

## REALE ACCADEMIA DEI LINCEI.

Estratto dalla sessione III, del 9 febbrajo 1873.

---

*Sulle piccole variazioni della direzione della gravità prodotte dalle maree nelle località situate presso la spiaggia del mare — Nota di FILIPPO KELLER presentata dal prof. PAOLO VOLPICELLI.*

1.° Il sole, mentre cangia continuamente la sua posizione relativamente ad un determinato punto della superficie terrestre, influisce per la sua forza attrattiva sulla intensità della gravità che regna in questo punto, in due diversi modi. Primieramente attrae esso direttamente un punto collocato in questa stazione e tale attrazione diminuisce il peso dei corpi, quando il sole si trova al di sopra dell'orizzonte, e lo aumenta mentre sta al di sotto del medesimo. In secondo luogo poi è da notarsi, che l'attrazione del sole è, almeno in parte, cagione delle maree; ora quest'ultime producono dal canto loro un continuo cangiamento della forma dell'ellissoide terrestre e conseguentemente anche una piccola variazione della gravità, tanto in direzione quanto in intensità. Si vede quindi, che le maree sono un mezzo indiretto, con cui agisce il sole a perturbare la gravità di una determinata stazione della superficie terrestre, e tutto ciò che ora fu detto dall'attrazione del sole può egualmente applicarsi alla luna ed anzi sappiamo che l'effetto della luna sulle maree è quasi il triplo di quello del sole.

Dai due modi, con cui agisce il sole (e anche la luna) sulla gravità terrestre, la seconda non avrebbe più luogo, quando alla terra non esistessero dei mari e ciò faciliterebbe assai la determinazione delle perturbazioni in discorso.

Non intendo qui di ragionare sulla prima di queste due azioni, cioè sulla diretta, questo argomento è già trattato e rimando il lettore sopra il lavoro e Benzenberg (1); certo è che tale azione è così tenue, di non esser sensibile neppure cogli strumenti i più delicati. Per avere un'idea della piccolezza di questa azione, basterà riflettere su quanto riporta Muncke, il quale stabilisce (2), che l'azione del sole e della luna insieme, quando ambedue si

---

(1) Gilbert, *Annalen der Physik*, vol. 13, pag. 113 — *Versuche über die Umdrehung der Erde*.

(2) Gehler *physikalisches Wörterbuch* Leipzig 1836, vol. 8, pag. 623.

trovassero nel zenit produrrebbero una diminuzione della gravità di solo 0,00000009 del suo proprio valore. Trovandosi poi questi due astri nel medesimo punto dell'orizzonte, allora producono essi una deviazione del filo a piombo verso questo punto, la cui tangente uguaglia alla quantità ora riportata. Riflettendo, che a questa corrisponde l'angolo di circa 0,02", bene si vedrà, quanto sia difficile di rendere questa azione visibile.

2.° Trattandosi delle maree, la cui teorica venne principalmente sviluppata dal celebre Laplace (1) e le quali costituiscono il secondo modo, con cui perturba il sole (e la luna) la gravità di una determinata stazione della terra, si debbono distinguere più casi. Trovandosi la stazione in alto mare nell'oceano e molto distante dalla terraferma, l'effetto delle maree sarà differente da quello, ove la stazione medesima giace alla spiaggia del mare, ovvero anche nell'interno di un continente. Infatti nel primo caso, un filo a piombo sentirà l'azione delle maree da tutte le direzioni intorno a lui, mentre nel caso della spiaggia mancano le azioni dalla parte della terra. L'effetto massimo delle maree per una stazione posta sulla spiaggia avrà luogo, quando questa è rettilinea; in tal caso l'azione manca affatto dalla parte di terra, l'azione delle maree si farà quindi sentire con massima forza. Quanto spetta finalmente il caso di una stazione nell'interno di un continente l'azione delle maree dev'essere pure molto debole.

3.° La questione, se vi sieno dei piccoli cangiamenti nella direzione della gravità non è recente. Calignon de Peirins un amico di Gassendi asserì di aver osservato per un lungo intervallo un pendolo di 30 piedi di lunghezza e che questo mostrava un piccolo movimento corrispondente alle maree in guisa da muoversi per sei ore da Sud a Nord mentre nelle susseguenti sei ore, torna in dietro e Gassendi chiamò questo fenomeno *Reciprocatio penduli* (2). Bouguer, il quale trattò pure questo argomento dice che questi pendoli non mostrarono nessuna regolarità nel loro movimento (3). Altri autori intorno a questo oggetto sono Riccioli, Grimaldi e Mersenne; ma in ispecie è da nominare Benzenberg (4). Quest'ultimo fisico propose l'uso di livelli ad aria assai lunghi da osservarsi nelle epoche, in cui il sole e la luna trovansi

---

(1) Le Mécanique celeste, vol. 2.° pag. 198.

(2) Gehler, luogo citato.

(3) Histoire de l'academie de Paris 1754, pag. 250.

(4) Gehler, luogo citato.

tanto nell'orizzonte, quanto nel meridiano, ma le sue osservazioni condussero ad un risultato negativo.

Questo medesimo argomento venne nell'ultima riunione dei fisici francesi a Bordeaux dal Sig. D'Abbadie di nuovo messo in discussione e questo scienziato assicura di aver osservato un piccolo cangiamento nella direzione della gravità conforme all'andamento delle maree, se non sempre almeno 75 volte su cento (1). La stazione, ove osserva il Sig. D'Abbadie è a Abbadia presso Hendaye (Basses Pyrenées) e dista circa 400 metri della spiaggia dell'Atlantico.

La poca concordanza che regna fra questi autori m'indusse di fare sopra questo argomento alcune ricerche, del tutto teoriche, le quali espongo nella presente nota.

4.° Pertanto considero il caso di una spiaggia rettilinea e suppongo, che la stazione ove si osserva, si trovi in qualche distanza dalla spiaggia ed in un livello che corrisponde alla bassa marea. Quando la stazione si trovasse invece nel livello dell'alta marea tutto lo sviluppo seguente rimarrebbe intatto, come anche i risultati numerici, che si ottengono; l'unico punto che subirebbe una qualche modificazione è quello che riguarda l'errore, che si commette ammettendo la superficie del mare piana invece di sferica e del quale errore verrà ragionato nel num.° 6. Trattandosi poi del caso, ove la stazione si trova in un livello che non coincide, nè colla marea bassa, nè colla alta; l'analisi si può sempre con grande facilità riportare a quello che segue. Sia pertanto  $C$  (fig. 1) il centro della terra (la quale supponiamo sferica),  $O$  la stazione, in cui si osserva la direzione della gravità,  $LP$  la superficie del mare corrispondente alla bassa marea,  $RQ$  la medesima superficie corrispondente all'alta marea e si faccia  $LR$  cioè la differenza dei livelli fra alta e bassa marea  $= b$ . Posto ciò proponiamoci di dedurre l'attrazione nel senso orizzontale esercitata sul punto  $O$  da una zona dell'onda delle maree prossima a questa stazione rappresentata da  $LPQR$ . Suppongasi che questa zona sia verso la parte del mare limitata da un arco circolare, che ha la stazione  $O$  per centro, inoltre si ammetta che questa zona ovvero strato abbia dappertutto la medesima grossezza  $b$  introdotta di sopra. Egli è vero, che quest'ultima ipotesi in astratto parlando, non si verifica, ma l'errore

---

(1) *Bullettino meteorologico del Collegio Romano*, 30 novembre 1872, pag. 106.

del risultato finale viene insensibile, quando si prende l'estensione della zona sufficientemente piccola in paragone del raggio terrestre. Un'altra ipotesi che si può introdurre senza punto nuocere sensibilmente alla esattezza del risultato è quella, di supporre lo strato in proposito piano, invece di sferico e nell'appresso sarà determinato il limite superiore dell'errore, al quale potrebbe dar luogo questa ipotesi. Rimane poi ancora da osservare, che tutto il seguente ragionamento suppone che la spiaggia sia formatata da un piano verticale, come fa anche vedere la figura e ciò avrà per effetto, che il mare nella sua crescita non va ad avanzarsi verso la terra.

