[Auszug aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.]

17. Jan. 1876. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.

Hr. Websky las folgende Abhandlung:

Über die Relation der Winkel zwischen vier Krystallflächen in einer Zone und die der Winkel zwischen vier Kanten in einer Fläche.

Durch Miller (Treatice on crystallography, London 1839) ist die Relation zwischen den Winkeln von vier in einer Zone liegenden Flächen eines Krystalls und ihren krystallographischen, auf drei Krystallaxen bezogenen Symbolen in die Methode der Krystallberechnung eingeführt und von mehreren anderen Autoren (Victor v. Lang, Lehrbuch der Krystallographie, Wien 1866 — Schrauf, physicalische Mineralogie, Wien 1866) in gleichmässiger Weise benützt worden.

In dem Nachfolgenden soll eine anderweitige Ableitung und Formulirung dieser Relatiou angegeben werden, welche durchsichtiger ist und zur Verwerthung des Gesetzes den nach der Methode von Weiss und Naumann arbeitenden Krystallographen bequemer sein wird.

Wenn man unter Zugrundelegung der Vorstellungsweise von Neumann (Beiträge zur Krystallonomie 1823) die Einheitswerthe der Krystallaxen in der Form

$$a : b : c = \text{Längsaxe} : \text{Queraxe} : \text{Verticalaxe} = \text{Zahl} : \text{Zahl} : 1$$

ausdrückt, durch den Endpunct der Verticalaxe, also in der Entfernung $= 1$ vom Ausgangspuncte, eine Ebne legt, rechtwinklig zur Verticalaxe, ferner vom Ausgangspunct der Axen Normalen auf die Krystallflächen zieht, so treffen die Normalen besagte Ebne — Projectionsebne — in einem System von Puncten — Flächenorte —, von denen eine Anzahl im Unendlichen liegen kann. Die einer Zone angehörenden, unter einander paralle Kanten bildenden Flächen legen ihre Flächenorte in eine grade Linie — Zonenlinie; umgekehrt bestimmen je zwei Flächenorte eine Zonenlinie.

Man kann von diesen Zonenlinien zwei als planimetrische Axen der Projectionsfigur betrachten und, auf diese bezogen, die Lage der Flächenorte durch Coordinaten, die Lage der Zonenlinien durch Parameter ausdrücken.

Wählt man zu diesen Projectionsaxen die Zonenlinien der nicht mit der Verticalaxe OC parallelen Dodecaïdflächen, und zwar:

als Projections-Axe $O_1 A_1$ die Zonenlinie der Dodecaïdflächen der Form $\left(\frac{a}{x} : \infty\, b : c\right)$

und

als Projections-Axe $O_1 B_1$ die Zonenlinie der Dodecaïdflächen der Form $\left(\infty\, a : : \frac{b}{y} : c\right)$

und bezeichnet den Winkel der Krystallaxen OB und OC mit α, den Winkel der Krystallaxen OA und OC mit β und den Winkel der Krystallaxenebnen AOC und BOC mit C, sämmtlich im positiven Octanten angegeben, so lauten die Coordinaten des Flächenortes der allgemeinen Fläche $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$

$$\frac{O^1 A^1}{m^1} = \frac{\mu}{a \sin\beta \sin C} \quad , \quad \frac{O^1 B^1}{n^1} = \frac{\nu}{b \sin\alpha \sin C}.$$

Liegen drei Flächen

$$F_1 = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c,$$

$$F_2 = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c,$$

$$F_3 = \frac{a}{\mu_3} : \frac{b}{\nu_3} : c$$

in einer Zone, so verhalten sich die Distanzen ihrer Flächenorte F_1^1, F_2^1, F_3^1 nach der Proportion

$$F_1^1 F_2^1 : F_1^1 F_3^1 = \mu_1 - \mu_2 : \mu_1 - \mu_3 = \nu_1 - \nu_2 : \nu_1 - \nu_3$$

unabhängig von Character des Krystallisations-Systemes.

Wenn man nach Maassgabe der von Weiss und G. Rose eingeführten, von Quenstedt cultivirten Linearprojection bei gleichen krystallographischen Grundlagen die Reductionsebnen der Krystallflächen durch den Endpunct der Axe $OC = 1$ legt und mit der Axenebne AOB zum Durchschnitt bringt, so wird jede Flächenrichtung in dieser durch eine Intersectionslinie — Sectionslinie — repräsentirt; die Puncte, in denen sich die Sectionslinien schneiden, verbunden mit dem Endpunct der Axe OC, bestimmen die Richtung der Kanten, welche die von den Sectionslinien repräsentirten Flächen bilden. Nimmt man in der, in der Axenebne AOB entstehenden Linienconfiguration die mit den Krystallaxen OA und OB zusammenfallenden Sectionslinien der Flächen $(\infty a : b : \infty c)$ und $(a : \infty b : \infty c)$ als lineare Projectionsaxen $O^\circ A^\circ$ und $O^\circ B^\circ$, so erhält man nach ihnen für die Sectionslinie der allgemeinen Fläche $F = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ die Parameter $\frac{O^\circ A^\circ}{\mu} = \frac{a}{\mu}$, $\frac{O^\circ B^\circ}{\nu} = \frac{b}{\nu}$. Der Durchschnittspunct P — Zonenpunct — der Sectionslinien der Flächen

$$F_1 = \frac{a}{\mu_1} : \frac{b}{\nu_1} : c \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{a}{\mu_2} : \frac{b}{\nu_2} : c$$

erhält die Coordinaten

$$\frac{O^\circ A^\circ}{m} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2\mu_1 - \mu_2\nu_1} a \quad , \quad \frac{O^\circ B^\circ}{n} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\nu_2\mu_1 - \mu_2\nu_1} b \, ,$$

wofür kurz $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{n}$ geschrieben werden soll. Alle Kantenrichtungen, welche im Bereich einer Fläche F vorkommen können, entsprechen Zonenpuncten P_1, P_2 etc., welche in einer graden Linie liegen; die Distanzen solcher Zonenpuncte verhalten sich daher nach der Proportion

$$\begin{aligned} P_1P_2 : P_1P_3 &= \frac{a}{m_1} - \frac{a}{m_2} : \frac{a}{m_1} - \frac{a}{m_2} \\ &= \frac{b}{n_1} - \frac{b}{n_2} : \frac{b}{n_1} - \frac{b}{n_2} . \end{aligned}$$

