XXII. Ueber Homogenität.

Von

C. Viola in Rom.

Wenn wir uns einen mathematischen Begriff von der Homogenität in einem unbegrenzten Raume machen wollen, müssen wir von Dem ausgehen, was uns die Erfahrung an die Hand giebt, ohne a priori die Kenntniss einer bestimmten Structur vorauszusetzen. Was wissen wir aus der Erfahrung? Wir wissen aus der Erfahrung, dass bei einer grossen Anzahl von Punkten sich beständig die physikalischen Erscheinungen auf dieselbe Weise wiederholen. Wir erlauben uns, daraus zu folgern, dass, wenn wir uns einen Krystall unbegrenzt vorstellen, wir in einer unendlichen Anzahl von Punkten dieselben physikalischen Eigenschaften auf dieselbe Weise wiederholt vorfinden würden. Wir müssen also annehmen, dass die physikalischen Eigenschaften und Erscheinungen sich nicht constant gleich auf allen Punkten eines Krystalles vorfinden, wohl aber bei einer unendlichen Anzahl von Punkten, wenn die Materie unbegrenzt ist, und diese Punkte sich nicht nebeneinander, sondern in endlichen Entfernungen von einander befinden. Aus dieser Erkenntniss müssen die Eigenschaften einer homogenen Materie oder Structur entwickelt werden können.

In jedem Punkte muss eine bestimmte physikalische Erscheinung durch eine bestimmte Grösse ausgedrückt werden können, so dass wir sagen können, diese Grösse sei eine Function der Coordinaten des Punktes.

Um die Sache zu verdeutlichen, denken wir uns, dass es sich darum handelt, die Cohäsion einer unbegrenzten krystallisirten Materie in jedem Punkte und nach jeder beliebigen Richtung anzugeben. Es ist klar, dass die Cohäsion eine Function der Lage des Punktes sein wird, welches auch die zur Bestimmung dieser Lage nothwendigen Argumente seien. Dasselbe kann man von der Geschwindigkeit des Lichtes, der Fortpflanzung der Wärme, der elektrischen Induction, der Löslichkeit etc. etc. sagen.

Jede einzelne physikalische Erscheinung kann durch eine Function dargestellt werden, deren Argument das nothwendig Gegebene ist, welches die Lage eines Punktes im Raume feststellt. Eine beliebige solche Function wollen wir mit dem Symbole W bezeichnen, worin auch mehrere Functionen begriffen sein können.

Um die Lage des Punktes festzustellen, nehmen wir drei orthogonale incommensurable Einheiten i_1, i_2, i_3 an, welche positiv sind, wenn man sie von dem Ursprunge O aus in einem bestimmten Sinne nimmt. Im umgekehrten Sinne genommen sind sie negativ, und man schreibt sie $-i_1$, $-i_2$, $-i_3$. Wenn man auf den Richtungen i_1, i_2, i_3 die genannten Einheiten x-, y- resp. z-mal nimmt, so kann man mit den Coordinaten x, y, z die Lage eines Punktes p durch eine lineare Relation feststellen; in der That wird der Vector ϱ der Lage und der Grösse nach der algebraischen Summe

$$\varrho = i_1 x + i_2 y + i_3 z$$

gleichkommen.

So können wir sagen, W sei eine Function einer einzigen Variablen ϱ.

Was die Relationen der drei incommensurablen Einheiten anlangt, können wir sie leicht auf folgende Weise entwickeln. Wenn die Ebene $i_1 i_2$ um i_3 eine Drehung von 90^0 macht, so wird i_1 in die Lage von i_2 und i_2 in diejenige von $-i_1$ gebracht. Diese Viertelsdrehung lässt sich durch die Einheit i_3 darstellen, indem man sie auf die Einheiten i_1 und i_2 anwendet; so erhalten wir:

$$i_3 \cdot i_1 = i_2 \qquad \text{und} \qquad i_3 \cdot i_2 = - i_1 \cdot$$

Eine weitere Viertelsdrehung um i_3 wird i_1 in $-i_1$ und i_2 in $-i_2$ versetzen, folglich erhalten wir:

$$i_3^2 \cdot i_1 = + i_3 \cdot i_2 = - i_1 \ ,$$
$$i_3^2 \cdot i_2 = - i_3 \cdot i_1 = - i_2 \ .$$

In analoger Weise erhalten wir ähnliche Verhältnisse, wenn die Drehungen um i_1 resp. i_2 ausgeführt werden:

$$i_1 \cdot i_2 = i_3, \quad i_1 \cdot i_3 = - i_2 \ ,$$
$$i_2 \cdot i_3 = i_1, \quad i_2 \cdot i_1 = - i_3 \cdot$$

Ferner ergiebt sich aus diesen Verhältnissen noch:

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = + i_1 i_2 i_3 = - 1 \cdot$$

Nun sind wir im Stande, die Function W vermittelst einer Linearsumme der drei Einheiten i_1, i_2, i_3 darzustellen.

Wenn wir in $W = F(\varrho)$ den Werth von ϱ einführen, müssen wir nach den dazugehörigen Reductionen einen Ausdruck der Form

$$(1) \qquad W = \alpha + u i_1 + v i_2 + w i_3$$

erhalten, wo α, u, v, w Functionen von x, y, z und unabhängig von i_1, i_2, i_3 sind.

Bevor wir weiter gehen, haben wir die Aufgabe, die Verhältnisse festzustellen, welche unerlässlich sind, damit in der That W eine Function nicht blos von x, y, z, sondern von ϱ sei.