Ciò premesso sostituiamo allo strato sferico  $RLPQ$  l'altro  $rlpq$ , limitato di sopra e di sotto da due piani  $O'q$  e  $Op$  rappresentanti gli orizzonti apparenti dei due punti  $O'$  e  $O$ . Per precisare meglio questo nuovo strato stabiliamo che esso sia verso la parte del mare limitato da un cilindro circolare retto, il cui asse si confonde colla verticale  $OO'$ ; il raggio  $Op$  di questo cilindro poi uguaglia all'arco  $OP$ , vale a dire supponiamo, che ambedue gli strati abbiano lo stesso raggio alla loro parte inferiore che denoteremo con  $r$ , però il raggio dello strato sferico s'intende preso sull'arco che segna la curvatura della superficie terrestre.

Per precisare meglio la voce — deviazione del filo a piombo prodotta dalle maree — la quale in appresso spesse volte sarà adoperata, dichiariamo ancora, che per la direzione primitiva, alla quale si riferisce questa deviazione prendiamo sempre quella corrispondente alla marea bassa, sebbene la vera, normale direzione della gravità corrisponderebbe a una fase intermedia delle maree. Chi volesse poi invece partire da questa ultima direzione, come normale, avrebbe da considerare due deviazioni in sensi inversi, corrispondenti rispettivamente alla bassa ed all'alta marea; per la prima il filo a piombo va col suo estremo inferiore verso la terra e per la seconda verso il mare. La somma di questi due angoli poi è appunto l'angolo chiamato da noi senz'altro: deviazione del filo a piombo.

5.<sup>o</sup> Proponiamoci ora innanzi tutto di determinare la forza orizzontale con cui agisce lo strato  $lqqr$  sul punto  $O$ . Dal fin qui esposto risulta, che questo strato abbia la forma di un segmento cilindrico, e che il punto attratto si trovi, nell'intersezione di una sua base coll'asse del cilindro, mentre la corda del segmento corrisponde alla costa del mare.

Sin ora (fig. 2)  $MN$  la proiezione orizzontale della costa,  $O$  la stazione ove si osserva,  $OY$  una retta parallela alla costa, la quale prendiamo per

asse delle  $y$  di un sistema a tre assi,  $OX$  la retta dell'orizzonte del punto  $O$ , che fa un angolo retto colla costa; l'asse delle  $z$  è quindi verticale e supponiamo inoltre che la sua direzione positiva va dal basso in alto. Il segmento cilindrico in discorso ha per proiezione  $ABD$  e l'altezza  $b$  come già fu stabilito di sopra; siccome poi questo segmento è simmetrico rispetto la  $OX$ , è chiaro che la componente colla quale il medesimo agisce sul punto  $O$  nel senso orizzontale deve trovarsi nella  $OX$ . Ora per formulare questa attrazione che denoteremo con  $X$ , troviamo prima l'attrazione corrispondente al settore cilindrico  $OABD$  e da questa togliamo l'attrazione relativa al prisma retto, che ha per base il triangolo isoscele  $OAD$ . Chiamando queste due forze rispettivamente  $X_1$  e  $X_2$  abbiamo adunque

$$(1) \quad X = X_1 - X_2$$

Venendo ora a valutare la forza  $X$ , dividiamo il settore cilindrico a cui appartiene, per tanti piani passanti per la verticale  $OZ$  in elementi, denotando l'angolo compreso fra uno di questi elementi  $bOb'$  e l'asse delle  $x$  con  $\alpha$ . Per dedurre l'azione di questo elemento sul punto  $O$  lungo la  $Ob$  può servire la (67) della mia memoria intitolata: *Ricerche sull'attrazione delle montagne con applicazioni numeriche* ponendo nella medesima come fa d'uopo nel caso presente  $g = o$ ,  $a = r$  e  $c = r \, d\alpha$ . Tale sostituzione riduce il secondo membro di questa equazione all'espressione seguente

$$b \log \frac{r + \sqrt{r^2 + b^2}}{b} \, d\alpha + \left[ g \log g \right]_{g=0} \cdot d\alpha$$

Ma con facile calcolo si dimostra che l'espressione indeterminata  $\left[ g \log g \right]_{g=0}$  si riduce a zero, quindi si avrà per la forza con cui attrae l'elemento  $bOb'$  il punto  $O$  nel senso orizzontale la quantità

$$b \log \frac{r + \sqrt{r^2 + b^2}}{b} \, d\alpha$$

e perciò sarà la forza, con cui agisce questo medesimo elemento sul punto  $O$  lungo la  $OX$ , espressa dalla seguente equazione

$$dX_1 = b \cdot \log \frac{r + \sqrt{r^2 + b^2}}{b} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha$$

Integrando questa equazione e indicando l'angolo  $DOB$  con  $\beta$  sarà

$$(2) \quad X_1 = 2 b \cdot \log \frac{r + \sqrt{r^2 + b^2}}{b} \cdot \text{sen } \beta$$

Tale è l'attrazione colla quale agisce il settore  $OABD$  sul punto  $O$  lungo la  $OX$ ; venendo ora a formulare l'attrazione relativa al prisma retto che ha per base il triangolo  $OAD$ , consideriamo una sola metà di questo prisma, cioè quella che ha per base il triangolo rettangolo  $OFD$ ; trovata questa attrazione, basterà, per causa della simmetria, di raddoppiarla per ottenere l'attrazione relativa al prisma della base  $OAD$ .

Ora riflettendo, che il prisma di base  $OFD$  sia rettangolare in  $F$  e che il punto attratto si trova nel caso presente in un vertice corrispondente ad uno degli angoli acuti, bene si vedrà che la componente che esercita questo prisma lungo la  $OX$  dipende dalla formola (65) pag. 69 della citata memoria, la quale comprende la presente attrazione come caso particolare ponendo nella medesima  $g = 0$ .

