Einheitliche Ableitung der Krystallisations- und Zwillingsgesetze.

Von

G. Tschermak.

Mit 52 Figuren im Text.

(Sonderabdruck aus: »Zeitschrift für Krystallographie usw.« XXXIX. Band, 5. u. 6. Heft.)

XXVIII. Einheitliche Ableitung der Krystallisations- und Zwillingsgesetze.

Von

G. Tschermak in Wien.

(Mit 53 Textfiguren.)

Die Veröffentlichung dieses Aufsatzes ist hervorgerufen durch meinen Wunsch, die Methode, der ich mich in letzter Zeit in meinen Vorlesungen bei der Ableitung der Symmetriegesetze und der Zwillingsgesetze bediene, auch weiteren Kreisen bekannt zu machen, bevor ich dieselbe in mein Lehrbuch der Mineralogie aufnehme.

Nachdem die Ableitung der Symmetriegesetze durch eine Reihe hervorragender Krystallographen und Mathematiker wie Hessel, Bravais, Gadolin, Sohncke, v. Lang, Liebisch, Miningerode, Schönflies, Curie, Fedorow, Viola u. A. in aller Strenge und Vollständigkeit durchgeführt wurde, bleibt nur noch die Aufgabe, jene Gesetze in einer einfachen, leicht fasslichen Form zu entwickeln, wie dies von Groth in seinem Lehrbuche der physikalischen Krystallographie geschehen ist. Diese Aufgabe kann jedoch in verschiedener Weise gelöst werden, wie die von Goldschmidt, Wulff, A. Schmidt in dieser Zeitschrift gemachten Vorschläge zeigen. Wenn solche aus der Lehrthätigkeit hervorgehen, so wird sich allmählich jene Methode herausbilden, welche am raschesten zum Ziele führt.

Das von mir befolgte Verfahren sucht in möglichst consequenter und einfacher Weise durch Anwendung der Zonenlehre zuerst die Krystallsysteme zu entwickeln, sodann die Krystallklassen in einer übersichtlichen Form abzuleiten. Die neuen Kunstausdrücke geniessen eine blos vorübergehende Anwendung, weil die einzelnen Klassen zuletzt nur durch Angabe des Krystallsystems und Hinzufügung einer Ziffer bezeichnet werden.

Am Schlusse wurde eine Ableitung des Zwillingsgesetze mit Anwendung der Zonenlehre gegeben. In anderer Form habe ich diese Gesetze schon früher entwickelt.

Zonengesetz.

Zur Begrenzung eines Raumes sind mindestens vier Ebenen erforderlich, daher ist der einfachste aller ebenflächigen Körper ein tetraëdrischer, und es sind, auch abgesehen von der Grösse, unzählig viele solche Körper denkbar.

Werden von einem Punkte im Inneren eines solchen Körpers Normalen auf die Flächen gefällt und durch diese Normalen Ebenen gelegt gedacht, so erhält man sechs solche Ebenen (Zonenebenen). Diese geben mit einer Kugelfläche, die um jenen Punkt als Centrum gelegt ist, sechs grösste Kreise (Zonenkreise), die sich zu dreien dort schneiden, wo die Flächennormalen die Kugelfläche treffen. Ausser diesen vier dreigliedrigen Schnittpunkten ergeben sich aber noch vier dreigliedrige und sechs zweigliedrige Schnittpunkte der Zonenkreise.

An einem Krystalle ist nun die Bedingung erfüllt, dass auch die letzteren zehn Schnittpunkte Flächenorte sind. Der vierflächige Krystall unterscheidet sich also von allen anderen tetraëdrischen Körpern dadurch, dass ausser den beobachteten vier auch alle die Flächen möglich sind, welche jenen Zonenschnitten entsprechen. Diese möglichen Flächen sind entweder Spaltebenen oder solche Flächen, die unter Umständen beim Fortwachsen des Krystalles gebildet werden. In Fig. 1 ist ein tetraëdrischer Körper gezeichnet, zu dessen Kanten die sechs Zonenebenen senkrecht sind. Jeder tetraëdrische Körper kann so aufgestellt werden, dass, wie hier, eine Kante gegen den Beschauer gewendet ist und von links oben nach rechts unten verläuft.

