Auszug aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

10. Feb. 1881. Gesammtsitzung der Akademie.

Hr. Websky las:

Über die Ableitung des krystallographischen Transformations-Symbols.

Man hat in der krystallographischen Praxis zuweilen das Bedürfniss, die Axenrichtungen und die Einheitswerthe der Axen einer beschriebenen Krystall-Gattung zu ändern, so dass für die nach den ursprünglichen Elementen symbolisirten Flächen neue Symbole aufkommen. Der aus den alten Symbolen und den Veränderungs-Bedingungen hergeleitete, der allgemeinen Form eines Symbols entsprechende Ausdruck, welcher, angewendet auf eine bestimmte Fläche, das ihr zukommende neue Symbol giebt, ist das Transformations-Symbol genannt worden.

Unter den verschiedenen, behufs Ableitung desselben eingeschlagenen Wegen ist der von Quenstedt (Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie, Tübingen 1873. p. 377 unter dem Abschnitt „Zonenaxenschnittformel") betretene der bei Weitem anschaulichste, bedarf aber einer Berichtigung und Erweiterung, welche hier gegeben werden soll.

Wenn man die Veränderung der Axenrichtungen so normirt, dass man bestimmt, dass drei nach den ersten Axen OA, OB, OC mit den Symbolen

$$F_1 = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c \ , \ F_2 = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c \ , \ F_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c$$

belegte Flächen, bezogen auf die zweiten Axen OA_n, OB_n, OC_n Hexaïd-Symbole erhalten sollen, nämlich

$$F_1 = \infty a_n : b_n : \infty c_n \ ,$$

$$F_2 = a_n : \infty b_n : \infty c_n \ ,$$

$$F_3 = \infty a_n : \infty b_n : c_n \ ,$$

so muss man noch, um zur Bildung von Flächen-Symbolen zu gelangen, bestimmen, dass eine vierte Fläche

$$F_4 = \frac{a}{\mu_e} : \frac{b}{\nu_e} : c$$

nach den neuen Axen das Symbol

$$= \frac{a_n}{\varphi} : \frac{b_n}{\chi} : \frac{c_n}{\psi}$$

annehme, und zwar muss das letztere ein Octaïd-Symbol sein, wo φ, χ, ψ keiner anderen Bedingung unterworfen sind, als der, zwischen 0 und $\pm\infty$ belegen zu sein. Durch diese vierte Fläche wird nehmlich das Einheits-Verhältniss der neuen Axen bestimmt, welches bei der Wahl der Hexaïd-Symbole für F_1, F_2, F_3 unbestimmt bleibt. Denselben Zweck würden auch zwei Flächen erfüllen können, wenn zunächst die eine Fläche einer Hexaïdzone der neuen Axen angehört und dieserhalb, auf diese bezogen, ein Dodecaïd-Symbol erhalten und das eine der beiden Einheits-Verhältnisse der neuen Axen unbestimmt lassen müsste; dieses letztere würde dann durch eine in einer anderen Hexaïdzone der neuen Axen belegene Fläche mittelst des ihr darnach beizulegenden Dodecaïd-Symboles zu bestimmen sein, oder durch eine Octaïdfläche, mittelst eines nur bezüglich der dritten Axe willkürlich wählbaren Axenschnittes.

Da aber die so durch zwei Flächen bewirkte Normirung der neuen Axeneinheiten sich auf dem Wege der Deduction als identisch mit der durch das Symbol einer von ihnen abgeleiteten Octaïdfläche erweist, so bildet eine solche im Allgemeinen das erforderliche Requisit zur Fixirung der neuen Einheitswerthe.

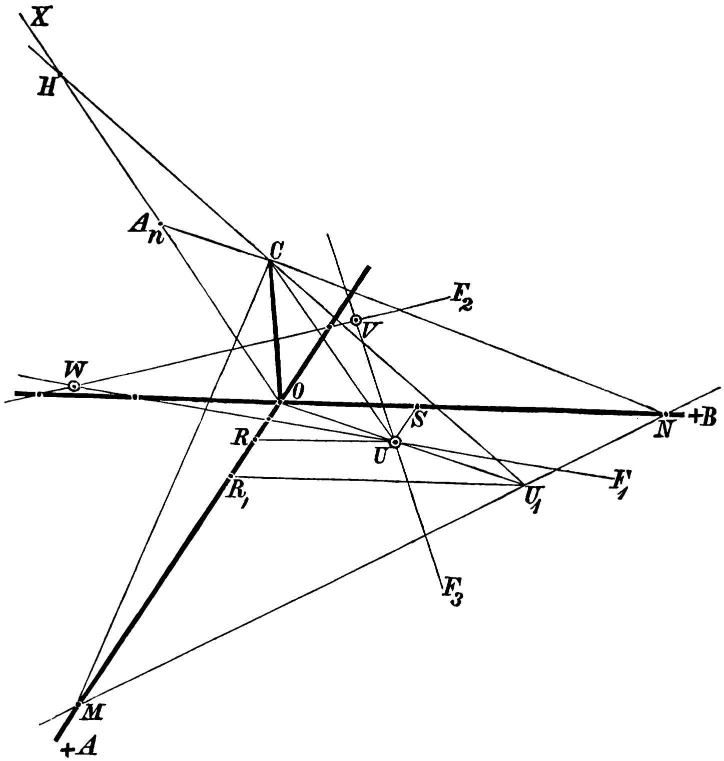
Die Aufgabe geht nun dahin, für irgend eine andere nach OA, OB, OC symbolisirte Fläche $F = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ den einem Symbol analogen Ausdruck

$$\frac{a_n}{h} : \frac{b_n}{k} : c_n = \frac{a_n}{f_1(\mu,\nu)} : \frac{b_n}{f_2(\mu,\nu)} : \frac{c_n}{f_3(\mu,\nu)}$$

abzuleiten, in welchem die Beziehungen f_1, f_2, f_3 den gegebenen Forderungen entsprechen.