Quando si fa nella citata formola questa sostituzione allora assume il suo secondo membro la seguente forma

$$a \cdot \text{arc tg} \frac{bc}{a \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + b \left[ \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \log \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{b} \right. \\ \left. - \log \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - c} \right] + \frac{ac}{a^2 + c^2} [g \log g]_{g=0}$$

e l'ultimo termine di questo trinomio si annulla, come fu già indicato di sopra. Confrontando i simboli contenuti in questa espressione con quelli introdotti di sopra pel caso del segmento cilindrico si vedrà che  $b$  ha in ambedue i casi il medesimo significato e gli altri simboli sono legati mediante le equazioni

$$a^2 + c^2 = r^2 \quad \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \text{sen } \beta$$

Eliminando quindi  $a$  e  $c$  mediante queste due formole, allora l'ultima espressione viene ad uguagliare  $\frac{X_2}{2}$  ed otterremo

$$(3) \quad X_2 = 2 \left[ r \cos \beta \cdot \text{arc tg } \frac{b \text{ tg } \beta}{\sqrt{r^2 + b^2}} + b \left( \text{sen } \beta \log \frac{r + \sqrt{r^2 + b^2}}{b} - \log \frac{\sqrt{r^2 \cos^2 \beta + b^2}}{\sqrt{r^2 + b^2} - r \text{ sen } \beta} \right) \right]$$

Trovate le due forze  $X_1$  e  $X_2$  introduciamole nella (1), il che fornisce la

$$(4) \quad X = 2 \left[ b \cdot \log \frac{\sqrt{r^2 \cos^2 \beta + b^2}}{\sqrt{r^2 + b^2} - r \text{ sen } \beta} - r \cos \beta \cdot \text{arc tg } \frac{b \text{ tg } \beta}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right]$$

Tale sarà adunque la forza, con cui agisce il segmento cilindrico  $ABD$  sul punto  $O$  lungo la  $OX$ . La formola medesima suppone che la densità di questo corpo uguagli l'unità, e che l'unità di forza sia quella con cui si attraggono due punti materiali posti nella distanza = 1 ed avente ciascuno la massa = 1. Queste ipotesi circa la densità del corpo considerato e circa l'unità della forza sono necessarie, perchè le medesime già sono entrate nello sviluppo delle formole citate, sopra le quali si appoggia la precedente analisi. Nel caso poi, ove queste ipotesi non avessero più luogo, non occorrerebbe altro che moltiplicare i secondi membri delle formole in discorso con un coefficiente determinato nel dovuto modo. Circa il passaggio della (3) alla (4) è ancora da osservare, che facendo la sottrazione delle due quantità  $X_1$  e  $X_2$ , la prima si distrugge completamente contro uno dei termini, di cui è composto la seconda. Riflettendo bene sul modo, col quale fu dedotta la (65) della citata memoria, si rileva che questo fatto dà luogo ad un interessante teorema, il quale però, non trovandosi in stretta relazione coll'oggetto della presente memoria esporremo in appresso.

6.° Dopo stabilita per mezzo della (4) la forza, con cui agisce la massa  $lpqr$  sul punto  $O$  (fig. 1) nel senso orizzontale, conviene di ragionare alquanto sull'errore, che si è commesso per aver sostituito questo corpo al lungo dell'altro  $LPQR$ , vale a dire per aver trascurato la curvatura della superficie terrestre.

Determiniamo pertanto un qualsiasi punto  $M$  contenuto in uno di questi due corpi nel seguente modo. La sua distanza dal centro della terra denotiamo con  $R + h$  essendo  $R$  il raggio terrestre computato fino al punto  $O$  ed  $h$  la sua distanza  $AM$  dalla superficie terrestre  $OP$ ; chiamiamo poi  $\alpha$  l'angolo che fa il piano verticale passante per la retta  $CO$  ed il punto  $M$  col piano verticale della retta  $OX$  (fig. 2). Sia finalmente  $q$  la lunghezza dell'arco circolare  $OA$  (fig. 1) giacente sulla superficie terrestre e nel piano verticale  $COM$ , del quale ora fu parlato.

Premesso ciò si consideri un elemento intorno al punto  $M$ , il quale sarà quindi determinato dalle quantità  $h$ ,  $\alpha$ ,  $q$ ,  $h + dh$ ,  $\alpha + d\alpha$  e  $q + dq$ ; il volume di questo elemento sarà

$$\frac{(R + h)^2}{R} \operatorname{sen} \frac{q}{R} .dh. dq. d\alpha$$

Per trovare l'attrazione che esercita questo elemento sul punto  $O$  lungo la  $OX$  (fig. 2) riflettasi che il medesimo dista dal punto  $O$  per l'intervallo

$$\sqrt{(R + h)^2 + R^2 - 2R(R + h) \cos \frac{q}{R}}$$

e che il coseno dell'angolo, che comprende questa distanza col piano orizzontale  $Op$  sarà espressa da

$$\frac{(R + h) \operatorname{sen} \frac{q}{R}}{\sqrt{(R + h)^2 + R^2 - 2R(R + h) \cos \frac{q}{R}}}$$

Da ciò si deduce, che proiettando la forza con cui agisce  $M$  sopra  $O$  sul piano orizzontale  $Op$ , questa forza avrà per espressione

$$\frac{\left( R + h \right)^3 \operatorname{sen}^2 \frac{q}{R} dh. dq. d\alpha}{R \left[ \left( R + h \right)^2 + R^2 - 2R \left( R + h \right) \cos \frac{q}{R} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Denotando finalmente la componente della forza lungo la  $OX$  (fig. 2) con  $dX$  sarà

$$(5).. dX = \frac{\left( R + h \right)^3 \operatorname{sen}^2 \frac{q}{R} \cos \alpha . dh. dq. d\alpha}{R \left[ \left( R + h \right)^2 + R^2 - 2R \left( R + h \right) \cos \frac{q}{R} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Quando si suppone, che  $q$  e  $h$  sieno quantità piccolissime rapporto al raggio terrestre  $R$  come difatti si verifica nei casi nostri, possiamo la precedente espressione svolgere secondo le potenze ascendenti di  $\frac{1}{R}$ . Per eseguire questo sviluppo coll'esattezza fino alla seconda potenza di  $\frac{1}{R}$ , otterremo pel numeratore

$$\frac{\left( R + h \right)^3}{R} \operatorname{sen}^2 \frac{q}{R} = q^2 \left[ 1 + 3 \frac{h}{R} + \frac{9h^2 - q^2}{3} \cdot \frac{1}{R^2} \right]$$

e per svolgere il denominatore sviluppiamo prima la quantità sotto il simbolo radicale la quale fornisce

$$\left( R + h \right)^2 + R^2 - 2R \left( R + h \right) \cos \frac{q}{R} = h^2 + q^2 + \frac{q^2 h}{R} - \frac{1}{12} \frac{q^4}{R^2}$$

Innalzando questa equazione alla potenza  $-\frac{3}{2}$  si avrà

$$\frac{1}{\left[ (R+h)^2 + R^2 - 2R(R+h) \cos \frac{q}{R} \right]^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{(q^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{q^2 h}{(h^2 + q^2) R} + \frac{q^4 (16 h^2 + q^2)}{8 (h^2 + q^2)^2 R^2} \right]$$

sostituendo finalmente questi valori nella (5) ed effettuando la moltiplicazione dei due trinomi, che si trovano nel secondo membro sarà

$$(6)... \quad dX = \frac{q^2}{(q^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 + \frac{h (6h^2 + 3q^2)}{2 (h^2 + q^2)} \cdot \frac{1}{R} + \right. \\ \left. + \frac{72 h^6 + 28 h^4 q^2 - 4 h^2 q^4 - 5q^6}{24 (h^2 + q^2)^2} \frac{1}{R^2} \right] \cos \alpha . dh . dq . d\alpha$$