Machen wir die erste Ableitung von W in Bezug auf ϱ, wohlverstanden nur in den stetigen und endlichen Punkten der Function W:

$$\frac{dW}{d\varrho} = \frac{\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz}{i_1\, dx + i_2\, dy + i_3\, dz}.$$

Es ist klar, dass F in der That eine Function von ϱ ist im gewöhnlichen Sinne des Wortes, wenn die erste Ableitung von W in Bezug auf ϱ von $d\varrho$ unabhängig sein wird. Damit dies letztere der Fall sei, ist es nothwendig und genügend, dass die folgenden Relationen stattfinden:

$$(2) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = i_1 \Phi, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = i_2 \Phi, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = i_3 \Phi,$$

wo Φ eine Function von x, y, z ist. Dies angenommen wird

$$(3) \qquad \frac{dW}{d\varrho} = \Phi.$$

Wenn die (2) multiplicirt werden mit den respectiven Einheiten i_1, i_2, i_3, erhält man

$$i_1 \frac{\partial W}{\partial x} = i_2 \frac{\partial W}{\partial y} = i_3 \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Diese Bedingungen nehmen eine andere Form an und werden von i_1, i_2, i_3 unabhängig, wenn man an Stelle von W den Ausdruck (1) setzt. Diese Bedingungen lassen sich endlich auf folgende einfache Linearrelationen reduciren:

$$\alpha = B, \quad u = Ax, \quad v = Ay, \quad w = Az,$$

wo A, B constant sind. Daher wird

$$W = A\varrho + B.$$

Eine Function von einem Argumente ϱ im Raume kann also nur vom ersten Grade, oder aus solchen vom ersten Grade zusammengesetzt sein.

Ist nun festgestellt, dass W eine Function von ϱ ist, so können wir auf dieselbe Das anwenden, was wir in Bezug auf die Functionen einer Variabeln wissen. Sie wird durch die Anzahl der Wiederholungen ihres Werthes im unbegrenzten Raume classificirt.

1. Sie ist eine algebraische Function n^{ter} Ordnung, wenn sie sich in einer Anzahl n von Punkten genau wiederholt;

2. sie ist eine Constante, wenn sie denselben Werth in allen Punkten besitzt, und endlich

3. periodisch, wenn sie denselben Werth in einer unendlichen Anzahl Punkten besitzt.

Es ist klar, dass für das Dasein des Krystalles die Function *W* eine periodische Function sein muss. Wenn *W* die eine oder andere der physikalischen Erscheinungen in einem gegebenen Punkte des Krystalles darstellt, kann *W* nicht eine algebraische Function sein, da der Werth, den *W* in einem gegebenen Punkte besitzt, sich in *n* anderen Punkten wiederholen würde, so dass ausser einer gewissen Grenze dieser Werth sich nicht mehr zeigen könnte. Aber die Function *W* ist auch keine Constante, da dann Richtungen und Punkte in dem ganzen von der krystallisirten Materie eingenommenen Raume gleichgültig wären.

Eine periodische Function im Raume kann einfach, doppelt oder dreifach sein, je nachdem sie eine einzige Periode, oder zwei resp. drei incommensurable Perioden besitzt.

Wenn die Function einfachperiodisch ist, wiederholt sich der Werth der Function, den sie in einem Punkte besitzt, in einer unendlichen Anzahl von Punkten, welche auf der durch jenen Punkt gehenden Geraden gelegen sind. Durch jeden Punkt geht daher ein gleichwerthiges gerades Punktsystem, welches zu einer bestimmten Richtung parallel ist.

Wenn die Function doppeltperiodisch ist, wiederholt sich der Werth, den dieselbe in einem Punkte besitzt, in einer unendlichen Anzahl anderer Punkte, die auf einer durch jenen Punkt gehenden Ebene gelegen sind. Durch jeden Punkt geht daher ein gleichwerthiges Ebenen-Punktsystem, das immer dieselbe Richtung verfolgt, und in dem die gleichwerthigen oder, wie sie auch heissen, homologen Punkte ein mit gleichmässigen Maschen versehenes Ebenennetz bilden.

Wenn die Function *W* dreifachperiodisch ist, wiederholt sich der Werth, welchen sie in einem Punkte besitzt, in einer unendlichen Anzahl anderer Punkte, indem sie ein mit gleichmässigen Maschen versehenes Raumnetz bilden. Somit geht durch jeden einzelnen Punkt ein Raumgitter von gleichwerthigen oder homologen Punkten, welches congruent und gleich orientirt ist mit einem anderen Raumgitter, das durch irgend einen anderen Punkt hindurchgeht. Ein Raumgitter von Punkten kann man auch Punktsystem im Raume nennen. Dann kann die dreifachperiodische Function durch eine unendliche Anzahl von unter sich congruenten und parallelen Punktsystemen dargestellt werden.

Eine solche Function giebt genau den Begriff einer homogenen Structur wieder, so dass man sagen kann:

Eine homogene Structur ist mit einer periodischen Function im Raume gleichbedeutend; oder vielmehr sie ist eine solche, wo alle physikalischen Erscheinungen der Materie dieselben Werthe in einer unendlichen Anzahl von Punkten erlangen, wenn wir uns die Structur als unbegrenzt denken.

Also wiederholen sich die physikalischen Erscheinungen, die wir in einem beliebigen Punkte der homogenen Materie nachgewiesen haben, in gleicher Weise in einer unendlichen Anzahl anderer Punkte im Raume, oder auch: jeder einzelne Punkt einer homogenen Structur hat sein entsprechendes System homologer Punkte im Raume.