Die Entwicklung gestaltet sich am einfachsten, wenn man bestimmt, dass als F_4 die Basis der ursprünglichen Axen, $c = \infty a : \infty b : c$ (mut. mut. eine in F_1, F_2, F_3 nicht vertretene Hexaïdfläche derselben) das Symbol $= a_n : b_n : c_n$ annehme.

Trägt man in die parallel-perspectivisch dargestellte Linear-Projection des Axensystemes OA, OB, OC auf eine der Basis (mut. mut. der zu F_4 gewählten Axenebne) parallele Projections-Ebne



die drei Sectionslinien der Flächen F_1, F_2, F_3, die als Octaïdflächen zu denken sind, mit den aus den Symbolen folgenden, positiven oder negativen Axenschnitten, also Sectionslinie F_1 mit $\frac{a}{\mu_1}$ in Projections-Axe OA und mit $\frac{b}{\nu_1}$ in Projections-Axe OB, u. s. w. ein, so entstehen drei Zonenpuncte

U zwischen F_1 und F_3 ,
V zwischen F_2 und F_3 ,
W zwischen F_1 und F_2 ;

verbindet man diese mit dem allen Flächenrichtungen gemeinsamen

Punct C in der Axe OC, in der Entfernung $c = 1$ von O, was in der Figur, um dieselbe möglichst einfach zu halten, nur bezüglich des Punktes U geschehen ist, so repräsentirt

CU die neue Axenrichtung OA_n,

und analog

CV die neue Axenrichtung OB_n,

CW die neue Axenrichtung OC_n.

Die Lage der Puncte U, resp. V und W, kann man durch die Coordinaten (axoparallelen Abstände)

$$OR_u = \frac{a}{m_u} = \frac{\nu_3 - \nu_1}{\nu_3\mu_1 - \nu_1\mu_3} a$$

$$OS_u = \frac{b}{n_u} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\nu_3\mu_1 - \nu_1\mu_3} b$$

$$OR_v = \frac{a}{m_v} = \frac{\nu_3 - \nu_2}{\nu_3\mu_2 - \nu_2\mu_3} a$$

$$OS_v = \frac{b}{n_v} - \frac{\mu_2 - \mu_3}{\nu_3\mu_2 - \nu_2\mu_3} b$$

$$OR_w = \frac{a}{m_w} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2\mu_1 - \nu_1\mu_2} a$$

$$OS_w = \frac{b}{n_w} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\nu_2\mu_1 - \nu_1\mu_2} b$$

angeben.

Die Basis wird nach dem Princip der Linear-Projection durch eine mit den Projections-Axen, OA und OB, parallele, durch C gehende Reductions-Ebne repräsentirt, welche keine Sectionslinie in endlichen Dimensionen besitzt; sie schneidet die neuen Axen CU, CV, CW in unendlich kleinen, also die Einheitswerthe nicht wahrnehmbar darstellenden Entfernungen; das Verhältniss der Axenschnitte untereinander bleibt aber unverändert, wenn man unter Beibehaltung der Richtung dieser Axen das Axenkreuz CU, CV, CW nach dem Ausgangspuncte O der Axen OA, OB, OC verschiebt, so dass es die Lage OX, resp. OY und OZ erhält. Alsdann schneidet die Reductions-Ebne der alten Basis die Ebnen $UOCX$ resp. $VOCY$ und $WOCZ$ in den mit OU, resp. OV und OW parallelen Linien CA_n, resp. CB_n, CC_n und sind dann die von OX, resp. OY, OZ abgeschnittenen Stücke OA_n, resp. OB_n

und OC_n die positiven Einheiten der neuen Axen, also a_n, resp. b_n und c_n, auch $= CU$, resp. $= CV$ und CW.

Jede andere Fläche $F = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ wird in die Linear-Projection eingetragen als Ebne durch C, M, N, so dass $OM = \frac{a}{\mu}$ in Axe OA, $ON = \frac{b}{\nu}$ in Axe OB genommen wird; eine solche Ebne wird die Axen OX, resp. OY und OZ in drei Abständen OH, resp. OK und OL schneiden und alsdann durch die Proportion $OH : OK : OL$, ausgedrückt in der Form

$$\frac{OH}{OA_n} \cdot OA_n : \frac{OK}{OB_n} \cdot OB_n : \frac{OL}{OC_n} \cdot OC_n = \frac{a_n}{h} : \frac{b_n}{k} : \frac{c_n}{l}$$

das Transformations-Symbol gegeben sein.

Die drei Längen OH, resp. OK und OL werden jede für sich als lineare nach der Einheit OC gemessene Stücke in den Ebnen $UOCX$, resp. $VCOY$ und $WCOZ$ nach Quenstedt wie folgt gefunden.

