[Auszug aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.]

Hr. Websky las folgende Abhandlung:

Über die Wahl der Projections-Axen in einer Normalen-Projection für triklinische Krystalle.

In meinem Vortrage in der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse am 17. Jan. 1876 über die Relation der Winkel zwischen vier Krystallflächen in einer Zone etc. bin ich von dem Satze ausgegangen, dass in einer Neumann'schen Normalen-Projection eines triklinischen Krystalls die planimetrischen Projections-Axen so gewählt werden können, dass die Coordinaten (— axoparallelen Abstände —) des Flächenortes einer Fläche $f = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ die Längen

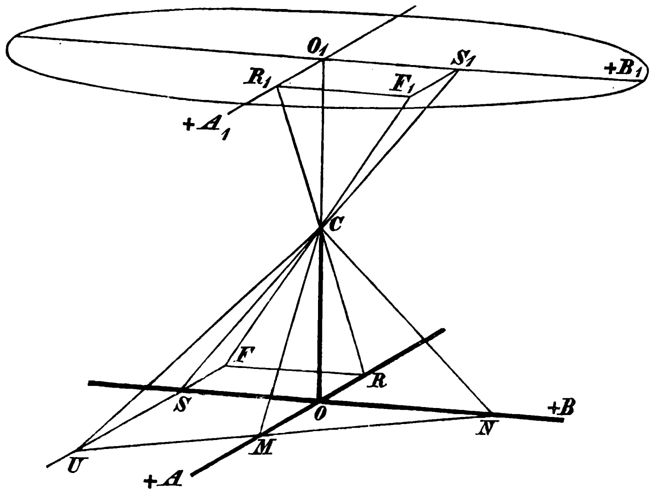
$$\frac{\mu}{a \sin\beta \sin C}, \quad \frac{\nu}{b \sin\alpha \sin C}$$

erhalten, wo a, b die Einheitswerthe der Krystall-Axen OA, OB, $c = 1$ den Einheitswerth der Axe OC, α, β die Axenwinkel BOC, AOC und C der Winkel zwischen den Axenebenen AOC und BOC im positiven Octanten bedeuten.

Obgleich die Ausdehnung der Betrachtungsweise Neumann's (Beiträge der Krystallonomie. 1823.) auf schiefwinklige Krystall-Axen keine besondere Schwierigkeiten darbietet, ist dieselbe doch bisher nicht durchgeführt worden und scheint es mir daher nothwendig den damals von mir benützten Ausgangspunct näher zu begründen.

Aus den Ausführungen Neumann's geht hervor, dass bei rechtwinkligen Axen die Coordinaten des Flächenortes einer Fläche $f = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ die Längen $\frac{\mu}{a}$, $\frac{\nu}{b}$ erhalten, wenn man den Abstand der Projectionsebne vom Ausgangspuncte der Nomalen $= c = 1$ setzt, die Projectionsebne senkrecht auf die Axe OC legt und als Projections-Axen die Normalen auf die beiden mit OC parallelen, hier vertical gestellten Hexaïdflächen wählt.

Fig. 1.



Durch die in den rechtwinkligen Axen OA, OB, OC (Fig. 1) belegenen Abstände $OM = \frac{a}{\mu}$, $ON = \frac{b}{\nu}$, $OC = 1$ sei die Ebne MCN gelegt, welche dem Flächen-Symbol $f = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ entsprechen wird; in dem Abstande $CO_1 = c = 1$ der Verlängerung von OC über C sei senkrecht auf OC die durch den Unendlichkeits-Kreis angedeutete Projections-Ebne gelegt; die durch C auf CMN senkrecht gelegte Normale treffe die Projections-Ebne im Puncte F_1 und in entgegengesetzter Richtung die Axenebne AOB im Puncte F.

