I. Ueber Homogenität.

II. Abhandlung[1]).

Von

C. Viola in Rom.

(Hierzu 29 Textfiguren.)

Wir haben gesehen, dass, um eine beliebige Homogenität eines beliebigen Grades zu bestimmen, es nothwendig ist, auf die Unstetigkeiten in der Eigenschaft der Materie oder in den physikalischen Erscheinungen zurückzugreifen, die sich in der Materie selbst zeigen; ohne Unstetigkeit keine Homogenität.

Die Homogenität und ihr Grad beziehen sich auf eine gegebene und bestimmte physikalische Erscheinung und drücken daher einen relativen Begriff aus. Wir haben z. B. angeführt, dass die auf die Dichtigkeit der Materie bezügliche Homogenität von derjenigen auf die Geschwindigkeit des Lichtes, oder der elektrischen Induction bezüglichen verschieden ist etc. Der Begriff der Homogenität und ihres Grades wird nur dann festgestellt, wenn der Grad der Homogenität als der höchstmögliche angenommen wird, den man aus allen, in einer gegebenen homogenen Materie zu beobachtenden, physikalischen Erscheinungen erhält. Deshalb ist die beste Art und Weise, um sich einen genauen Begriff der Homogenität zu machen, diejenige, eine gegebene physikalische Erscheinung zu beobachten, sie in jedem Punkte des Raumes, wo die Materie vorhanden ist, festzustellen, und ganz von der Form der Moleküle und der Vertheilung derselben, sowie von den Symmetrien abzusehen, welche in dem gegebenen homogenen Raume vorhanden sein können.

W sei eine Function, welche den Werth einer oder mehrerer Constanten einer gegebenen physikalischen Erscheinung in jedem Punkte eines unendlichen mit discreter oder continuirlicher Materie angefüllten Raumes angiebt. Wenn *W* die Homogenität bestimmen soll, muss es eine dreifach-

---

1) I. Abhandlung s. diese Zeitschr. 28, 452.

periodische Function sein, d. h. eine solche Function, dass sie periodisch in drei Richtungen ein und denselben Werth annimmt, welcher in irgend einem Punkte vorhanden ist.

Diese Function ist überdies eindeutig, d. h. eine solche Function, welche in allen Punkten, ausgenommen den singulären, nicht zwei oder mehr Werthe annehmen kann; und ferner ist sie n^{ter} Ordnung, wenn sie eine Homogenität des n^{ten} Grades bestimmen will.

Wir haben gesehen, dass eine solche Function der Laplace'schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

in allen Punkten des unendlichen Raumes Genüge leistet, ausgenommen jenen, wo der erste und zweite Differentialquotient keine Bedeutung haben.

Alle diese Forderungen werden erfüllt, wenn man den Raum durch Unstetigkeiten, welche Ebenen sind, in gleiche Theile theilt, und in jeder einzelnen Abtheilung, welche man Feld nennt, W zur Linearfunction gemacht wird. Dann bekommt W nur in den Punkten der Unstetigkeitsflächen zwei oder drei verschiedene Werthe. Anstatt der Unstetigkeiten von W kann man für die Construction und Möglichkeit der Function W auch Unstetigkeiten der ersten Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ annehmen.

Stellen wir einmal die Begriffe genauer fest. Man nimmt einen beliebigen Punkt, von welchem aus man eine unendliche Anzahl anderer Punkte vermittelst drei beliebiger Perioden construirt. Durch diese drei Perioden und von irgend einem Punkte ausgehend, gelangt man zu einem Raumgitter mit parallelepipedischen congruenten Maschen, in deren Ecken Punkte liegen, welche in Bezug auf die Function W vollkommen gleichwerthig sind. Durch jeden solchen Punkt geht eine unendliche Anzahl möglicher Perioden nach verschiedenen Richtungen. Die kleinste Periode in einer Richtung heisst Elementarperiode.

Zwei in den nämlichen Richtungen gelegene und wiederholte Perioden bilden ein aus gleichen Parallelogrammen zusammengesetztes Ebenengitter. Durch jeden Punkt geht eine unendliche Anzahl solcher Ebenengitter. Das kleinste in einem Ebenengitter gelegene Periodenparallelogramm heisst Elementarparallelogramm.

Wir haben gesagt, dass, wenn man von einem Punkte mit Hülfe von drei Perioden ausgeht, man ein aus congruenten Parallelepipedas zusammengesetztes Raumgitter construirt. Ein solches Gitter kann auch als aus verschiedenen Parallelepipedas gebildet gedacht werden; dasjenige mit dem kleinsten Kubikinhalt heisst Elementarparallelepipedon, und die dasselbe bildenden Perioden heissen Elementarperioden.

Gehen wir nun in der Function W noch weiter. Sie ist offenbar vollständig bekannt, sobald sie in allen inneren Punkten eines Elementarparallelepipedons bestimmt ist. Nimmt man in n Punkten des Elementarparallelepipedons für die Function W denselben Werth an, so heisst die Function n^{ter} Ordnung, und daher die durch sie definirte Homogenität des n^{ten} Grades.

Zu diesem Zwecke theilt man ein Elementarparallelepipedon in n gleiche (congruente oder symmetrische) Theile, welche man Felder nennt, die durch Unstetigkeitsflächen begrenzt sind, und man nimmt in jedem derselben eine Linearfunction an.

So besteht z. B im r^{ten} Felde die Function

$$W_r = A_r x + B_r y + C_r z + D_r .$$

Der Zusammenhang der n in einem Elementarparallelepipedon geltenden und in allen Elementarparallelepipedas sich wiederholenden Functionen

$$\begin{aligned}
W_1 &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 , \\
W_2 &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 , \\
W_3 &= A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 , \\
&\vdots \\
W_n &= A_n x + B_n y + C_n z + D_n ,
\end{aligned}$$

macht die dreifache eindeutige periodische Function W des n^{ten} Grades aus.

In jedem Felde kann man die Function W durch parallele Ebenen darstellen, in deren jeder sie einen constanten Werth besitzt; also wiederholt die Function W ihren Werth in mehreren Punkten eines Feldes, d. h. in allen Punkten einer Ebene, welche wir Niveauebene oder W-Niveau genannt haben und welche durch die Gleichung

$$W_r = \text{Const.}$$

ausgedrückt wird.

Nachdem wir dies festgestellt haben, ist die Function W im Raume vollständig bekannt, und daher auch der Grad und die Art der Homogenität.

Es giebt aber auch noch ein anderes Mittel, um diese Function und die damit verbundene Homogenität zu definiren, indem man nämlich die Function W auf ein Coordinatensystem bezieht, welches immer auf gleiche Weise mit den Grenzen des Feldes verbunden ist. Dann haben wir für alle Felder, in welche das Elementarparallelepipedon eingetheilt ist, es mit derselben Function

$$W = Ax + By + Cz + D$$

zu thun. Dann aber soll man, um die periodische Function vollständig zu kennen, die Unstetigkeiten der Function angeben, welche an der Grenze der Felder vorkommen müssen. Da aber ferner die Function W denselben Werth in einer unendlichen Anzahl von Punkten sowohl eines Feldes als eines Elementarparallelepipedons erhält, so müssen wir von den Unstetigkeiten Gebrauch machen, um den Grad einer Function und ihrer bezüglichen Homogenität genau festzustellen.

