabspaltung, Datenplot, glatte Flächendarstellung, Zeichnung von Gebietsrändern, etwa der Weltküstenlinien, Zeichnen von Legenden, vollständige Koordinatenlinienzeichnung mit und ohne Abbildung mit und ohne Skalierung und , und, und ...).

9. TECHNISCHE DETAILS

Das System GSPP ist in FORTRAN V geschrieben; es besteht aus ca. 60 Unterprogrammen mit insgesamt ca. 15000 Statements; der minimal erforderliche Speicherplatz (Kernspeicher) beträgt ca. 150 kbytes.

Zur Zeit existieren zwei Versionen : eine Version für eine Großanlage AMDAHL 470 mit VERSATEC und CALCOMP - Plotter an der Ohio State University, Columbus, Ohio; eine zweite Version läuft auf einer UNIVAC 1100/81 - Anlage mit BENSON - Plotter an der Technischen Universität Graz (Forschungszentrum).

Literatur : H. Sünkel (1980) : A general surface representation module designed for geodesy. Report No. 291, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Der Großteil der Arbeit wurde durch Air Force Geophysics Laboratories, Massachusetts, unterstützt. Computerzeit wurde vom Instruction and Research Computer Center der Ohio State University sowie vom Forschungszentrum Graz zur Verfügung gestellt.

LITERATURVERZEICHNIS

- Krarrup, T. (1969) : A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. Publ. No. 44, Danish Geodetic Institute, Copenhagen.
- Moritz, H. (1970) : Least-squares estimation in physical geodesy. Report No. 130, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Moritz, H. (1978) : The operational approach to physical geodesy. Report No. 277, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Moritz, H. and H. Sünkel (1978), eds. : Approximation Methods in Geodesy. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Späth, H. (1973) : Spline - Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. Oldenbourg-Verlag, München.
- Sünkel, H. (1977) : A FORTRAN IV program to calculate and plot isolines. In : Numerical studies and programs for interpolation and collocation. J. Kryński, H. Noë, K.P. Schwarz, H. Sünkel. Folge 26, Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz.
- Sünkel, H. (1978) : Approximation of covariance functions by non-positive definite functions. Report No. 271, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

- Sünkel, H. (1979) : A covariance approximation procedure. Report No. 286, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Sünkel, H. (1980a) : A general surface representation module designed for geodesy. Report No. 291, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Sünkel, H. (1980b) : Cardinal interpolation. Report im Druck, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Tscherning, C.C. (1976) : Covariance expressions for second and lower order derivatives of the anomalous potential. Report No. 225, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.