[Auszug aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.]

3. April 1879. Gesammtsitzung der Akademie.

Hr. Websky las folgende Abhandlung:

Über Krystall-Berechnung im triklinischen System.

In der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 17. Jan. 1876 habe ich für die Relation der Normalenbögen zwischen den Krystallflächen einer Zone und deren Symbolen eine Reihe Formeln, (1) — (17), aufgestellt, auf welche ich hier Bezug nehme.

Es lässt sich mit Hülfe derselben der Zahlenaufwand, den die Berechnung der triklinischen Krystalle erfordert, weiter reduciren, als dies eine andere hierfür in Vorschlag gebrachte Methode bewirkt. Der in Anspruch genommene Vortheil wird dadurch erreicht, dass die Rechnung ausschliesslich zonenweise geführt wird, also in Wegen, deren sich die empirische Praxis nothwendig, die morphologische Darstellung mit Vortheil bedient, wie dies Ernst Weiss in seiner Entwicklung des Quarz-Systemes (Abhandl. der naturforsch. Ges. in Halle; V. 2. 1860) für hexagonale Axen durchgeführt hat.

Die Aufgaben der Krystall-Berechnung zerfallen in drei Gruppen:

I. Berechnung der Normalenbögen aus gegebenen Elementen und Symbolen.

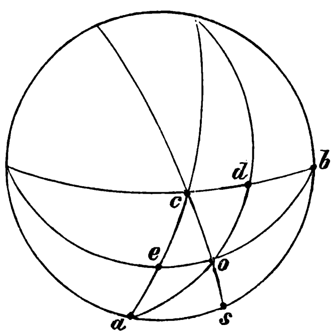
II. Berechnung der Symbole aus gegebenen Elementen, gemessenen Normalenbögen und Consequenzen des singulären Zonenverbandes.

III. Berechnung der Elemente aus gemessenen Normalenbögen, zwischen theils unabhängig, theils limitirt symbolisirten Flächen.

I. Behufs Berechnung der Normalenbögen aus gegebenen Elementen und Symbolen werden als allgemeine Vorbereitung fünf Zonengleichungen und zwar drei derselben direct aus den Elementen abgeleitet; von diesen fünf Zonengleichungen dienen immer drei dazu die Gleichung für eine beliebige Zone zu finden.

Sei in der stereographischen Kugel-Projection — Fig. 1 —

Fig. 1.



a das Flächenort für		$a = a : \infty b : \infty c$,
b	desgl.	$b = \infty a : b : \infty c$,
c	desgl.	$c = \infty a : \infty b : c$,
d	desgl.	$d = \infty a : b : c$,
e	desgl.	$e = a : \infty b : c$,
s	desgl.	$s = a : b : \infty c$,
o	desgl.	$o = a : b : c$,

bezogen auf die Axen OA, OB, OC und deren Einheitswerthe a, b, c, so ausgedrückt, dass $a : b : 1$; die Axenwinkel α, β, γ und Axenebnenwinkel A, B, C seien für den positiven Octanten: Vorn-rechts-oben gegeben, so dass

$$\text{Bogen}\quad ac + B = bc + A = ab + C = 180^\circ$$

und

$$\text{Winkel}\quad cab + \alpha = cba + \beta = acb + \gamma = 180^\circ$$

ist.

Um die Zonengleichung $[aec]$ für die durch a und c gehende Hexaïd-Zone zu entwickeln, setzt man in die für die Winkelrechnung ab Säulenfläche — hier a — geltende Gleichung (9):

$$\frac{\cot\eta_1 - \cot\eta_2}{\cot\eta_1 - \cot\eta_3} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_3}$$

ein

$$\eta_1 = ae \ , \ \eta_2 = ac = 180^\circ - B$$

$$\mu_1 = 1 \ , \ \mu_2 = 0 \ ,$$

so dass

$$\frac{\cot ae + \cot B}{\cot ae - \cot\eta_3} = \frac{1}{1 - \mu_3}$$

oder

$$\mu_3(\cot ae + \cot B) - \cot B = \cot\eta_3$$

erhalten wird, wo μ_3 sich auf das Symbol irgend einer Fläche $e_3 = \frac{a}{\mu_3} : \infty b : c$ bezieht und η_3 der Bogen ae_3 ist.

Um $\cot ae$ abzuleiten, construire man ein Prisma aus den Axenebnen BOC, AOB und der Ebne der Fläche $e = a : \infty b : c$, letztere gelegt durch den Punct der Axe OC, welcher vom Mittelpuncte O um die Entfornung $= 1$ entfernt ist; durch O lege man einerseits die Axenebne AOC und eine Ebne senkrecht auf die Axe OB; alsdann schliessen die Intersectionen der letzteren Ebne mit der Axenebne BOC und der Ebne von e den Normalenbogen ae ein, so dass

$$\operatorname{tg} ae = \frac{a \sin\gamma \sin B}{\sin\alpha - a \sin\gamma \cos B}$$

oder

$$\cot ae = \frac{\sin\alpha}{a \sin\gamma \sin B} - \cot B$$

wird; diesen Werth in die Zonengleichung eingesetzt, ergiebt

$$\cot\eta_3 = \mu_3 \frac{\sin\alpha}{a \sin\gamma \sin B} - \cot B \ ; \quad \ldots\ldots \quad [aec]$$

wenn $D = \frac{\sin\alpha}{a \sin\gamma \sin B}$, $E = -\cot B$ gesetzt wird, hat man auch $\cot\eta_3 = \mu_3 D + E \ , \ \frac{\cot\eta_3 - E}{D} = \mu_3 .$

Analog findet man

$$\cot\eta_3 = \nu_3 \frac{\sin\beta}{b \sin\gamma \sin A} - \cot A \ , \quad \ldots\ldots \quad [bdc]$$

wo ν_3 sich auf das Symbol einer Fläche $d_3 = \infty a : \frac{b}{\nu_3} : c$ bezieht und η_3 der Bogen bd_3 ist.

Für die Säulenzone wird

$$\operatorname{tg} as = \frac{a \sin\beta \sin C}{b \sin\alpha - a \sin\beta \cos C}$$

oder

$$\cot as = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta \sin C} - \cot C,$$

und eingesetzt in die Gleichung (16):

$$\frac{\mu_3}{\nu_3} = \frac{\cot\eta_2 - \cot\eta_3}{\cot\eta_2 - \cot\eta_1},$$

wo $\frac{\mu_3}{\nu_3}$ sich auf das Symbol einer Fläche $s_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : \infty c$ bezieht, η_1 den Bogen as, $\eta_2 = 180° - C$ und η_3 den Bogen as_3 bedeutet, ergiebt sich

$$\frac{\mu_3}{\nu_3} = \frac{-\cot C - \cot\eta_3}{-\cot C - \dfrac{b \sin\alpha}{a \sin\beta \sin C} + \cot C}$$

oder

$$\cot\eta_3 = \frac{\mu_3}{\nu_3} \cdot \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta \sin C} - \cot C \quad . \; . \; . \; . \; . \quad [asb]$$

Zu den Vorbereitungen bedarf man noch zwei der Zonen $[aod]$, $[soc]$, $[boe]$, und zwar sollen die beiden erstgenannten hier berücksichtigt werden.