Folglich ist eine nicht homogene Structur gleichbedeutend mit einer algebraischen Function oder mit einer Constanten, d. h. wo jedem Punkte eine begrenzte Anzahl homologer Punkte entspricht, oder resp. alle Punkte mit Bezug auf die physikalischen Erscheinungen indifferent sind.

Eine Constante entspricht daher einer structurlosen Materie. Barlow hat auch eine fast gleiche Definition der homogenen Structur angegeben, nämlich:

»Eine homogene Structur ist eine solche, innerhalb welcher ein jeder Punkt, wenn wir die Structur als unbegrenzt denken, eine unendlich grosse Anzahl ihm entsprechender anderer Punkte besitzt, deren Stellungen in der Structur genau die gleichen sind; so dass alle die unendlich vielen geometrischen Punktsysteme, welche beziehungsweise gegeben sind, wenn man alle gleichartigen Punkte nimmt, regelmässige unendliche Punktsysteme sind, wie sie bei Sohncke als solche definirt sind, bei welcher die Anordnung der übrigen Punkte um irgend einen derselben die gleiche ist wie um jeden anderen Massenpunkt.«

Die erste Hälfte dieser Definition stimmt mit der meinen vollkommen überein. Der Zusatz, »deren Stellungen in der Structur genau die gleichen sind«, ist überflüssig, da es nicht möglich ist, dass jedem Punkte eine unendliche Anzahl homologer Punkte entspricht, ohne dass ihre Stellungen genau die gleichen seien. Für die Definition der Homogenität könnte man auch von der Thatsache absehen, dass um einen Punkt herum die Anordnung die gleiche sei, wie bei jedem anderen Punkte des unendlichen Punktsystems. Der Begriff der Homogenität setzt einfach fest, dass in einer unendlichen Anzahl von Punkten im unbegrenzten Raume die physikalischen Erscheinungen sich in genau derselben Art und Weise wiederholen; ob dann diese Thatsache von der gleichmässigen Vertheilung der Materie an jeder beliebigen Stelle des homologen Punktsystems abhängt oder nicht, ist nebensächlich.

Was den Grad der Homogenität anbetrifft, den wir später definiren werden, dürfen wir nicht ausser Acht lassen, dass sie sich auf eine grosse Anzahl physikalischer Erscheinungen bezieht. Die Function W kann periodisch sein, wenn sie eine gewisse physikalische Erscheinung angeht, kann hingegen nicht periodisch sein, wenn sie sich auf eine andere physikalische Erscheinung bezieht. Wir können z. B. sagen, dass der Krystall nicht im eigentlichen Sinne homogen in Bezug auf seine Dichtigkeit ist, da man die Dichtigkeit als in allen Punkten gleich annimmt; daher lässt sich die Dichtigkeit nicht durch eine Function, sondern durch eine Constante darstellen.

Ebenso sicher ist, dass die Structur in anderer Weise homogen ist in Bezug auf die Geschwindigkeit eines Lichtstrahls von bestimmter Wellenlänge, als in Bezug auf die Aetzung der Substanz in einem Lösungsmittel. Ueberdies ist bekannt, dass, wenn die elektrischen Erscheinungen die Polarität einer Richtung bestimmen, die Lichterscheinungen dies durchaus nicht thun können. Wenn wir die Function W dazu verwenden, die Homogenität einer Structur zu bestimmen, ist es erforderlich, dass diese so gewählt sei, dass sie den grösstmöglichen Grad von Homogenität darbiete. Und wir verstehen unter W gerade eine solche Function.

Bevor wir weiter gehen, müssen wir uns mit den Perioden der Function W vertraut machen.

Wenn eine einzige incommensurable Periode Ω_1 besteht, und die Function deshalb einfach ist, so lassen sich alle anderen möglichen Perioden natürlich durch ein rationales Vielfaches von Ω_1 darstellen.

Wenn zwei incommensurable Perioden Ω_1 und Ω_2 bestehen, und die Function deshalb doppelt ist, lassen sich alle anderen möglichen Perioden durch Linearrelationen in Ω_1 und Ω_2 darstellen. Es seien z. B. Ω' und Ω'' zwei andere Perioden derselben Function, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \Omega' &= \alpha_1 \, \Omega_1 + \beta_1 \, \Omega_2 , \\ \Omega'' &= \alpha_2 \, \Omega_1 + \beta_2 \, \Omega_2 , \end{aligned}$$

wo α_1, α_2, β_1, β_2 rationale Zahlen sind. Wenn das mit zwei Perioden construirte Parallelogramm den kleinsten Flächeninhalt unter allen möglichen Parallelogrammen besitzt, sagt man, dass die darauf bezüglichen Perioden elementar seien. Wenn Ω_1 und Ω_2 zwei elementare Perioden sind, werden es auch Ω' und Ω'' sein, wenn die Determinante

$$(\alpha_1 \; \beta_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \pm 1 \quad \text{ist.}$$

Falls die periodische Function dreifach ist, seien Ω_1, Ω_2, Ω_3 ihre drei incommensurablen Perioden. Jede andere Periode der Function kann durch eine Linearrelation ausgedrückt werden in den drei Perioden Ω_1, Ω_2, Ω_3, nämlich:

$$\begin{aligned} \Omega' &= a_1 \, \Omega_1 + b_1 \, \Omega_2 + c_1 \, \Omega_3 , \\ \Omega'' &= a_2 \, \Omega_1 + b_2 \, \Omega_2 + c_2 \, \Omega_3 , \\ \Omega''' &= a_3 \, \Omega_1 + b_3 \, \Omega_2 + c_3 \, \Omega_3 , \end{aligned}$$

wo a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 rationale Zahlen sind.