Tale è l'espressione della componente con cui attrae l'elemento  $M$ , dato mediante i simboli  $h, q, \alpha, dh, dq, d\alpha$  il punto  $O$ . Ora volendo questa formula applicare ai due corpi  $LPQR$  e  $lpqr$ , i quali denoteremo per maggior speditezza con  $S$  e  $S_1$  è chiaro che i limiti degli integrali triplici, che nascono dalla integrazione della precedente equazione sono i medesimi per ambedue i corpi. L' unica differenza che passa fra i due casi consiste in ciò, che pel corpo  $S_1$  il simbolo  $R$  deve prendersi infinitamente grande, lo che riduce l'equazione medesima semplicemente a

$$(7)... \quad dX = \frac{q^2}{(q^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \alpha . dh . dq . d\alpha$$

Onde giungere allo scopo prefisso, cioè determinare un limite della differenza delle componenti, con cui agiscono i due corpi in discorso sul pun-

to  $O$  lungo la  $OX$  (fig. 2), non serve entrare in una considerazione particolare degli anzidetti integrali e basterà per lo scopo presente, di paragonare fra loro non già le azioni dei corpi interi, bensì quella dei loro elementi corrispondenti. Intendiamo per elementi corrispondenti due elementi appartenente uno al corpo  $S$  l'altro a  $S_1$  i quali sono determinati dei medesimi valori di  $\alpha$ ,  $h$ ,  $q$ ,  $d\alpha$ ,  $dh$  e  $dq$ .

Infatti è evidente da se stesso, che l'errore relativo riferito ai corpi interi  $S$  e  $S_1$  dev'essere necessariamente minore del valore massimo, che può assumere l'errore relativo per due qualsiasi elementi corrispondenti.

Denotando ora con  $dX_1$  l'elemento della forza per il corpo  $S_1$ , il quale ci viene fornito dal secondo membro della (7) si troverà l'errore relativo corrispondente a due qualsiasi elementi sottraendo la (7) dalla (6) e dividendo poscia per la (6)

Eseguendo questa operazione troviamo per l'indicato errore la seguente espressione

$$(8).. \quad \epsilon = \frac{Xd - dX_1}{dX} =$$

$$\frac{h(6h^2 + 3q^2)}{2(h^2 + q^2)} \frac{1}{R} + \frac{72h^6 + 28h^4q^2 - 4h^2q^4 - 3q^6}{24(h^2 + q^2)^2} \frac{1}{R^2}$$

Bene si vede quindi, come l'errore relativo elementare varia colla posizione dell'elemento dato per mezzo dei simboli  $h$  e  $q$ . Determinando quindi questi ultimi fra i limiti corrispondenti al corpo  $S$  ovvero  $S_1$  in guisa che la precedente espressione riesca un massimo, questo massimo rappresenta nel medesimo tempo il limite superiore dell'errore  $\epsilon$  che fu commesso per aver il corpo  $S$  rimpiazzato per  $S_1$

Nel caso in cui  $h$  è molto piccolo in paragone di  $q$ , come appunto accade nella presente ricerca assume la precedente equazione, la seguente forma assai semplice

$$(9).. \quad \epsilon = \frac{3}{2} \frac{h}{R} - \frac{5}{24} \frac{q^2}{R^2}$$

la quale, come anche (8), è esatta fino alla seconda potenza di  $\frac{1}{R}$ .

7 Dopo aver stabilito le formole relative all'attrazione, che subisce il punto  $O$  dallo strato di acqua, che rappresenta l'alta marea conviene ragionare sulla attrazione, che riceve questo medesimo punto dalla terra. Questa forza viene espressa dalla seguente formola

$$Z = 265541. \gamma. (1 + 0,005689 \text{ sen } 2\theta)$$

denotando con  $\gamma$  la densità media della terra e con  $\theta$  la latitudine del punto  $O$ ; inoltre è da osservare che l'unità di forza è la medesima di quella stabilita anteriormente (num.<sup>o</sup> 5) e che l'unità di lunghezza è l'ettometro.

Lo sviluppo di questa equazione si trova nella seconda parte della mia memoria citata di sopra pag. 5, la quale fra poco sarà pubblicata. Una formola approssimativa per la  $Z$  si trova assai facilmente nel modo seguente. Supponendo la terra in quiete e di più perfettamente sferica e composta di strati concentrici ciascuno omogeneo, la sua attrazione sopra un punto della sua superficie viene espressa da

$$Z = \frac{4}{3} \pi R \gamma$$

ove denota  $\gamma$  la densità media della terra. Assumendo ora per l'unità di lunghezza l'ettometro, supponendo ancora che la circonferenza della terra uguagli precisamente 400000 ettometri ed inoltre, che il valore della sua densità media sia 5,53 come lo forniscono le sperienze colla bilancia di torsione abbiamo

$$Z = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{400000}{2\pi} \cdot \gamma = 266667 \gamma = 1474666$$

e questa quantità non differisce che poco dal valore esatto, dedotto dalla citata formola che tiene conto dello schiacciamento terrestre. Circa l'unità in cui è espressa la forza  $Z$  rimane fermo quanto fu stabilito in occasione della (4)

Quando si conosce la forza orizzontale  $X$  colla quale agisce una certa massa (la quale viene nel caso presente rappresentata dalle maree) e la forza

attrattiva della terra =  $Z$  si trova la deviazione del filo a piombo prodotta da questa massa mediante la formola

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{Z}$$

ovvero siccome  $\varphi$  è sempre piccolissimo sarà pure

$$\varphi = \frac{X}{Z}$$

ove  $\varphi$  è espresso in unità del raggio. Volendo invece l'angolo  $\varphi$  esprimere in minuti secondi avremo

$$(10) \quad \varphi = 206265 \frac{X}{Z} = 0,13987 X$$

ovvero anche

$$\varphi = \frac{X}{7,149}$$

Da ciò risulta che la forza deviatrice = 1 produca prossimamente la deviazione del filo a piombo di un settimo di un minuto secondo.

8.<sup>o</sup> Venendo ora ad applicare la precedente analisi al caso del Sig. D'Abbadie, dobbiamo innanzi tutto confessare, che ci mancano i dati precisi, che dovrebbero servire come punti di partenza. Uno degli elementi più necessari che occorrono, è la cognizione dell'altezza su cui giunge l'alta marea sulla marea bassa e sopra questo punto la breve notizia del Sig. D'Abbadie non ci fornisce alcun dato. Hendaye, la località, ove egli osserva non si trova neppure nella tavola delle maree riportata dal Marbach (1) la quale contiene questa altezza per molte stazioni della terra. Ma siccome Hendaye si trova alla costa dell'Atlantico e siccome per Brest pure situato alla medesima costa si conoscono le condizioni delle maree con grand esattezza, così suppongo in

---

(1) *Physikalisches Wörterbuch*, vol. 2, pag. 574.

manca di dati più precisi che la marea giunge a Hendaye alla medesima altezza come a Brest. Ora dalla tavola, basata sopra una serie di osservazione di 16 anni riportata da Laplace (1) risulta che l'altezza media su cui giunge la marea in questo ultimo porto il giorno dopo le sigizie uguaglia a metri 6,38; ammettendo adunque questo valore pure per la stazione del D'Abbadie e prendendo, come richiedono le formole precedenti, l'ettometro per unità di lunghezza si avrà  $b=0,0638$ .