Setzt man für die Zonengleichung $[soc]$ in dem Ausdruck (9):

$$\frac{\cot\eta_1 - \cot\eta_2}{\cot\eta_1 - \cot\eta_3} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_3} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 - \nu_3}$$

$$\eta_1 = so \;,\; \eta_2 = sc,$$

so wird

$$\mu_1 = 1 \;,\; \mu_2 = 0$$

oder auch

$$\nu_1 = 1 \;,\; \nu_2 = 0$$

und

$$\frac{\cot so - \cot sc}{\cot so - \cot \eta_3} = \frac{1}{1 - \mu_3} = \frac{1}{1 - \nu_3}$$

oder

$$\cot \eta_3 = \mu_3 (\cot so - \cot sc) + \cot sc \quad \ldots \quad [soc]$$

wo $\mu_3 = \nu_3$ sich auf das Symbol einer Octaïdfläche $o_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\mu_3} : c$ bezieht und $\eta_3 = so_3$ ist.

Setzen wir ferner für die Zone $[aod]$ analog

$$\eta_1 = ao \ , \ \eta_2 = ad \ , \text{ so wird } \mu_1 = 1 \ , \ \mu_2 = 0 \text{ und}$$

$$\frac{\cot ao - \cot ad}{\cot ao - \cot \eta_4} = \frac{1}{1 - \mu_4}$$

oder

$$\cot \eta_4 = \mu_4 (\cot ao - \cot ad) + \cot ad , \quad \ldots \quad [aod]$$

wo sich μ_4 auf das Symbol einer Fläche $o_4 = \frac{a}{\mu_4} : b : c$ bezieht und η_4 der Bogen ao_4 ist.

Der Bogen sc und der Winkel csa werden im Dreieck acs aus $ac = 180° - B$, $cas = 180° - \alpha$ und as,

der Bogen ad und der Winkel dab dagegen im Dreieck adb aus $ab = 180° - C$, $cba = 180° - \beta$ und bd gefunden; für bd gilt nämlich nach $[bdc]$, da hier $\nu_3 = 1$ ist

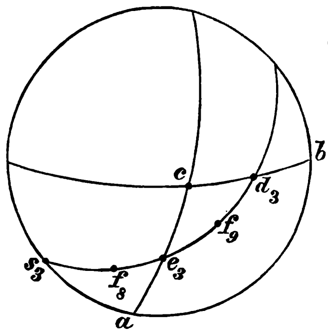
$$\cot bd = \frac{\sin \beta}{b \sin \gamma \sin A} - \cot A.$$

Im Dreieck aos sind jetzt bekannt as, $oas = dab$, csa; daraus folgen die Bögen ao und so.

Alle anderen Zonen zerfallen in solche, zu denen eine Hexaïdfläche gehört, und in solche, zu denen keine Hexaïdfläche gehört.

Wenn in der von irgend zwei Flächen $f_8 = \frac{a}{\mu_8} : \frac{b}{\nu_8} : c$, $f_9 = \frac{a}{\mu_9} : \frac{b}{\nu_9} : c$ bestimmten Zone keine Hexaïdfläche belegen ist, so finden sich in ihr — Fig. 2 —.

Fig. 2.



eine Säulenfläche $s_3 = \frac{a}{m} : -\frac{b}{n} : \infty c$

resp: $\bar{s}_3 = -\frac{a}{m} : \frac{b}{n} : \infty c$

eine Dodecaïdfläche $e_3 = \frac{a}{m} : \infty b : c$

und $d_3 = \infty a : \frac{b}{n} : c$,

wo

$$m = \frac{\nu_9 \mu_8 - \nu_8 \mu_9}{\nu_9 - \nu_8}, \quad n = \frac{\nu_9 \mu_8 - \nu_8 \mu_9}{\mu_8 - \mu_9}$$

bedeutet.

Für diese Zone gilt, bei Rechnung der Winkel ab s_3

$$\frac{\cot \eta_1 - \cot \eta_2}{\cot \eta_1 - \cot \eta_3} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_3} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 - \nu_3}$$

und zwar, wenn man $\eta_1 = s_3 e_3$, $\eta_2 = s_3 d_3$ und demgemäss

$$\mu_1 = m \; , \; \mu_2 = 0 \; , \; \nu_1 = 0 \; , \; \nu_2 = n$$

setzt,

$$\frac{\cot s_3 e_3 - \cot s_3 d_3}{\cot s_3 e_3 - \cot \eta_3} = \frac{m}{m - \mu_3} = \frac{-n}{-\nu_3} \text{ oder } \frac{n}{\nu_3}$$

wo μ_3, ν_3 sich auf das Symbol einer Fläche der Zone $[s_3 e_3 d_3]$ $f_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c$ bezieht, welche der Bedingung

$$\frac{\mu_8 - \mu_9}{\mu_8 - \mu_3} = \frac{\nu_8 - \nu_9}{\nu_8 - \nu_3}$$

entspricht, und wo η_3 den Bogen $s_3 f_3$ bedeutet.

Verfolgt man die Rechnung nach dem Werthe $= \frac{n}{\nu_3}$ — (bei anderer Lage der Zone erhält der Ausdruck der anderen Axenrichtung die Form $\frac{m}{\mu_3}$) — so wird

$$\cot \eta_3 = \cot s_3 e_3 - \nu_3 \frac{\cot s_3 e_3 - \cot s_3 d_3}{n}.$$

Gefunden wird der Bogen $s_3 e_3$ und der Winkel $e_3 s_3 a$ im Dreieck $a s_3 e_3$, worin — mut. mut. —

$$as_3 = 180^\circ - a\bar{s}_3 \text{ aus } [asb]$$
$$ae_3 \text{ aus } [aec] \quad \text{und} \quad s_3ae = \alpha$$

bekannt sind und Bogen s_3d_3 im Dreieck s_3d_3b, worin

$$s_3b = s_3a + ab \ , \ bd_3 \text{ aus } [bdc] \text{ und}$$
$$d_3s_3a = e_3s_3a.$$

Setzt man in die Gleichung $[s_3e_3d_3]$ für ν_3 successive ν_8 und ν_9 ein, so findet man in γ_3 successive den Bogen s_3f_8 und s_3f_9, und sodann als Differenz den Bogen f_8f_9.

Wenn anderseits in der von den Flächen $f_8 = \frac{a}{\mu_8} : \frac{b}{\nu_8} : c$ und $f_9 = \frac{a}{\mu_9} : \frac{b}{\nu_9} : c$ bestimmten Zone eine Hexaïd-Fläche belegen ist, so befindet sich ausser dieser nur noch eine Dodecaïdfläche; zur Bildung der Zonengleichung muss dann ausser einer Gleichung der Gruppe $[aec]$, $[bdc]$, $[asb]$ noch eine der beiden Gleichungen $[soc]$, $[aod]$ herbeigezogen werden.

Der berührte Fall tritt ein; wenn

$$\mu_8 = \mu_9 \quad \text{oder} \quad \nu_8 = \nu_9 \quad \text{oder} \quad \frac{\mu_8}{\nu_8} = \frac{\mu_9}{\nu_9}$$

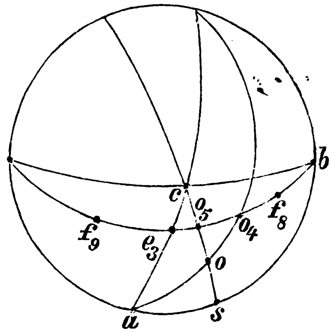
ausfällt, indem alsdann die Zonenpuncts-Coordinaten

$$\frac{a}{m} = \frac{\nu_9 - \nu_8}{\nu_9\mu_8 - \nu_8\mu_9} \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = \frac{\mu_8 - \mu_9}{\nu_9\mu_8 - \nu_8\mu_9} \cdot b$$

die Werthe $\frac{a}{\mu_8}, \frac{b}{\infty}$ oder $\frac{a}{\infty}, \frac{b}{\nu_8}$ oder $\pm\frac{\infty a}{\mu_8}, \mp\frac{\infty b}{\nu_8}$ erhalten.