Auch hier heissen sie elementare Perioden, wenn das Volumen des durch sie beschriebenen Parallelepipedons den kleinstmöglichen Werth besitzt. Das kleinste Parallelepipedon ist das Elementarparallelepipedon.

Es seien Ω_1, Ω_2, Ω_3 drei elementare Perioden, welche uns durch die Relationen

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= A_1\, i_1 + B_1\, i_2 + C_1\, i_3,\\ \Omega_2 &= A_2\, i_1 + B_2\, i_2 + C_2\, i_3,\\ \Omega_3 &= A_3\, i_1 + B_3\, i_2 + C_3\, i_3\end{aligned}$$

gegeben sind, dann ist die Determinante

$$\varDelta = (A_1\, B_2\, C_3),$$

welche das Volumen des Parallelepipedons $(\Omega_1\, \Omega_2\, \Omega_3)$ ausdrückt, die kleinstmögliche.

Wenn auch Ω', Ω'', Ω''' drei elementare Perioden sind, so muss das vermittelst derselben construirte Parallelepipedon auch das Volumen $\varDelta$ besitzen, d. h.:

$$(a_1\, b_2\, c_3)\,(A_1\, B_2\, C_3) = \varDelta$$

oder

$$(a_1\, b_2\, c_3) = \pm 1$$

sein.

Haben wir nun die Elementarperioden der Function W festgestellt, so müssen wir diese letztere, damit sie vollständig bekannt sei, auch in den im Elementarparallelepipedon enthaltenen Punkten kennen. Obwohl keine aus der Erfahrung stammenden Anhaltspunkte zu Gebote stehen, um die Function W in den Punkten eines Parallelepipedons zu kennen, können wir doch einige Eigenschaften bestimmen, welche sie innerhalb eines jeden Elementarparallelepipedons besitzen muss. Da, wo die Function W endlich und stetig ist, soll sie durch die Functionen α, u, v, w dargestellt werden, welche in x, y, z linear sind, wie wir schon angegeben haben.

Ohne Unstetigkeiten ist also W entweder eine Constante oder eine algebraische Function ersten Grades. Das können wir übrigens auch direct herausbringen, wenn wir ganz von den Bedingungen absehen, ob W Function der Variabeln ϱ sei oder nicht.

Nehmen wir in der That an, dass W eine Function von x, y, z mit drei unabhängigen Elementarperioden Ω_1, Ω_2, Ω_3 sei, und wenden wir auf dieselbe den Green'schen Satz an.

W sei also endlich und stetig in einem von einer Fläche s abgeschlossenen, begrenzten Raume, deren Element ds ist, wo die Zunahme der Normalen gegen den geschlossenen Raum hin dn ist. Es sei ferner $d\tau$ das Volumenelement, und

$$\varDelta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

der Differentialparameter des zweiten Grades; dann werden wir gemäss dem Green'schen Satze haben:

$$\int \frac{dW}{dn} \cdot ds = -\int \varDelta W \cdot d\tau,$$

wenn man das erste Integral auf die ganze Oberfläche s und das zweite auf das ganze von der Fläche s eingeschlossene Volumen ausdehnt, wo weder W noch ihre partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$$

unstetig und unendlich werden.

Um diesen Green'schen Satz auf unseren Fall anzuwenden, der eine periodische Function behandelt, haben wir die zwei Integrale auch auf das Elementarparallelepipedon auszudehnen.

Fangen wir mit der Voraussetzung an, dass $\frac{dW}{dn}$ in allen Punkten der das Parallelepipedon umschliessenden Fläche stetig sei, und ferner, dass die Function W im selben Raume ersten Grades sei, so wird das erste Integral, das auf die perimetrale Oberfläche des Parallelepipedons ausgedehnt ist, gleich Null sein; dasselbe muss bei dem zweiten der Fall sein, welches das Integral des Volumens ist. Aber wenn W stetig und vom ersten Grade ist, kann sein Differentialparameter sich nicht von einem Punkte zum anderen ändern, daher muss überall

$$\Delta W = 0$$

sein. W kann also durch eine Linearfunction dargestellt werden. Ohne Unstetigkeit muss sie eine Constante sein, da sie nicht unendlich werden kann.

Wir wollen zweitens annehmen, das W und $\frac{dW}{dn}$ Unstetigkeiten besitzen. Zur Anwendung des Green'schen Satzes ist es genügend, diese Discontinuitäten mit einer Fläche vollständig zu umgeben. Man sieht sogleich, dass, wenn isolirte Unstetigkeitspunkte vorhanden sind, das erste Green'sche Integral auch Null wäre, und deshalb ebenso das zweite; W wäre neuerdings wieder eine Constante.

Um sich in W eine periodische Function vorstellen zu können, müssen wir Unstetigkeitsflächen zugestehen.