Wenn U die Coordinaten (axoparallelen Abstände)

$$OR_u = \frac{a}{m_u} = \frac{\nu_3 - \nu_1}{\nu_3 \mu_1 - \nu_1 \mu_3} a$$

$$OS_u = \frac{b}{n_u} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\nu_3 \mu_1 - \nu_1 \mu_3} b$$

erhält, so repräsentirt die Mittelpunctslinie OU die Säulenfläche $= \frac{a}{m_u} : \frac{b}{-n_u} : \infty c$ und besitzt der Zonenpunct U_1, den diese mit der Sectionslinie MN der allgemeinen Fläche $F = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ macht, die Coordinate

$$OR_1 = \frac{\nu + \infty n_u}{\infty m_u \nu + \infty n_u \mu} a = \frac{n_u}{m_u \nu + n_u \mu} a\,;$$

in den ähnlichen Dreiecken UOR und $U_1 OR_1$ besteht die Proportion

$$OU : OU_1 = OR : OR_1$$

oder

$$OU_1 : UU_1 = OR_1 : OR_1 - OR\,,$$

so dass

$$OU_1 : UU_1 = \frac{n_u}{m_u\nu + n_u\mu} : \frac{n_u}{m_u\nu + n_u\mu} - \frac{1}{m_u}$$

$$= n_u m_u : n_u m_u - m_u\nu - n_u\mu$$

$$= 1 \quad : 1 - \frac{\mu}{m_u} - \frac{\nu}{n_u}$$

wird; in den ähnlichen Dreiecken OHU_1 und UCU_1 ist ferner

$$OH : CU = OU_1 : UU_1$$

und daher auch, da $CU = OA_n$,

$$OH : OA_n = \frac{1}{1 - \frac{\mu}{m_u} - \frac{\nu}{n_u}} : 1 = \frac{a_n}{h} : a_n .$$

Es ist also $h = 1 - \frac{\mu}{m_u} - \frac{\nu}{n_u}$ und analog

$$k = 1 - \frac{\mu}{m_v} - \frac{\nu}{n_v}$$

$$l = 1 - \frac{\mu_w}{m_w} - \frac{\nu}{n_w}$$

und damit die Aufgabe vollständig gelöst.

Der Zonenpunct U_1, und analog V_1 und W_1, fällt entweder in den Projections-Quadranten, in welchem U, resp. V und W, belegen sind, oder in den diametral entgegengesetzten; liegt im ersteren Falle U_1 zwischen O und U, dann wird $\frac{a_n}{h}$ negativ in den Grenzen 0 und $-\infty$, liegt dagegen U_1 weiter von O als U, dann wird $\frac{a_n}{h}$ positiv in den Grenzen $+a_n$ und $+\infty$; fällt aber U_1 in den entgegengesetzten Quadranten, dann wird $\frac{a_n}{h}$ positiv in den Grenzen 0 und $+a_n$.

Man gelangt zu demselben Resultat, wenn man an Stelle der Verschiebung des Axenkreuzes CU, CV, CW in die Lage OX, OY, OZ die Ebne der allgemeinen Fläche CMN nach W transportirt, CU und CV als Projections-Axen in der Ebne CUV ansieht, und die Längen berechnet, in denen CU und CV von den durch W

gelegten Parallelen mit CM und CN getroffen wird; die Entwicklung ist aber eine ungleich umständlichere.

Um das so gefundene, nur für den Fall, dass die Basis $c = \infty a : \infty b : c$ das Symbol $= a_n : b_n : c_n$ annehme, gültige Transformations-Symbol der allgemeinen Fläche $F = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ in

$$\frac{a_n}{h} : \frac{b_n}{k} : \frac{c_n}{l} = \frac{a_n}{1 - \frac{\mu}{m_u} - \frac{\nu}{n_u}} : \frac{b_n}{1 - \frac{\mu}{m_v} - \frac{\nu}{n_v}} : \frac{c_n}{1 - \frac{\mu}{m_w} - \frac{\nu}{n_w}}$$

dahin zu verallgemeinern, dass der Voraussetzung:

$$F_4 = \frac{a}{\mu_e} : \frac{b}{\nu_e} : c \text{ gehe über in } \frac{a_{nn}}{\varphi} : \frac{b_{nn}}{\chi} : \frac{c_{nn}}{\psi}$$

genügt werde, muss auf einen bekannten Satz (vergl. V. v. Lang Lehrbuch d. Kryst. 1866 p. 31 und anderwärts) zurückgegangen werden. Wenn ohne Veränderung der Axen eine Fläche $F_4 = \frac{a_n}{h_e} : \frac{b_n}{k_e} : \frac{c_n}{l_e}$ das Symbol $= \frac{a_{nn}}{\varphi} : \frac{b_{nn}}{\chi} : \frac{c_{nn}}{\psi}$ annehmen soll, so hat man zunächst

$$a_{nn} = \frac{\varphi a_n}{h_e}, \quad b_{nn} = \frac{\chi b}{k_e}, \quad c_{nn} = \frac{\psi c_n}{l_e}$$

und daher, nachdem man das Symbol der allgemeinen Fläche $F = \frac{a_n}{h} : \frac{b_n}{k} : \frac{c_n}{l}$ in die Form

$$= \frac{1}{h} \frac{\varphi h_e}{\varphi h_e} a_n : \frac{1}{k} \frac{\chi k_e}{\chi k_e} b_n : \frac{1}{l} \frac{\psi l_e}{\psi l_e} c_n$$

gebracht hat,

$$F = \frac{1}{h} \frac{h_e}{\varphi} a_{nn} : \frac{1}{k} \frac{k_e}{\chi} b_{nn} : \frac{1}{l} \frac{l_e}{\psi} c_{nn},$$

wo $\frac{h_e}{\varphi}, \frac{k_e}{\chi}, \frac{l_e}{\psi}$ die Rolle von in allen Symbolen ein und derselben Transformation sich gleichbleibenden Coëfficienten übernehmen.