Lauten die Symbole der beiden Flächen $f_8 = \frac{a}{\mu_8} : \frac{b}{\nu_8} : c$, $f_9 = \frac{a}{\mu_8} : \frac{b}{\nu_9} : c$, so geht ihr Zonenbogen — Fig. 3 — durch

Fig. 3.



$$b = \infty a : b : \infty c,$$

$$e_3 = \frac{a}{\mu_8} : \infty b : c \text{ aus Zone } [aec],$$

$$o_4 = \frac{a}{\mu_8} : b : c \text{ aus Zone } [aod],$$

$$o_5 = \frac{a}{\mu_8} : \frac{b}{\mu_8} : c \text{ aus Zone } [soc];$$

man kann nun aus zwei der Bögen be_3, bo_5, bo_4 eine Zonengleichung $[bo_4e_3]$ oder $[bo_5e_3]$ ableiten.

Wählt man be_3, bo_5 so ist in die allgemeine Gleichung

$$\frac{\cot\eta_1 - \cot\eta_2}{\cot\eta_1 - \cot\eta_3} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 - \nu_3}$$

für η_1 der Bogen bo_5, für η_2 der Bogen be_3,
für ν_1 der Werth μ_8, für ν_2 der Werth $= 0$

einzusetzen, so dass

$$\frac{\cot bo_5 - \cot be_3}{\cot bo_5 - \cot\eta_3} = \frac{\mu_8}{\mu_8 - \nu_3}$$

oder

$$\cot\eta_3 = \nu_3 \frac{\cot bo_5 - \cot be_3}{\mu_8} + \cot be_3$$

erhalten wird, wo η_3, ν_3 sich auf die Fläche $f_3 = \frac{a}{\mu_8} : \frac{b}{\nu_3} : c$ beziehen.

Der Bogen be_3 und der Winkel e_3ba werden im Dreieck abe_3 gefunden, worin ae_3 aus $[aec]$, $ab = 180° - C$, $cab = 180° - \alpha$ bekannt, und der Bogen bo_5 im Dreieck so_5b, worin $sb = ab - as$, so_5 aus Gleichung $[soc]$, $bso_5 = 180° - aso$, letzter Winkel bei der Entwicklung von $[soc]$ $[aod]$ berechnet.

Wählt man be_3, bo_4 als Grundlage für die Zonengleichung, so ist $\eta_1 = bo_4$, $\eta_2 = be_3$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$ zu setzen, so dass

$$\frac{\cot bo_4 - \cot be_3}{\cot bo_4 - \cot\eta_3} = \frac{1}{1 - \nu_3}$$

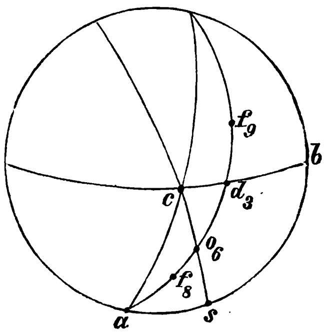
$$\cot\eta_3 = \nu_3(\cot bo_4 - \cot be_3) + \cot be_3$$

wird.

Der Bogen $b e_3$ wird, wie vorhin, im Dreieck $a b e_3$ und der Bogen $b o_4$ im Dreieck $a b o_4$ gefunden.

Haben die beiden Flächen die Symbole $f_8 = \frac{a}{\mu_8} : \frac{b}{\nu_8} : c$ und $f_9 = \frac{a}{\mu_9} : \frac{b}{\nu_8} : c$, so liegen in ihrer Zone — Fig. 4 —

Fig. 4.



die Hexaïdfläche $a = a : \infty b : \infty c$,

die Octaïdfläche $o_6 = \frac{a}{\nu_8} : \frac{b}{\nu_8} : c$,

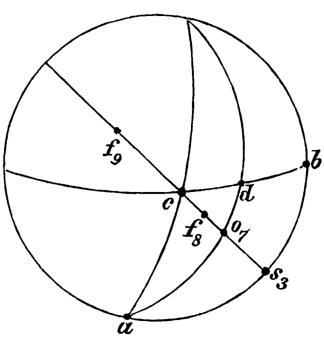
die Dodecaïdfläche $d_3 = \infty a : \frac{b}{\nu_8} : c$;

man findet, wenn $\eta_1 = a o_6$, $\eta_2 = a d_3$ und $\mu_1 = \nu_8$, $\mu_2 = 0$ gesetzt wird $\cot \eta_3 = \mu_3 \frac{\cot a o_6 - \cot a d_3}{\nu_8} + \cot a d_3$.

Der Bogen $a d_3$ wird im Dreieck $a c d_3$ und dann der Bogen $a o_6$ im Dreieck $a s o_6$ berechnet.

Findet in den Symbolen der Flächen $f_8 = \frac{a}{\mu_8} : \frac{b}{\nu_8} : c$ und $f_9 = \frac{a}{\mu_9} : \frac{b}{\nu_9} : c$ das Verhältniss $\mu_8 : \nu_8 = \mu_9 : \nu_9$ statt, so fallen in ihren Zonenbogen — Fig. 5 —

Fig. 5.



die Säulenfläche $s_3 = \frac{a}{\mu_8} : \frac{b}{\nu_8} : \infty c$,

die Octaïdfläche $o_7 = \frac{\nu_8}{\mu_8} a : b : c$,

und die Basis $c = \infty a : \infty b : c$, und ergiebt sich, wenn man in dem Ausdruck

$$\frac{\cot\eta_1 - \cot\eta_2}{\cot\eta_1 - \cot\eta_3} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 - \nu_3}$$

$\eta_1 = s_3 o_7$, $\eta_2 = s_3 c$ und demgemäss $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$ setzt,

$$\frac{\cot s_3 o_7 - \cot s_3 c}{\cot s_3 o_7 - \cot \eta_3} = \frac{1}{1 - \nu_3},$$

wo ν_3 sich auf das Symbol einer Fläche $o_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c$ bezieht, in welchem $\mu_8 : \nu_8 = \mu_3 : \nu_3$ ist, und $\eta_3 =$ Bogen $s_3 o_3$ bedeutet; daraus folgt:

$$\cot\eta_3 = \nu_3(\cot s_3 o_7 - \cot s_3 c) + \cot s_3 c.$$

Der Bogen $s_3 c$ und Winkel $a s_3 c$ wird im Dreieck $a s_3 c$ gefunden, indem $a s_3$ aus $[asb]$, $c a s_3 = 180° - \alpha$, $ac = 180° - B$ bekannt sind; der Bogen $s_3 o_7$ folgt dann im Dreieck $a s_3 o_7$, worin $a o_7$ aus $[aod]$, $a s_3$ aus $[asb]$ und $s_3 a o_7 = s_3 a o$ bei der Entwicklung von $[aod]$, $[soc]$ berechnet wurde.

Damit ist der Weg, zu irgend einer beliebigen Zonengleichung zu gelangen, gegeben und zwar wird dabei auch immer der Winkel bestimmt, den der Zonenbogen mit dem Grundkreise macht; es mag eine Zone, für welche beide Beziehungen eruirt sind, eine b e k a n n t e Z o n e heissen.