Wenn vom Puncte C drei Grade CP, CP_1, CP_2 ausgehen und in den Puncten P, P_1, P_2 eine vierte Grade schneiden, wenn ferner die Distanzen

$$PP_1 = t_1 \quad , \quad PP_2 = t_2$$

und die Winkel

$$PCP_1 = \eta_1 \quad , \quad PCP_2 = \eta_2$$

genannt werden, gemessen von CP, so wird eine von C nach der Linie PP_2 gezogene Normale CP_0 mit CP einen Winkel η bilden, der von CP aus gemessen positiv oder negativ sein kann und bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{t_1 \cot \eta_1 - t_2 \cot \eta_2}{t_2 - t_1} = \operatorname{tg} \eta .$$

Wenn an Stelle der Linie CP_2 eine andere von C gezogene Linie CP_3 tritt, welche mit CP den Winkel $PCP_3 = \eta_3$, in derselben Richtung gemessen, bildet und den Abstand $PP_3 = t_3$ abschneidet, so gilt ferner

$$\frac{t_1 \cot \eta_1 - t_3 \cot \eta_3}{t_3 - t_1} = \operatorname{tg} \eta ,$$

so dass auch die Gleichung

$$\frac{t_1 \cot \eta_1 - t_2 \cot \eta_2}{t_2 - t_1} = \frac{t_1 \cot \eta_1 - t_3 \cot \eta_3}{t_3 - t_1}$$

oder

$$\frac{t_1}{t_2 - t_1} \cot \eta_1 - \frac{t_2}{t_2 - t_1} \cot \eta_2 = \frac{t_1}{t_3 - t_1} \cot \eta_1 - \frac{t_3}{t_3 - t_1} \cot \eta_3$$

besteht.

Man kann sich nun unter t_1, t_2, t_3 entweder die Distanzen von vier in einer Zonenlinie liegenden Flächenorten einer Neumannschen Normalen-Projection oder die Distanzen von vier in einer Sectionslinie einer Linear-Projection belegenen Zonenpunkten denken.

Im ersteren Falle sind unter η_1, η_2, η_3 drei von einer Flächennormale aus in einer bestimmten Richtung gemessene Normalenbögen einer Zone, im andern die von einer Kante aus gemessenen ebnen Winkel zwischen den in einer Fläche liegenden Kantenrichtungen zu verstehen.

Bei der Lage in einer Zone erfüllen die Flächensymbole von der allgemeinen Form $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c$ die Bedingung

$$\frac{\mu - \mu_1}{\mu - \mu_2} = \frac{\nu - \nu_1}{\nu - \nu_2} \quad , \quad \frac{\mu - \mu_1}{\mu - \mu_3} = \frac{\nu - \nu_1}{\nu - \nu_3} \quad .$$

Die Flächenortsdistanzen von vier diesen Gleichungen genügenden Flächen verhalten sich aber, wenn wir $F^1 - F_1^1 = t_1$, $F^1 - F_2^1 = t_2$ etc. setzen, nach der Proportion

$$t_1 : t_2 : t_3 = \mu - \mu_1 : \mu - \mu_2 : \mu - \mu_3$$

woraus auch

$$t_1 : t_2 - t_1 : t_2 : t_3 - t_1 : t_3$$

$= \mu - \mu_1 : \mu_1 - \mu_2 : \mu - \mu_2 : \mu_1 - \mu_3 : \mu - \mu_3$ und analog

$= \nu - \nu_1 : \nu_1 - \nu_2 : \nu - \nu_2 : \nu_1 - \nu_3 : \nu - \nu_3$ folgt; daher ist

$$\frac{t_1}{t_2 - t_1} = \frac{\mu - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{\nu - \nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \quad , \quad \frac{t_2}{t_2 - t_1} = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{\nu - \nu_2}{\nu_1 - \nu_2}$$

$$\frac{t_1}{t_3 - t_1} = \frac{\mu - \mu_1}{\mu_1 - \mu_3} = \frac{\nu - \nu_1}{\nu_1 - \nu_3} \quad , \quad \frac{t_3}{t_3 - t_1} = \frac{\mu - \mu_3}{\mu_1 - \mu_3} = \frac{\nu - \nu_3}{\nu_1 - \nu_3}$$

und daher die allgemeine Relation zwischen den Normalenbögen und den Axenschnitten dieser vier Flächen

$$\frac{\mu - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \cot \eta_1 - \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \cot \eta_2 = \frac{\mu - \mu_1}{\mu_1 - \mu_3} \cot \eta_1 - \frac{\mu - \mu_3}{\mu_1 - \mu_3} \cot \eta_3$$

und

$$\frac{\nu - \nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \cot \eta_1 - \frac{\nu - \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \cot \eta_2 = \frac{\nu - \nu_1}{\nu_1 - \nu_3} \cot \eta_1 - \frac{\nu_1 - \nu_3}{\nu_1 - \nu_3} \cot \eta_3$$

Diese Gleichungen sind bezüglich $\mu_2, \nu_2, \cot \eta_2$ und $\mu_3, \nu_3, \cot \eta_3$ symmetrisch; es kann jede dieser Gruppen als die Variable angesehen werden; in der Folge soll dies bezüglich $\mu_3, \nu_3, \cot \eta_3$ geschehen.