Die als Projections-Axen dienenden aus O_1 gezogenen Normalen O_1A_1, O_1B_1 der Axenebnen BOC und AOC gehen mit OA und OB parallel und werden, da $OC = CO_1$ ist, die Coordinaten (— axoparallelen Abstände —) von F_1, nämlich F_1R_1, F_1S_1 gleich den auf die Krystallaxen bezogenen Coordinaten von F, nämlich FR, FS bis auf die entgegengesetzte Richtung vom Ausgangspuncte gleich sein, so dass die für FR, FS sich ergebenden Relationen mit Berücksichtigung des letzteren Umstandes auch für F_1R_1 und F_1S_1 gelten.

Man verlängere FS soweit nach U, dem Durchschnitt mit der Verlängerung von MN und ziehe CS, CU. Wenn CF eine Normale auf MCN ist, so steht die durch CF gehende Ebne CFU senkrecht auf MCN und sind die Winkel in $CU = 90°$.

FS ist Coordinate, parallel OA, und senkrecht auf BOC, daher die Ebne CFS senkrecht auf BOC und die Winkel in $CS = 90°$.

Dann ist NC senkrecht auf UCS und Winkel $NCS = 90°$, demnach

$$NO : OC = OC : OS\,,$$

$$\frac{b}{\nu} : 1 = 1 : -OS$$

und
$$-OS = +F_1R_1 = \frac{\nu}{b}.$$

Analog wird gefunden

$$-OR = F_1S_1 = \frac{\mu}{a}.$$

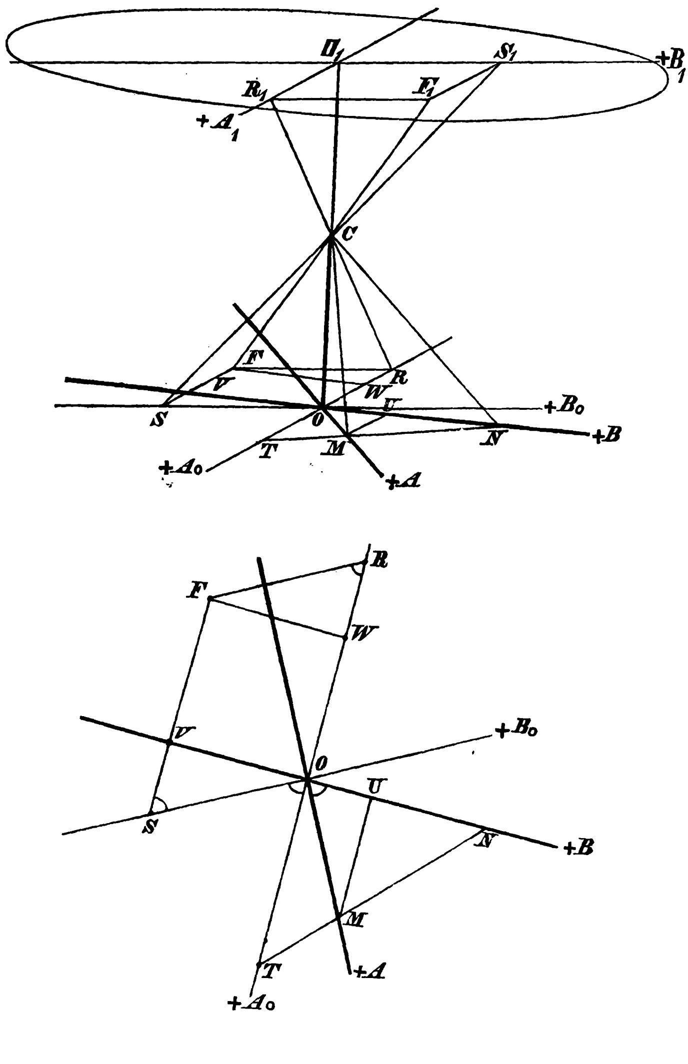
Man kann die Werthe $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ als Einheiten der Projections-Axen, μ, ν als Coëfficienten ansehen.