II. Von den vier Fällen, welche bei der Berechnung des Symbols einer unbekannten Fläche aus den Elementen, dem Zonenverbande und gemessenen Neigungen zu bekannten Flächen zu unterscheiden sind, nämlich:

a) die unbekannte Fläche liegt in zwei bekannten Zonen,

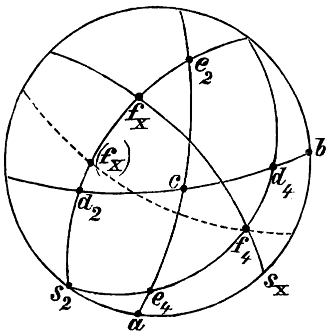
b) die unbekannte Fläche liegt in bekannter Zone und hat eine gemessene Neigung zu einer bekannten Fläche dieser Zone,

c) die unbekannte Fläche liegt in bekannter Zone und hat eine gemessene Neigung zu einer bekannten, nicht in dieser Zone belegenen Fläche,

d) die unbekannte Fläche ist aus den gemessenen Neigungen mit zwei bekannten Flächen, in deren Zone sie nicht liegt, zu bestimmen,

wird die Aufgabe ad a) durch Deduction ohne Zuziehung von Winkelwerthen, die Aufgabe b) durch Auflösung der Zonengleichung nach μ_3, ν_3 beantwortet; nur die Fälle ad c) und ad d) erfordern eine weitere Betrachtung.

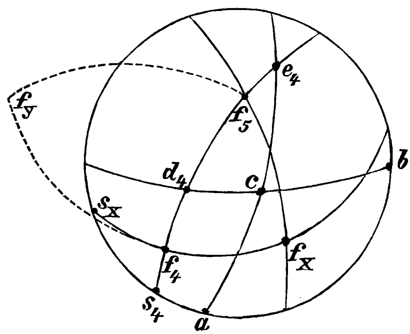
Fig. 6.



Es sei bezüglich des Falles ad c) — in Fig. 6 — die in der bekannten Zone $[s_2 d_2 e_2]$ belegene, sonst unbekannte Fläche f_x aus dem gemessenen Bogen $f_4 f_x$ zu symbolisiren, wo $f_4 = \frac{a}{\mu_4} : \frac{b}{\nu_4} : c$ als bekannt vorausgesetzt wird.

Weil Zone $[s_2 d_2 e_2]$ bekannt, ist Winkel $a s_2 d_2$ gegeben; ebenso folgt aus der ableitbaren Zone $[s_2 e_4 f_4 d_4]$ der Winkel $a s_2 e_4$ und der Bogen $s_2 f_4$. Man findet nun im Dreieck $s_2 f_4 f_x$, worin $f_x f_4$ gemessen, $s_2 f_4$ ermittelt und $f_x s_2 f_4 = a s_2 d_2 - a s_2 e_4$, zunächst den Sinus des Winkels $s_2 f_x f_4$ und dann den Bogen $s_2 f_x$, so dass die bekannte Zonengleichung $[s_2 d_2 e_2]$ das Symbol von f_x ergiebt. Das Resultat ist zweideutig, je nachdem $s_2 f_x f_4 \lesseqgtr 90^\circ$ genommen wird; bei präcisen Messungen führt in der Regel nur der eine dieser Winkel auf ein rationales Symbol, andernfalls muss das Symbol noch durch eine andere Beziehung präcisirt werden.

Fig. 7.



Bezüglich des Falls ad d) sei — in Fig. 7 — die Fläche f_x zu symbolisiren auf Grund der Messungen $f_4 f_x$ und $f_5 f_x$, wo f_4, f_5 als bekannte Flächen-Positionen vorausgesetzt werden. Aus der ableitbaren Zone $[s_4 f_4 d_4 f_5 e_4]$ folgt $f_4 f_5 = s_4 f_5 - s_4 f_4$ und daher im Dreieck $f_x f_4 f_5$ aus den drei Bögen $f_4 f_x$, $f_5 f_x$, $f_4 f_5$ der Winkel $f_5 f_4 f_x$; sei s_x die Position der nicht bekannten Säulenfläche der Zone $[s_x f_4 f_x]$, dann folgt im Dreieck $s_4 f_4 s_x$ aus $s_4 f_4 f_x = f_5 f_4 f_x$, $s_4 f_4$ und $f_4 s_4 s_x =$ Winkel zwischen Grundkreis und Zonenbogen der bekannten Zone der Bogen $s_4 s_x$, und da $a s_4$ aus $[asb]$ bekannt, der Bogen $a s_x$; alsdann giebt die Gleichung $[asb]$ das Symbol der Fläche s_x, so dass für die Zone $[s_x f_4 f_x]$ eine Zonengleichung aufgestellt und durch sie f_x symbolisirt werden kann.

Die Bogenwerthe $f_4 f_x$ und $f_5 f_x$ an sich führen auf zwei Positionen f_x und f_y, je nachdem die fragliche Fläche auf der einen oder der anderen Seite von $f_4 f_5$ belegen ist; im concreten Falle muss daher durch Beziehungen des singulären Zonenverbandes oder durch eine dritte Messung die Position endgültig bestimmt werden.

III. Behufs der Bestimmung der Elemente bedarf man — den fünf in ihnen enthaltenen Werthen: α, β, γ, $a:1$, $b:1$ entsprechend — fünf von einander unabhängige, beobachtete Bogenwerthe zwischen symbolisirten Flächen; die aus diesen fünf Fundamental-Bögen auf dem Wege der Rechnung abgeleiteten Elemente sind sowohl von ihnen, als von den Symbolen der dabei in Betracht gezogenen Fundamental-Flächen abhängig.

Die Symbole der letzteren sind theils willkürlich wählbar, theils den allgemeinen Forderungen des Zonenverbandes unterworfen und durch diese an sich oder unter Umständen in Verbindung mit den concreten Fundamental-Winkeln in gewisse Grenzen limitirt.

Bei Vernachlässigung dieser Forderungen stösst man entweder auf innere Widersprüche der Rechnung, so dass sie überhaupt nicht zu Stande kommt, oder erhält Elemente, die über die Fundamentalwinkel hinaus nicht auf rationale Symbole führen.

Die zulässige Willkür in der Wahl der Symbole kann aber auch an Flächen ausgeübt werden, die nicht als Begrenzungen der

Fundamental-Bögen dienen; dann erhalten die hierzu benützten Flächen auf dem Wege der Deduction nach dem singulären Zonenverbande abgeleitete Symbole.

Unter den allgemeinen Forderungen des Zonenverbandes sind folgende Momente zu verstehen:

Flächen, welche zu dreien in einer Zone liegen, dürfen nur solche Symbole erhalten, welche auf einen Zonenpunct führen und der Reihenfolge des concreten Falles entsprechen; wenn $f_1 = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c$, $f_2 = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c$, $f_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c$ in der Reihenfolge f_1, f_2, f_3 auftreten, muss einerseits die Bedingungs-Gleichung einer Zone: $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_3} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 - \nu_3}$ erfüllt werden, anderseits müssen μ_1, μ_2 μ_3 resp. ν_1, ν_2, ν_3 eingesetzt in die nach zweimaliger Wiederholung in sich zurückkehrende Reihe

$$\pm 0 \cdots + < 1 \cdots + > 1 \cdots \infty \cdots - > 1 \cdots - < 1 \cdots \mp 0$$

dieselbe Reihenfolge f_1, f_2, f_3 innehalten mit der Maassgabe, dass Bögen, grösser als 180° mindestens zwei der Positionen ± 0, ∞ überschreiten.