Wenn daher im Sinne unserer Aufgabe bei gleichzeitiger Veränderung der Axenlagen, die Einheiten der neuen Axen so zu normiren sind, dass die Fläche $F_4 = \frac{a}{\mu_e} : \frac{b}{\nu_e} : c$ auf die neuen Axen bezogen das Symbol $= \frac{a_{nn}}{\varphi} : \frac{b_{nn}}{\chi} : \frac{c_{nn}}{\psi}$ annehmen soll, so sind zunächst die constanten Coëfficienten

$$\Phi = \frac{h_e}{\varphi} = \frac{1 - \frac{\mu_e}{m_u} - \frac{\nu_e}{n_u}}{\varphi}$$

$$X = \frac{k_e}{\chi} = \frac{1 - \frac{\mu_e}{m_v} - \frac{\nu_e}{n_v}}{\chi}$$

$$\Psi = \frac{l_e}{\psi} = \frac{1 - \frac{\mu_e}{m_w} - \frac{\nu_e}{n_w}}{\psi}$$

zu entwickeln und lautet, diese eingesetzt, das allgemeine Transformations-Symbol einer Fläche $F = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ wie folgt:

$$\frac{a_{nn}}{h} : \frac{b_{nn}}{k} : \frac{c_{nn}}{l} = \frac{a_{nn}\Phi}{1 - \frac{\mu}{m_u} - \frac{\nu}{n_u}} : \frac{b_{nn}X}{1 - \frac{\mu}{m_v} - \frac{\nu}{n_v}} : \frac{c_{nn}\Psi}{1 - \frac{\mu}{m_w} - \frac{\nu}{n_w}}.$$

Wenn beispielsweise an den Krystallen des Axinits (vergl. G. vom Rath, Poggend. Ann. CXXII, S. 371 u. f.) nach der Aufstellung von Naumann die Flächen

$$b = (\infty a : \tfrac{1}{2} b' : c)$$

$$s = (\tfrac{1}{2} a : \infty b : c)$$

$$c = (a' : \tfrac{1}{3} b : c)$$

symbolisirt werden und nach dem Vorschlage von G. vom Rath anderseits die Symbole

$$b = (\infty a_{nn} : b_{nn} : \infty c_{nn})$$

$$s = (a_{nn} : \infty b_{nn} : \infty c_{nn})$$

$$c = (\infty a_{nn} : \infty b_{nn} : c_{nn})$$

erhalten und $l = (a : \infty b : \infty c)$ in das Symbol

$$= \left(\frac{a_{nn}}{-5} : \frac{b_{nn}}{-3} : c_{nn}\right)$$

übergehen soll, so liegt

$$\begin{aligned} \text{Axe } OA_{nn} &\text{ in Kante } b \mid c\ , \\ OB_{nn} &\text{ in Kante } s \mid c\ ; \\ OC_{nn} &\text{ in Kante } b \mid s\ ; \end{aligned}$$

ferner giebt

$$\begin{array}{llll} \text{Fläche } b & \text{die Werthe} & \mu_1 = 0\ , & \nu_1 = -2 \\ \phantom{\text{Fläche }} s & \text{desgl.} & \mu_2 = +2\ , & \nu_2 = 0 \\ \phantom{\text{Fläche }} c & \text{desgl.} & \mu_3 = -1\ , & \nu_3 = +3 \end{array}$$

und folgt aus $\mu_1 \nu_1 \mu_3 \nu_3$

$$m_u = -\tfrac{2}{5}\ ,\ n_u = -2\ ,$$

aus $\mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3$

$$m_v = +2\ ,\ n_v = +2\ ,$$

aus $\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2$

$$m_w = +2\ ,\ n_w = -2\ ;$$

während

$$\mu_e = \infty\ ,\ \nu_e = +1\ ,\ \varphi = -5\ ,\ \chi = -3\ ,\ \psi = +1$$

ist.

Die constanten Coëfficienten sind

$$\Phi = \frac{1 + \infty \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}}{-5} = -\tfrac{1}{2}\infty$$

$$X = \frac{1 - \infty \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2}}{-3} = +\tfrac{1}{6}\infty$$

$$\Psi = \frac{1 - \infty \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}}{+1} = -\tfrac{1}{2}\infty$$

und ihr Verhältniss kürzer

$$\Phi : X : \Psi = +3 : -1 : +3\ .$$

Darnach lautet das allgemeine Transformations-Symbol einer allgemeinen Fläche $F = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ in dem vorliegenden concreten Falle

$$\frac{a_{nn}}{h}:\frac{b_{nn}}{k}:\frac{c_{nn}}{l} = \frac{a_{nn}3}{1+\frac{5}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu}:\frac{b_{nn}(-1)}{1-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu}:\frac{c_{nn}3}{1-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu}$$

$$= \frac{a_{nn}}{+2+5\mu+\nu}:\frac{b_{nn}}{-6+3\mu+3\nu}:\frac{c_{nn}}{+2-\mu+\nu};$$

und geht z. B. Fläche

$$0 = 2a':\tfrac{2}{3}b:c = \frac{a}{-\frac{1}{2}}:\frac{b}{+\frac{3}{2}}:c$$

über in

$$\frac{a_{nn}}{2-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}:\frac{b_{nn}}{-6-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}}:\frac{c_{nn}}{+2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{a_{nn}}{+\frac{1}{4}}:\frac{b_{nn}}{-\frac{3}{4}}:c.$$