Löst man die obige Gleichung nach μ_3, ν_3 auf, so erhält man

$$(1) \qquad \mu_3 = \frac{\mu_2 (\mu_1 - \mu) \cot \eta_1 - \mu_1 (\mu_2 - \mu) \cot \eta_2 + \mu (\mu_2 - \mu_1) \cot \eta_3}{(\mu_1 - \mu) \cot \eta_1 - (\mu_2 - \mu) \cot \eta_2 + (\mu_2 - \mu_1) \cot \eta_3},$$

$$(2) \qquad \nu_3 = \frac{\nu_2 (\nu_1 - \nu) \cot \eta_1 - \nu_1 (\nu_2 - \nu) \cot \eta_2 + \nu (\nu_2 - \nu_1) \cot \eta_3}{(\nu_1 - \nu) \cot \eta_1 - (\nu_2 - \nu) \cot \eta_2 + (\nu_2 - \nu_1) \cot \eta_3}.$$

In dem ersten dieser Ausdrücke (1) sind die Glieder

$$\mu_2(\mu_1-\mu)\cot\eta_1-\mu_1(\mu_2-\mu)\cot\eta_2=A\ ,$$
$$\mu(\mu_2-\mu_1)=B\ ,$$
$$(\mu_1-\mu)\cot\eta_1-(\mu_2-\mu)\cot\eta_2=C\ ,$$
$$(\mu_2-\mu_1)=D$$

und analog die entsprechenden Theile des zweiten Ausdruckes $=A_1, B_1, C_1, D_1$ nur abhängig von den Symbolen und Winkeln von drei Flächen, so dass man aus ihnen eine für die ganze Zone gültige Formel

$$\mu_3=\frac{A+B\cot\eta_3}{C+D\cot\eta_3}\ ,\quad \nu_3=\frac{A_1+B_1\cot\eta_3}{C_1+D_1\cot\eta_3} \tag{3}$$

erhält, mit Hülfe welcher man unabhängig von den Elementen der Krystallgattung, die Axenschnitte-Coëfficienten $\frac{1}{\mu_3}$, $\frac{1}{\nu_3}$ einer vierten Fläche berechnen, sobald der Bogen η_3 gemessen ist.

Ist μ_3 bekannt, so hat man auch aus dem Zonenverbande

$$\nu_3=\frac{(\nu\mu_1-\nu_1\mu)-(\nu-\nu_1)\mu_3}{\mu_1-\mu}.$$

Umgekehrt erhält man

$$\cot\eta_3=\frac{(\mu_2-\mu_3)(\mu_1-\mu)}{(\mu_3-\mu)\ (\mu_2-\mu_1)}\cot\eta_1-\frac{(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu)}{(\mu_3-\mu)\ (\mu_2-\mu_1)}\cot\eta_2\ , \tag{4}$$

$$=\frac{(\nu_2-\nu_3)(\nu_1-\nu)}{(\nu_3-\nu)\ (\nu_2-\nu_1)}\cot\eta_1-\frac{(\nu_1-\nu_3)(\nu_2-\nu)}{(\nu_3-\nu)\ (\nu_2-\nu_1)}\cot\eta_2\ . \tag{5}$$

Man kann aus den letzten Gleichungen (4), (5) den Winkel η_3 ableiten, welche die Normale derjenigen Säulenfläche mit der Ausgangsnormale bildet, die die nächste in der eingeschlagenen Winkelrichtung ist; man hat dann für μ_3 resp. ν_3 die Axenschnitt-Coëfficienten der Säule $+\infty\,(\mu_1-\mu_2)$, $-\infty\,(\nu_2-\nu_1)$ oder $-\infty\,(\mu_1-\mu_2)$, $+\infty\,(\nu_2-\nu_1)$ einzusetzen und findet

$$\cot\eta_3=-\frac{\mu_1-\mu}{\mu_2-\mu_1}\cot\eta_1+\frac{\mu_2-\mu}{\mu_2-\mu_1}\cot\eta_2 \tag{6}$$

$$=-\frac{\nu_1-\nu}{\nu_2-\nu_1}\cot\eta_1+\frac{\nu_2-\nu}{\nu_2-\nu_1}\cot\eta_2\ . \tag{7}$$

Es ist dann $180° + \eta_3$ der Abstand der Normale der diametral entgegengesetzten Säulen-Fläche von der Ausgangs-Normale.

Wenn die Rechnung der Winkel von der Normale auf die Säulenfläche aus beginnt, so ist das Symbol der Fläche F abhängig von den Symbolen der Flächen F_1 und F_2 und daher

$$\mu = \infty(\mu_1 - \mu_2)\ ,\ \nu = -\infty(\nu_2 - \nu_1)$$

$$\text{resp. } \mu = -\infty(\mu_1 - \mu_2)\ ,\ \nu = +\infty(\nu_2 - \nu_1)\,.$$

Setzt man diese Werthe in die Relation

$$\frac{(\mu - \mu_1)\cot\eta_1 - (\mu - \mu_2)\cot\eta_2}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{(\mu - \mu_1)\cot\eta_1 - (\mu - \mu_3)\cot\eta_3}{\mu_1 - \mu_3}$$

ein, so erhält man

$$\frac{\cot\eta_1 - \cot\eta_2}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{\cot\eta_1 - \cot\eta_3}{\mu_1 - \mu_3}, \tag{8}$$

wofür auch

$$\frac{\cot\eta_1 - \cot\eta_2}{\cot\eta_1 - \cot\eta_3} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_3} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 - \nu_3} \tag{9}$$

geschrieben werden kann.