Flächen, welche nicht zu dreien in einer Zone liegen, dürfen nicht Symbole erhalten, welche auf einen Zonenpunct führen.

Die Consequenz dieser Regeln dehnt sich auch auf die deducirbaren Flächen aus, wenn ihre Bogenabstände von den willkürlich symbolisirten Flächen aus den Fundamental-Bögen durch Dreiecksauflösungen gefunden werden können; damit die deducirten Symbole der Reihenfolge entsprechen, welche die auf dem Dreieckswege gefundenen Positionen fordern, muss das Symbol einer der Flächen, von denen die Deduction ausgeht, gewisse Limiten innehalten.

Mehr als drei in einer Zone liegende Flächen können überhaupt nicht willkürlich symbolisirt werden, weil durch die Symbole von drei Flächen und die zwischen ihnen liegenden Bögen die Relation zwischen den Symbolen und Bogenwerthen aller Flächen der Zone erschöpft ist.

In anderer Beziehung muss jede der Flächen, zwischen denen Fundamental-Bögen liegen und deren Symbole ganz oder begrenzt-willkürlich wählbar sind, an den Complex der übrigen durch die

Fundamental-Bögen an sich stereometrisch — also durch zwei angulare Dimensionen angeschlossen sein; die Richtung dieser letzteren kommt ferner in Betracht, wenn ausserhalb der durch die Anschluss-Flächen gehenden Zone weitere Glieder im Complex vorhanden sind. Es kann jedoch eine angulare Dimension dadurch ersetzt werden, dass die angeschlossene Fläche nach dem singulären Zonenverbande ein bestimmtes Symbol erhält.

Die Combinationen, unter denen die Berechnung der Elemente gelingt, sind in drei Situationen zu bringen:

A. Die Fundamental-Bögen liegen zwischen fünf Flächen g, h, i, k, l, von denen vier zu je zwei mit der fünften in zwei Zonen liegen; gemessen sind die zweimal zwei Bögen in den dreiflächigen Zonen und ausserdem ein fünfter von der einen Zone zur anderen.

B. Die Fundamental-Bögen liegen zwischen vier Flächen g, h, i, k, welche nicht zu dreien in einer Zone liegen, fünf der zwischen ihnen möglichen sechs Bögen sind gemessen.

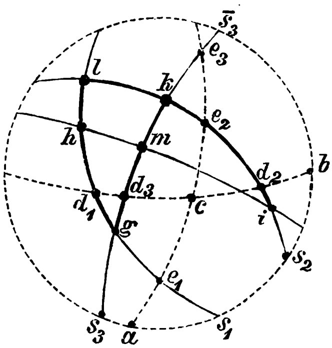
C. Die Fundamental-Bögen liegen zwischen fünf Flächen, von denen drei in einer Zone, und zwar sind die beiden zwischen ihnen liegenden Winkel gemessen; zwei weitere Bögen verbinden mit zweien jener eine vierte Fläche, an welche der fünfte Bogen die fünfte Fläche anschliesst.

Es unterscheiden sich diese drei Situationen dadurch, dass ad A. die Fundamental-Bögen an sich unzweideutig die Elemente bestimmen, ad B. erst unter Berücksichtigung der Grösse des sechsten Winkels dies erreicht wird, weil die Richtung von zwei der gemessenen Bögen für den concreten Fall festzustellen ist; die Situation ad C. erfordert, dass das Symbol der fünften Fläche aus dem singulären Zonenverbande des concreten Falles abgeleitet wird.

Die allgemeinsten Fälle sind die, wo alle in Betracht gezogenen Flächen Octaïd-Symbole erhalten; der Zahlenaufwand der Rechnung vereinfacht sich in dem Maasse als Dodecaïd- oder Hexaïd-Symbole in Anwendung kommen.

Situation A. Seien — in Fig. 8 — die Flächen

Fig. 8.



$$g = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c,$$

$$h = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c,$$

$$i = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c,$$

$$k = \frac{a}{\mu_4} : \frac{b}{\nu_4} : c,$$

$$l = \frac{a}{\mu_5} : \frac{b}{\nu_5} : c,$$

nach Maassgabe ihrer Zonenlage $[ghl]$ und $[ikl]$ und der concreten Reihenfolge g, h, l und $i\ k\ l$ symbolisirt und als Fundamental-Bögen gh, hl, ik, kl, gk gemessen.

In den Zonen $[ghl]$ und $[ikl]$ kann man nach (6.) (7.) (13.) Zonengleichungen aufstellen und mit Hülfe derselben die Bogenabstände der in ihnen liegenden Dodecaïd- und Säulen-Flächen (eventuell: Hexaidflächen) ermitteln, also in Zone $[ghl]$ die Bögen

$$s_1 g \ , \ s_1 e_1 \ , \ s_1 d_1 \ ,$$

wo

$$s_1 = \pm \frac{a}{m_1} : \mp \frac{b}{n_1} : \infty c \ , \ e_1 = \frac{a}{m_1} \infty b : c \ , \ d_1 = \infty a : \frac{b}{n_1} : c$$

und

$$m_1 = \frac{\nu_2 \mu_1 - \nu_1 \mu_1}{\nu_2 - \nu_1} \ , \ n_1 = \frac{\nu_2 \mu_1 - \nu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$$

bedeutet, und analog in Zone $[ikl]$ die Bögen

$$s_2 i \ , \ s_2 d_2 \ , \ s_2 e_2 \ .$$

Durch drei Dreiecksauflösungen kann man die Grundlage einer dritten Zonengleichung gewinnen; der Bogen gk wird von dem nicht gemessenen Bogen hi im Puncte m geschnitten, welchem, als Flächenort betrachtet, das aus den Zonen $[gk]$ und $[hi]$ ableitbare Symbol $m = \frac{a}{\mu_6} : \frac{b}{\nu_6} : c$ zukommt; es folgen — mut. mut. —

im Dreieck gkl aus gk, kl, $gl = gh + hl$
die Winkel gkl, klg, lgk,

im Dreieck hli aus hl, $hli = klg$, $il = ik + kl$
der Winkel lhi und
im Dreieck ghm aus gh, $ghm = 180° - lhi$, lgk
der Bogen gm.

Es sind dann in der Zone $[gmk]$ die Bögen gm und gk zwischen symbolisirten Flächen bekannt, so dass durch die daraus gewonnene Zonengleichung die Bogenabstände

$$s_3g \;,\; s_3d_3 \;,\; s_3e_3$$

erhalten werden.

Durch 6 weitere Dreiecksauflösungen kann man nunmehr in den drei Hexaïdzonen

$[aec]$ die Abstände e_1e_2, e_1e_3
$[bde]$ die Abstände d_1d_2, d_1d_3
$[asb]$ die Abstände s_1s_2, s_1s_3 resp. $s_1\bar{s}_3$

berechnen, nämlich — mut. mut. —

im Dreieck e_1le_2 aus le_1, le_2, $e_1le_2 = klg$:
den Bogen e_1e_2,
im Dreieck e_2ke_3 aus ke_2, ke_3, $e_2ke_3 = gkl$:
den Bogen e_2e_3,
im Dreieck d_1ld_2 aus ld_1, ld_2, $d_1ld_2 = klg$:
den Bogen d_1d_2,
im Dreieck d_2kd_3 aus kd_2, kd_3, $d_2kd_3 = 180° - gkl$:
den Bogen d_2d_3,
im Dreieck s_1ls_2 aus ls_1, ls_2, $s_1ls_2 = klg$:
den Bogen s_1s_2,
im Dreieck s_1gs_3 aus gs_1, gs_3, $s_1gs_3 = lgk$:
den Bogen s_1s_3.