Um diese Betrachtung auf triklinische Axen anzuwenden, ist es zweckmässig, zunächst von einem Axen-System auszugehen, dessen Vertical-Axe OC senkrecht auf der Axenebne AOB steht, in welcher aber die Axen OA und OB den Winkel $\gamma \lesseqgtr 90°$ ein schliessen, der auch gleichzeitig die Grösse der Axenebnen-Winkels C besitzt (Fig. 2).

Die Einheitswerthe a, b, c der Axen seien wieder so ausgedrückt, dass $c = 1$ ist. Legt man nun durch die drei Axenschnitte $OM = \frac{a}{\mu}$, $ON = \frac{b}{\nu}$, $OC = 1$ eine Ebne, so entspricht dieselbe dem Symbol der Fläche $f = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$; durch den Punct O_1 in der Verlängerung der Axe OC über C um die Länge $CO_1 = 1$ gehe die durch den Unendlichkeits-Kreis angedeutete Projections-Ebne der Flächen-Normalen, deren Ausgang in C zu denken ist.

Die durch C auf die Fläche CMN gezogene Normale treffe einerseits die Ebne der Krystall-Axen OA, OB im Puncte F, anderseits die Projectionsebne im Puncte F_1.

Fig. 2.



Um den Punct F_1 nach Coordinaten (— axoparallelen Abständen —) zu bestimmen, seien aus O_1 die Linie $O_1 A_1$ als Projections-Axe senkrecht auf die Axenebne BOC gezogen und mit ihr parallel die Linie OA_0 aus O, ferner:

aus O_1 die Linie O_1B_1 als zweite Projections-Axe, senkrecht auf die Axenebne AOC und mit ihr parallel aus O die Linie OB_0; weil sowohl die Projectionsebne, als auch die Axenebne AOB senkrecht auf OC stehen, fallen die Projections-Axen O_1A_1, O_1B_1 in die Projectionsebne, die Linien OA_0, OB_0 in die genannte Axenebne.

Es sind nun die Coordinaten von F_1, nämlich

$$F_1S_1, \text{ parallel } O_1A_1,$$
$$F_1R_1, \text{ parallel } O_1B_1,$$

durch die Elemente der Krystallgattung und die Axenschnitte $\frac{a}{\mu}$, $\frac{b}{\nu}$ auszudrücken.

Verlängert man die Linie CS_1 und CR_1 nach der Axenebne AOB, so treffen sie diese in den Puncten S und R der Linien OB_0 und OA_0 und zwar wird $FS = F_1S_1$ und $FR = F_1R_1$, in entgegengesetzter Richtung gemessen.

Wir verlängern MN nach T im Durchschnitt mit OA_0, ziehen MU parallel OT, FW parallel OB und bezeichnen den Durchschnitt von FS in der Axe OB mit V; weil Winkel $AOB = \gamma = C$, so ist auch

$$TOS = FSO = FRO = \gamma = C.$$

Man kann OA_0, OB, OC als ein rechtwinkliges Axensystem betrachten, auf welches bezogen die Ebene $CMN = CTN$ die Axenschnitte OT, ON, OC und F die Coordinaten $FV = OW$, $FW = OV$ erhält.

Aus der Proportion

$$OT : UM = ON : UN$$

oder

$$OT : \frac{a}{\mu}\sin C = \frac{b}{\nu} : \frac{b}{\nu} - \frac{a}{\mu}\cos C$$

folgt

$$OT = \frac{\frac{a}{\mu}\cdot\frac{b}{\nu}\sin C}{\frac{b}{\nu} - \frac{a}{\mu}\cos C}$$

und daher nach Maassgabe des für rechtwinklige Axen festgestellten:

$$OW = -\frac{\frac{b}{\nu} - \frac{a}{\mu}\cos C}{\frac{a}{\mu}\cdot\frac{b}{\nu}\sin C}, \quad OV = -\frac{\nu}{b}.$$