Nach μ_3, ν_3 aufgelöst, giebt diese Gleichung

$$\mu_3 = \frac{\mu_2\cot\eta_1 - \mu_1\cot\eta_2 + \cancel{(\mu_2 - \mu_1)}\cot\eta_3}{\cot\eta_1 - \cot\eta_2}, \tag{10}$$ $\mu_1 - \mu_2$

$$\nu_3 = \frac{\nu_2\cot\eta_1 - \nu_1\cot\eta_2 + \cancel{(\nu_2 - \nu_1)}\cot\eta_3}{\cot\eta_1 - \cot\eta_2} \tag{11}$$ $\nu_1 - \nu_2$

oder für die Rechnung bequemer, wenn

$$\frac{\mu_2\cot\eta_1 - \mu_1\cot\eta_2}{\cot\eta_1 - \cot\eta_2} = D\ ,\ \frac{\cancel{\mu_2 - \mu_1}}{\cot\eta_1 - \cot\eta_2} = E$$ gesetzt wird, $\mu_1 - \mu_2$

$$\mu_3 = D + E\cot\eta_3, \text{ woraus auch}$$

$$\nu_3 = \frac{(\nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1) - (\nu_1 - \nu_2)\mu_3}{\mu_2 - \mu_1}$$ gefunden werden kann.

Aufgelöst nach $\cot\eta_3$ hat man

$$\cot\eta_3 = \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}\cot\eta_1 - \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}\cot\eta_2 \tag{13}$$

$$= \frac{\nu_2 - \nu_3}{\nu_2 - \nu_1}\cot\eta_1 - \frac{\nu_1 - \nu_3}{\nu_2 - \nu_1}\cot\eta_2\,.$$

Man bemerkt, dass die letzte Gleichung (13) eine allgemeinere Form des unter dem Namen „Basalsatz“ bekannten Problem ist.

Nimmt man — einem monoklinischen Axen-System entsprechend — zur Fläche F die Hexaïdfläche $a:\infty b \infty c$, zur Fläche F_1 und F_2 beliebige Dodecaïdflächen von der Form $\frac{a}{x}:\infty b:c$ und als Fläche F_3 die Basis $= \infty a:\infty b:c$, so geht der Ausdruck, da $\mu_3 = 0$ wird, über in

$$\cot\eta_3 = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\cot\eta_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\cot\eta_2,$$

gewöhnlich geschrieben

$$\operatorname{tg}\eta_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2\cot\eta_1 - \mu_1\cot\eta_2} \quad \text{oder}$$

$$= \frac{(\mu_2 - \mu_1)\sin\eta_1\sin\eta_2}{\mu_2\cos\eta_1\sin\eta_2 - \mu_1\cos\eta_2\sin\eta_1}.$$

Ebenso ist letzte Gleichung (13) eine allgemeinere Form des für rechtwinklige Axen in der Regel direct abgeleiteten, mit dem Namen des „Tangentensatzes“ belegten Problems.

Führt man nämlich als Fläche F_1 die Dodecaïdfläche $\frac{a}{m}:\infty b:c$, für Fläche F_2 die Dodecaïdfläche $\infty a:\frac{b}{n}:c$ der Zone ein, so dass

$$\mu_1 = m \quad , \quad \nu_1 = 0$$
$$\mu_2 = 0 \quad , \quad \nu_2 = n \quad \text{wird,}$$

so lautet die Gleichung

$$\cot\eta_3 = \frac{\mu_3}{m}\cot\eta_1 + \frac{m - \mu_3}{m}\cot\eta_2.$$

Bei rechtwinkligen Axen ist

$$\cot\eta_1 = \frac{m^2 b}{a\sqrt{m^2n^2 + a^2n^2 + b^2m^2}},$$

$$\cot\eta_2 = -\frac{n^2 a}{b\sqrt{m^2n^2 + a^2n^2 + b^2m^2}},$$

so dass

$$\cot \eta_3 = \frac{\mu_3 m^2 b^2 - (mn - \mu_3 n) n a^2}{m . ab \sqrt{m^2 n^2 + a^2 n^2 + b^2 m^2}};$$

da ferner

$$mn = m\nu_3 + n\mu_3 ,$$

so geht der Ausdruck in

$$\cot \eta_3 = \frac{\mu_3 m b^2 - \nu_3 n a^2}{ab \sqrt{m^2 n^2 + a^2 n^2 + b^2 m^2}}$$

oder in der üblichen Schreibweise in

$$\operatorname{tg} \eta_3 = \frac{ab \sqrt{m^2 n^2 + a^2 n^2 + b^2 m^2}}{\mu_3 m b^2 - \nu_3 n a^2}.$$

Die Dodecaïdflächen, welche der Vertical-Axe OC parallel gehen, d. h. die Säulenflächen, haben Symbole von der Form $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \infty c = \frac{a}{\mu \cdot \infty} : \frac{b}{\nu \infty} : c$. Führt man an Stelle von μ, μ_1, μ_2 etc. derartige Werthe in die oben entwickelten Gleichungen ein, so bleiben dieselben unbestimmt.

Die von den Normalen dieser Flächen eingeschlossenen Winkel werden in der Figur einer Neumann'schen Normalen-Projection von den Radien aus dem Mittelpuncte des Unendlichkeitskreises nach den in dem letzteren belegenen Flächenorten verzeichnet. Jeder von einem dieser Radien aus gemessene Complex dieser Winkel wird zunächst durch das Coordinaten-Verhältniss der im Unendlichen belegenen Flächenorte bestimmt; in gleicher Weise maassgebend für die Grösse dieser Winkel sind aber die Distanzen der Durchschnittspuncte jeder anderen diese Radien schneidenden Graden, welche dasselbe proportionale Verhältniss haben, wie die im Unendlichen liegenden Distanzen.

Zu einer diesen Bedingungen entsprechenden Graden gelangt man aber, wenn man an Stelle der unendlich grossen Coordinaten der Flächenorte proportionale endliche setzt, so zwar, dass für die eine gleichnamigte Coordinaten-Gruppe ein und dieselbe Länge, beispielsweise die Axeneinheit genommen wird.