Indem man nun nach (13.) (15.) Zonengleichungen für die Hexaïd-Zonen aufstellt, erhält man die Bogenabstände

ae, ac in Zone $[aec]$
bd, bc in Zone $[bdc]$
as, ab in Zone $[asb]$

und damit aus $ac + B = bc + A = ab + C = 180°$ die Axenebnenwinkel A, B, C und durch Auflösung des von ihnen eingeschlossenen Dreiecks die Axenwinkel α, β, γ.

Indem man schliesslich zwei der Zonengleichungen

$$[aec] \text{ nach } a\ , \quad [bdc] \text{ nach } b \quad \text{und} \quad [asb] \text{ nach } \frac{b}{a}$$

auflöst, gewinnt man die Verhältnisse der Axeneinheiten; es wird z. B. in $[aec]$, wo $\cot \eta_3 = \mu_3 \dfrac{\sin\alpha}{a \sin\gamma \sin B} - \cot B$ ist, und $\eta_3 = ae$, $\mu_3 = 1$ gesetzt werden kann,

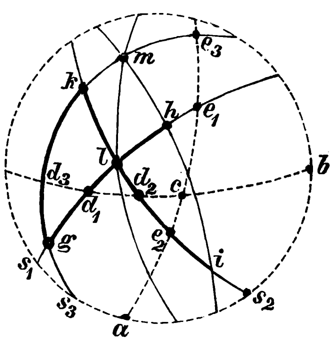
$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma \sin B(\cot ae + \cot B)}, \text{ und analog}$$

$$b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma \sin A(\cot bd + \cot A)},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta \sin C(\cot as + \cot C)}.$$

Ist die Reihenfolge der Flächen — Fig. 9 — $[glh]$ und $[ilk]$ und sind als Fundamental-Bögen gl, lh, il, lk und gk gemessen, so wird die Grundlage für die dritte Zonengleichung dadurch gefunden, dass man m im Durchschnitt der Zonen $[gk]$ und $[hi]$ nimmt und durch successive Auflösung der Dreiecke gkl, ilh und ikm den Bogen km findet.

Fig. 9.



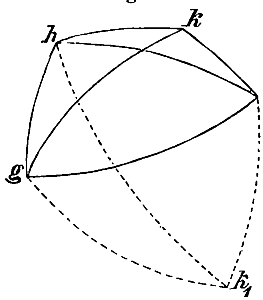
Wenn eine der dreiflächigen Zonen Hexaïd-Zone ist, fallen von den sechs Dreiecksauflösungen der zweiten Reihe zwei derselben aus.

Wenn beide dreiflächigen Zonen Hexaïd-Zonen sind und sie daher eine Hexaïdfläche zur gemeinschaftlichen Fläche haben, sind einerseits zwei der Hexaïd-Zonen-Gleichungen unmittelbar aus den Fundamental-Winkeln abzuleiten, anderseits durch eine Dreiecksauflösung der in der gemeinschaftlichen Hexaïdfläche belegene

Axenwinkel zu bestimmen; es ist dies der einfachste Fall die Elemente zu bestimmen.

Situation B. Die Fundamental-Bögen liegen zwischen vier Flächen:

Fig. 10.



$$g = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c \;,\quad h = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c \;,$$

$$i = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c \;,\quad k = \frac{a}{\mu_4} : \frac{b}{\nu_4} : c \;,$$

— Fig. 10 — und zwar seien gh, hi, gi, gk, ik als solche gemessen und in den Werthen unter 180° angegeben. Der sechste Winkel hk soll nicht als Fundamental-Bogen benützt werden; nichtsdestoweniger kommt seine Grösse im concreten Falle in Betracht, um zu finden, ob k und h auf derselben Seite von gi oder auf entgegengesetzten Seiten belegen sind, was die fünf Fundamental-Bögen an sich nicht entscheiden. In beiden Fällen ist der Bogen hk für die Lage auf derselben Seite resp. der Bogen hk_1 für die Lage auf entgegengesetzter Seite aus den Fundamental-Bögen zu berechnen; es giebt:

Dreieck ghi aus gh, hi, gi die Winkel:
ghi, hig, igh,
Dreieck gik aus gi, gk, ik die Winkel:
gik, ikg, kgi und ebenso
Dreieck gik_1 aus gi, $gk_1 = gk$, $ik_1 = ik$ die Winkel:
$gik_1 = gik$, $ik_1g = ikg$, $k_1gi = khi$.

Nun wird hk gefunden im Dreieck hgk aus gh, gk und $kgh = igh - kgi$ und hk_1 im Dreieck hgk_1 aus gh, $gk_1 = gk$ und $hgk_1 = igh + k_1gi = igh + kgi$. Da der Fall: $2 \sin igh \sin kgi = 0$ unter dem $hk = hk_1$ werden kann, auf die Lage der Flächen g, h, k in einer Zone führt und daher hier ausgeschlossen ist, so entscheidet die Übereinstimmung des Bogenmaasses von hk mit dem einen oder dem anderen der beiden berechenbaren Werthe, welcher von den beiden möglichen Fällen im concreten Falle ins Auge zu fassen ist.

In vielen Fällen genügt schon der Anblick des fraglichen Krystalls diese Frage mit Wahrscheinlichkeit zu beantworten, mit Sicherheit entscheidet dieselbe aber nur die Berücksichtigung des Bogenmaasses von hk.

Was nun die Symbole der Flächen anlangt, so sind drei derselben willkürlich wählbar, mit der alleinigen Einschränkung, dass dieselben nicht auf einen Zonenpunct führen dürfen; das Symbol der vierten Fläche ist aber neben der genannten Bedingung durch die Dimensionen der Fundamentalwinkel immer auf einen der acht Octanten beschränkt, in welche die um den Krystall gedachte Kugel durch die, von den willkürlich symbolisirten Flächen bestimmten Zonenkreise getheilt wird.

Seien g, h, i willkürlich symbolisirt und durch die Grösse des Bogens hk bestimmt, ob k auf derselben Seite wie h von gi oder auf der entgegengesetzten belegen ist, so entscheidet dieser Umstand zunächst ob k ein Symbol auf der, vom Kreise gi begrenzten Kugelhälfte, wo h liegt, erhalten muss, oder ein solches der entgegengesetzten.

Nächstdem kommen die Grössen der aus den Fundamental-Bögen in den Dreiecken ghi und gki berechneten Winkel hgi, hig, kgi, kig in Betracht.