Un secondo punto essenziale in questa ricerca è la configurazione della spiaggia specialmente nella prossimità immediata dalla stazione, ove si osserva; supponiamo qui la spiaggia rettilinea ed anzi, tutto il precedente ragionamento è basato sopra questa ipotesi. Nell'appresso sarà esposta la modificazione, da doversi applicare alla precedente ricerca, quando si trattasse di una spiaggia non rettilinea; tale modificazione dal lato teorico è assai semplice ma l'esecuzione pratica riesce un poco più complicata. Siccome ci mancano i dati necessari per considerare la configurazione della costa, abbiamo creduto giusto di attenerci nel caso del D'Abbadie alla costa rettilinea come caso più semplice.

9.<sup>o</sup> Venendo ora alla parte pratica della questione osserviamo, che ammettendo in primo luogo un raggio di azione  $r$  di un solo chilometro si ha  $\cos \beta = 0,4$  e quindi  $\beta = 66^\circ 25' 18,6''$ . e siccome  $b$  è una quantità assai piccola rapporto  $r$  possiamo la (4), che assegna l'attrazione relativa, semplificare di molto. Infatti introducendo questa condizione e supponendo  $\beta$  differente di  $\frac{\pi}{2}$  otterremo dopo facile calcolo

$$(11) \quad X = 2b \left[ \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) - \operatorname{sen} \beta \right]$$

mentre per  $\beta = \frac{\pi}{2}$  occorre un apposito sviluppo.

Pertanto se si sostituisce in questa equazione per  $\beta$  il suo va-

---

(1) *Mecanique Celeste*, vol. 5. Paris 1842. — Gehler, opera citata, vol. 3, pag. 46.

lore  $66^{\circ} 25' 18'',6$  e per  $b$  la quantità numerica 0,0638 come fu stabilito di sopra, si ottiene il seguente valore della forza deviatrice

$$X = 0,083$$

Ripetendo questo calcolo numerico successivamente per i raggi di azione

$$r = 10 \dots\dots\dots 100 \dots\dots\dots 1000 \text{ chilometri}$$

otterremo i seguenti valori di  $\beta$

$$\beta = 87^{\circ} 42' 27'',2 \dots 89^{\circ} 46' 15'' \dots 89^{\circ} 58' 38''$$

e le forze deviatrici  $X$  divengono

$$X = 0,371 \dots\dots\dots 0,665 \dots\dots\dots 0,960$$

Quando s' introducono finalmente questi valori nella (10) si ottengono i seguenti valori di  $\varphi$

Raggio di azione  $r = 1 \dots 10 \dots 100 \dots 1000$  chilom.

Deviazione del filo

a piombo  $\varphi = 0,012 \dots 0,053 \dots 0,095 \dots 0,137$

Si vede quindi, che considerando l'azione delle maree sino alla distanza di un solo chilometro dalla stazione, la deviazione del filo a piombo uguaglia 0,012 estendendo invece questo raggio di azione sino a 1000 chilometri la deviazione medesima aumenta a 0,137.

Quanto spetta gli errori di cui sono affetti questi risultati per avere sostituito ( fig. 1 ) il corpo  $lpqr$  all'altro  $LPQR$ , vale a dire per aver trascurata la curvatura della superficie terrestre è da notarsi, che questi errori sono così piccoli, che sarebbe fuori di luogo di volerli prendere in considerazione. Infatti tornando sulla (9), che assegno un limite superiore di questo errore e considerando il caso in cui il raggio di azione uguaglia 1000 chilometri otterremo per il punto, il più distante dalla stazione  $O$

$$\epsilon = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,0638}{63700} - \frac{5}{24} \left( \frac{10000}{63700} \right)^2 = 0,005 \text{ circa}$$

vale a dire l'errore in discorso risulta al più di circa 0,005 del proprio valore della deviazione calcolata di sopra. Ristringendo poi il raggio di azione da 1000 chilometri a soli 100, l'errore relativo si riduce a 0,00005 del valore della deviazione calcolata. Egli è vero, che questi errori sono soltanto esatti fino alle seconde potenze di  $\frac{1}{R}$ ; ma in ogni modo si vede che sarebbe su-

perfluo di tener conto dei medesimi; anzi è da credersi che i veri errori sono ancora molto più piccoli perchè la formula (9) colla quale essi furono valutati dà un limite superiore di questa quantità.

10.<sup>o</sup> La precedente esposizione suppone, che lo strato di acqua rappresentante le maree, la di cui azione si prende in considerazione, abbia dappertutto la medesima altezza come alla spiaggia. Questa ipotesi non è perfettamente esatta per due ragioni. Ammettendo anche in primo luogo che la configurazione della costa non influisca sulle maree, l'anzidetta ipotesi è in astratto parlando in difetto; infatti riflettendo che la superficie del mare ha in ciascuna delle fasi delle maree la forma di un ellissoide e ammettendo, che si osserva la direzione della gravità nei due istanti, in cui accadono la marea bassa e la marea alta, si rileva che lo strato di acqua la cui azione si prende in considerazione viene limitato da due superficie ellissoidiche. L'ertezza di questo strato diminuisce quindi a partire della stazione e questa diminuzione sarà tanto più grande, quanto è maggiore la distanza della medesima. Ma questa circostanza non può influire in un modo sensibile sopra i risultati ottenuti, ammettendo pure che il raggio di azione sia 1000 chilometri.

In secondo luogo poi avvi un'altra circostanza, la quale potrebbe possibilmente esercitare una influenza assai più grande, che non la precedente. È un fatto ben cognito che l'altezza delle maree dipende in un modo essenzialissimo dalla configurazione della costa, quindi potrebbe accadere, che per l'alto mare questa altezza sia un'altra, che per la costa, ed anzi è quasi certo, che una qualche differenza si verifichi fra le diverse altezze, ma fin che non si conoscono dati positivi sopra questo argomento non è possibile di tenere conto di questa circostanza.

11.<sup>o</sup> La stazione del Sig. D'Abbadie dista 400 metri dal mare e sopra questa base sono stabiliti tutti i calcoli precedenti, se invece la stazione fosse stata più vicino al mare, la deviazione del filo a piombo prodotta dalle maree sarebbe stata maggiore, e la massima deviazione si verificherebbe per la spiaggia stessa. Non sarà fuori di luogo di considerare quest'ultimo caso, trovando

così il massimo effetto, che potrebbe aver luogo, e essendo per questo l'angolo  $\beta$  un retto la formula (11) non è più applicabile. Torniamo perciò alla formula generale (4); se in questa poniamo  $\beta = \frac{\pi}{2}$  otterremo

$$(12) \quad X = 2 b \log \frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2} - r}$$

ovvero anche

$$X = 2 b \log \frac{\sqrt{r^2 + b^2} + r}{b}$$

Tale è la componente della forza con cui attrae un segmento cilindrico, avente per base un semicircolo, il centro di questo, lungo la retta la quale divide la base in due quadranti; e questa formula si sarebbe pure potuto trovare direttamente senza valersi della (4). Per un  $b$  piccolissimo, assume questa eguaglianza la seguente forma

$$(13) \quad X = 2 b \log \frac{2r}{b}$$

Trovata la formula per la per forza deviatrice corrispondente ad una stazione, collocata alla spiaggia del mare, applichiamo al caso in discorso, considerando anche qui i diversi raggi di azione. Pertanto troviamo i seguenti valori numerici:

Raggio di azione	$r = 1 \dots 10 \dots 100 \dots 1000$	chilometri
Forza deviatrice	$X = 0,733 \dots 1,027 \dots 1,321 \dots 1,615$	
Deviazione del filo		
a piombo	$\varphi = 0,^{''}11 \dots 0,^{''}15 \dots 0,^{''}19 \dots 0,^{''}23$	

Apparisce da questo specchio, che mentre il raggio di azione di un solo chilometro assegna la deviazione del filo a piombo di  $0,^{''} 11$  si ha in vece per il raggio di azione = 1000 chilometri la deviazione di  $0,^{''} 23$ , vale a dire presso a poco il doppio di prima. Questo fatto c' insegna che un ulteriore aumento

del raggio di azione non accrescerebbe di molto il valore della deviazione. D'altronde poi conviene di non perdere di vista, che l'aumento del raggio di azione al di là di 1000 chilometri toglierebbe ai risultati numerici la necessaria sicurezza, atteso che l'errore relativo, di cui è affetta la (4) e del quale fu ragionato nel num.<sup>o</sup> 6 assumerebbe un valore troppo grande; oltredichè vi sono ancora altre cause di errori che crescono coll'aumentare del raggio di azione, come fu esposto nel num. 10<sup>o</sup>.