Von einem Punkte sagt man, dass er gleichwerthig mit einem anderen sei, wenn in beiden die Function W denselben Werth erhält, und der eine von Punkten umgeben ist, worin die Function W diejenigen Werthe annimmt, welche sie in den den anderen Punkt umgebenden Punkten besitzt.

Wir bestimmen daher als gleiche oder gleichwerthige Punkte diejenigen, welche eine gleiche Umgebung haben.

Gleiche Punkte sind also die Ecken der ein Gitter bildenden Elementarparallelepipedas und machen ein Punktsystem aus. Durch jeden Punkt geht ein solches Punktsystem und alle unendlichen Punktsysteme sind congruent und unter sich parallel.

Zwei Linien, deren eine aus solchen Punkten zusammengesetzt ist, welche mit den die andere Linie zusammensetzenden Punkten gleichwerthig sind, heissen gleichwerthige Linien. Und ebenfalls zwei Flächen sind unter sich gleichwerthig, wenn sie aus entsprechenden gleichwerthigen Punkten gebildet sind.

Eine begrenzte Anzahl von gleichen oder gleichwerthigen Punkten befindet sich in jedem Elementarparallelepipedon. Giebt es n solche, so sagt man, die Function sei periodisch von n^{ter} Ordnung, und die entsprechende Homogenität des n^{ten} Grades.

Zur Bestimmung der Gleichheit zweier Punkte braucht natürlich die Umgebung derselben nicht bis ins Unendliche, sondern einfach bis zur nächsten Unstetigkeit der Function W oder ihrer Ableitungen ausgedehnt zu werden, weil von da an die Function sich genau wiederholt; also sagt man, dass ein Punkt gleich oder gleichwerthig mit einem anderen sei, wenn jeder derselben in gleicher Weise von der nächsten Unstetigkeitsbegrenzung umgeben ist.

Wenn wir in Betracht ziehen, dass die n Felder einer Elementarparallelepipedons durch eine Translation, d. h. eine periodische Vermehrung der Variabeln, in ein beliebig anderes Elementarparallelepipedon desselben Punktsystems übergehen können, oder mit anderen Worten, wenn jedes einzelne Feld durch eine bestimmte Translation in das entsprechende Feld des anderen Elementarparallelepipedons übergehen kann, müssen wir daraus schliessen, dass eine Homogenität des n^{ten} Grades die gleichmässige Verkettung ist von n Homogenitäten des 1^{ten} Grades, wo die n Homogenitäten unter sich gleich (congruent oder symmetrisch) sind.

Andererseits kann eine Homogenität des ersten Grades nicht in eine andere beliebige der andern $n-1$ Homogenitäten des ersten Grades, in welchem Elementarparallelepipedon sie auch vorhanden sein mögen, mit Hülfe einer einfachen Translation übergehen.

Jede der n Homogenitäten des ersten Grades hat die gleichen Perioden, wie eine andere beliebige Homogenität des ersten Grades.

Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, ist der Begriff einer Homogenität des n^{ten} Grades viel ausgedehnter, als wenn man einfach in den Grenzen eines Elementarparallelepipedons bleibt. Es ist dann nicht nothwendig, dass die Felder Theile eines Elementarparallelepipedons darstellen, sie leisten einfach der Bedingung Genüge, dass man in jedem derselben immer ein und dieselbe Linearfunction W feststellen kann; aber dann müssen auch die Unstetigkeiten, die sich an der Grenze eines Feldes vorfinden, in allen anderen möglichen Feldern des unendlichen Raumes vorkommen.

Mit diesen neuen Begriffen wollen wir einmal die möglichen Homogenitäten des ersten Grades construiren.

Bei der Homogenität des ersten Grades kann irgend ein Feld der Function W in jedes beliebige andere durch eine einfache Translation, d. h. eine Periode, übergehen. Die verschiedenen Felder, welche den unendlichen Raum theilen, müssen daher congruente, parallel orientirte, von je zwei zu zwei parallelen Flächen begrenzte Polyëder sein, d. h. entweder Parallelepipedas oder hexagonale Prismen, die im Allgemeinen natürlich schräg, also beliebig sein dürfen.

Wir betrachten vorerst die Parallelepipedas und dann die sechsseitigen Prismen.

In jedem Parallelepipedon (sowie in jedem sechsseitigen Prisma) wird die Function
$$W = Ax + By + Cz + D$$
vorhanden sein, welche wir schematisch vermittelst paralleler Linien (Schraffirung) in Projection darstellen wollen.

Bezeichnen wir mit a, b, c die drei Flächen des Parallelepipedons, welche in einer Ecke zusammenlaufen; in der schräg gegenüber gelegenen Ecke laufen drei andere mit den ersten parallele Flächen zusammen, welche als Unstetigkeitsflächen mit jenen gleichwerthig gedacht werden.

Die Flächen a, b, c des einen Parallelepipedons können vollständig oder theilweise von den entsprechenden gleichwerthigen Flächen des anstossenden Parallelepipedons gedeckt werden. Decken sie dieselben vollständig, so hat man in jeder Fläche einen einzigen Werth der Unstetigkeit der Function W; decken sie dieselben jedoch nur theilweise, so hat man zwei oder mehr Werthe der Unstetigkeiten auf den Flächen a, b, c. Daraus ergeben sich die folgenden Homogenitäten des ersten Grades, wobei mit k die Constanten bezeichnet werden sollen.

1. Homogenität S_1^1 (Fig. 1) mit den Unstetigkeiten:
$$W - W' = k_a \text{ auf } a$$
$$W - W' = k_b \quad - \quad b$$
$$W - W' = k_c \quad - \quad c.$$

2. Homogenität $S_1{}^2$ (Fig. 2) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_a \text{ auf } a$$
$$W - W' = k_b \text{ - } b$$
$$W - W' = k_c' \text{ und } k_c'' \text{ auf } c.$$

3. Homogenität $S_1{}^3$ (Fig. 3) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_a \text{ auf } a$$
$$W - W' = k_b' \text{ und } k_b'' \text{ auf } b$$
$$W - W' = k_c', k_c'' \text{ und } k_c''' \text{ auf } c.$$

4. Homogenität $S_1{}^4$ (Fig. 4) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_a \text{ auf } a$$
$$W - W' = k_b \text{ - } b$$
$$W - W' = k_c', k_c'', k_c''' \text{ und } k_c^{\text{IV}} \text{ auf } c.$$

5. Homogenität $S_1{}^5$ (Fig. 5) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_a \text{ auf } a$$
$$W - W' = k_b' \text{ und } k_b'' \text{ auf } b$$
$$W - W' = k_c', k_c'', k_c''' \text{ und } k_c^{\text{IV}} \text{ auf } c.$$

Bei allen solchen Homogenitäten ist natürlich überall:

$$\frac{\partial W}{\partial n} + \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)' = 0.$$

Fig. 1.