Die Lage von k in den, die Grenzen der Octanten bildenden Zonenbögen ist durch die Voraussetzungen ausgeschlossen. Es heissen $\bar{h}$, $\bar{g}$, $\bar{i}$ die den Flächen h, g, i diametral gegenüberliegenden Flächen und

m die Fläche im Durchschnitt der Zonenbögen gi und hk,

n die Fläche im Durchschnitt der Zonenbögen gh und ik,

o die Fläche im Durchschnitt der Zonenbögen hi und gk;

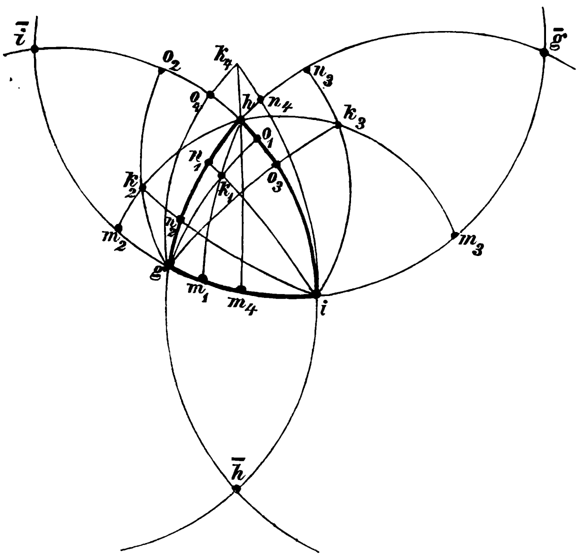
durch die Grösse der Winkel hgi, hig, kgi, kig wird nun im concreten Falle die Reihenfolge der Flächen

$$\bar{i}\ ,\ m\ ,\ g\ ,\ i\ ,\ \bar{g}$$
$$\bar{h}\ ,\ n\ ,\ g\ ,\ h\ ,\ \bar{g}$$
$$\bar{h}\ ,\ o\ ,\ i\ ,\ h\ ,\ \bar{i}$$

bestimmt und dadurch gefordert, dass die aus den Symbolen von g, h, i einerseits und k anderseits ableitbaren Symbole von m, n, o gewisse Grenzen innehalten, was eben nur durch Beschränkung des Symbols von k auf einen bestimmten Octanten gewährleistet werden kann. Die Erfüllung der Bedingung für zwei der Symbole von m, n, o schliesst die für das dritte ein.

Die hier vorkommenden acht Fälle bieten folgende Verhältnisse dar:

Fig. 11.



Es liegen h und k auf derselben Seite von gi. — Fig. 11.

1. Wenn $kgi < hgi$, $kig < hig$ ist, hat k die Position k_1 im Octanten ghi und fällt

m	in die Position	m_1	der Folge	gm_1i
n	desgl.	n_1	desgl.	gn_1h
o	desgl.	o_1	desgl.	io_1h .

2. Wenn $kgi > hgi$, $kig < hig$ ist, hat k die Position k_2 im Octanten $hg\bar{i}$ und fällt

m	in die Position	m_2	der Folge	$igm_2\bar{\imath}$	
n	desgl.	n_2	desgl.	gn_2h	
o	desgl.	o_2	desgl.	$iho_2\bar{\imath}$.	

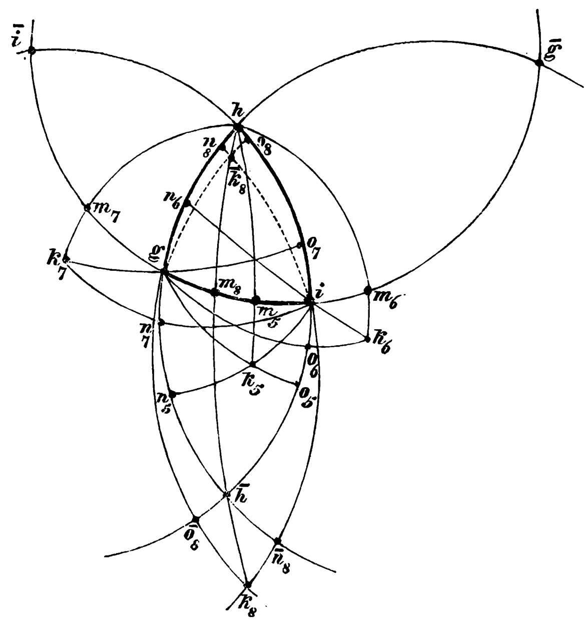
3. Wenn $kgi < hgi$, $kig > hig$ ist, hat k die Position k_3 im Octanten $hi\bar{g}$ und fällt

m	in die Position	m_3	der Folge	$gim_3\bar{g}$
n	desgl.	n_3	desgl.	$ghn_3\bar{g}$
o	desgl.	o_3	desgl.	io_3h.

4. Wenn $kgi > hgi$, $kig > hig$ ist, hat k die Position k_4 im Octanten $h\bar{g}\bar{\imath}$ und fällt

m	in die Position	m_4	der Folge	gm_4i
n	desgl.	n_4	desgl.	$ghn_4\bar{g}$
o	desgl.	o_4	desgl.	$iho_4\bar{\imath}$.

Fig. 12.



Es liegt k auf der entgegengesetzten Seite wie h. — Fig. 12.

5. Wenn $hgi + kgi < 180°$, $hig + kig < 180°$ ist, hat k die Position k_5 im Octanten $ig\bar{h}$ und fällt

m	in die Position	m_5	der Folge	$g m_5 \bar{i}$	
n	desgl.	n_5	desgl.	$h g n_5 \bar{h}$	
o	desgl.	o_5	desgl.	$h i o_5 \bar{h}$.	

6. Wenn $hgi + kgi < 180°$, $hig + kig > 180°$ ist, hat k die Position k_6 im Octanten $i\bar{h}\bar{g}$ und fällt

m	in die Position	m_6	der Folge	$g i m_6 \bar{g}$
n	desgl.	n_6	desgl.	$g n_6 \bar{h}$
o	desgl.	o_6	desgl.	$h i o_6 \bar{h}$

7. Wenn $hgi + kgi > 180°$, $hig + kig < 180°$ ist, hat k die Position k_7 im Octanten $g\bar{i}\bar{h}$ und fällt

m	in die Position	m_7	der Folge	$i g m_7 \bar{i}$
n	desgl.	n_7	desgl.	$h g n_7 \bar{h}$
o	desgl.	o_7	desgl.	$i o_7 h$.

8. Wenn $hgi + kgi > 180°$, $hig + kig > 180°$ ist, hat k die Position k_8 im Octanten $\bar{g}\bar{i}\bar{h}$ und fällt

m	in die Position	m_8	der Folge	$g m_8 \bar{i}$
n	desgl.	n_8	desgl.	$h n_8 g \bar{h} \bar{n}_8$
o	desgl.	o_8	desgl.	$h o_8 i \bar{h} \bar{o}_8$.

In dem letzten Falle ist der Bogen $hk > 180°$ und liegt eine k_8 diametral entgegengesetzte Position $\bar{k}_8$ im Octanten ghi, dem Falle ad 1. entsprechend.

Um das Symbol der vierten Fläche, hier k, richtig zu wählen, kann man entweder prüfen, ob ein hierfür nach Gutdünken angenommenes Symbol die auf dem Deductionswege abgeleiteten Symbole für m, n, o in den von den Winkelwerthen geforderten Reihenfolge ergiebt, oder aber zwei der ableitbaren Flächen m, n, o in der geforderten Reihenfolge sonst willkürlich symbolisiren und dann das Symbol von k auf dem Wege der Deduction als Durchschnittspunct von zwei der Zonen mh, ni, og ableiten.

