Tumlirz O.

# Die Dichte der Erde, berechnet aus der Schwerebeschleunigung und der Abplattung


Dr. **O. Tumlirz,**

*Profes. r an der k. k. Universität in Czernowitz.*



**(Vorgelegt in der Sitzung am 10. November 1892.)**

Aus den Sitzungsberichten . kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. CI. Abth. II. a. November 1892.

WIEN, 1892.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

**IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,**

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. CI. Abth. II. a. November 1892.

# Die Dichte der Erde, berechnet aus der Schwerebeschleunigung und der Abplattung

Dr. **O. Tumlirz,**
*Professor an der k. k. Universität in Czernowitz.*

**(Vorgelegt in der Sitzung am 10. November 1892.)**

Aus den Messungen der mittleren Dichte der Erde und aus den Untersuchungen über die Abplattung derselben geht mit Sicherheit hervor, dass die Dichte der Erde von der Oberfläche gegen das Centrum hin zunimmt, doch ist das Gesetz dieser Zunahme noch nicht bekannt. Um dieses Gesetz zu finden, betrachten wir die Oberfläche der Erde als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid und nehmen an, dass der ganze Erdkörper durch Ellipsoide, welche mit dem genannten Rotationsellipsoid ähnlich, ähnlich liegend und concentrisch sind, in unendlich dünne Schichten getheilt ist von der Beschaffenheit, dass die Dichte in einer und derselben Schichte constant, von Schichte zu Schichte aber veränderlich ist.

Ist $A$ die halbe grosse und $C$ die halbe kleine Axe der Erdoberfläche und sind $a, c$ die analogen Werthe eines zu dieser Fläche homothetischen Ellipsoides, so können wir die Dichte im Innern der Erde als eine Function von $a$ oder $c$ ansehen. Wir setzen sie gleich $\varphi(a)$. Bezeichnen wir ferner den Abstand eines äusseren Punktes von der Rotationsaxe mit $r$ und den Abstand desselben Punktes von der Äquatorebene mit $z$ (positiv in der Richtung zum Nordpol) und bedeutet $V$ das Potential der Erde in dem genannten Punkte, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2\pi r \int_{t_1}^{\infty} \varphi(a) \frac{dt}{(1+t)D}$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi n^2 z \int_{t_1}^{\infty} \varphi(a) \frac{dt}{(1+n^2 t) D},$$

wo

$$\frac{A}{C} = \frac{a}{c} = n, \quad D = (1+t)\sqrt{1+n^2 t}$$

ist und $t_1$ in der Gleichung

$$\frac{r^2}{1+t} + \frac{n^2 z^2}{1+n^2 t} = a^2$$

denjenigen Werth von $t$ darstellt, welcher $a = A$ entspricht.

Wenn wir die Function $\varphi(a)$ durch eine unendliche Reihe von der Form

$$\varphi(a) = \rho_0 - M\frac{a^2}{A^2} - N\frac{a^4}{A^4} - .$$

ausdrücken, dann können wir sowohl für jeden Punkt des Äquators, als auch für beide Pole die Kraft $\frac{\partial V}{\partial r}$, beziehungsweise $\frac{\partial V}{\partial z}$ sehr leicht berechnen. Wir wollen im Folgenden die Rechnung in der Weise durchführen, dass wir zunächst nur die ersten zwei Glieder nehmen, also

$$\varphi(a) = \rho_0 - M\frac{a^2}{A^2}$$

setzen und zur Bestimmung der beiden Constanten $\rho_0$, $M$

1. die Schwerebeschleunigung am Äquator und
2. die Schwerebeschleunigung am Pol

benützen.

Es ist nämlich am Äquator

$$z = 0, \; r = A,$$

also

$$\frac{A^2}{1+t} = a^2, \; t_1 = 0, \; \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2\pi A \int_0^\infty \left(\rho_0 - M\frac{a^2}{A^2}\right)\frac{dt}{(1+t)^2\sqrt{1+n^2t}}$$
$$= -2\pi A\left(\rho_0\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2\sqrt{1+n^2t}} - M\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^3\sqrt{1+n^2t}}\right).$$