Man substituirt also

$$\text{für}\quad \mu.\infty\,,\ \nu.\infty \quad \text{die Werthe}\quad \frac{\infty\,\mu}{\infty\,\nu}\,,\ 1 \quad \text{oder}\quad \frac{\mu}{\nu}\,,\ 1$$

$$\mu_1\,\infty\,,\ \nu_1\,\infty \qquad \frac{\infty\,\mu_1}{\infty\,\nu_1}\,,\ 1 \quad \text{oder}\quad \frac{\mu_1}{\nu_1}\,,\ 1$$

etc.

und hat daher für die Säulenzone

$$\frac{\mu_3}{\nu_3} = \frac{\frac{\mu_2}{\nu_2}\left(\frac{\mu_1}{\nu_1}-\frac{\mu}{\nu}\right)\cot\eta_1 - \frac{\mu_1}{\nu_1}\left(\frac{\mu_2}{\nu_2}-\frac{\mu}{\nu}\right)\cot\eta_2 + \frac{\mu}{\nu}\left(\frac{\mu_2}{\nu_2}-\frac{\mu_1}{\nu_1}\right)\cot\eta_3}{\left(\frac{\mu_1}{\nu_1}-\frac{\mu}{\nu}\right)\cot\eta_1 - \left(\frac{\mu_2}{\nu_2}-\frac{\mu}{\nu}\right)\cot\eta_2 + \left(\frac{\mu_2}{\nu_2}-\frac{\mu_1}{\nu_1}\right)\cot\eta_3} \tag{14}$$

$$\cot\eta_3 = \frac{\left(\frac{\mu_2}{\nu_2}-\frac{\mu_3}{\nu_3}\right)\left(\frac{\mu_1}{\nu_1}-\frac{\mu}{\nu}\right)}{\left(\frac{\mu_3}{\nu_3}-\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\mu_2}{\nu_3}-\frac{\mu_1}{\nu_1}\right)}\cot\eta_1 - \frac{\left(\frac{\mu_1}{\nu_1}-\frac{\mu_3}{\nu_3}\right)\left(\frac{\mu_2}{\nu_2}-\frac{\mu}{\nu}\right)}{\left(\frac{\mu_3}{\nu_3}-\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\mu_2}{\nu_2}-\frac{\mu_1}{\nu_1}\right)}\cot\eta_2\,. \tag{15}$$

Auf die einfachste Form der für diese Zone geltenden Gleichung gelangt man, wenn man zu den constanten Gliedern die Hexaïdflächen und die von ihnen eingeschlossene Fläche der ersten Säule nimmt, also z. B. für

$$\begin{array}{lll} F & \text{die Fläche} & a:\infty b:\infty c\,, \\ F_1 & & a:\ b\ :\infty c\,, \\ F_2 & & \infty a:\ b\ :\infty c\,, \end{array}$$

wo dann $\frac{\mu}{\nu} = \infty$, $\frac{\mu_1}{\nu_1} = 1$, $\frac{\mu_2}{\nu_2} = 0$ ist, so dass

$$\frac{\mu_3}{\nu_3} = \frac{\cot\eta_2 - \cot\eta_3}{\cot\eta_2 - \cot\eta_1}\,, \tag{16}$$

$$\cot\eta_3 = \frac{\mu_3}{\nu_3}\cot\eta_1 + \left(1-\frac{\mu_3}{\nu_3}\right)\cot\eta_2\,. \tag{17}$$

Beispiel.

Am Anorthit folgen in einer Zone:

$$
\begin{aligned}
l &= a : b' : \infty c &;\quad \mu &= +\infty , &\nu &= -\infty \\
\chi &= \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{4}b' : c &;\quad \mu &= +2 , &\nu &= -4 \\
n' &= \infty a : \tfrac{1}{2}b' : c &;\quad \mu &= 0 , &\nu &= -2 \\
o' &= a' : b' : c &;\quad \mu &= -1 , &\nu &= -1 \\
z &= \tfrac{3}{4}a' : \tfrac{3}{2}b' : c &;\quad \mu &= -\tfrac{4}{3} , &\nu &= -\tfrac{2}{3} \\
y &= \tfrac{1}{2}a' : \infty b : c &;\quad \mu &= -2 , &\nu &= 0 \\
\mu &= \tfrac{1}{4}a' : \tfrac{1}{2}b : c &;\quad \mu &= -4 , &\nu &= +2 \\
l &= a' : b : \infty c &;\quad \mu &= -\infty , &\nu &= +\infty
\end{aligned}
$$

Nach Descloizeaux sind die Normalenbögen:

$$
\begin{aligned}
l/\chi &= 21^\circ\ 28' \\
\chi/n' &= 31^\circ\ 46' \\
n'/o' &= 45^\circ\ 21' \\
o'/z &= 15^\circ\ 40' \\
z/y &= 22^\circ\ \ 7' \\
y/\mu &= 24^\circ\ 16' \\
\mu/l &= 19^\circ\ 22' \\
\hline
\text{Summa}\ & 180^\circ\ 0'
\end{aligned}
$$

Betrachten wir als P, P_1, P_2 die Flächenorte von χ, n', o', so ist

$$
\begin{aligned}
\mu &= 2 , &\nu &= -4 \\
\mu_1 &= 0 , &\nu_1 &= -2 \\
\mu_2 &= -1 , &\nu_2 &= -1
\end{aligned}
$$

$$\eta_1 = \text{Bogen } \chi/n' = 31^\circ\ 46' \ ; \ \cot\eta_1 = 1{,}61493$$

$$\eta_2 = \text{Bogen } \chi/o' = 31^\circ\ 46' + 45^\circ\ 21' = 77^\circ\ 7'$$

$$\cot\eta_2 = 0{,}22872$$

und nach (1)

$$A = (-1)(0-2)\cot\eta_1 - 0(-1-2)\cot\eta_2$$
$$= 2\cot\eta_1 = 3{,}22986$$
$$B = 2(-1-0) = -2$$
$$C = (0-2)\cot\eta_1 - (-1-2)\cot\eta_2$$
$$= -2\cot\eta_1 + 3\cot\eta_2 = -2{,}54370$$
$$D = -1 - 0 = -1$$