12° Senza voler giudicare in un modo definitivo sull'argomento, se le osservazioni del D'Abbadie indicano veramente un periodico cambiamento della direzione della gravità, ed in ispecie se esse sono realmente dovute all'azione delle maree; non posso dispensarmi di fare qui alcune riflessioni su questo proposito. Innanzi tutto è certo, che il metodo delle osservazioni del D'Abbadie in astratto parlando sia ottimo, questo metodo in fondo è identico a quello usato negli strumenti zenitali. Ad un cannocchiale, collocato in una conveniente altezza al di sopra di un orizzonte di mercurio, si può dare per mezzo delle viti una posizione precisamente verticale, rivolgendo il suo obbiettivo in basso. La croce del filo di ragno stesso nel foco del cannocchiale viene riflessa dalla superficie del mercurio e portando la sua immagine mediante un micrometro a vite in coincidenza colla croce stessa, è certo che la visuale stia perfettamente verticale. Ora variando per una qualsiasi causa la direzione della gravità è chiaro, che anche la direzione dell'orizzonte di mercurio subirà una piccola modificazione, la visuale fissata dalla croce dei fili, non starà più verticale sopra questo piano riflettente e la sua immagine sarà spostata per una piccola quantità. Misurando questo spostamento per mezzo di un micrometro, assai facilmente si deduce la deviazione accaduta nella direzione della gravità. Questo metodo teoricamente parlando è buonissimo, ma in pratica mi sembra difficile di essere sicuro della perfetta immobilità del cannocchiale per effetto della temperatura e di altre cause non ancora ben note, giacchè si tratta qui di angoli piccolissimi e certamente inferiori ad un secondo.

In ogni modo proporrei di assicurarsi più che è possibile della invariabilità della visuale e per tal fine potrebbe procedersi nel seguente modo: Contiguo all'orizzonte di mercurio si collochi ancora un altro orizzonte riflettente a modo di esempio uno specchio metallico o di cristallo perfettamente orizzontale, in guisa che una metà del campo del cannocchiale riceva la luce riflessa dal mercurio, mentre l'altra metà la riceve dallo specchio metallico e

sarà inutile a ricordare, che quest'ultimo dev'essere fornito di tre viti, onde aver il mezzo, per poterlo livellare perfettamente.

S'immagini ora di aver incominciate le ricerche col dare una posizione verticale al cannocchiale ed una posizione orizzontale allo specchio; e suppongasi inoltre che il filo steso nel foco del cannocchiale sia verticale sulla retta, che separa le due metà del campo. Fatto ciò, è chiaro che le due immagini del filo, una riflessa dal mercurio, l'altra dallo specchio devonsi trovare precisamente nella medesima retta, e questa deve ancora coincidere colla immagine diretta del filo. Se ora accade per una qualsiasi causa una variazione della direzione della gravità, allora supposto fermo il cannocchiale e lo specchio, apparisce chiaro, che l'immagine riflessa dal mercurio deve subire un corrispondente spostamento, mentre il rimanente resta fisso.

L'aspetto delle cose sarà quindi, come viene rappresentato dalla fig. (3), ove indica *M* la metà del campo, che riceve la luce dallo specchio e *N* quella che la riceve dal mercurio, mentre queste due metà vengono separate dalla *AB*. La retta *DC* rappresenta la immagine diretta del filo e a questa si sovrappone nel semicircolo *M* l'immagine *GC* riflesso dallo specchio; finalmente è *EF* l'immagine riflessa dal mercurio, la quale coincideva prima del cangiamento della gravità colla *GD*; l'intervallo *DE* è appunto quello da cui si lesume la variazione nella direzione della gravità.

Come si vede appoggia il metodo ora esposto essenzialmente sulla circostanza che le due immagini *DC* e *GC* non cessino di soprapporsi nell'intervallo di tempo, che percorre fra le due osservazioni. Ora si potrebbe domandare: questa soprapposizione, assicura essa in un modo assoluto, che la visuale primitiva non abbia subito alcun cangiamento? La risposta è facile e si deve dire, che la condizione della immobilità allora non sarà soddisfatta, quando si fossero mosso tanto il cannocchiale quanto lo specchio, ma in modo che la loro posizione *relativa* sarebbe rimasta la medesima, e questo caso tanto meno facilmente si verificherà, quanto sono resi più indipendenti fra loro il cannocchiale e l'apparecchio che porta i due orizzonti.

Che questa compensazione dei moti potesse aver luogo, non si può negare, ma sembra, che essa non dovrebbe verificarsi, che rare volte e specialmente allora soltanto, quando si muove tutto il suolo, come in occasione dei terremoti, essendo difficile di ammettere che altre cause, come la temperatura ecc. potessero spostare il cannocchiale e lo specchio, (il quale è collocato in un pozzo) in guisa che i due movimenti si compensino perfettamente.

Si potrebbe obbiettare, che l'introduzione dello specchio rende il metodo di osservazione più complicato e che non riuscirà facile a conservarlo bene orizzontale; ma non si deve perdere di vista, che appunto perchè esso si trova al fondo di un pozzo, la temperatura e le altre cause perturbatrici sono di un'importanza molto minore, che in altri simili casi, ove lo stromento si trova sopra terra.

Del resto potrebbesi anche fare di meno dello specchio, sostituendo a suo luogo semplicemente un punto fisso ben marcato, che serve di collimatore, come si usa negli strumenti meridiani; ma questo sistema presenterebbe l'inconveniente che i due punti, i quali si osservano nel medesimo tempo nel cannocchiale si trovano in distanze troppo differenti per comparire ambedue distintamente visibile nel campo del cannocchiale. Soltanto quando l'orizzonte di mercurio ed il punto fisso si trovassero in distanza grandissima sarebbe possibile di vederli ambedue distintamente senza muovere l'oculare del cannocchiale.