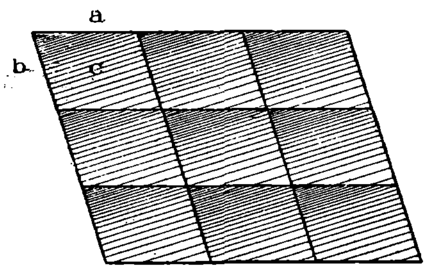
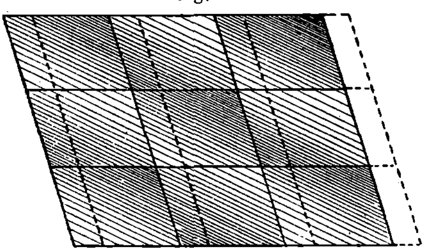


Fig. 2.



Durch parallelepipedische Felder können wir fünf Homogenitäten des ersten Grades construiren; dass sie unter sich verschieden sind, geht aus der Definition selbst hervor; dass sie die einzigen möglichen sind, unter der Voraussetzung, dass alle parallelen Unstetigkeitsflächen unter sich gleichwerthig sind, ist für sich klar.

Die Figg. 1, 2, 3, 4, 5 stellen nach einander schematisch die eben genannten Homogenitäten dar, wobei durch Schraffirung die W-Niveaus angedeutet sind, und durch punktirte Linien die übereinander gelegenen Felder bezeichnet werden.

Wir müssen noch beifügen, dass die genannten fünf Homogenitäten nur durch ihre entsprechenden Unstetigkeiten auf drei Flächen a, b, c

unterschieden werden, gleichgültig, ob das Elementarparallelepipedon schief, rhombisch, rhomboëdrisch, rechtwinklig, quadratisch oder kubisch ist.

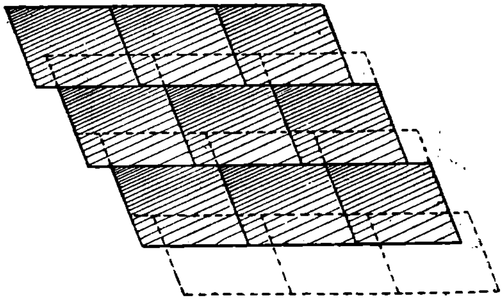


Fig. 3.

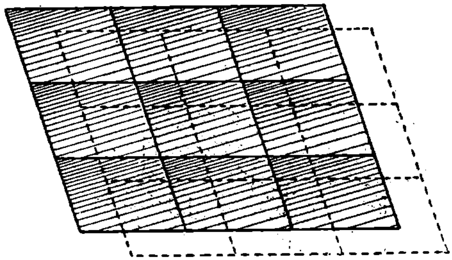


Fig. 4.

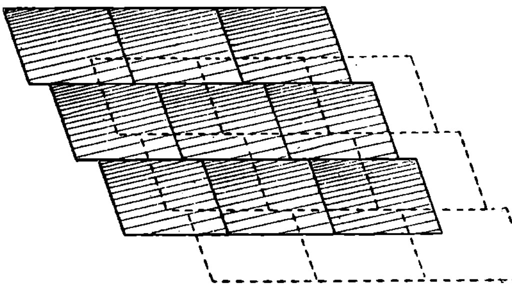


Fig. 5.

Die gegenseitige Lage und die Grössen der Perioden haben natürlich keinen Einfluss auf Grad oder Art der Homogenität.

Wir führen jetzt solche Homogenitäten des ersten Grades an, welche mit Hülfe von hexagonalen Prismen gebildet werden. Denken wir uns auf eine Ebene reguläre hexagonale Polygone gezeichnet, so dass durch solche die Ebene in gleiche Theile getheilt wird. Aus allen Ecken dieser sechsseitigen Polygone ziehen wir parallele Gerade, dann entstehen schiefe sechsseitige Prismen, welche den Raum in gleiche Theile theilen. Jedes Prisma wird nun durch parallele Ebenen eingetheilt, so entstehen sechsseitige Felder, worin die Function $W = Ax + By + Cz + D$ vorhanden sein wird.

Wir stellen auch hier diese Function schematisch durch parallele Gerade (Schraffirung) dar. Wir bezeichnen die drei nicht parallelen Seitenflächen des sechsseitigen Prismas mit a_1, a_2, a_3 und die Basis mit c. Da jedes hexagonale Feld in irgend ein anderes durch eine Translation übergehen kann, und ferner durch dieselbe Translation der ganze eingetheilte Raum in sich selbst vollständig übergeht, so stellen solche hexagonale Felder eine Homogenität des ersten Grades dar.

Die hier möglichen Homogenitäten des ersten Grades werden auch durch die Unstetigkeiten unterschieden, die auf den einzelnen Flächen a_1, a_2, a_3 und c möglich gemacht werden können.

Und wir haben sofort folgende zwei Arten zu unterscheiden:

Entweder die Basis c des einen Feldes deckt sich mit der entsprechenden Basis des anstossenden Feldes, oder nicht. Wir haben also diese drei Gruppen:

Fig. 6.

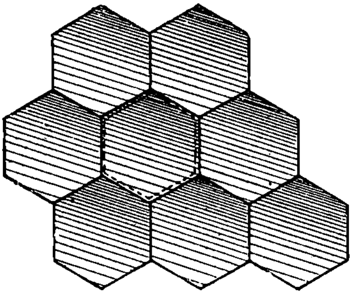


Fig. 7.

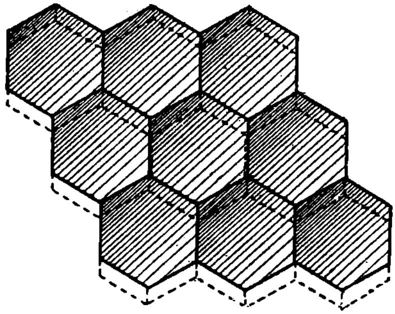


Fig. 8.

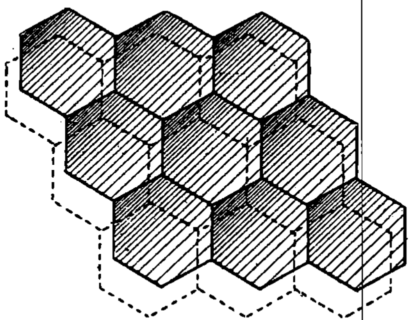
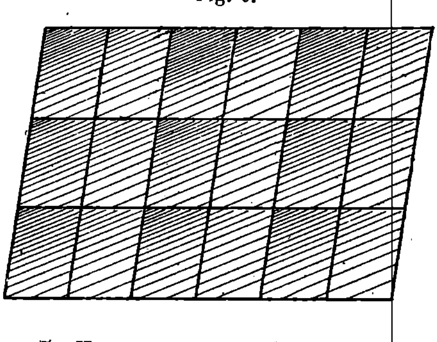


Fig. 9.



I. Homogenitäten (Fig. 6) mit der Unstetigkeit:

$$W - W' = k_c \text{ auf } c.$$

II. Homogenität (Fig. 7) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_c',\ k_c'' \text{ und } k_c''' \text{ auf } c.$$

III. Homogenität (Fig. 8) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_c',\ k_c'',\ k_c''' \text{ und } k_c^{IV} \text{ auf } c.$$

Wir wollen nun die einzelnen Homogenitäten, welche zu diesen drei Gruppen gehören, entwickeln.