Die Hexaïdflächen des Axensystems OA, OB, OC erhalten, bezogen auf die Axen $OA_{nn}, OB_{nn}, OC_{nn}$ folgende Symbole:

$$F_a = \infty a:b:\infty c = a:\frac{b}{\infty}:c = \text{Axenebne } AOC \text{ giebt}$$

$$\frac{a_{nn}}{h_a}:\frac{b_{nn}}{k_a}:\frac{c_{nn}}{l_a} = \frac{a_{nn}\Phi}{1-\frac{1}{m_u}-\frac{\infty}{n_u}}:\frac{b_{nn}X}{1-\frac{1}{m_v}-\frac{\infty}{n_v}}:\frac{c_{nn}\Psi}{1-\frac{1}{m_w}-\frac{\infty}{n_w}}$$

$$= n_u a_{nn}\Phi : n_v b_{nn}X : n_w c_{nn}\Psi$$

und analog

$$F_b = a:\infty b:\infty c = \frac{a}{\infty}:b:c = \text{Axenebne } BOC \text{ giebt}$$

$$\frac{a_{nn}}{h_b}:\frac{b_{nn}}{k_b}:\frac{c_{nn}}{l_b} = m_u a_{nn}\Phi : m_v b_{nn}X : m_w c_{nn}\Psi$$

$$F_c = \infty a:\infty b:c = \frac{a}{0}:\frac{b}{0}:c = \text{Axenebne } AOB \text{ giebt}$$

$$\frac{a_{nn}}{h_c}:\frac{b_{nn}}{k_c}:\frac{c_{nn}}{l_c} = a_{nn}\Phi : b_{nn}X : c_{nn}\Psi.$$

Diese Symbole besagen anderseits, welche nach einem ersten Axensysteme $OA_{nn}, OB_{nn}, OC_{nn}$ bezeichneten Flächen zu Hexaïdflächen eines zweiten Systemes OA, OB, OC bestimmt werden müssen, wenn die Hexaïdflächen des ersten Systemes in dem zweiten die Symbole $F_1 = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c$, $F_2 = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c$, $F_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c$ und die Fläche $F_4 = \frac{a_{nn}}{\varphi} : \frac{b_{nn}}{\chi} : \frac{c_{nn}}{\psi}$ in dem zweiten System das Symbol $= \frac{a}{\mu_e} : \frac{b}{\nu_e} : c$ annehmen sollen.

Nachdem man die Flächen F_a, F_b, F_c in Symbolen nach OA_{nn}, OB_{nn}, OC_{nn} ermittelt, kann man unter Aufstellung eines anderen Transformations-Symboles alle nach OA_{nn}, OB_{nn}, OC_{nn} anderweitig symbolisirten Flächen in Symbolen nach OA, OB, OC angeben.

Unter zweimaliger Anwendung dieser Sätze kann man ein Transformations-Symbol für den allgemeinsten Fall ableiten, welcher darin besteht, dass man die Veränderungsbedingung durch die Angabe von vier neuen Symbolen für vier irgendwelche nach den bekannten Axen symbolisirten Flächen ausdrückt.

Es dürfen jedoch diese vier Flächen nicht zu dreien in einer Zone belegen sein; auch muss bei der Wahl der neuen Symbole mindestens das eine ein Octaïd-Symbol sein und das vierte die von den drei willkürlich gewählten Symbolen bedingten Limiten des concreten Falles innehalten (vergl. Monatsberichte 1879. p. 351).

Dass eben nur vier, nicht zu dreien in einer Zone liegenden Flächen hierzu geeignet sind, ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Das allgemeine Transformations-Symbol, wie es sich bis jetzt herausgestellt hat und auch in dem hier weiter verallgemeinerten Falle keine Veränderung erleiden wird, enthält acht zu bestimmende Werthe, nämlich die zwei Quotienten der Proportion $\Phi : X : \Psi$ und die sechs Werthe m_u, n_u, m_v, n_v, m_w, n_w. Jedes Symbol von nicht zu dreien in einer Zone liegenden Flächen repräsentirt zwei Momente, nämlich die zwei Quotienten seiner drei Axenschnitte; es genügen also vier nicht zu dreien in einer Zone liegende Flächen, um durch Annahme von neuen, innerhalb der zulässigen Grenzen liegenden Symbolen ein neues Axensystem zu präcisiren. Drei in einer Zone liegende Flächen repräsentiren dagegen nur fünf bestimmende Momente, weil der sechste Axenschnitt von den übrigen ableitbar ist. Von fünf Flächen in zwei Zonen ist die in beiden belegene Fläche ganz abhängig von den übrigen zu symbolisiren, so dass die Orientirung eben nur in vier Flächen beruht.

Die Aufgabe, aus vier anderweitigen, obigen Voraussetzungen entsprechenden neuen Flächenbezeichnungen ein allgemeines Transformations-Symbol abzuleiten, wird dadurch gelöst, dass man diejenigen Flächen in Form von Symbolen nach den gegebenen Axen OA, OB, OC ermittelt, welche zu neuen Axenebnen, $A_n O C_n$, $B_n O C_n$, $A_n O B_n$ gewählt, bewirken, dass die bisher $F_1 = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c$, $F_2 = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c$, $F_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c$, $F_4 = \frac{a}{\mu_4} : \frac{b}{\nu_4} : c$ symbolisirten Flächen die Symbole $F_1 = \frac{a_n}{h_1} : \frac{b_n}{k_1} : c_n$, $F_2 = \frac{a_n}{h_2} : \frac{b_n}{k_2} : c_n$ und analog F_3, F_4 annehmen.