Darnach lautet unter der Voraussetzung, dass die Winkel von der Normale der Fläche χ abgemessen werden, die für die Zone gültige Gleichung

$$\mu_3 = -\frac{3{,}22986 - 2\cot\eta_3}{2{,}54370 + \cot\eta_3}.$$

Sei gemessen $o'/z = 15^\circ\ 40'$, so ist $\eta_3 = 77^\circ\ 7' + 15^\circ\ 40' = 92^\circ\ 47'$; $\cot\eta_3 = -\operatorname{tg} 2^\circ\ 47' = -0{,}04862$; also für z

$$\mu_3 = -\frac{3{,}22986 + 2.0{,}04862}{2{,}54370 - 0{,}04862} = -1{,}3334 = -\tfrac{4}{3}.$$

$$\nu_3 = \frac{(\nu\mu_1 - \nu_1\mu) - (\nu - \nu_1)\mu_3}{\mu_1 - \mu} = \frac{(-0.4 + 2.2) - (-4+2)(-\frac{4}{3})}{0-2}$$
$$= -\tfrac{2}{3}\ ,\ z = \tfrac{3}{4}a' : \tfrac{3}{2}b' : c\,.$$

Soll der Bogen η_3 von χ nach z berechnet werden, so ist, $-\frac{4}{3}$ für μ_3 eingesetzt

$$\frac{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - \mu)}{(\mu_3 - \mu)(\mu_2 - \mu_1)} = \frac{(-1 + \frac{4}{3})(0-2)}{(-\frac{4}{3} - 2)(-1-0)} = -\tfrac{1}{5}$$
$$\frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu)}{(\mu_3 - \mu)(\mu_2 - \mu_1)} = \frac{(0 + \frac{4}{3})(-1-2)}{(-\frac{4}{3} - 2)(-1-0)} = -\tfrac{6}{5}$$
$$\cot\eta_3 = -\tfrac{1}{5}\cot\eta_1 + \tfrac{6}{5}\cot\eta_2 = -0{,}04851 = -\operatorname{tg} 2^\circ\ 47'$$
$$z/\chi = 92^\circ\ 47'.$$

Für den Bogen von χ bis zur Säule $l = a' : b : \infty c$ wird nach (6)

$$\cot\eta_3 = -\frac{(0-2)}{(-1-0)}\cot\eta_1 + \frac{(-1-2)}{(-1-0)}\cot\eta_2$$
$$= -2\cot\eta_1 + 3\cot\eta_2$$
$$= -2.1{,}61493 + 3.0{,}22872 = -2{,}54370$$
$$= -\operatorname{tg} 68^\circ\ 32 = \cot 158^\circ\ 22'.$$

Der Normalenbogen zwischen $l = a : b' : \infty c$ und χ ist daher $180° - 158° \, 32' = 21° \, 28'$.

Man kann nunmehr die Zonengleichung in der einfacheren Form (11) aufstellen, indem man für P, P_1, P_2 die Flächenorte von l, χ, n' wählt; dann ist

$$\mu_1 = 2 \;,\; \mu_2 = 0$$

und

$$\eta_1 = l/\chi = 21° \, 28' \;;\; \cot \eta_1 = 2{,}54299$$

$$\eta_2 = l/n' = 21° \, 28' + 31° \, 46' = 53° \, 14'$$

$$\cot \eta_2 = 0{,}74719$$

$$D = \frac{0.2{,}54299 - 2.0{,}74719}{2{,}54299 - 0{,}74719} = -0{,}83215$$

$$E = \frac{2 - 0}{1{,}79580} = 1{,}11271$$

Darnach lautet nunmehr die für die ganze Zone gültige Gleichung

$$\mu_3 = -0{,}83215 + 1{,}11271 . \cot \eta_3 .$$

Sei gemessen $n'/z = 45° \, 21' + 15° \, 40' = 61° \, 1'$ Normalbogen, dann ist

$$\eta_3 = 53° \, 14' + 61' \, 1' = 114° \, 15' \;;$$

$$\cot \eta_3 = -\operatorname{tg} 24° \, 15' = -0{,}45047 \;;$$

für z ist dann

$$\mu_3 = -0{,}832215 - 1{,}11271 . 0{,}45047 = -1{,}3338 = -\tfrac{4}{3} .$$

Umgekehrt sei $\mu_3 = -\frac{4}{3}$ gegeben, so ist

$$\cot \eta_3 = \frac{-1{,}33333 + 0{,}83215}{1{,}11271} = -0{,}45041 .$$

Versteht man unter P, P_1, P_2, P_3 Zonenpuncte, welche in einer Sectionslinie einer Linearprojection belegen sind, deren Coordinaten daher der Bedingung

$$\frac{a}{m} - \frac{a}{m_1} : \frac{a}{m} - \frac{a}{m_2} = \frac{b}{n_1} - \frac{b}{n} : \frac{b}{n_2} - \frac{b}{n} \text{ etc.}$$

oder

$$\frac{m_2 (m_2 - m)}{m_1 (m_1 - m)} = \frac{n_2 (n_1 - n)}{n_1 (n_2 - n)} \text{ etc.}$$

entsprechen, so sind die Winkel zwischen den Zonenaxen CP, CP_1, CP_2, CP_3 diejenigen, welche die entsprechenden Kanten in der gemeinschaftlichen Fläche unter einander bilden, also η_1, η_2, η_3 oder, wie wir zum Unterschiede annehmen wollen, ε_1, ε_2, ε_3 die Winkel PCP_1, PCP_2, PCP_3. Nennt man die Distanzen $PP_1 = d_1$, $PP_2 = d_2$, $PP_3 = d_3$, so hat man die allgemeine Relation

$$\frac{d_1}{d_2 - d_1} \cot \varepsilon_1 - \frac{d_2}{d_2 - d_1} \cot \varepsilon_2 = \frac{d_1}{d_3 - d_1} \cot \varepsilon_1 - \frac{d_3}{d_3 - d_1} \cot \varepsilon_3.$$