I. 6) Homogenität $S_1{}^6$ (Fig. 6 und 9) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k_{a_2} \quad \text{-} \quad a_2$$
$$W - W' = k_{a_3} \quad \text{-} \quad a_3.$$

7. Homogenität $S_1{}^7$ (Fig. 6 und 10) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k'_{a_2} \text{ und } k''_{a_2} \text{ auf } a_2$$
$$W - W' = k'_{a_3} \quad \text{-} \quad k''_{a_3} \quad \text{-} \quad a_3.$$

8. Homogenität $S_1{}^8$ (Fig. 6 und 11) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k'_{a_1} \text{ und } k''_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k'_{a_2} \text{ - } k''_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W - W' = k'_{a_3} \text{ - } k''_{a_3} \text{ - } a_3.$$

II. 9) Homogenität $S_1{}^9$ (Fig. 7) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W - W' = k_{a_3} \text{ - } a_3.$$

III. 10) Homogenität S_1^{10} (Fig. 8) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W - W' = k_{a_3} \text{ - } a_3.$$

Fig. 10.

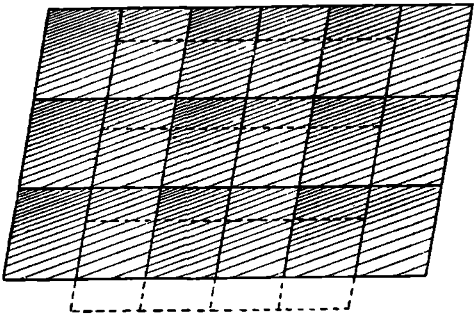
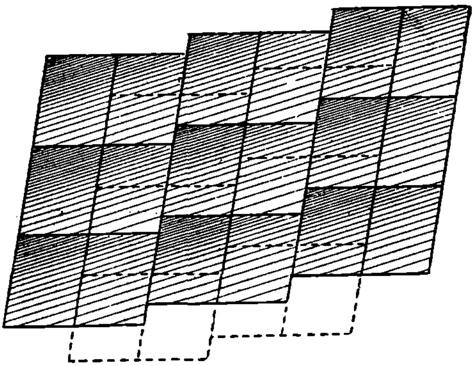


Fig. 11.



Man kann nun sehr leicht zeigen, dass die Homogenitäten des ersten Grades noch nicht erschöpft sind. Wir haben bis jetzt die Homogenitäten des ersten Grades unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die Flächen a, b, c als Unstetigkeitsflächen mit den entsprechenden parallelen Flächen gleichwerthig seien. Respective haben wir die Flächen a_1, a_2, a_3 und c des sechsseitigen Prisma mit den entsprechenden parallelen Flächen als gleichwerthig angenommen. Wir können aber auch diese Bedingung, als nicht nothwendig für den Bau der Homogenität, fallen lassen. Eine hierin begründete Homogenität ist z. B. in der Fig. 12 auf S. 10 dargestellt. Darin sind die Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_a \text{ auf } a$$
$$W - W' = k'_{a_1} \text{ und } k''_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k_b \text{ auf } b$$
$$W - W' = k_c \text{ - } c.$$

Ein weiteres Beispiel stellt die Fig. 13 auf S. 10 dar, mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_a{}' \text{ und } k_a{}'' \text{ auf } a$$
$$W - W' = k'_{a_1} \text{ - } k''_{a_1} \text{ - } a_1$$

$$W - W' = k_b \text{ auf } b$$
$$W - W' = k_c \ \text{-} \ c.$$

Fig. 12.

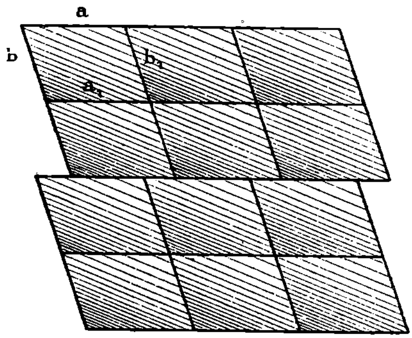
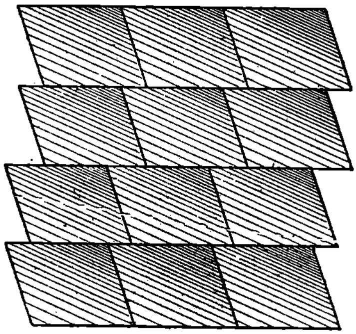


Fig. 13.



Ausser den Flächen a und a_1 können ungleichwerthig auch die b und b_1 oder c und c_1 sein; z. B. eine Homogenität des ersten Grades wird durch folgende Unstetigkeiten bestimmt:

$$\begin{aligned} W - W' &= k'_a \text{ und } k''_a \text{ auf } a \\ W - W' &= k'_{a_1} \ \text{-} \ k''_{a_1} \ \text{-} \ a_1 \\ W - W' &= k'_b \ \text{-} \ k''_b \ \text{-} \ b \\ W - W' &= k'_{b_1} \ \text{-} \ k''_{b_1} \ \text{-} \ b_1 \\ W - W' &= k_2 \text{ auf } c, \end{aligned}$$

und so fort.

Untersuchen wir nun jene Homogenitäten des zweiten Grades, welche aus ganz beliebigen Parallelepipedas oder aus sechsseitigen Prismen gebildet werden.

Eine Homogenität des zweiten Grades geht aus der gleichmässigen Verkettung zweier Homogenitäten des ersten Grades hervor. Natürlich geht die eine Homogenität des ersten Grades nicht durch eine Translation in die andere über.

Da die, diese Homogenitäten bildenden Parallelepipedas oder sechsseitigen Prismen wieder ganz beliebig sein sollen, so müssen sie parallel zu einander liegen, denn auf keine andere Art können sie den Raum in gleiche Theile theilen. Der ganze Unterschied zwischen den zwei Homogenitäten des ersten Grades liegt also nur in der Richtung des Anwachsens der Function W. Wächst z. B. die Function W in einem Felde von einer Ecke zur anderen, so wächst sie in dem nebenanliegenden Felde in umgekehrtem Sinne.

Dadurch erhalten wir aus den fünf ersten Homogenitäten des ersten Grades 13 Homogenitäten des zweiten Grades, welche wir durch folgende Unstetigkeiten feststellen wollen.

1. Homogenität S_{2c}^1, Fig. 14, mit den Unstetigkeiten

$$\begin{aligned} W + W' &= k_a \text{ auf } a \\ W - W' &= k_b \text{ - } b \\ W - W' &= k_c \text{ - } c. \end{aligned}$$

Fig. 14.

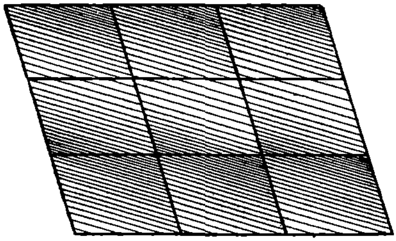
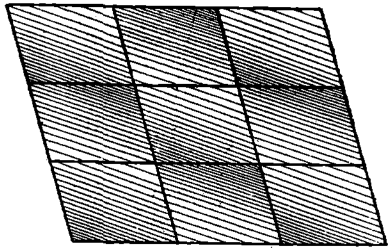


Fig. 15.