Um alsdann die Elemente zu berechnen, hat man zunächst noch drei Dreiecksauflösungen nothwendig, durch welche in drei Zonen je zwei anschliessende Bögen zwischen symbolisirten Flächen gewonnen werden; hierfür stehen verschiedene Wege offen; z. B. für den Fall 5:

Nachdem im Dreieck hgi aus gh, hi, ig und
im Dreieck kgi aus gk, ki, ig

die Winkel hgi, ghi, ihg und kgi, gik, ikg berechnet sind, giebt

Dreieck kgh aus gh, gk, $hgk = hgi + kgi$
die Seite hk und die Winkel ghk, hkg,

dann

Dreieck hko aus hk, $hko = 180° - hkg$, $kho = ghi - ghk$
die Seiten ho, ko;

schliesslich

Dreieck hkn aus hk, $hkn = 180° - ikg + hkg$, $nhk = ghk$
die Seiten hn, kn.

Es sind dann in vier Zonen je zwei anliegende Bögen zwischen symbolisirten Flächen bekannt:

$$gk\,,\, ko\,;\; hi\,,\, ho\,;\; gh\,,\, hn\,;\; ki\,,\, kn\,;$$

von diesen genügen je drei, um wie in der Situation A die Elemente zu finden.

Die relative Abhängigkeit des Symboles der vierten Fläche von den Werthen der Fundamental-Bögen ist bisher nicht hervorgehoben worden; dass nichtsdestoweniger eine grosse Anzahl von Elementen triklinischer Krystalle aus Fundamental-Bögen zwischen vier Flächen berechnet worden sind, beruht auf dem Umstande, dass man unter Verwerthung des singulären Zonenverbandes im concreten Falle die Symbole einer Anzahl von Flächen ableiten kann, wenn man gewissen Flächen willkürliche Symbole beilegt oder Zonen willkürlich karacterisirt unter Umständen, welche im concreten Falle plausibel erscheinen. Ein bei diesem — eben nur durch Beispiele zu lehrenden Verfahren unterlaufender Fehler corrigirt sich durch den Umstand, dass die resultirenden Elemente auf Widersprüche führen.

In einigen Fällen scheint man auch mit Hülfe approximativer Elemente unter Voraussetzung der Rationalität der Axenschnitte Symbole für die Fundamental-Flächen der definitiven Rechnung gefunden zu haben, die aus dem Zonenverbande allein ohne Winkelmessung nicht abgeleitet werden können.

Will man die Willkür der fundamentalen Wahl ganz oder nebenbei in der Karacterisirung von Zonen ausüben, so muss man auch hier analogen Rücksichten Rechnung tragen, wie bei der Symbolisirung von Flächen. Man darf nämlich nur so beschaffene Bezeichnungen für Zonen einführen, dass die von ihren Zonenbögen mit anderen aufkommenden Schnitte Symbole erhalten, welche der concreten Reihenfolge entsprechen. Wenn nicht Schnittpuncte zusammenfallen, können zunächst nur drei Zonen willkürlich bezeichnet werden; die Bezeichnung der vierten Zone ist bereits in gewisse Grenzen limitirt, damit ihre Schnittpuncte mit den Bögen der drei ersten Zonen Symbole erhalten, welche der concreten Reihenfolge entsprechen. Mehr als vier Zonen können überhaupt niemals ganz oder bedingt karacterisirt werden.

Im Grunde genommen unterliegt die willkürliche Bezeichnung der Zonen denselben Rücksichten, wie die willkürliche Symbolisirung von vier nicht tautozonalen Flächen, nur ist das Mittel, die Limiten zu bestimmen, nicht so einfach aus den Fundamental-Bögen zu finden, wie dies bezüglich der Symbolisirung der Flächen der Fall ist.

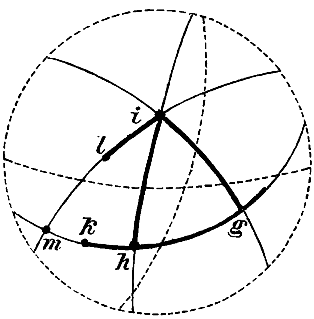
Bei der Anwendung dieses — man möchte sagen von der Opportunität geleiteten Verfahren sind nicht selten Verwechslungen der Verhältnisse des singulären Zonenverbandes mit den Consequenzen des allgemeinen vorgekommen, indem man Beziehungen als allgemein zulässig angesehen, die es in der That nur in dem besonderen Falle sind.

Wenn Naumann (Lehrb. d. reinen und angew. Krystallographie, Bd. II. p. 138, Fig. 534.) bei der Entwicklung der Elemente des Anorthits die Flächen $P = \infty a : \infty b : c$, $T = a : b : \infty c$, $l = a : b' : \infty c$ willkürlich symbolisirt und damit den Zonen [MTl], [TPp], [$lmPou$] eine bestimmte Stellung giebt, so ist die weitere

Bezeichnung der Zone [$tPxy$] als Hexaïd-Zone, parallel der Axe OB nur dann zulässig, wenn der Nachweis geführt wird, dass ihr Schnittpunct mit Zone [MTl] in Fläche $k = a : \infty b \infty c$ zwischen T und l fällt; die Zone [$MnPe$] dagegen als dritte Hexaïd-Zone a priori anzusehen ist — obgleich thatsächlich richtig — darum unzulässig, weil dies voraussetzt, dass M in der That Hexaïdfläche sei, was nach Symbolisirung der Flächen l, T und der Consequenz der Zonenbezeichnung der Zone [P, t] von der Grösse der Bögen lk, kT, TM abhängig ist.

Wenn man in dem Gange der Berechnung der Elemente die Beziehungen des singulären Zonenverbandes verwerthet, liegt noch die Situation C im Bereiche der Zulässigkeit.

Fig. 13.



Es seien — Fig. 13 — drei Flächen

$$g = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c,$$

$$h = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c,$$

$$k = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c$$

in einer Zone [ghk] belegen und demgemäss sonst willkürlich symbolisirt und die Bögen gh , hk als Fundamental-Bögen gemessen; die vierte Fläche $i \doteq \frac{a}{\mu_4} : \frac{b}{\nu_4} : c$ sei durch die Fundamental-Bögen ig , ih angeschlossen und als ausserhalb der Zone [ghk] belegen, sonst willkürlich symbolisirt; die fünfte Fläche l ist mit i durch den fünften Fundamental-Bogen verbunden und besitzt ein bestimmtes, nach dem singulären Zonenverbande aus den Symbolen von g, h, k, i und dem Symbol einer sechsten Fläche p hergeleitetes Symbol, welche letztere Fläche p in einer der drei Zonen gi, hi, ki irgendwo belegen und demgemäss sonst willkürlich symbolisirt ist.

Man kann alsdann aus den Zonen $[li]$ und $[ghk]$ ihren Durchschnittspunct m symbolisiren und aus der Zonengleichung $[ghk]$ den Bogenabstand gm ableiten; sodann giebt die successive Auflösung der Dreiecke ghi und gmi den Bogen im; da nun die Zonen $[mil]$ und $[ghk]$ je drei symbolisirte Flächen und zwar m gemeinsam haben, ihre Bogenabstände bekannt sind, und ausserdem der Bogen ih resp. ig zur Verfügung steht, so ist die Aufgabe auf die Lösung der Situation A zurückgeführt. —

Die Bögen lg, lh, lk als fünfter Fundamental-Bogen benützt geben zweideutige Resultate, weil bei der Rechnung ein Sinuswerth eintritt.

Das Symbol für l wird in dem einfachsten Falle gefunden, wenn l der Durchschnitt zweier Zonen ist, die durch i, resp. p und Flächen der Zone $[ghk]$ gehen, welche letztere aus dieser Zonenlage und den als gemessen vorausgesetzten Abständen von g symbolisirt sind.

Buchdruckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften (G. Vogt).
Berlin, Universitätsstr. 8.