Da nun

$$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{a}{m} - \frac{a}{m_1} : \frac{a}{m} - \frac{a}{m_2} : \frac{a}{m} - \frac{a}{m_3}$$

$$= \frac{m_1 - m}{m_1} : \frac{m_2 - m}{m_2} : \frac{m_3 - m}{m_3}$$

und

$$d_1 : d_2 - d_1 : d_2 : d_3 - d_1 : d_3 =$$

$$= \frac{m_1 - m}{m_1} : \frac{m_2 - m}{m_2} - \frac{m_1 - m}{m_1} : \frac{m_2 - m}{m_2} : \frac{m_3 - m}{m_3} - \frac{m_1 - m}{m_1} : \frac{m_3 - m}{m_3}$$

da nun

$$\frac{m_2 - m}{m_2} - \frac{m_1 - m}{m_1} = \frac{m (m_2 - m_1)}{m_2 m_1}$$

$$\frac{m_3 - m}{m_3} - \frac{m_1 - m}{m_1} = \frac{m (m_3 - m_1)}{m_3 m_1},$$

so ist:

$$\frac{d_1}{d_2 - d_1} = \frac{m_1 - m}{m_1} \cdot \frac{m_2 m_1}{m (m_2 - m_1)} = \frac{m_2 (m_1 - m)}{m (m_2 - m_1)}$$

und analog

$$\frac{d_2}{d_2 - d_1} = \frac{m_1(m_2 - m)}{m(m_2 - m_1)}, \quad \frac{d_1}{d_3 - d_1} = \frac{m_3(m_1 - m)}{m(m_3 - m_1)}$$

und

$$\frac{d_3}{d_3 - d_1} = \frac{m_1(m_3 - m)}{m(m_3 - m_1)}.$$

Es lautet daher, indem man den gemeinschaftlichen Divisor m unterdrückt, das Grundverhältniss

$$\frac{m_2(m_1 - m)\cot\varepsilon_1 - m_1(m_2 - m)\cot\varepsilon_2}{m_2 - m_1} =$$

$$= \frac{m_3(m_1 - m)\cot\varepsilon_1 - m_1(m_3 - m)\cot\varepsilon_3}{m_3 - m_1}$$

und analog

$$\frac{n_2(n_1 - n)\cot\varepsilon_1 - n_1(n_2 - n)\cot\varepsilon_2}{n_2 - n_1} =$$

$$= \frac{n_3(n_1 - n)\cot\varepsilon_1 - n_1(n_3 - n)\cot\varepsilon_3}{n_3 - n_1}.$$

Löst man die beiden letzten Gleichungen nach m_3, n_3 auf, so erhält man

$$(18)\quad m_3 = \frac{m_2(m_1 - m)\cot\varepsilon_1 - m_1(m_2 - m)\cot\varepsilon_2 + m(m_2 - m_1)\cot\varepsilon_3}{(m_1 - m)\cot\varepsilon_1 - (m_2 - m)\cot\varepsilon_2 + (m_2 - m_1)\cot\varepsilon_3}$$

$$(19)\quad n_3 = \frac{n_2(n_1 - n)\cot\varepsilon_1 - n_1(n_2 - n)\cot\varepsilon_2 + n(n_2 - n_1)\cot\varepsilon_3}{(n_1 - n)\cot\varepsilon_1 - (n_2 - n)\cot\varepsilon_2 + (n_2 - n_1)\cot\varepsilon_3}.$$

Beide Gleichungen sind conform mit den Gleichungen (1) und (2), so dass auch unmittelbar sich ergiebt:

$$(20)\quad \cot\varepsilon_3 = \frac{(m_2 - m_3)(m_1 - m)}{(m_3 - m)(m_2 - m_1)}\cot\varepsilon_1 - \frac{(m_1 - m_3)(m_2 - m)}{(m_3 - m)(m_2 - m_1)}\cot\varepsilon_2,$$

$$(21)\quad = \frac{(n_2 - n_3)(n_1 - n)}{(n_3 - n)(n_2 - n_1)}\cot\varepsilon_1 - \frac{(n_1 - n_3)(n_2 - n)}{(n_3 - n)(n_2 - n_1)}\cot\varepsilon_2.$$

Sucht man als ε_3 den Winkel, den die Basalkante der gemeinschaftlichen Fläche mit der Ausgangskante CP in der Richtung der Winkelrechnung macht, so hat man dem Puncte P_3 die Coordinaten

$$\frac{a}{m_3} = \pm \frac{a.\infty}{m m_1 (n - n_1)} \quad , \quad \frac{b}{n_3} = \mp \frac{b.\infty}{n n_1 (m_1 - m)}$$

zu geben; das Vorzeichen derselben ergiebt sich zwar im speciellen Fall aus der Lage der gemeinschaftlichen Sectionslinie und der Richtung der Winkelrechnung, ist aber irrelevant, da

$$m_3 = 0.m m_1 (n - n_1) \ , \ n_3 = 0.n n_1 (m_1 - m)$$

wird; es ist also für die Basalkante

$$\cot \varepsilon_3 = -\frac{m_2 (m_1 - m)}{m (m_2 - m_1)} \cot \varepsilon_1 + \frac{m_1 (m_2 - m)}{m (m_2 - m_1)} \cot \varepsilon_2, \tag{22}$$

$$= -\frac{n_2 (n_1 - n)}{n (n_2 - n_1)} \cot \varepsilon_1 + \frac{n_1 (n_2 - n)}{n (n_2 - n_1)} \cot \varepsilon_2. \tag{23}$$