Fig. 1.

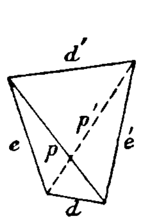


Fig. 2.

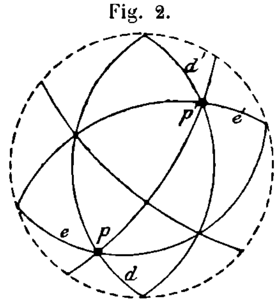
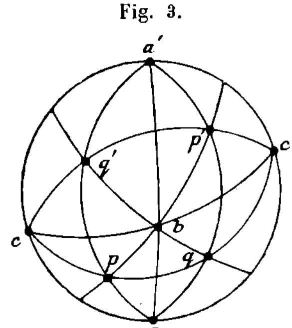


Fig. 3.



In Fig. 2 ist die sphärische Projection angegeben für jene Stellung des Körpers, bei der vier zweigliedrige Schnittpunkte der Zonenkreise in den Grundkreis fallen. Die nicht bezeichnete Zone ist von der rückwärts liegenden Kante abgeleitet. Fig. 3 deutet an, dass an einem Krystalle ausser den beobachteten vier Flächen auch die Flächen q, q', a, b, c und deren

Gegenflächen möglich sind. Die Flächen der Rückseite sind hier nicht projicirt. Die Zeichnung lässt erkennen, dass zu den sechs Zonen erster Art noch drei Zonen zweiter Art: *ab*, *ac*, *bc* von selbst hinzukommen.

Der Zusammenhang der Flächen erster Art: p, q, p', q' mit den Flächen zweiter Art: a, b, c, a', b', c' gilt allgemein, daher können an einem vielflächigen Krystalle irgend welche vier Flächen, die nicht zu dreien in einer Zone liegen, als Flächen erster Art angenommen werden, und diese führen zu dem Sechs-Zonensystem erster Art. Die Bedingung aber, dass die Schnitte dieser Zonen ferneren möglichen Flächen entsprechen, fügt zu diesem das Drei-Zonensystem zweiter Art. Dieses Doppelsystem von Zonen bildet die Grundlage jeder Krystallform und des Krystallbaues überhaupt.

Die Form jedes Krystalles kann demnach von einem Neun-Zonensystem abgeleitet werden.

Die Ableitung ergibt sich daraus, dass die übrigen Flächenorte mit den bisher genannten in demselben Zusammenhange stehen, wie diese unter einander. Die Zonenschnitte des Neun-Zonensystems, die in Fig. 3 nicht mit Buchstaben bezeichnet sind, geben fernere Flächenorte an. Werden durch diese Zonen gelegt, so liefern diese neue Durchschnitte, also wieder mögliche Flächenorte, diese wieder neue Zonen u. s. f. So lässt sich die Lage aller am selben Krystalle möglichen Flächen bestimmen, und die thatsächlich beobachteten Flächen finden sich in den so abgeleiteten Flächenorten. Dieser Zusammenhang wird ausgedrückt durch den Satz:

Die vorhandenen und möglichen Flächen eines Krystalles und aller gleichartigen Krystalle derselben Substanz stehen unter einander im Zonenverbande.

Nach dem Gesagten leiten sich alle Formen desselben Krystalles von einem Neun-Zonensystem ab. Eine geringere Zahl von Zonen wäre ungenügend, eine grössere Zahl ist ebenfalls ausgeschlossen, weil jede fernere Annahme entweder auf eine abgeleitete Zone führen oder dem Zonengesetze widersprechen würde.

Sobald die Flächen eines Krystalles durchweg ungleich sind, so sind auch die Zonen ungleich, wenn aber Flächengleichheit eintritt, so entsteht eine Regelmässigkeit der Formbildung, welche in ganz entsprechender Weise durch Gleichheit der Zonen ausgedrückt wird.

Die Anzahl der Grundzonen beschränkt sich auf neun. Die Regelmässigkeiten der Formen beruhen auf bestimmten Graden der Gleichheit der Zonen.