S sei also eine beliebige Unstetigkeitsfläche, welche ein Elementarparallelepipedon in zwei Theile theilt; dann kann man den Green'schen Satz anwenden, wenn man die zwei Integrale auf das ganze Volumen des Elementarparallelepipedons ausdehnt und ferner zu dem Flächenintegrale auch den auf die Unstetigkeitsfläche S bezüglichen Theil addirt, indem man die betreffende Integration auf die beiden Seiten der oben genannten Unstetigkeitsfläche S ausdehnt. Da W in dem ganzen Raume endlich und stetig und obendrein ersten Grades ist, so wird das Integral $\int \Delta W \cdot d\tau$ neuerdings Null, und daher W linear sein. So erhalten wir die auf beide Seiten der Unstetigkeitsfläche ausgedehnte Integration

$$\int \frac{dW}{dn}\, dS = 0$$

Nun ist klar, dass, wenn S eine geschlossene Fläche wäre, W eine Constante innerhalb und ausserhalb derselben wäre; eine nicht geschlossene und beliebige Fläche S ist aber mit der Periodicität der Function W unverträglich; daraus schliessen wir, dass S eine Ebene sein muss.

Wenn die Unstetigkeitsfläche S nicht zwei mögliche Perioden enthielte, so müsste sie sich parallel zu sich selbst unzählige Male in jedem Elementarparallelepipedon wiederholen, und ein solcher Fall ist nicht denkbar, weder mit einer periodischen Function, noch mit einer Function im Allgemeinen, und es würde jeder Stützpunkt für den Begriff der Homogenität wegfallen.

Soll daher W eine dreifachperiodische Function des ersten Grades sein, so müssen drei Unstetigkeitsebenen vorhanden sein, welche gleichzeitig ein Elementarparallelepipedon ausmachen. Ich komme bei der Betrachtung einer Homogenität der n^{ten} Ordnung sogleich wieder darauf zurück.

Wir sehen also, dass eine homogene Structur des ersten Grades mit Hülfe von Elementarparallelepipeda der Unstetigkeit definirt werden kann, innerhalb welcher die Function W stetig und linear ist.

In dem Elementarparallelepipedon wird die Form der Function W daher folgende sein:

$$W = Ax + By + Cz + D,$$

wo A, B, C, D Constanten sind. Wir können die Function W vermittelst Niveauflächen darstellen, wo W constant ist, und die Niveauflächen parallele Ebenen sind.

Alle möglichen Elementarparallelepipeda müssen drei Unstetigkeitsebenen enthalten; jedoch wird eine Schaar derselben ganz von den Unstetigkeiten begrenzt. Durch jeden Punkt innerhalb eines solchen geht ein W-Niveau, und dieses erscheint in den gleichwerthigen Unstetigkeitsparallelepipeda je einmal.

Eine Homogenität des ersten Grades hat drei Unstetigkeiten, und in jedem Unstetigkeits-Elementarparallelepipedon giebt es stets eine Ebene, in welcher an allen Punkten sämmtliche physikalischen Erscheinungen sich genau gleich wiederholen, und durch jeden Punkt geht eine solche Ebene, und zwar eine einzige. Die W-Niveaus aller Elementarparallelepipeda sind untereinander parallel.

Daraus folgt, dass in den Punkten der Unstetigkeitsebenen zwei Werthe der Function W existiren, nämlich die, welche zwei aneinander stossenden Elementarparallelepipeda angehören, W und W', und ihre Differenz

$$W - W'$$

ist überall eine constante Grösse. In den Punkten einer Unstetigkeitskante, wo nämlich zwei Unstetigkeitsebenen sich schneiden, kommen vier Werthe der Function W vor, und endlich kommen in den Ecken der Unstetigkeits-elementarparallelepipeda acht Werthe der Function W vor.

Wenn wir von den Unstetigkeitsstellen absehen, so können wir behaupten, dass bei der Homogenität des ersten Grades die Function W nicht in zwei oder mehreren Punkten innerhalb eines beliebigen Elementarparallelepipedons denselben Werth annimmt, wenn man nur solche Punkte in Betracht zieht, welche durch keine continuirliche Linie verbunden werden können, worin W denselben Werth annimmt, noch eine Unstetigkeit erfährt.

Analog wird eine Homogenität des zweiten Grades dadurch definirt, dass stets innerhalb eines Elementarparallelepipedons zwei Punkte und nicht mehr zu finden sind, worin die Function W denselben Werth erreicht, dass aber die zwei Punkte durch keine continuirliche Linie verbunden sind, wo W denselben Werth annimmt oder unstetig wird.

Ferner wird eine Homogenität des n^{ten} Grades dadurch definirt, dass stets n Punkte und nicht mehr innerhalb eines Elementarparallelepipedons zu finden sind, in welchem die Function W denselben Werth erreicht, dass aber die n Punkte durch keine continuirliche Linie, in der W ebenfalls denselben Werth annimmt, verbunden sind, oder durch keine Unstetigkeit der Function getrennt werden.

Eine solche die genannte Homogenität bestimmende Function sei im Allgemeinen unstetig, und ihre Unstetigkeitsflächen werden in der Gesamtheit in jedem Elementarparallelepipedon mit S bezeichnet. Wenn wir nun die Unstetigkeiten S mit Flächen vollständig umgeben, und wir diese kleinen, so erhaltenen Umkreisungsräume ausschliessen, so erhalten wir in dem ganzen Raume, wie gross er auch sei, eine vollkommene Stetigkeit sowohl der Function W als auch ihrer Differentialquotienten; und wir können uns erlauben, auf den ganzen Raum den Green'schen Satz anzuwenden. Das Flächenintegral ist immer Null, wenn wir den Integrationsraum unendlich gross und die Unstetigkeitsräume unendlich klein werden lassen:

$$\int \frac{dW}{dn}\, ds = 0;$$

ebenso muss deshalb auch das Raumintegral verschwinden; also:

$$\int \Delta W \cdot d\tau = 0 .$$

Es werden daher ebenso viele Elemente, wo $\Delta W > 0$, als solche, wo $\Delta W < 0$ ist, vorhanden sein. Und es muss deshalb auch Flächen, Scheidungsflächen, geben, wo

$$\Delta W = 0$$

ist. Die Niveauflächen Σ, welche dieser Laplace'schen Gleichung Genüge leisten, theilen nicht nur den ganzen Raum, sondern auch jedes einzelne Elementarparallelepipedon in gleiche Theile, wo einerseits $\varDelta W > 0$ und andererseits $\varDelta W < 0$ ist.