Setzen wir nach Bessel

$$A = 6377397\cdot 156\, m$$
$$C = 6356079\cdot 175\, m,$$

so erhalten wir

$$n^2 - 1 = \Lambda^2 = 0\cdot 0067191$$

und

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2\sqrt{1+n^2t}} = \frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2}\left(\frac{\operatorname{arc\,tang}\Lambda}{\Lambda} - \frac{1}{1+\Lambda^2}\right)$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{15}\Lambda^2 + \frac{2}{35}\Lambda^4 - \ldots$$
$$= 0\cdot 6657734.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^3\sqrt{1+n^2t}} =$$
$$= \frac{(1+\Lambda^2)^2}{\Lambda^2}\left[\frac{3}{4\Lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\Lambda - \frac{1}{2(1+\Lambda^2)^2} - \frac{3}{4\Lambda^2(1+\Lambda^2)}\right]$$
$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{35}\Lambda^2 + \frac{2}{105}\Lambda^4 - \ldots$$
$$= 0\cdot 3996170.$$

Unsere Gleichung erhält somit die Form

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2\pi A(0\cdot 6657734\,\rho_0 - 0\cdot 3996170\, M). \qquad (1)$$

Ganz ebenso erhalten wir für den Nordpol

$$r = 0,\; z = C$$

also

$$\frac{n^2C^2}{1+n^2t} = a^2,\; t_1 = 0,\; \frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi n^2 C \int_0^\infty \left(\rho_0 - M\frac{a^2}{A^2}\right) \frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+n^2t)^3}}$$

$$= -2\pi n^2 C \left[\rho_0 \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+n^2t)^3}} - \right.$$

$$\left. - M\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+n^2t)}}\right.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+n^2t)^3}} = \frac{2}{\Lambda^2}\left(1 - \frac{\operatorname{arc\,tang}\Lambda}{\Lambda}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\Lambda^2 + \frac{2}{7}\Lambda^4 - \ldots$$

$$= 0\cdot 6639920$$

und

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{(1+n^2t)^5}} = \frac{2}{\Lambda^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\Lambda^2} + \frac{\operatorname{arc\,tang}\Lambda}{\Lambda^3}\right)$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{7}\Lambda^2 + \frac{2}{9}\Lambda^4 - \ldots$$

$$= 0\cdot 3980903,$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi n^2 C(0\cdot 6639920\,\rho_0 - 0\cdot 3980903\,M),$$

wo

$$n^2 = 1 + \Lambda^2 = 1\cdot 0067191.$$

Wir wählen jetzt für die beiden Schwerebeschleunigun jene Werthe, welche Pouillet angegeben hat, nämlich

$$g_0 = 9\cdot 781029\,m$$
$$g_{90} = 9\cdot 831085\,m$$

und können demnach setzen:

für den Nordpol

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -9\cdot 831085$$

und für den Äquator

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -9\cdot 781029 - \frac{4\pi^2 A}{(24\times 60\times 60)^2}$$
$$= -9\cdot 814756.$$

Dies führt zu dem Resultate:

$$\rho_0 = 6\cdot 839461 \times 10^{-7}$$
$$M = 5\cdot 265660 \times 10^{-7}$$

Es ist somit die Dichte in der Oberflächenschichte $(a = A)$ gleich

$$\rho_0 - M = 1\cdot 573801 \times 10^{-7}$$

und die mittlere Dichte der Erde gleich

$$\rho_0 - 0\cdot 6\, M = 3\cdot 680065 \times 10^{-7},$$

oder es verhält sich die mittlere Dichte der Erde zur Dichte in der Oberflächenschichte wie

$$2\cdot 3383 \quad 1$$

und die Dichte im Mittelpunkt zur Dichte in der Oberflächenschichte wie

$$4\cdot 3458 \quad 1.$$

Die Dichte in der Oberflächenschichte der Erde wird gewöhnlich im Verhältniss zum Wasser als 2·5 angenommen; demnach erhalten wir

die Dichte im Mittelpunkt $= 10\cdot 864$
und die mittlere Dichte der Erde $= 5\cdot 846.$

Die letztere Zahl ist etwas grösser als die Zahl 5·692, welche v. Jolly mit der Wage gefunden hat.