Die auf die Axen OA_0 und OB_0 bezogenen Coordinaten von F sind $OR = OW + WR$ und OS und zwar ist

$$OS = \frac{OV}{\sin C} = -\frac{\nu}{b.\sin C},$$

$$WR = FR\cos C = OS\cos C = -\frac{\nu.\cos C}{b\sin C}$$

und daher

$$OR = -\frac{\frac{b}{\nu} - \frac{a}{\mu}\cos C}{\frac{a}{\mu}\cdot\frac{b}{\nu}\sin C} - \frac{\nu.\cos C}{b.\sin C} = -\frac{\mu}{a\sin C};$$

daher ist auch

$$O_1R_1 = +\frac{\mu}{a\sin C}, \qquad O_1S_1 = +\frac{\nu}{b\sin C}.$$

Von einem triklinischen Axensystem OA, OB, OC mit den Axenwinkeln α, β, γ, die sämmtlich $\gtrless 90°$, gelangen wir aber zu einem Axensystem von der Art des hier vorausgesetzten, wenn wir die Axe OC beibehalten, an Stelle der Axe OA eine andere OA_r einführen, welche in der Axenebne AOC belegen und auf OC senkrecht steht, und an Stelle der Axe OB die in der Axenebne BOC belegene, auf OC Senkrechte OB_r gebrauchen; das auf die triklinischen Axen bezogene Flächensymbol $f = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ geht, bezogen auf OC und die substituirten Axen OA_r, OB_r über in das Symbol

$$\frac{1}{\mu - a\cos\beta}\cdot a\sin\beta : \frac{1}{\nu - b\cos\alpha}\cdot b\sin\alpha : c\ ,$$

Bei dieser Substitution wird die Richtung der Normalen auf die Axenebne AOC resp. $A_r OC$ einerseits, um BOC resp. $B_r OC$ andererseits nicht verändert.

Verlegen wir nun die substituirten Axen OA_r und OB_r in die bisher benützten Axen OA und OB und suchen die Werthe der Coordinaten des Flächenortes der Fläche $F = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ des triklinischen Systems, bezogen auf die Normalen $O_1 A_1$, $O_1 B_1$ der unverändert gebliebenen triklinischen Axenebnen AOC resp. $A_r OC$, BOC resp. $B_r OC$, gezogen aus O_1, als dem Puncte, wo die triklinische Axe OC die Projections-Ebne trifft, so haben wir

für μ	im	früheren	Sinne:	$\mu - a\cos\beta$
„ ν	„	„	„	$\nu - b\cos\alpha$
„ a	„	„	„	$a\sin\beta$
„ b	„	„	„	$b\sin\alpha$

des triklinischen Systemes einzusetzen, so dass nunmehr

$$O_1 R_1 = \frac{\mu - a\cos\beta}{a\sin\beta\sin C} = \frac{\mu}{a\sin\beta\sin C} - \frac{\cot\beta}{\sin C},$$

$$O_1 S_1 = \frac{\nu - b\cos\alpha}{b\sin\alpha\sin C} = \frac{\nu}{b\sin\alpha\sin C} - \frac{\cot\alpha}{\sin C}$$

wird.

Da nun aber auf diese Weise die Coordinaten aller Flächenorte die von den Coëfficienten μ, ν unabhängigen Summanden: $-\frac{\cot\beta}{\sin C}, -\frac{\cot\alpha}{\sin C}$ erhalten, so kann man dieselben dadurch beseitigen, dass man den Ausgangspunkt der Projections-Axen um die Stücke $-\frac{\cot\beta}{\sin C}, -\frac{\cot\alpha}{\sin C}$ also auf einen Punct O_2 verschiebt, der die Coordinaten

$$O_1 R_0 = -\frac{\cot\beta}{\sin C}, \quad O_1 S_0 = -\frac{\cot\alpha}{\sin C}$$

besitzt.