2. Homogenität S_{2c}^2 (Fig. 15) mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W + W' &= k_a \text{ auf } a \\ W + W' &= k_b \text{ - } b \\ W - W' &= k_c \text{ - } c. \end{aligned}$$

3. Homogenität S_{2c}^3 mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W + W' &= k_a \text{ auf } a \\ W + W' &= k_b \text{ - } b \\ W + W' &= k_c \text{ - } c. \end{aligned}$$

4. Homogenität S_{2c}^4 mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W + W' &= k_a \text{ auf } a \\ W - W' &= k_b \text{ - } b \\ W - W' &= k_c' \text{ und } k_c'' \text{ auf } c. \end{aligned}$$

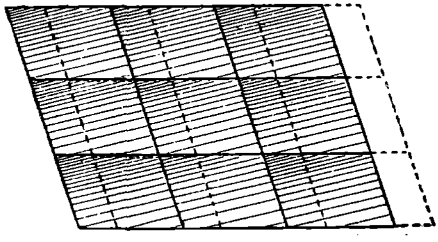
5. Homogenität S_{2c}^5 mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W + W' &= k_a \text{ auf } a \\ W - W' &= k_b \text{ - } b \\ W + W' &= k_c' \text{ und } k_c'' \text{ auf } c. \end{aligned}$$

6. Homogenität S_{2c}^6 mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W + W' &= k_a \quad \text{auf } a \\ W - W' &= k_b \quad \text{ - } b \\ \left.\begin{aligned} W - W' &= k_c' \\ \text{und } W + W' &= k_c'' \end{aligned}\right\} & \text{ - } c. \end{aligned}$$

Fig. 16.



7. Homogenität S_{2c}^7 (Fig. 16) mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W + W' &= k_a \text{ auf } a \\ W + W' &= k_b \text{ - } b \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_c \\ \text{und } W + W' &= k''_c \end{aligned}\right\} \text{auf } c.$$

8. Homogenität S_{2c}^8 mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W + W' &= k_a \text{ auf } a \\ W - W' &= k_b \;\;\text{ - }\; b \end{aligned}$$
$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_c \text{ und } k''_c \\ \text{und } W + W' &= k'''_c \;\;\text{ - }\;\; k^{IV}_c \end{aligned}\right\} \text{auf } c.$$

9. Homogenität S_{2c}^9 mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W + W' &= k_a \text{ auf } a \\ W + W' &= k_b \;\;\text{ - }\; b \end{aligned}$$
$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_c \text{ und } k''_c \\ \text{und } W + W' &= k'''_c \;\;\text{ - }\;\; k^{IV}_c \end{aligned}\right\} \text{auf } c.$$

10. Homogenität S_{2c}^{10} mit den Unstetigkeiten:

$$W + W' = k_a \quad \text{auf } a$$
$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_b \\ W + W' &= k''_b \end{aligned}\right\} \text{ - } b$$
$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_c \\ \text{und } W + W' &= k''_c \end{aligned}\right\} \text{ - } c.$$

11. Homogenität S_{2c}^{11} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_a \quad \text{auf } a$$
$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_b \\ W + W' &= k''_b \end{aligned}\right\} \text{ - } b$$
$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_c \\ W + W' &= k''_c \end{aligned}\right\} \text{ - } c.$$

12. Homogenität S_{2c}^{12} mit den Unstetigkeiten:

$$W + W' = k_a \quad \text{auf } a$$
$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_b \\ W + W' &= k''_b \end{aligned}\right\} \text{ - } b$$
$$W + W' = k'_c \text{ und } k''_c \text{ auf } c.$$

13. Homogenität S_{2c}^{13} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_a \quad \text{auf } a$$
$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_b \\ \text{und } W + W' &= k''_b \end{aligned}\right\} \text{ - } b$$
$$\left.\begin{aligned} W - W' &= k'_c \text{ und } k''_c \\ W + W' &= k'''_c \;\;\text{ - }\;\; k^{IV}_c \end{aligned}\right\} \text{auf } c.$$

Es ist nun leicht zu beweisen, dass diese dreizehn Homogenitäten durch Doppelpunkte charakterisirt werden, welche man Symmetriecentren nennen kann.

Greifen wir z. B. eine derselben heraus. Sie sei die Homogenität S_{2c}^7.

Da auf der Fläche a

$$W + W' = k_a$$

ist, so wird $W - W' = \varphi$ (variabel), und somit werden auf einer Geraden Punkte liegen, wo $W - W' = 0$ ist.

Solche Nullpunkte sind je zwei gleichwerthig. Nur einer derselben ist für sich gleichwerthig, wo nämlich zwei gleichwerthige Punkte zusammenfallen; er heisst ein Doppelpunkt und ist offenbar symmetrisch in Bezug auf zwei nebeneinander liegende und an a anstossende parallelepipedische Felder. Dasselbe können wir auch für die Flächen b sagen, worin ebenfalls

$$W + W' = k_b$$

ist. Auf der Unstetigkeitsfläche c sind zwei verschiedene Unstetigkeiten der Function W vorhanden, nämlich die, welche durch

$$W - W' = k_c'$$

und die, welche durch

$$W + W' = k_c''$$

bestimmt ist. Wo diese letzte Unstetigkeit gilt, werden Nullpunkte vorhanden sein, zwischen denen einer liegt, der wie oben ein Doppelpunkt und in Bezug auf zwei Parallelepipedas symmetrisch ist.

Die vorhin entwickelten Homogenitäten des zweiten Grades sind dadurch charakterisirt, dass auf allen aufeinander parallelen Flächen die gleichen Unstetigkeiten vorkommen, das heisst, dass solche Flächen alle gleichwerthig sind.

Dieser Charakter der Homogenitäten kann noch vertreten sein, wenn wir von hexagonalen Prismen ausgehen. Um solche Homogenitäten des zweiten Grades abzuleiten, haben wir die Homogenitäten des ersten Grades $S_1{}^6$, $S_1{}^7$, $S_1{}^8$, $S_1{}^9$, $S_1{}^{10}$ zu Hülfe zu nehmen. Da die hier in Betracht gezogenen hexagonalen Prismen beliebig schief sind, so wird, wenn die Function W bei einem Prisma von einer Ecke zur anderen wächst, bei dem anstossenden Prisma die Function umgekehrt wachsen.

Auf der Basis c des Prisma können die Unstetigkeiten folgendermaassen vertheilt sein:

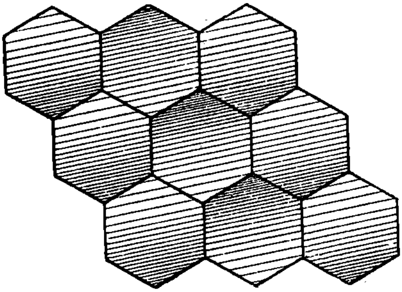
$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & W' - W = k_c \\
\text{II.} & W + W' = k_c \\
\text{III.} & \begin{cases} W - W' = k_c' \text{ und } k_c'' \\ W + W' = k_c''' \end{cases} \\
\text{IV.} & \begin{cases} W - W' = k_c' \\ W + W' = k_c'' \text{ und } k_c''' \end{cases} \\
\text{V.} & \begin{cases} W - W' = k_c' \quad \text{-} \quad k_c'' \\ W - W' = k_c''' \quad \text{-} \quad k_c^{\text{IV}}. \end{cases}
\end{array}$$

Dadurch entstehen folgende Homogenitäten des zweiten Grades:

I. 1. Homogenität S_{2c}^{14} (Fig. 17) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W + W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W + W' = k_{a_3} \text{ - } a_3.$$

Fig. 17.