Non voglio dire, che il modo di osservazione ora proposto soddisfi del tutto alla richiesta stabilità della visuale, ma a me sembra che il medesimo sia almeno un passo verso la soluzione definitiva. In verun modo potrebbe fidarsi dei risultati, quando questa circostanza fosse trascurata e per far vedere a che errore potrebbe essa dar luogo e quanto sia difficile di evitare i piccoli movimenti, a cui sono soggetti gli strumenti astronomici, anche i più solidamente stabiliti può rilevarsi dalla interessante memoria del Sig. Hirsch Direttore dell'osservatorio astronomico di Neufchatel, il quale fece delle apposite ricerche sopra questo argomento. Questo astronomo osservò all'asse di rotazione del suo strumento meridiano, i cui piloni posano immediatamente sulla roccia calcarea un movimento periodico annuale nel senso orizzontale di  $37''3$ , muovendosi l'asse nell'inverno per questo angolo in un certo verso e tornando indietro durante l'estate. Nel senso verticale poi, il moto ad eccezione di alcune piccole anomalie era costante e ascendeva per ogni anno a  $23''$ . Spesse volte si osservano anche periodi di più breve durata (1), corrispondente all'andamento diurno del sole.

Terminando questo numero ricordiamo che la precedente esposizione non poteva assegnare il valore definitivo della deviazione del filo a piombo prodotta dalle maree, pel caso del D'Abbadie e ciò principalmente per la man-

---

(1) Handbuch der Mathematik, Physik etc. di Rudolf Wolf. Vol. 2.º Zurich 1872 pag. 49.

canza dei dati necessari, e lo scopo della medesima era piuttosto di stabilire il metodo da doversi seguire per tal fine. Tuttavia ci sembra dover concludere dalle cose esposte, essere difficilissimo di rendere percettibile questa deviazione, la quale di certo è minore di un minuto secondo ed anzi probabilmente ancora inferiore ad un terzo o un quarto di secondo, perchè trattandosi di angoli sì piccoli le cause di errore sono difficile a evitare.

13.<sup>o</sup> Fin ora fu sempre supposto che la spiaggia del mare sia rettilinea; se ciò non si verifica conviene introdurre alcune modificazioni ai precedenti ragionamenti. In tal caso la massa attrattiva non può più essere rappresentata da un segmento cilindrico, ma invece di ciò potrebbe questa massa dividersi per cerchi, che hanno il loro comune centro nella stazione  $O$  (veggasi fig. 4). Ora l'azione della massa compresa fra due cerchi dei raggi  $r$  e  $r_1$  e la quale supponiamo agli estremi limitata radialmente si trova ancora per mezzo della (2) essendo chiaro che questa consista nella differenza di due settori cilindrici.

Ponendo in questa formula  $r_1$  in luogo di  $r$  si avrà per sottrazione dalla formula primitiva la seguente equazione

$$(14) \quad X = 2 b \operatorname{sen} \beta \log \frac{r + \sqrt{r^2 + b^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + b^2}}$$

la quale esprime l'attrazione della massa  $ac$  lungo la orizzontale che divide in mezzo l'angolo  $cOa = 2\beta$ . Trovate in questo modo le forze  $X$  corrispondenti a tutte le masse parziali, ciascuna compresa fra due cerchi, si ottiene la loro risultante in direzione e intensità per mezzo delle formule comuni sulla composizione delle forze.

Dopo trovata la forza risultante colla quale agiscono le suddette masse ciascuna compresa fra due cerchi, o piuttosto fra due superficie cilindriche, aventi per asse comune la verticale del punto  $O$  si determina la deviazione prodotta nella direzione della gravità mediante la (10) e questa operazione non si distingue più affatto da quella praticata di sopra (num.<sup>o</sup> 7) per il medesimo scopo.

14.<sup>o</sup> Il Mare Mediterraneo ha una marea piccolissima e perciò non sarà possibile di rendere percettibile la sua azione attrattiva sul filo a piombo. Per dare un'idea della piccolezza di questa azione, supponiamo che la stazione

ove si osserva, si trovi sulla spiaggia del golfo di Napoli, perchè sembra, che ivi le condizioni delle maree siano studiate meglio che altrove sulle coste dell'Italia. Nel 1843 fu da Nobile istituito una lunga serie di osservazioni a Napoli, la quale diede per risultato, che la differenza media fra l'alta e bassa marea uguagli assai prossimamente sessanta centimetri (1). Ora basandosi sopra questo dato, supponendo la spiaggia rettilinea e ammettendo il raggio di azione = 1000 chilometri si deduce mediante la (14) il seguente valore della attrazione

$$X = 0,1802$$

alla quale corrisponde la deviazione

$$\varphi = 0,1025$$

Questo angolo è così piccolo, di essere mai reso sensibile coi mezzi, di cui possiamo servirci presentemente, e ciò sarebbe ancora tanto meno possibile, quando la stazione, invece di trovarsi sulla spiaggia del Mediterraneo fosse situata nell'interno dell'Italia.

---

(1) Su le maree del golfo di Napoli. Rendiconti dell'Accademia di Napoli. Vol. 1. anno 1842 pag. 114. - Comptes Rendus de l'academie de Paris Vol. 15 pag. 565.

## APPENDICE

---

Alla fine del num.<sup>o</sup> 5 facemmo menzione di un teorema, il quale risulta dal fatto che la prima delle due forze  $X_1$  e  $X_2$  di cui tratta questo numero uguaglia ad uno dei termini, di cui è composta la seconda.

Non sarebbe difficile di interpretare questa uguaglianza mediante una discussione dell'analisi per la quale furono stabilite queste due forze, ma crediamo più utile e più semplice di riportare il rispettivo teorema direttamente, senza occuparsi del modo in cui fu trovato.

Pongasi pertanto il seguente

### QUESITO

Sia  $OABEDC$  (fig. 5) un prisma, che ha per sezione normale un triangolo rettangolo col suo angolo retto in  $E$ . Questo prisma si estende verso la parte  $X$  fino all'infinito, mentre dall'altra parte viene limitato da un piano che produce il triangolo  $ODC$  e si suppone che tale piano intersechi il prisma generalmente parlando sotto un angolo obbliquo, ma in guisa di formare un angolo retto colla faccia  $DEBC$ . Si domanda la componente dell'attrazione con cui agisce questo prisma sul punto  $O$  lungo la  $OA$ .

### SOLUZIONE

Essendo  $OD$  perpendicolare sulla  $OA$  collochiamo un sistema ortogonale in modo, che i suoi assi delle  $x$  e delle  $z$  coincidono rispettivamente colla  $OA$  e colla  $OD$ ; il piano delle  $xy$  sarà allora parallelo alla faccia  $DEBC$  e denotiamo inoltre le coordinate del vertice  $C$  con  $p$ ,  $q$ ,  $b$ . Posto ciò dividiamo il prisma per tanti piani come  $d f e c$  paralleli al piano delle  $xy$  in elementi.

Ciascuno di questi elementi rappresenta un trapezio materiale, che si estende verso la parte  $X$  fino all'infinito, denotiamo con  $z$  la distanza di un qualsiasi di essi dall'origine e con  $dz$  la sua ertezza. Volendo valutare la forza

con cui attrae questo trapezio il punto  $O$  lungo la  $OX$  ci possiamo valere della (5) (\*)

Pertanto sarà nel caso attuale

$$\begin{aligned} x_1 &= p \frac{z}{b} & x_2 &= 0 \\ y_1 &= q \frac{z}{b} & y_2 &= 0 \\ h &= z & k &= dz \end{aligned}$$

introducendo questi valori avremo dopo fatte le riduzioni

$$X = \frac{qdz}{\sqrt{p^2 + q^2}} \log \frac{\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p^2 + q^2 + b^2}}{b}$$

Siccome questa formula risulta indipendente da  $z$  apparisce chiaro, che i singoli trapezi in cui fu decomposto il prisma forniscano la medesima componente  $X$ . Questo fatto si conclude pure con facilità da quanto fu esposto nel § 2\*.