Bevor wir untersuchen, was eigentlich die Niveauflächen Σ seien, wollen wir prüfen, was die Unstetigkeitsflächen S sein können. Zu diesem Zwecke wollen wir die Green'schen Integrale auf ein einzelnes Elementarparallelepipedon anwenden, indem man die Unstetigkeitsflächen wie früher ausschliesst.

Das Raumintegral ist identisch gleich Null; das geht daraus hervor, dass ebenso viele $\varDelta W > 0$ als $\varDelta W < 0$ vorhanden sind.

Dasselbe muss bei dem Flächenintegrale der Fall sein, welches aus zwei Theilen besteht. Das auf die Oberfläche des Elementarparallelepipedons ausgedehnte Integral ist für sich Null; es muss daher das auf die Unstetigkeitsflächen S bezogene Flächenintegral ebenfalls verschwinden. Wir haben also für die in einem Elementarparallelepipedon befindlichen Unstetigkeitsflächen

$$\int \frac{dW}{dn} dS = 0 .$$

Diese Bedingung ist nur dann zulässig, wenn entweder S Ebenen sind, oder die Function W zwischen den einzelnen Unstetigkeitsflächen linear ist.

Wir wollen also annehmen, W sei eine dreifach periodische Function des n^{ten} Grades, und ihre Unstetigkeitsflächen seien die Ebenen S. Wir umgeben von Neuem die Ebenen S, und dehnen die Green'schen Integrale auf den so modificirten Raum aus, aber unter der Voraussetzung, dass nur der Raum in Betracht gezogen werde, wo $\varDelta W$ das Zeichen nicht ändert.

Das Flächenintegral muss ebenfalls verschwinden. Wir haben daher auch:

$$\int \varDelta W \cdot d\tau = 0 .$$

Aber das Raumintegral ist nur auf den Raum ausgedehnt worden, wo $\varDelta W$ entweder nur < 0 oder nur > 0 ist. Die vorhin abgeleitete Gleichung sagt uns hingegen, dass auch in einem solchen Raume Flächen vorkommen müssen, auf welchen der Differentialparameter $\varDelta W$ gleich Null ist. Diesen Vorgang kann man öfters wiederholen; das Schlussresultat wird sein, dass man im ganzen homogenen Raume

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

hat. Diese Bedingung ist mit dem über irgend eine geschlossene, keine Unstetigkeit enthaltene Fläche ausgedehnten Flächenintegrale

$$\int \frac{dW}{dn} ds = 0$$

identisch.

Dieses wichtige Ergebniss kann man so ausdrücken:

Alle Punkte einer homogenen Structur sind unter sich nicht gleichwerthig in Bezug auf irgend eine physikalische Erscheinung; nur diejenigen Punkte sind es, welche in Bezug auf einen gegebenen Punkt periodisch im Raume angeordnet sind. Aber in jedem Punkte einer homogenen Structur ist der zweite Differentialparameter der eine bestimmte physikalische Erscheinung darstellenden Function gleich Null.

Dieses Ergebniss zeigt auch, dass, um sich eine homogene Structur vorzustellen, man nicht nur von einer discreten, sondern auch von einer continuirlichen Vertheilung der Materie ausgehen kann.

Wenn wir nun die bekannte Gleichung

$$W = \frac{1}{4\pi R^2} \int W ds$$

auf eine Kugelfläche vom Radius R beziehen, wo W keine Unstetigkeiten besitzt, so drückt diese Gleichung aus, dass innerhalb eines beliebigen Raumes weder Minima noch Maxima der Function W bestehen.

Aber wir haben angenommen, dass W eine periodische Function der n^{ten} Ordnung sei, welche ohne Maxima und Minima nicht zulässig ist. Wir schliessen also daraus, dass W aus Linearfunctionen zusammengesetzt sei, und zwar aus so vielen, als die Ordnungszahl der dreifachperiodischen Function ist. Und jede Linearfunction gilt nur innerhalb eines von Unstetigkeiten abgegrenzten Feldes.

Heben wir nämlich hervor, dass W nur einen einzigen Werth in jedem Punkte hat, d. h. dass ihre Inverse eine Function des ersten Grades ist, so würde W eine mehrfache Function überall dort sein, wo mehrere Linearfunctionen gelten würden.

Um daher dies zu vermeiden, müssen wir annehmen, dass jede Linearfunction von W in einem bestimmten Felde gilt, und dass in einem anderen Felde eine andere Function zu gelten hat. Es folgt daraus, dass solche Felder mit bestimmten, zu W gehörenden Linearfunctionen gleich sind. Um uns also eine dreifachperiodische Function n^{ter} Ordnung vorzustellen, müssen wir uns denken, dass ein bestimmtes Elementarparallelepipedon in n gleiche Theile zerlegt sei, und dass in jedem derselben eine einzige Linearfunction gelte, d. h. dass in jedem derselben die Function W die Rolle einer Function des ersten Grades spiele. Die n gleichen Theile oder Felder werden durch Ebenen abgegrenzt, worin entweder die Function W oder ihre partiellen Ableitungen oder auch beide unstetig sind.