Beginnt die Rechnung der Winkel von der Basalkante, — diese nach einem der unendlich fernen Zonenpuncte gehend gedacht, — so sind m und $n = 0$ zu setzen und

$$m_3 = \frac{m_2 m_1 (\cot \varepsilon_1 - \cot \varepsilon_2)}{m_1 \cot \varepsilon_1 - m_2 \cot \varepsilon_2 + (m_2 - m_1) \cot \varepsilon_3} \tag{24}$$

$$n_3 = \frac{n_2 n_1 (\cot \varepsilon_1 - \cot \varepsilon_2)}{n_1 \cot \varepsilon_1 - n_2 \cot \varepsilon_2 + (n_2 - n_1) \cot \varepsilon_3} \tag{25}$$

und

$$\cot \varepsilon_3 = \frac{m_1 (m_2 - m_3)}{m_3 (m_2 - m_1)} \cot \varepsilon_1 - \frac{m_2 (m_1 - m_3)}{m_3 (m_2 - m_1)} \cot \varepsilon_2 \tag{26}$$

$$= \frac{n_1 (n_2 - n_3)}{n_3 (n_2 - n_1)} \cot \varepsilon_1 - \frac{n_2 (n_1 - n_3)}{n_3 (n_2 - n_1)} \cot \varepsilon_2 \tag{27}$$

sein.

Die Zonenaxen der Basalkanten haben Zonenpuncte unendlicher Coordinaten von der Form $\frac{\infty a}{m}$, $\frac{\infty b}{n}$ und von nur relativer Bedeutung. Die Winkel, die sie einschliessen, sind identisch mit denjenigen, welche die ihnen parallelen Mittelpuncts-Sectionslinien einschliessen. Diese Winkel kann man aber auch auf die Distanzen der Durchschnittspuncte irgend welcher Graden beziehen, welche wenigstens e i n e n endlichen Parameter hat; zu einer solchen Linie und zu den Werthen der in ihr belegenen Distanzen gelangt man aber, wenn man an Stelle der einen gleichnamigten Gattung der unendlichen Coordinaten eine gleiche Länge, beispielsweise die Axeneinheit setzt und für die andere Gattung proportionale endliche Längen einführt; es bleibt dann nur eine einzige unendliche Coordinate übrig.

Man substituirt also

$$\text{für } \frac{\infty\, a}{m} \text{ den Werth } \frac{\infty\, n}{\infty\, m}.a = \frac{n}{m}a$$
$$\frac{\infty\, b}{n} \qquad b \qquad \text{etc.}$$

oder aber

$$\text{für } \frac{\infty\, a}{m} \text{ den Werth } a$$
$$\frac{\infty\, b}{n} \qquad \frac{\infty\, m}{\infty\, n}b = \frac{m}{n}b,$$

alsdann ist

$$(28)\quad \frac{m_3}{n_3} = \frac{\frac{m_2}{n_2}\left(\frac{m_1}{n_1}-\frac{m}{n}\right)\cot\varepsilon_1 - \frac{m_1}{n_1}\left(\frac{m_2}{n_2}-\frac{m}{n}\right)\cot\varepsilon_2 + \frac{m}{n}\left(\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_1}{n_1}\right)\cot\varepsilon_3}{\left(\frac{m_1}{n_1}-\frac{m}{n}\right)\cot\varepsilon_1 - \left(\frac{m_2}{n_2}-\frac{m}{n}\right)\cot\varepsilon_2 + \left(\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_1}{n_1}\right)\cot\varepsilon_3}$$

und

$$(29)\quad \cot\varepsilon_3 = \frac{\left(\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_3}{n_3}\right)\left(\frac{m_1}{n_1}-\frac{m}{n}\right)}{\left(\frac{m_3}{n_3}-\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_1}{n_1}\right)}\cot\varepsilon_1 - \frac{\left(\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_3}{n_3}\right)\left(\frac{m_2}{n_2}-\frac{m}{n}\right)}{\left(\frac{m_3}{n_3}-\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m_2}{n_2}-\frac{m_1}{n_1}\right)}\cot\varepsilon_2$$

Wenn man

für P den Zonenpunct der Kante: $\infty a : \infty b : c$ zu $\infty a : b : \infty c$, welche parallel der Axe OA,

für P_1 den Zonenpunct der Kante: $\infty a : \infty b : c$ zu $a : b' : \infty c$, welche paralle der Sectionslinie der ersten Säulenfläche im anliegenden Octanten,

für P_2 den Zonenpunct der Kante: $\infty a : \infty b : c$ zu $a : \infty b : c$, welche parallel der Axe OB,

wählt, dann hat

$$\begin{array}{ll} P \text{ die Coordinaten} & \infty a,\ \dfrac{b}{\infty} \\ P_1 & \infty a,\ \infty b \\ P_2 & \dfrac{a}{\infty},\ \infty b; \end{array}$$

es ist dann

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\infty \cdot \infty}, \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{m_2}{n_2} = \infty \cdot \infty$$

wofür man in dem vorliegenden Falle

$$\frac{m}{n} = 0, \quad \frac{m_1}{n_1} = 1, \quad \frac{m_2}{n_2} = \infty$$

setzen kann; es lautet dann für die Winkelrechnung ab Axenrichtung OA

$$\frac{m_3}{n_3} = \frac{\infty(1-0)\cot\varepsilon_1 - 1.(\infty - 0)\cot\varepsilon_2 + 0.(\infty - 1)\cot\varepsilon_3}{(1-0)\cot\varepsilon_1 - (\infty - 0)\cot\varepsilon_2 + (\infty - 1)\cot\varepsilon_3}$$

$$= \frac{\cot\varepsilon_1 - \cot\varepsilon_2}{-\cot\varepsilon_2 + \cot\varepsilon_3} = \frac{\cot\varepsilon_1 - \cot\varepsilon_2}{\cot\varepsilon_3 - \cot\varepsilon_2}, \tag{30}$$

worin ε_2 der Axenwinkel $\gamma = AOB$ ist; ferner ist

$$\cot\varepsilon_3 = \frac{n_3}{m_3}\cot\varepsilon_1 + \left(1 - \frac{n_3}{m_3}\right)\cot\varepsilon_2. \tag{31}$$

Berlin, December 1875.

Buchdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften (G. Vogt).
Berlin, Universitätsstr. 8.