Zu diesem Behuf wird ein Hülfs-Axensystem OA_m, OB_m, OC_m eingeführt, in welchem F_1, F_2, F_3 Hexaïdflächen sind und zwar

$$F_1 = \infty a_m : b_m : \infty c_m$$

$$F_2 = a_m : \infty b_m : \infty c_m$$

$$F_3 = \infty a_m : \infty b_m : c_m$$

während die Fläche F_4 das Symbol $= a_m : b_m : c_m$ (oder irgend ein beliebiges Octaïdsymbol) annimmt.

In dem Axensystem OA_m, OB_m, OC_m kann man die Flächen $G_1 = \frac{a_m}{\varepsilon_1} : \frac{b_m}{\eta_1} : c_m$ und analog G_2, G_3 angeben, welche zu Hexaïdflächen gewählt werden müssen, damit die Hexaïdflächen F_1, F_2, F_3 die Symbole $F_1 = \frac{a_n}{h_1} : \frac{b_n}{k_1} : c_n$, $F_2 = \frac{a_n}{h_2} : \frac{b_n}{k_2} : c_n$, $F_3 = \frac{a_n}{h_3} : \frac{b_n}{k_3} : c_n$ erhalten, während $F_4 = a_m : b_m : c_m$ in das Symbol $\frac{a_n}{h_4} : \frac{b_n}{k_4} : c_n$ übergeht.

Es kommt nun darauf an, die von den Symbolen $G_1 = \frac{a_m}{\varepsilon_1} : \frac{b_m}{\eta_1} : c$, $G_2 = \frac{a_m}{\varepsilon_2} : \frac{b_m}{\eta_2} : c$, $G_3 = \frac{a_m}{\varepsilon_3} : \frac{b_m}{\eta_3} : c$ bezeichneten Flächen, bezogen auf die ursprünglichen Axen OA, OB, OC auszudrücken.

Zu diesem Zweck muss man in dem Axensystem OA_m, OB_m, OC_m diejenigen drei Flächen $H_1 = \frac{a_m}{\varepsilon_4} : \frac{b_m}{\eta_4} : c_m$, $H_2 = \frac{a_m}{\varepsilon_5} : \frac{b_m}{\eta_5} ; c_m$, $H_3 = \frac{a_m}{\varepsilon_6} : \frac{b_m}{\eta_6} : c_m$ aufsuchen, welche, zu Axenebnen gewählt, bewirken, dass die Hexaïdflächen der Axen OA_m, OB_m, OC_m, also die

Flächen F_1, F_2, F_3 die Symbole $F_1 = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c$, $F_2 = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c$, $F_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c$ annehmen, wenn $F_4 = a_m : b_m : c_m$ in $= \frac{a}{\mu_4} : \frac{b}{\nu_4} : c$ übergeht.

Nachdem man diese Flächen gefunden, kann man ein allgemeines Transformations-Symbol aufstellen, welches die Symbole angiebt, die erhalten werden, wenn man die nach OA_m, OB_m, OC_m bezeichneten Flächen H_1, H_2, H_3 zu Axenebnen wählt mit der Maassgabe, dass $F_4 = a_m : b_m : c_m$ in das Symbol $= \frac{a}{\mu_4} : \frac{b}{\nu_4} : c$ übergeht.

Mittelst dieses Transformations-Symboles kann man dann auch die Flächen G_1, G_2, G_3 nach den Axen OA, OB, OC ausdrücken.

Da nun die Flächen G_1, G_2, G_3 die Eigenschaft haben, zu Axenebnen gewählt und mit der Maassgabe, dass $F_4 = \frac{a_n}{h_4} : \frac{b_n}{k_4} : c_n$ werde, die Flächen F_1 in $= \frac{a_n}{h_1} : \frac{b_n}{k_1} : c_n$, F_2 in $= \frac{a_n}{h_2} : \frac{b_n}{k_2} : c_n$, F_3 in $= \frac{a_n}{h_3} : \frac{b_n}{k_3} : c_n$ überzuführen, so hat man nur nöthig ein zweites Transformations-Symbol unter Zugrundelegung dieser Verhältnisse aufzustellen, um die gestellte Aufgabe zu lösen.

Da dieses zweite Transformations-Symbol gleichfalls seinen Ausgang nimmt von drei nach OA, OB, OC symbolisirten Flächen, die als Axenebnen für ein neues System dienen sollen, während eine vierte Fläche in diesem neuen System ein Octaïd-Symbol annimmt, so wird besagtes zweites Transformations-Symbol, wie oben, eine Form:

$$\frac{a_n}{h} : \frac{b_n}{k} : c_n = \frac{a_n . \Phi}{1 - \frac{\mu}{m_u} - \frac{\nu}{n_u}} : \frac{b_n . \mathrm{X}}{1 - \frac{\mu}{m_v} - \frac{\nu}{n_v}} : \frac{c_n . \Psi}{1 - \frac{\mu}{n_w} - \frac{\nu}{n_w}}$$

besitzen, was man auch

$$= \frac{a_n}{D_1\mu + E_1\nu + F_1} : \frac{b_n}{O_1\mu + P_1\nu + Q_1} : \frac{c_n}{X_1\mu + Y_1\nu + Z_1}$$

und mit Rücksicht auf die Proportionalität des Ausdruckes

$$= \frac{a_n}{D\mu + E\nu + F} : \frac{b_n}{O\mu + P\nu + Q} : \frac{c_n}{X\mu + Y\nu + 1}$$

schreiben kann, so dass dasselbe acht Coëfficienten D, E, F, O, P, Q, X, Y enthält, welche aus den Transformations-Bedingungen hergeleitet werden müssen.