Denotando da ora in poi con  $X$  la componente corrispondente all'intero prisma otterremo questa quantità, integrando il secondo membro della precedente equazione da  $0$  fino  $b$ . Pertanto sarà

$$X = \frac{qb}{\sqrt{p^2 + q^2}} \log \frac{\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{p^2 + q^2 + b^2}}{b}$$

e se invece delle coordinate  $p$  e  $q$  del punto  $C$  introduciamo la sua distanza  $CD = r$  dall'asse delle  $z$ , come anche l'angolo  $\beta = GDC$  compreso fra il piano del triangolo  $OCD$  e la faccia  $OAED$  si avrà  $p^2 + q^2 = r^2$  e

$$\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \text{sen } \beta, \text{ donde sarà}$$

$$(15) \quad X = b. \text{ sen } \beta \log \frac{r + \sqrt{r^2 + b^2}}{b}$$

(\*) Si avverte, che da ora in poi tutte le citazioni contrassegnate con \* si riferiscono alla mia memoria « Ricerche sull'attrazione delle montagne con applicazioni numeriche parte I. »

Tale è adunque la forza colla quale attrae il prisma illimitato *AEBCDA* il punto *O* lungo la *OX*.

16.<sup>o</sup> Tornando ora sulla (2) riflettiamo che questa equazione rappresenta la componente dell'attrazione di un settore cilindrico del raggio *r*, dell'altezza *b* e dell'angolo al centro =  $2\beta$ , il quale attrae un suo vertice e questa componente s'intende presa lungo la retta che divide per metà l'angolo della base. Dividendo quindi questo settore cilindrico per la retta ora indicata in due altri, l'attrazione di ciascuno di esso lungo la medesima retta sarà, per causa della perfetta simmetria, espressa dalla metà del secondo membro della (2). Si avrà quindi per quest'ultima attrazione la formula

$$X = b. \text{sen } \beta \log \frac{r + \sqrt{r^2 + b^2}}{b}$$

e paragonandola colla (15) si vede che ambedue sono identiche.

Da questa coincidenza concludiamo che il prisma *AEBCDO* che si estende verso la parte *X* fino all'infinito o il settore cilindrico *OHKCGD* attraggono il punto *O* lungo la *OX* con forze uguali.

Uguagliando qui l'angolo  $\beta$  ad un retto, allora il piano che limita il prisma sta perpendicolare sulle facce laterali del medesimo e il settore cilindrico ha per base un quadrante.

Prendiamo finalmente due dei prismi ora presi in considerazione e supponiamo ancora, che le loro sezioni normali, ovvero le loro basi siano triangoli rettangoli isosceli fra loro uguali. Riuniamo questi due prismi colle loro facce laterali corrispondenti alle ipotenuse delle basi, in guisa, che il loro insieme formi un prisma retto a base quadrata. Considerando ora uno dei vertici prodotto dalla riunione di due vertici dei prismi triangolari apparisce ad evidenza, che questo subirà dai due prismi triangolari azioni uguali, perchè questi sono disposti simmetricamente rapporto a questo punto. L'azione complessiva dei due prismi lungo gli spigoli infiniti sarà quindi il doppio di quella del rispettivo settore circolare.

Riunendo poi quattro di questi prismi quadratici in uno solo si stabilisce con facilità il seguente teorema :

S'innalzi sopra un dato quadrato un prisma retto illimitato, e s'immagini ancora un cilindro retto equilatero, il quale tagliato per un piano passante per l'asse produce il dato quadrato e si tolga una delle due metà, in cui fu de-

composto il cilindro. Ciò fatto, l'attrazione esercitata dal prisma sul centro della sua base sarà il doppio di quella con cui agisce la metà del cilindro sul medesimo punto.

Una proprietà del tutto simile si verifica per un emisfero ed un cilindro illimitato, aventi ambedue la medesima base, anche in questo caso le attrazioni di questi due corpi sul centro del circolo che forma la base sono nel rapporto 1: 2 (Veggasi § 11. 5.\*).

Tornando sulla (15) osserviamo che la forza  $X$  espressa da questa formula sia proporzionale alla larghezza  $EB$  del prisma e questa proporzionalità dà luogo al seguente teorema. *Innalzando sul medesimo triangolo rettangolo  $ODC$  tanti prismi infinitamente lunghi, in modo che le loro facce laterali  $DEBC$  giacciono nel medesimo piano, le componenti delle azioni colle quali agiscono questi prismi sul punto  $O$  lungo le loro proprie direzioni sono in ragione della larghezza  $EB$  di questi prismi.*

Osserviamo ancora che questo teorema si trova anche assai facilmente riflettendo bene su quanto fu esposto nel § 8\*.

Fig. 1.

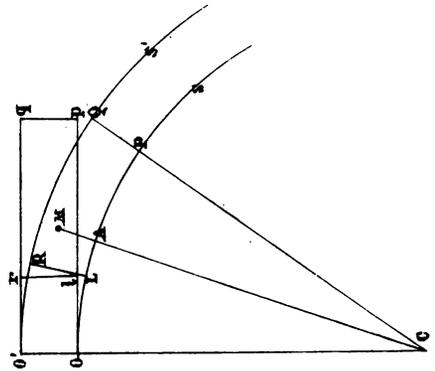


Fig. 2.

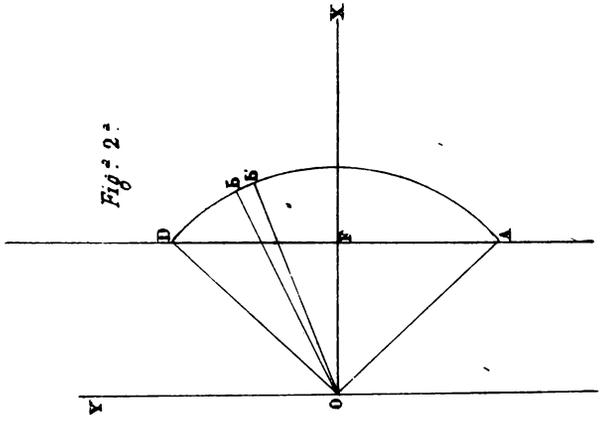


Fig. 3.

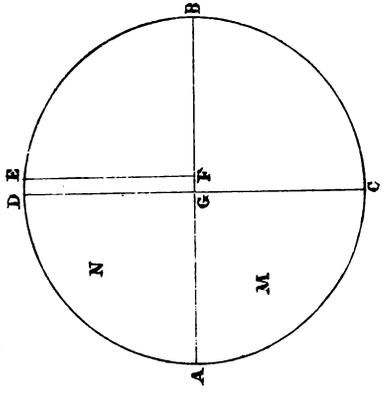


Fig. 4.

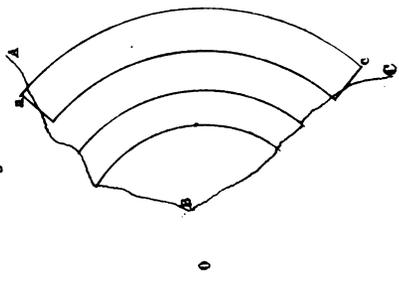


Fig. 5.