Die Zahlen für die Dichte im Mittelpunkt und die mittlere Dichte der Erde sind wesentlich abhängig von den Werthen für $g_0$ und $g_{90}$. Wählen wir z. B. die Werthe, welche Listing angegeben hat, nämlich

$$g_0 = 9\cdot 780728\, m$$
$$g_{90} = 9\cdot 831603\, m,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 7\cdot 1317 \times 10^{-7} \\ M &= 5\cdot 7526 \times 10^{-7} \\ \rho_0 - M &= 1\cdot 3791 \times 10^{-7} \\ \rho_0 - 0\cdot 6\, M &= 3\cdot 6801 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

Setzen wir wieder die Dichte in der Oberflächenschichte der Erde im Vergleich zum Wasser $= 2\cdot 5$, dann erhalten wir für die Dichte im Mittelpunkt die Zahl

$$12\cdot 929$$

und für die mittlere Dichte der Erde die Zahl

$$6\cdot 672.$$

Die letztere Zahl ist etwas grösser als die Zahl $6\cdot 566$, welche Airy erhalten hat.

Für die Grössen $g_0$ und $g_{90}$ hat man bisher infolge der localen Einflüsse und der Unregelmässigkeiten der Gestalt der Erde noch keineswegs ganz sichere Mittelwerthe erhalten, und diese Unsicherheit überträgt sich bei dieser Methode auch auf das Resultat. Aber wir können bereits aus dem gewonnenen Resultate einen Schluss ziehen, und zwar den, dass unser Dichtigkeitsgesetz

$$\varphi(a) = \rho_0 - M\frac{a^2}{A^2}$$

zwei Gruppen von Messungen, nämlich die Messungen der Schwerebeschleunigung an den verschiedenen Stellen der Erdoberfläche und die Messungen der mittleren Dichte der Erde, welche bisher in keinerlei Beziehung zu einander standen, mit einander in einfacher und, man kann auch sagen, befriedigender Weise verbindet, so dass dieses Gesetz den Anspruch erhält, als Ausdruck der thatsächlichen Verhältnisse zu gelten.

Theilen wir den Radius des Äquators in zehn gleiche Theile und legen wir die früheren Werthe von $\rho_0$ und $M$, nämlich $\rho_0 = 6\cdot 839461 \times 10^{-7}$ und $M = 5\cdot 265660 \times 10^{-7}$, zu Grunde, so erhalten wir nach diesem Dichtigkeitsgesetze

$$\frac{a}{A} = 1, \quad 0 \cdot 9, \quad 0 \cdot 8, \quad 0 \cdot 7, \quad 0 \cdot 6, \quad 0 \cdot 5,$$

$$\text{Dichte} = 2 \cdot 5, \quad 4 \cdot 089, \quad 5 \cdot 511, \quad 6 \cdot 766, \quad 7 \cdot 853, \quad 8 \cdot 773,$$

$$\frac{a}{A} = 0 \cdot 4, \quad 0 \cdot 3, \quad 0 \cdot 2, \quad 0 \cdot 1, \quad 0,$$

$$\text{Dichte} = 9 \cdot 526, \quad 10 \cdot 112, \quad 10 \cdot 530, \quad 10 \cdot 781, \quad 10 \cdot 864.$$

Wenn wir die Anziehungskraft auf einen Punkt bestimmen wollen, der im Innern auf einem Äquatorialhalbmesser im Abstand $\alpha$ vom Mittelpunkt liegt, so werden wir dieselbe gleich jener Kraft zu setzen haben, welche von demjenigen Ellipsoide ausgeht, das von der durch den Punkt gehenden und mit der Erdoberfläche homothetischen Ellipsoidenfläche begrenzt wird. Denn der übrige Theil übt nach einem bekannten Satze keine Wirkung aus. Die Dichte in dem betreffenden Punkt ist

$$\rho_0 - M \frac{\alpha^2}{A^2}$$

Dieselbe setzen wir gleich

$$\rho_0 - M', \text{ wo } M' = M \frac{\alpha^2}{A^2}.$$

Anderseits ist die Dichte innerhalb des Ellipsoides auf dem Halbmesser im Abstande $a$

$$\rho_0 - M \frac{a^2}{A^2} = \rho_0 - M' \frac{a^2}{\alpha^2}.$$

Da nun ausserdem $n$ denselben Werth hat, so können wir die früheren Formeln ohneweiters anwenden, nur müssen wir darin $A$ durch $\alpha$ und $M$ durch $M'$ ersetzen. Wir erhalten also für $z = 0$, $r = \alpha$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r} &= -2\pi\alpha(0 \cdot 6657734\, \rho_0 - 0 \cdot 3996170\, M') \\
&= -2\pi\alpha\left(0\ 6657734\, \rho_0 - 0 \cdot 3996170\, M \frac{\alpha^2}{A^2}\right) \\
&= -2\pi\alpha \times 10^{-7}\left(4 \cdot 55353 - 2 \cdot 10425 \times \frac{\alpha^2}{A^2}\right) \\
&= -\frac{\alpha}{A}\left(18 \cdot 2462 - 8 \cdot 4318\, \frac{\alpha^2}{A^2}\right).
\end{aligned}$$