Man kann dieselben nun auch nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten direct aus den acht Gleichungen finden, welche in den vier neuen Symbolen enthalten sind, die als Veränderungs-Bedingung vier nach den gegebenen Axen bekannten Flächen beigelegt werden.

Wenn $F_1 = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c$ übergehen soll in $= \frac{a_n}{h_1} : \frac{b_n}{k_1} : c_n$, so muss

$$\frac{a_n}{h_1} : \frac{b_n}{k_1} : c_n = \frac{a_n}{D\mu_1 + E\nu_1 + F} : \frac{b_n}{O\mu_1 + P\nu_1 + Q} : \frac{c_n}{X\mu_1 + Y\nu_1 + 1}$$

werden, und

$$\frac{a_n(X\mu_1 + Y\nu_1 + 1)}{c_n(D\mu_1 + E\nu_1 + F)} = \frac{a_n}{h_1 c_n} ,$$

$$\frac{b_n(X\mu_1 + Y\nu_1 + 1)}{c_n(O\mu_1 + P\nu_1 + Q)} = \frac{b_n}{k_1 c_n}$$

oder

$$(1) \qquad D\mu_1 + E\nu_1 + F = h_1(X\mu_1 + Y\nu_1 + 1) ,$$

$$(2) \qquad O\mu_1 + P\nu_1 + Q = k_1(X\mu_1 + Y\nu_1 + 1)$$

sein, und analog

$$(3) \qquad D\mu_2 + E\nu_2 + F = h_2(X\mu_2 + Y\nu_2 + 1) ,$$

$$(4) \qquad O\mu_2 + P\nu_2 + Q = k_2(X\mu_2 + Y\nu_2 + 1) ,$$

$$(5) \qquad D\mu_3 + E\nu_3 + F = h_3(X\mu_3 + Y\nu_3 + 1) ,$$

$$(6) \qquad O\mu_3 + P\nu_3 + Q = k_3(X\mu_3 + Y\nu_3 + 1) ,$$

$$(7) \qquad D\mu_4 + E\nu_4 + F = h_4(X\mu_4 + Y\nu_4 + 1) ,$$

$$(8) \qquad O\mu_4 + P\nu_4 + Q = k_4(X\mu_4 + Y\nu_4 + 1) .$$

In der That gelingt auch die Auflösung dieser Gleichungen nach D, E, F, O, P, Q, X, Y ohne Schwierigkeit und zwar, wenn dieselben auf einen concreten Fall angewendet werden, mit einem geringeren Zahlenaufwand, als ihn der systematische, vorhin verfolgte Weg erfordert.

In den besonderen Fällen, wo ein Theil der concurrirenden Symbole die Form von Hexaïd- und Dodecaïd-Symbolen hat, sind einzelne der Coëfficienten direct aus den Gleichungen abzulesen.

Geht man, um bei dem oben gewählten Beispiele zu bleiben, von der Transformation

(Naumann) (vom Rath)

$$b = \frac{a}{0} : \frac{b}{-2} : c \text{ in } = \infty a_n : b_n : \infty c_n = \frac{a_n}{+1} : \frac{b_n}{\infty} : c_n$$

$$s = \frac{a}{+2} : \frac{b}{0} : c \text{ in } = a_n : \infty b_n : \infty c_n = \frac{a_n}{\infty} : \frac{b_n}{+1} : c_n$$

$$c = \frac{a}{-1} : \frac{b}{+3} : c \text{ in } = \infty a_n : \infty b_n : c_n = \frac{a_n}{0} : \frac{b_n}{0} : c_n$$

$$l = \frac{a}{\infty} : \frac{b}{+1} : c \text{ in } = \frac{a_n}{-5} : \frac{b_n}{-3} : c_n$$

aus, so hat man

$$\begin{array}{llll} \mu_1 = 0\,, & \nu_1 = -2 & \text{und} \quad h_1 = +1\,, & k_1 = \infty \\ \mu_2 = +2\,, & \nu_2 = 0 & \phantom{\text{und}} \quad h_2 = \infty\,, & k_2 = +1 \\ \mu_3 = -1\,, & \nu_3 = +3 & \phantom{\text{und}} \quad h_3 = 0\,, & k_3 = 0 \\ \mu_4 = \infty\,, & \nu_4 = +1 & \phantom{\text{und}} \quad h_4 = -5\,, & k_4 = -3 \end{array}$$

und lauten die Gleichungen:

$$(1) \qquad 0D - 2E + F = 0X - 2Y + 1\,,$$

$$(2) \qquad 0O - 2P + Q = \infty(0X - 2Y + 1)\,,$$

$$(3) \qquad +2D + 0E + F = \infty(+2X + 0Y + 1)\,,$$

$$(4) \qquad +2O - 0P + Q = +2X - 0Y + 1\,,$$

$$(5) \qquad -D + 3E + F = 0(-X + 3Y + 1)\,,$$

$$(6) \qquad -O + 3P + Q = 0(-X + 3Y + 1)\,,$$

$$(7) \qquad \infty D + E + F = -5(\infty X + Y + 1)\,,$$

$$(8) \qquad \infty O + P + Q = -3(\infty X + Y + 1)\,.$$

Es folgt unmittelbar

aus (2): $0 = -2Y + 1\,,\ Y = +\frac{1}{2}\,,$

aus (3): $0 = +2X + 1\,,\ X = -\frac{1}{2}\,,$

aus (7): $D = -5X\,,\ D = +\frac{5}{2}\,,$

aus (8): $O = -3X\,,\ O = +\frac{3}{2}\,,$

dann aus (1)(5): $-2E + F = -2Y + 1 = -1 + 1 = 0$

$+3E + F = +D = +\frac{5}{2}$

und somit $+5E = +\frac{5}{2}\,,\ E = +\frac{1}{2}$

und $-1 + F = 0\,,\ F = +1\,,$

ferner giebt (4): $2O + Q = 2X + 1$

oder $3 + Q = -1 + 1 = 0\,,\ Q = -3$

und (6): $3P + Q = O$

oder $3P - 3 = +\frac{3}{2}\,,\ P = +\frac{3}{2}\,;$

darnach lautet das Transformations-Symbol

$$\frac{a_n}{+\frac{5}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + 1} : \frac{b_n}{+\frac{3}{2}\mu + \frac{3}{2}\nu - 3} : \frac{c_n}{-\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + 1}$$

oder

$$\frac{a_n}{+2 + 5\mu + \nu} : \frac{b_n}{-6 + 3\mu + 3\nu} : \frac{c_n}{2 - \mu + \nu}.$$

Wenn bei einer Gattung des monoklinischen Krystallisations-Systemes ein Wechsel der Axenebnen ohne den Character der Symmetrie zu ändern eintreten soll, so muss die Symmetrie-Ebne als Axenebne beibehalten, die Wahl der neuen Axenebnen $B_n O C_n$ und $A_n O C_n$ aus der Zahl der der Axe OB parallelen Flächen erfolgen, d. h. derjenigen Flächen, welche, bezogen auf die alten

Axen, Symbole von der Form $= \frac{a}{\mu} : \infty b : c$ besitzen.

Aus diesem Grunde wird man gemeinlich die Veränderungs-Bedingungen durch die directe Bezeichnung der zu den neuen Axenebnen $B_n O C_n$ und $A_n O C_n$ bestimmten Flächen ausdrücken; es werden dann dieselben

$$F_1 = \infty a : b : \infty c \text{ wird } = \infty a_n : b : \infty c_n$$

$$F_2 = \frac{a}{\mu_2} : \infty b : c \qquad a_n : \infty b_n : \infty c_n$$

$$F_3 = \frac{a}{\mu_3} : \infty b : c \qquad \infty a_n : \infty b_n : c_n$$

$$F_4 = \frac{a}{\mu_e} : \frac{b}{\nu_e} : c \qquad \frac{a_n}{\varphi} : \frac{b_n}{\chi} : \frac{c_n}{\chi}$$

lauten.

Aus

$$\mu_1 = +1 \ , \ \nu_1 = \infty$$

$$\mu_2 = +\mu_2 \ , \ \nu_2 = 0$$

$$\mu_3 = +\mu_3 \ , \ \nu_3 = 0$$

folgt

$$m_u = +\mu_3 \ , \ n_u = +\frac{\mu_3 \infty}{\mu_3 - 1}$$

$$m_v = \infty(\mu_2 - \mu_3) \ , \ n_v = 0$$

$$m_w = +\mu_2 \ , \ n_w = +\frac{\mu_2 \infty}{\mu_2 - 1} \ ;$$

das Argument

$$\frac{1}{1 - \frac{\mu}{m_u} - \frac{\nu}{n_u}} \text{ geht dann über in } \frac{\mu_3}{\mu_3 - \mu}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{\mu}{m_v} - \frac{\nu}{n_v}} \qquad \text{dsgl.} \qquad \text{in } \frac{1}{-\infty \nu}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{\mu}{m_w} - \frac{\nu}{n_w}} \qquad \text{dsgl.} \qquad \text{in } \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu}$$

und lautet das Transformations-Symbol einer Fläche $F = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ alsdann

$$\frac{a_n}{h} : \frac{b_n}{k} : \frac{c_n}{l} = \frac{\mu_3}{\mu_3 - \mu} \frac{\mu_3 - \mu_e}{\mu_3} \frac{a_n}{\varphi} : \frac{-\infty \nu_e}{-\infty \nu} \frac{b_n}{\chi} : \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu} \frac{\mu_2 - \mu_e}{\mu_2} \frac{c_n}{\psi}$$

$$= \frac{1}{\mu_3 - \mu} \frac{\mu_3 - \mu_e}{\varphi} a_n : \frac{1}{\nu} \frac{\nu_e}{\chi} b_n : \frac{1}{\mu_2 - \mu} \frac{\mu_2 - \mu_e}{\psi} c_n ,$$

wo $\frac{\mu_3 - \mu_e}{\varphi}$, $\frac{\nu_e}{\chi}$, $\frac{\mu_2 - \mu_e}{\psi}$ die constanten Coëfficienten sind.

Wird lediglich die Basis verändert, so wird zu F_2 die bisherige Querfläche $= a : \infty b : \infty c = \frac{a}{\infty} : b : c$ gewählt, so dass $\mu_2 = \infty$ zu setzen ist; dann lautet das Transformations-Symbol:

$$\frac{a_n}{h} : \frac{b_n}{k} : c_n = \frac{1}{\mu_3 - \mu} \frac{\mu_3 - \mu_e}{\varphi} a_n : \frac{1}{\nu} \frac{\nu_e}{\chi} b_n : \frac{1}{\psi} c_n .$$

Buchdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften (G. Vogt).
Berlin, Universitätsstr. 8.