2. Homogenität S_{2c}^{15} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W + W' = k'_{a_2} \text{ und } k''_{a_2} \text{ auf } a_2$$
$$W + W' = k'_{a_3} \text{ - } k''_{a_3} \text{ - } a_3.$$

3. Homogenität S_{2c}^{16} mit den Unstetigkeiten:

$$W + W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k'_{a_2} \text{ und } k''_{a_2} \text{ auf } a_2$$
$$W - W' = k'_{a_3} \text{ - } k''_{a_3} \text{ - } a_3.$$

II. 4. Homogenität S_{2c}^{17} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W + W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W + W' = k_{a_3} \text{ - } a_3.$$

5. Homogenität S_{2c}^{18} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W - W' = k_{a_3} \text{ - } a_3.$$

6. Homogenität S_{2c}^{19} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k'_{a_2} \text{ und } W + W' = k''_{a_2} \text{ auf } a_2$$
$$W - W' = k'_{a_3} \text{ - } W + W' = k''_{a_3} \text{ - } a_3.$$

7. Homogenität S_{2c}^{20} mit den Unstetigkeiten:

$$W + W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$\left.\begin{matrix} W - W' = k'_{a_2} \\ W + W' = k''_{a_2} \end{matrix}\right\} \text{ - } a_2$$
$$\left.\begin{matrix} W - W' = k'_{a_3} \\ W + W' = k''_{a_3} \end{matrix}\right\} \text{ - } a_3.$$

III. 8. Homogenität S_{2c}^{21} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W - W' = k_{a_3} \text{ - } a_3.$$

9. Homogenität S_{2c}^{22} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W + W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W + W' = k_{a_3} \text{ - } a_3 .$$

IV. 10. Homogenität S^{23}_{2c} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W - W' = k_{a_3} \text{ - } a_3 .$$

11. Homogenität S^{24}_{2c} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W + W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W + W' = k_{a_3} \text{ - } a_3 .$$

V. 12. Homogenität S^{25}_{2c} mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = k_{a_1} \text{ auf } a_1$$
$$W - W' = k_{a_2} \text{ - } a_2$$
$$W - W' = k_{a_3} \text{ - } a_3 .$$

Es ist nun einleuchtend, dass bei allen solchen Homogenitäten in allen Unstetigkeitsflächen

$$\frac{\partial W}{\partial n} + \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)' = 0$$

sein muss.

Wir haben bis jetzt Homogenitäten des zweiten Grades abgeleitet mit Symmetriecentren, welche dadurch charakterisirt sind, dass alle parallelen Unstetigkeitsflächen gleichwerthig sind.

Wir können nun ferner solche Homogenitäten des zweiten Grades herausbilden, welche dieser Bedingung nicht Genüge leisten. Dazu haben wir nur das zu wiederholen, was wir bei der Ableitung der nämlichen Homogenitäten des ersten Grades hervorgehoben haben. Zu diesem Zwecke können nicht nur parallelepipedische Felder, sondern auch sechsseitig-prismatische Felder verwendet werden.

In diese letztere Kategorie von Homogenitäten gehören auch diejenigen, welche vermittelst einer ein Parallelepipedon halbirenden Fläche erzeugt werden, welch letztere natürlich durch das Centrum des Parallelepipedons gehen muss. Man erhält diese Homogenitäten des zweiten Grades, indem man die Elementarpolyëder, welche die Homogenitäten des ersten Grades ausmachen, in zwei Hälften theilt. Wenn man mit c_1 und c_2 die zwei nicht parallelen Flächen eines solchen Polyëders bezeichnet, dann entstehen nicht nur fünf Homogenitäten, wie die betreffenden im ersten Grade, sondern zehn, da man in Betracht ziehen soll, ob man auf c_1 oder c_2 eine einzige, zwei oder mehrere Unstetigkeitsconstanten hat

(Fig. 18). Dasselbe Ergebniss erhält man, wenn man die hexagonalen Prismen halbirt.

Ferner erhält man noch Homogenitäten des zweiten Grades, wenn man den Parallelepipedas eine besondere Form giebt; aber die besonderen Formen selbst sind keine Bedingung, um eine Verschiedenheit in den Homogenitäten eines bestimmten Grades anzunehmen, sondern nur die Unstetigkeitswerthe der periodischen Function, und diese allein in einem

Fig. 18.

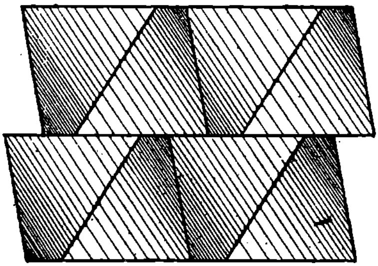
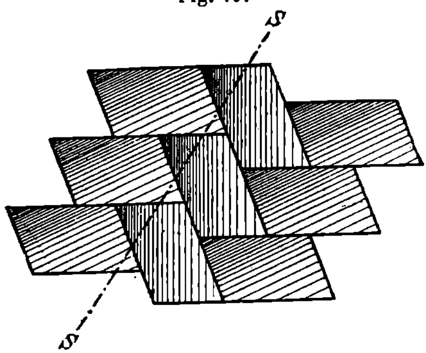


Fig. 19.



Felde, wo die periodische Function ersten Grades ist, sind es, welche die Verschiedenheit in den Homogenitäten eines bestimmten Grades unterscheiden.

Nehmen wir z. B. an, dass das parallelepipedische Feld so beschaffen sei, dass zwei von den drei Raumwinkeln, welche zusammen eine Ecke bilden, gleich seien, oder der eine complementär dem anderen sei, dann können wir, wenn man dem Polyëder auch ganz beliebige Dimensionen zugesteht, die gleichen Polyëder mit einander verbinden, wie in Fig. 19 angegeben ist. Eine solche Verbindung von Polyëdern, wie in dieser Figur, stellt offenbar eine Homogenität des zweiten Grades dar.

Wir sehen sogleich, dass aus einer Reihe von Polyëdern, welche ihrerseits eine Homogenität des ersten Grades ausmachen, andererseits gleiche Polyëder entstehen, welche wieder eine Homogenität des ersten Grades ausmachen, vermittelst einer Spiegelung und einer Translation. Der hierzu erforderliche Spiegel halbirt das Drittel der Flächenwinkel des Parallelepipedons, aber seine Lage kann eine ganz beliebige sein; nur hängt von derselben die Richtung und die Grösse der Translation ab.