Nach dem so verschobenen Projections-Axensystem werden nun die Coordinaten des Flächenortes einer allgemeinen Fläche $f = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$

$$O_2R_2 = \frac{\mu}{a \sin\beta \sin C}, \quad O_2S_2 = \frac{\nu}{b \sin\alpha \sin C}$$

lauten, in welchen hinwiederum die Werthe

$$\frac{1}{a \sin\beta \sin C}, \quad \frac{1}{b \sin\alpha \sin C}$$

die Rolle der Einheiten der Projections-Axen übernehmen, während die mit ihnen zu verbindenden Coëfficienten, wie bei den rechtwinkligen Krystallaxen lediglich in den Reciproken der Coëfficienten der gleichnamigen Krystall-Axen-Schnitte bestehen.

Die so gewählten Projections-Axen schliessen nach der posiven Seite hin den Winkel $180° - C$ ein.

Für die Basis $c = \infty a : \infty b : c = \frac{a}{0} : \frac{b}{0} : c$ wird

$$O_2R_2 = \frac{0}{a.\sin\beta \sin C}, \quad O_2S_2 = \frac{0}{b.\sin\alpha \sin C};$$

der Ausgangspunkt der verschobenen Projections-Axen ist daher das Flächenort der Basis.

Für die Dodecaïdfläche $e = \frac{a}{\mu} : \infty b : c$ wird

$$O_2R_2 = \frac{\mu}{a \sin\beta \sin C}, \quad O_2S_2 = \frac{0}{b \sin\alpha \sin C}$$

und für die Dodecaïdfläche $d = \infty a : \frac{b}{\nu} : c$ wird

$$O_2R_2 = \frac{0}{a \sin\beta \sin C}, \quad O_2S_2 = \frac{\nu}{b \sin\alpha \sin C}.$$

Man kann also die so beschaffenen Projections-Axen auch definiren als zusammenfallend mit den Zonenlinien der nicht mit der Axe OC parallelen Hexaïdzonen, für welche der Mittelpunkt des Unendlichkeits-Kreises die Coordinaten

$$+\frac{\cot\beta}{\sin C} \quad \text{in Axe } O_1A_1$$

$$+\frac{\cot\alpha}{\sin C} \quad \text{in Axe } O_1B_1$$

erhält, alles unter der Voraussetzung, dass die Länge = 1 den Normalabstand der Projectionsebne vom Ausgangspunkt der Flächen-Normalen bedeutet.

Unter so bewandten Verhältnissen haben die Distanzen von drei Flächenorten in einer Zonenlinie das Verhältniss

$$F_1F_2 : F_1F_5 = \mu_1 - \mu_2 : \mu_1 - \mu_3 = \nu_1 - \nu_2 : \nu_1 - \nu_3$$

wie dies loco citato angenommen wurde.

Ich will noch hinzufügen, dass die Verwendung der hier entwickelten Coordinaten-Ausdrücke bei der correcten Ausführung einer stereographischen Kugel-Projection erhebliche Vortheile darbietet. Einmal sind für diese die Flächenorte der nicht sehr gegen die Basis geneigten Flächen leicht zu finden, indem die Verbindungslinie des Flächenortes F_1 mit dem Puncte O_1, d. h. Mittelpunkt des Unendlichkeits-Kreises — die Richtung des Polabstandes für das entsprechende Flächenort der Kugel-Projection giebt, und das letztere in ihr lediglich durch das Ziehen der Sehlinie gefunden wird. Anderseits hat aber die Verbindungslinie von F_1 mit O_2, d. h. dem verschobenen Ausgangspunct der Projections-Axen, die Richtung, welche in der Kugel-Projection der Diameter zwischen den Flächenorten der Säule der proportionalen Axenschnitte in OA, OB besitzt, den man sodann unmittelbar der Construction des Zonenbogens zu Grunde legen kann.

Buchdruckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften (G. Vogt).
Berlin, Universitätsstr. 8.