Schreiben wir jetzt die n Linearfunctionen, welche in einem bestimmten Elementarparallelepipedon die dreifach periodische Function der n^{ten} Ordnung zusammensetzen:

$$\begin{aligned} W_1 &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1\,, \\ W_2 &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2\,, \\ W_3 &= A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3\,, \\ &\vdots \\ W_n &= A_n x + B_n y + C_n z + D_n\,. \end{aligned}$$

Wir sehen daher, dass die Construction einer Homogenität des n^{ten} Grades sich darauf beschränkt, ein Elementarparallelepipedon in n gleiche Felder zu zerlegen; dann ist die Homogenität jedes Feldes die des ersten Grades und durch eine Linearfunction bestimmt. Eine Homogenität des n^{ten} Grades kann somit als aus n Homogenitäten des ersten Grades zusammengesetzt aufgefasst werden.

Um eine Function des ersten Grades einfach darzustellen, genügt es, dass wir die Flächen gezogen denken, wo die Function W constant ist, und die wir, wie früher, Niveauebenen oder W-Niveaus nennen können. Ein solches W-Niveau ist z. B.

$$W_m = A_m x + B_m y + C_m z + D_m\,.$$

Und alle zu einem bestimmten Felde gehörenden W-Niveaus sind untereinander parallele Ebenen.

Aus dieser Auseinandersetzung geht offenbar hervor, dass irgend welche homogene Structur ohne Unstetigkeiten, sei es der Function W, sei es ihrer Ableitungen, undenkbar ist.

Versuchen wir z. B. eine Homogenität des zweiten Grades darzustellen.

Wir werden ein Elementarparallelepipedon in zwei gleiche Felder zu theilen haben. In jedem derselben wird die Function W ersten Grades und durch parallele Niveauebenen darstellbar sein. In einem derselben sei die Function:

$$W_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1\,,$$

in dem anderen:

$$W_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2\,.$$

Die zwei Felder des Elementarparallelepipedons werden natürlich nicht zu den Perioden der Function gehören, d. h. das eine wird nicht vermittelst möglicher Perioden in das andere übergehen können, da sonst das Elementarparallelepipedon einen kleineren Inhalt besässe, als angenommen wurde.

Dieser Bedingung kann auf zwei Weisen Genüge geleistet werden, nämlich entweder so, dass die W_1-Niveaus parallel zu den W_2-Niveaus sind, oder so, dass sie nicht parallel sind.

Vorerst fassen wir den Fall in's Auge, wo die Niveauebenen der Function W_1 parallel sind zu denjenigen der Function W_2.

Dieser Annahme zufolge wird auf dem Umfange jedes Feldes die Unstetigkeit

$$W_1 - W_2$$

vorhanden sein; dagegen wird überall

$$\left(\frac{dW}{dn}\right)_1 + \left(\frac{dW}{dn}\right)_2 = 0$$

sein. Ferner sehen wir, dass, da zwei nebeneinander liegende Felder nicht immer periodisch zur Deckung gebracht werden können, die Differenz $W_1 - W_2$ nicht überall constant sein darf. Auf zwei gegenüber liegenden Unstetigkeiten jedes Feldes wird daher $W_1 - W_2$ variabel sein, und $W_1 + W_2 = \text{const.}$ Auf einer solchen Unstetigkeitsfläche muss daher eine Gerade liegen, wo $W_1 - W_2 = 0$ ist. Dass eine solche Gerade durch den Mittelpunkt eines Unstetigkeits-Elementarparallelepipedons hindurchgeht, ist leicht einzusehen.

Auf den Kanten jedes Feldes kommen natürlich vier Werthe der Function W vor; es sind jene, welche den vier angrenzenden Feldern angehören. Zwischen zweien solcher Werthe besteht aber die Gleichung $W_1 - W_2 = 0$; zwischen den zwei anderen dagegen ist

$$W_1 - W_2 = \text{var.} \quad \text{und} \quad W_1 + W_2 = \text{const.}$$

Daher kommen Punkte vor, wo alle vier Werthe der Function W zusammenfallen. Solche singuläre Punkte sind auch die Ecken des Unstetigkeits-Elementarparallelepipedons. Wir sagen, dass die hier in Betracht kommende Homogenität des zweiten Grades durch Symmetriecentren ausgezeichnet wird. Sie gehört zur pinakoidalen Klasse der Krystalle. Dass wir auf verschiedene Weise eine solche Homogenität hervorrufen können, geht aus dem Gesagten leicht hervor.

Wir betrachten jetzt den zweiten Fall einer Homogenität zweiten Grades, nämlich den, wo die Niveauebenen der Function W_1 nicht parallel zu den Niveauebenen der Function W_2 sind. Damit das möglich sei, müssen die zu der Function W_1 gehörenden Werthe in Bezug auf eine Gerade symmetrisch liegen zu jenen Werthen, welche zur Function W_2 gehören. Das können wir auf zweierlei Weise erreichen; entweder dadurch, dass die Differenz

$$W_1 - W_2$$

in den Unstetigkeitsebenen variabel, oder dass

$$W_1 - W_2 = \text{const.}$$

sei. Kommt der erste Fall vor, so sind im Raume Gerade vorhanden, worin

$$W_1 - W_2 = 0$$

ist, und sie nennen sich zweizählige Symmetrieaxen; oder

$$W_1 - W_2 = \text{const.},$$

und dann heissen sie zweizählige Schraubenaxen.