Bezeichnen wir mit c die Grundfläche des Parallelepipedons, auf welche sich die zwei gleichen Flächenwinkel anlehnen, und mit a resp. a_1, und mit b resp. b_1 bezeichnen wir die Seitenflächen, dann können wir auf folgende Weise verfahren. Vorerst ist natürlich die Möglichkeit vorhanden, dass auf der Fläche c nur eine einzige Unstetigkeitsconstante vorkomme:

$$W - W' = kc.$$

Sollten mehrere Unstetigkeiten möglich sein, so müssen wir hervorheben, dass nur solche Lagen der einzelnen Parallelepipedas anzunehmen sind, bei welchen die auf einem Parallelepipedon vorhandenen Unstetigkeiten auch auf allen anderen genau auftreten müssen. Denken wir uns, dass eine Schicht von Parallelepipedas, wie sie in Fig. 19 gezeichnet ist, auf diese letztere nach der Spiegelrichtung ss verschoben sei, dann ist klar, dass die Unstetigkeiten, welche auf einer Schaar von Parallelepipedas vorkommen, auch auf der anderen auftreten werden. Auf der Fläche c treten dadurch folgende vier Unstetigkeiten auf:

$$W - W' = k_c', \quad W - W' = k_c'', \quad W - W' = \varphi \text{ und } k_c'''.$$

Andere Fälle sind offenbar hier unmöglich.

Fernere Unterscheidungen erhält man mit den Unstetigkeiten auf den Flächen a und b. Nehmen wir an, auf der Fläche c sei die Unstetigkeit constant

$$W - W' = k_c,$$

so können wir auf a und b zwei oder mehr Unstetigkeiten haben; z. B.

$$\begin{aligned} W - W' &= \varphi && \text{auf } a \\ W - W' &= \varphi + k_a && \text{„ } a_1, \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} W - W' &= \varphi \text{ und } k_b \text{ auf } b \\ W - W' &= \varphi + k_b' \text{ und } k_b \text{ auf } b_1. \end{aligned}$$

Wenn die Unstetigkeiten variabel sind, so hat man auch hier

$$\frac{\partial W}{\partial n} + \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)' = k.$$

In den drei Fällen, wo die Unstetigkeiten auf der Fläche c nicht einer einzigen Constanten gleich sind, hat man auf den Flächen a und b die oben genannten Unstetigkeiten.

Diese Eigenschaften der Homogenität des zweiten Grades bleiben unverändert, wenn das Constructionsparallelepipedon eine rhomboidalische, rhombische, rechtwinklige oder quadratische Grundfläche hat und wenn das Parallelepipedon gerade oder schräg ist.

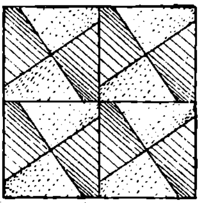
Zum Schlusse wollen wir noch ein Beispiel der Homogenität des vierten Grades geben. Die Parallelepipedas seien gerade verticale Prismen mit quadratischer Basis. Wenn wir sie in gleiche Theile theilen und wir in jedem durch die Theilung entstandenen Felde die Linearfunction W in allen vier Feldern gleich annehmen, so bekommen wir eine Homogenität des vierten Grades, natürlich mit der Bedingung, dass die Unstetigkeiten, welche in einem Felde vorhanden sind, sich auf gleiche Weise in den drei anderen wiederholen. Die Unterabtheilungen kann man vermittelst Ebenen erhalten, welche entweder vertical wie in Fig. 20, oder zwei vertical und eine horizontal, Fig. 23—28, oder endlich drei horizontal, Fig. 29, sind. Im Falle, dass die gleichen Felder des quadratischen verticalen Prismas vermittelst zwei zur Basis senkrechter Ebenen construirt werden, werden im Allgemeinen die vier daraus hervorgehenden prismatischen Felder eine trapezoidische Basis haben. Die Function W wird in derselben beliebig von der einen oder anderen der auf einer verticalen Kante gelegenen zwei Ecken ausgehen dürfen. Nimmt man als Ausgangspunkt der Function W immer die obere Ecke in allen vier Feldern, so bekommen wir eine bestimmte Gruppe von Homogenitäten des vierten Grades, nämlich die tetragonal-pyramidale Gruppe; geht man dagegen bei der Construction der Function W abwechselnd von der oberen und der unteren Ecke aus, so erhalten wir Homogenitäten, welche in die bisphenoidische Klasse (Groth) eingereiht werden müssen. Eben solche Homogenitäten wollen wir ableiten.

Vorerst entsteht in dem allgemeinen Falle die in Fig. 20 schematisch abgebildete Homogenität S^1_{4i}, und durch besondere Lage der Verticalebenen gehen auch andere Homogenitäten hervor, welche dadurch charakterisirt sind, dass auf der Basis c die Unstetigkeiten

$$W - W' = k_c$$

vorkommen.

Fig. 20.



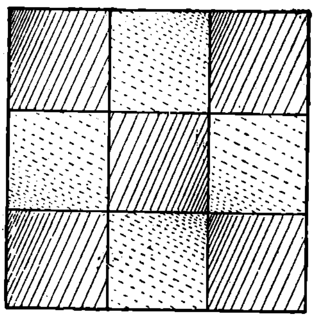
Solche Homogenitäten werden durch die an den Seitenflächen der Felder auftretenden Unstetigkeiten unterschieden. Wir haben also:

1. Homogenität S^1_{4i} (Fig. 20) mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W - W' &= \varphi \quad \text{auf } a \\ W + W' &= \varphi_1 \quad - \quad a \text{ und } b \\ W + W' &= \varphi_2 \quad - \quad a_1 \ - \ b_1, \end{aligned}$$

wobei φ, φ_1 und φ_2 constanten verticalen Niveaulinien entsprechen.

Fig. 21.



2. Homogenität S^3_{4i} (Fig. 21) mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W + W' &= \varphi \quad \text{auf } a \text{ und } b \\ W + W' &= \varphi_1 \quad - \quad a_1 \ - \ b_1, \end{aligned}$$

wo φ und φ_1 constante Grössen sind längs verticalen Geraden.

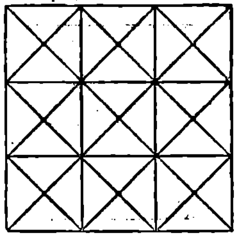
3. Homogenität S^5_{4i} (Fig. 22) mit den Unstetigkeiten:

$$\begin{aligned} W - W' &= \varphi \quad \text{auf } a \\ W + W' &= \varphi_1 \quad - \quad a_1 \text{ und } b_1, \end{aligned}$$

wo wieder φ und φ_1 längs verticalen Geraden constanten Grössen entsprechen.

Aus diesen drei Homogenitäten kann man weitere drei ableiten, indem man eine Gruppe von vier Feldern längs der Verticalen von der halben Höhe des Prismas verschiebt; dann verändern sich natürlicherweise die Unstetigkeiten auf einer der Flächen um eine constante Grösse.

Fig. 22.