Nennen wir die Schwerebeschleunigung in dem betreffenden Punkte $g$, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -g - \frac{4\pi^2\alpha}{(24\times 60\times 60)^2}$$

$$= -g - 0\cdot 033727\,\frac{\alpha}{A}$$

und daher

$$g = \frac{\alpha}{A}\left(18\cdot 212473 - 8\cdot 4318\,\frac{\alpha^2}{A^2}\right).$$

$$\frac{\alpha}{A} = 1, \quad 0\cdot 9, \quad 0\cdot 8, \quad 0\cdot 7, \quad 0\cdot 6,$$

$$g = 9\cdot 781029, \quad 10\cdot 245, \quad 10\cdot 253, \quad 9\cdot 857, \quad 9\cdot 106$$

$$\frac{\alpha}{A} = 0\cdot 5, \quad 0\cdot 4, \quad 0\cdot 3, \quad 0\cdot 2, \quad 0\cdot 1, \quad 0$$

$$g = 8\cdot 052, \quad 6\cdot 745, \quad 5\cdot 236, \quad 3\cdot 575, \quad 1\cdot 813, \quad 0.$$

Den grössten Werth hat $g$ für

$$\frac{\alpha}{A} = 0\cdot 84852,$$

und zwar

$$g_{\max} = 10\cdot 302299\, m.$$

Für $\alpha = A$ ist

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = -1\cdot 1106\times 10^{-6}\, m,$$

d. h. steigen wir am Äquator $1\,m$ tief in die Erde, dann nimmt die Beschleunigung der Schwere um

$$1\cdot 1106\times 10^{-6}\, m$$

zu.

Airy beobachtete in der Kohlengrube Harton bei Newcastle in einer Tiefe von $383\,m$ eine Zunahme der Schwerebeschleunigung von $\frac{1}{19190}$ des Betrages an der Oberfläche, d. i. um

$$5\cdot 1073\times 10^{-4}\, m,$$

also für 1 *m* eine Zunahme von

$$1 \cdot 3335 \times 10^{-6}\, m.$$

Major v. Sterneck hat dagegen in dem Bergwerke von Přibram bei einer Tiefe von 1000 *m* die Beobachtung gemacht, dass eine Uhr, welche an der Oberfläche richtig ging, unter der Erde um 3·88 Secunden pro Tag vorauseilte. Diesem Betrage entspricht eine Zunahme der Schwerebeschleunigung von

$$8 \cdot 8074 \times 10^{-4}\, m,$$

also für 1 *m*

$$0 \cdot 88074 \times 10^{-6}.$$

Bilden wir das Mittel aus dem Airy'schen und dem Sterneck'schen Werthe, so ergibt sich

$$1 \cdot 1021 \times 10^{-6}\, m,$$

also eine Zahl, welche mit dem von uns berechneten Werthe sehr nahe übereinstimmt.

Zum Schlusse habe ich noch den Druck berechnet, welchen die Massen der Erde bei dem oben ausgesprochenen Dichtigkeitsgesetz im Mittelpunkte ausüben würden, wenn die Erde ganz flüssig wäre. Indem ich dabei die Erde als eine Kugel vom Radius $A$ ansah, erhielt ich einen Druck von

3 132 000 Atmosphären.

Die Wassersäule, welche bei constantem Gewichte denselben Bodendruck ausübt, ist 5·0746mal grösser als der Erdradius. Durch diesen ungeheueren Druck würde ein Stück Eisen — vorausgesetzt, dass die Zusammendrückbarkeit vom Drucke unabhängig ist — auf das 2·373fache verdichtet werden, d. h. es würde die Dichte von 7·76 auf 18·41 erhöht werden. Freilich können wir mit Sicherheit annehmen, dass die genannte Voraussetzung nicht richtig ist. H. Amagat hat gefunden, dass die Compressibilität des Wassers mit dem Drucke abnimmt, so dass bei 3000 Atmosphären der Compressibilitätscoëfficient halb so gross ist wie bei 1 Atmosphäre, und wir können daraus vermuthen, dass die anderen Stoffe sich ähnlich verhalten.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.