Die zweite Art, um denselben Zweck zu erreichen, ist die, dass in den Unstetigkeitsebenen die Differenz

$$W_1 - W_2 = \text{const.}$$

sei, und gleichzeitig

$$\left(\frac{dW}{dn}\right)_1 + \left(\frac{dW}{dn}\right)_2 = 2\left(\frac{dW}{dn}\right)_1.$$

Ist jene Constante Null, so treten Symmetrieebenen, und ist sie von Null verschieden, so treten Schiebungsebenen auf. Die hier betrachteten Homogenitäten des zweiten Grades gehören zu der sphenoidischen resp. domatischen Klasse (Groth) der Krystalle, und sie können offenbar durch verschiedene Anordnung der Materie zu Stande gebracht werden.

Diese zwei Beispiele zeigen uns, dass die Unstetigkeiten der Function W oder ihrer Ableitungen verwerthet werden können, ja erforderlich sind, um die Homogenität eines bestimmten Grades weiter zu unterscheiden.

Eine dreifach periodische Function der n^{ten} Ordnung wird durch ein in n gleiche (nicht congruente) Felder getheiltes Elementarparallelepipedon darzustellen sein, wo die Linearfunctionen $W_1, W_2, W_3, \ldots . W_n$ gelten werden. Die Trennungsflächen der einzelnen Felder sind Unstetigkeitsebenen, und zwar bald der Function W, bald ihrer Ableitungen, oder bald beider gleichzeitig.

Zur Charakterisirung einer Homogenität des n^{ten} Grades haben wir daher zu prüfen, ob in den Punkten der Unstetigkeitsebenen zwischen zwei benachbarten mit r und s bezeichneten Feldern die Differenz $W_r - W_s$ eine constante oder eine variable Grösse sei, und in diesem letzten Falle, ob die Summe $W_r + W_s$ constant sei oder nicht. Ferner hat man zu untersuchen, ob Gerade vorkommen, worin $W_r - W_s$ constant ist oder auch gleich Null.

Ist erstens längs einer in der betreffenden Ebene liegenden Geraden

$$W_r - W_s = 0,$$

so hat man es mit einer Symmetrieaxe zu thun.

Ist diese letzte Differenz von Null verschieden, aber constant, so ist eine Schraubenaxe vorhanden.

Ist ferner längs einer oder mehrerer Geraden

$$W_r + W_s = \text{const.},$$

so liegt eine Inversionsaxe vor; und kommt in diesem Falle noch ein Punkt dazu, wo $W_r - W_s = 0$ ist, so tritt bei der Homogenität ein Inversionscentrum auf. Wir sehen daraus, dass das Inversionscentrum eigentlich gar kein specielles Element der Homogenität darstellt. Ist zweitens längs einer Unstetigkeitsebene

$$W_r - W_s = 0\,,$$

so ist sie eine Symmetrieebene; sie ist dagegen eine Schiebungsebene, falls überall

$$W_r - W_s = \text{const.}$$

ist.

Wie bei der Homogenität des zweiten Grades hervorgehoben worden war, ersehen wir auch hier, dass die Homogenitäten, beziehungsweise die dreifach periodischen Functionen n^{ter} Ordnung, mit Hülfe der Grössen $(W_r - W_s)$ und $(W_r + W_s)$ und ihres oftmaligen Auftretens in einem Elementarparallelepipedon gekennzeichnet, ja beschrieben werden können.

Bei niedriger Ordnung der Homogenität kommt noch die Unstetigkeit

$$\left(\frac{dW}{dn}\right)_r + \left(\frac{dW}{dn}\right)_s,$$

ob sie nämlich Null oder von Null verschieden ist, in Betracht, um die Eigenschaft der betreffenden Homogenität festzustellen.

Die Art und Weise, wie hier eine Homogenität dargestellt worden ist, erinnert uns an jene Zwillingsgesetze, durch welche ein Zwillingskrystall eine höhere Symmetrie aufweist, als die einzelnen Zwillinge selbst besitzen. Denken wir uns nämlich eine bestimmte Anzahl von Feldern, nämlich die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, etc. derjenigen, welche ein Elementarparallelepipedon zusammensetzen, herausgenommen, und eine Homogenität des $\frac{n^{\text{ten}}}{2}$, $\frac{n^{\text{ten}}}{3}$, $\frac{n^{\text{ten}}}{4}$, etc. Grades gebildet, so werden wir aus einer Homogenität des n^{ten} Grades 2, 3 resp. 4 etc. einzelne Homogenitäten des $\frac{n^{\text{ten}}}{2}$, $\frac{n^{\text{ten}}}{3}$ resp. $\frac{n^{\text{ten}}}{4}$ etc. Grades erhalten.

Solche Homogenitäten spielen aber die Rolle von Viellingen, indem dieselben zusammengenommen eine Homogenität des n^{ten} Grades ausmachen. Die Folge davon wird sein, dass, was die physikalischen Eigenschaften anbetrifft, solche Zwillingskrystalle von den eigentlichen Krystallen einer höheren Homogenität nicht unterscheidbar sein werden; und sie dürfen es auch nicht sein, da alles bei diesen und bei jenen vollkommen gleich ist.

In einem folgenden, der Redaction bereits eingereichten Aufsatze habe ich die verschiedenen Homogenitäten nach diesem Principe behandelt.