4. So bekommt man die Homogenität S^4_{2i} mit den Unstetigkeiten

$$W - W' = \varphi + k_a \text{ und } W - W' = \varphi - k_a \text{ auf } a$$
$$W + W' = \varphi_1 + k_a \text{ und } W + W' = \varphi - k_a \text{ auf } a \text{ und } b.$$

5. Homogenität S^4_{4i} mit den Unstetigkeiten

$$W + W' = \varphi + k_a \text{ auf } a \text{ und } b, \text{ und } W + W' = \varphi - k_a.$$

6. Homogenität S^6_{4i} mit den Unstetigkeiten

$$W - W' = \varphi + k_a \text{ und } \varphi - k_a \text{ auf } a.$$

Das Prisma mit quadratischer Basis kann in vier gleiche Felder vermittelst einer horizontalen Ebene und zwei verticalen Ebenen getheilt werden. Wenn die verticalen Ebenen beliebig sind, bekommt man zwei Homogenitäten, wie sie in Figg. 23 und 24 abgebildet sind. Durch specielle Lagen der verticalen Ebenen gehen aus diesen andere Homogenitäten hervor. Alle solche Homogenitäten haben gemeinschaftliche Unstetigkeiten auf der Basis c, nämlich:

$$W - W' = \varphi' \text{ und } W + W' = \varphi'',$$

worin φ' und φ'' Niveaus entsprechen, welche 45^0 mit den Basiskanten des Prismas machen.

Ferner haben wir:

Fig. 23.

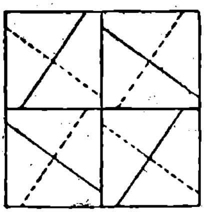
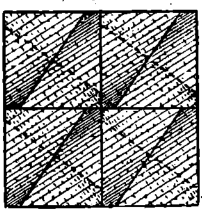


Fig. 24.



7. Homogenität S^7_{4i} (Fig. 23) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = \varphi \text{ auf } a$$
$$W - W' = \varphi_1 \text{ - } a_1$$
$$W - W' = k_b \text{ - } b \text{ und } b_1$$
$$W - W' = \varphi_2 \text{ - } b_1.$$

8. Homogenität S^8_{4i} (Fig. 24) mit den Unstetigkeiten:

$$W - W' = \varphi \text{ auf } a$$
$$W + W' = \varphi_1 \text{ und } W + W' = \varphi_1 + k \text{ auf } a_1 \text{ und } b_1$$
$$W + W' = \varphi_2 \text{ auf } b.$$

In den speciellen Fällen gehen aus diesen die Homogenitäten

9. S_{4i}^{9} (Fig. 25) 11. S_{4i}^{11} (Fig. 27)
10. S_{4i}^{10} (Fig. 26) 12. S_{4i}^{12} (Fig. 28)

hervor.

Fig. 25.

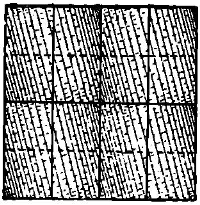


Fig. 26.

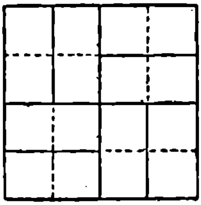
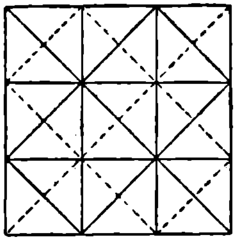


Fig. 27.



13. Schliesslich ist das verticale Prisma noch vermittelst dreier zur Basis parallelen Ebenen in vier gleiche Felder theilbar (Fig. 29). Damit erhält man eine Homogenität S_{4i}^{13} des vierten Grades, deren Unstetigkeiten auf den vier Seitenflächen, wie bei den Homogenitäten des ersten Grades, stets constant sind. Auf der Grundfläche c haben wir dagegen:

Fig. 28.

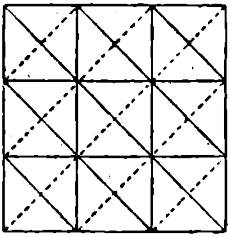
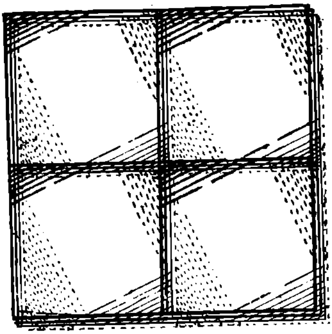


Fig. 29.



$$W - W' = \varphi' \text{ und}$$
$$W + W' = \varphi'',$$

wo φ' und φ'' Niveaulinien entsprechen, welche mit den Basiskanten den Winkel von 45° bilden.

Diese 13 Homogenitäten haben das Wichtige, dass ihre Unstetigkeiten besondere Werthe von $W - W'$ und $W + W'$ haben.

Wir könnten noch fernere Beispiele über Homogenität einführen, wir wollen aber jetzt diesen Weg nicht weiter verfolgen, da es uns hier nicht darum zu thun ist, alle möglichen Homogenitäten herauszubilden, sondern einfach zu zeigen, wie überhaupt mit Hülfe von Unstetigkeiten Homogenitäten gebildet werden können.

Wir wollen nur noch eine andere Verwendung der Function W berühren.

Wir haben gesagt, dass alle jene gleichwerthigen Punkte, welche in periodischen Abständen liegen, ein Raumnetz oder ein unendliches Punktsystem ausmachen. Eine Homogenität besteht aus einer unendlichen Anzahl solcher congruenter und paralleler oder parallel orientirter Punktsysteme.

Wenn wir mit Hülfe von zwei beliebigen Perioden die gleichwerthigen Punkte heraussuchen, so erhalten wir ein Ebenennetz oder ein Ebenenpunktsystem. — Alle möglichen Ebenenpunktsysteme, welche einer gegebenen Homogenität angehören, sagt man, seien rationell.

Denken wir uns, die Function *W* stelle die Lösbarkeit der in Betracht kommenden homogenen Substanz dar.

Stellen wir uns eine solche Substanz durch irgend eine Fläche oder irrationale Ebene abgegrenzt vor, so wird, da sich hier kein Ebenenpunktsystem denken lässt, *W* keine periodische Function auf dieser Fläche oder auf einer irrationalen Ebene und folglich die Lösbarkeit auf dieser Fläche eine ungleichmässige sein. Durch die lösbare Flüssigkeit wird daher theils mehr und theils weniger, aber ungleichmässig geätzt, und daher muss die Neigung entstehen, eine rationale Ebene aus der irrationalen herauszubilden.

Diese Betrachtung kann auch mit Nutzen auf jene Flüssigkeit ausgedehnt werden, aus welcher eine Substanz auskrystallisirt. Das Kryställchen sei durch irgend welche Flächen begrenzt. Da die irrationalen Flächen nicht gleichmässig gegen die Flüssigkeiten sich verhalten können, so werden sich Stellen vorfinden, welche lösbarer sind und daher geätzt werden, andere, welche wenig oder gar nicht lösbar sind, worauf daher neue Substanz sich ansetzen wird.

Und diese gegenseitige Wirkung der umgebenden Flüssigkeit wird offenbar so lange fortgesetzt, bis das Gleichgewicht eingetreten ist, d. h. bis alle irrationalen Flächen rationale geworden sind. Es geht daher bei der Krystallisation gewissermaassen ein Vertreiben von irrationalen Flächen zu Gunsten der rationalen vor sich: eine natürliche Auswahl, welche das geometrische Grundgesetz der Krystalle ausmacht.