Charakter der Zonen. Projection.

Eine Zone ist einfach, wenn sie keine unter einander gleichen oder nur parallele Flächen umfasst. Eine Zone wird hier binär genannt, wenn in derselben von einer Fläche aus zu beiden Seiten in gleichen Bogendistanzen Flächen auftreten. Als gleich werden Zonen bezeichnet, welche von ihren Durchschnittspunkten an gerechnet Flächen in gleichen Bogendistanzen aufweisen. Bei den späteren Ableitungen tritt der Fall ein, dass in eine einfache Zone eine zweite gleiche einfache so gelegt gedacht wird, dass beide einen Flächenpol gemein haben und mit einander 180° bilden. Dadurch wird die Zone eine binäre.

Zur Darstellung der Zonenverhältnisse eignet sich am besten jene Art der stereographischen Projection, die von Gadolin angewandt, von Groth ausführlich beschrieben wurde[1]). Sie gestattet beide Seiten des Krystalles in einem Kreise zusammen zu fassen. Diese Projection wird hier mehrmals benutzt werden.

Principien der Flächenwiederholung (Symmetrie).

Der allgemeinste Fall der Formbildung ist jener, in welchem der Krystall von Flächen begrenzt erscheint, die von einander verschieden sind. Damit ist das erste Princip der Formbildung angegeben.

I. Jede Fläche des Krystalles tritt nur einmal auf. Die parallelen Flächen sind verschieden.

An einem solchen Krystalle sind alle Zonen ungleich. Die Normale jeder Fläche verhält sich nach den beiden Richtungen verschieden. Diese Eigenschaft soll als Polarität und jede hierher gehörige Form als eine polare bezeichnet werden.

Einer solchen Form entspricht immer eine zweite, die sich wie das Spiegelbild der ersten verhält, und jede der beiden Formen kann bei gleicher Orientirung derselben Fläche zwei Stellungen einnehmen.

Aus jeder polaren Form kann bei vollständig gleicher Lage der Zonen eine solche mit Flächenwiederholung abgeleitet werden.

Die Lage jeder Krystallfläche ist durch zwei Zonen bestimmt. Diese werden durch zwei andere Flächen angegeben, daher zur Angabe der Stellung des Krystalles mindestens drei Flächen erforderlich sind. Sie werden als Flächencomplexe bezeichnet. In der Projection Fig. 4 liefern sie das sphärische Dreieck *acp*. Werden hier die Zonen ausgezogen (auf der Rückseite punktirt angegeben), so zeigt sich auf jedem Zonenkreise in der Distanz von 180° ein zweiter Zonenschnitt, im Ganzen ein zweites Dreieck $a'c'p'$, das drei Flächen angiebt, welche jenen der Vorderseite parallel

1) Physikalische Krystallographie 3. Aufl., 1895, 306.

sind. Wenn die Sphäre der Projection beide Male von aussen betrachtet wird, so folgen die Winkel, unter denen sich die Zonenkreise in jedem der Punkte schneiden, auf der Vorderseite in dem einen, auf der Rückseite im entgegengesetzten Sinne. Flächen und Gegenflächen sind daher nicht ident gleich, sondern spiegelbildlich gleich, correlat gleich.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich der einfachste Fall der Flächenwiederholung zugleich das zweite Princip der Formbildung:

II. Jede Fläche des Krystalles wiederholt sich in einer zur vorigen parallelen Lage als correlat gleiche Fläche.

Diese Art der Flächenwiederholung wird hier als Diëdrie und die entsprechenden Formen werden als diëdrische bezeichnet. An dem Neun-Zonensystem wird durch diese Ableitung nichts geändert. Die Principien I und II kommen darin überein, dass alle Zonen einfache und ungleiche sind, daher werden die entsprechenden Formen unter demselben Gesichtspunkte betrachtet und als ein Krystallsystem (triklines Kr.) zusammengefasst.

Andere Arten der Flächengleichheit werden gefunden durch die Annahme, dass in dem Neun-Zonensystem zwei Zonen gleich sind. Wird wiederum ein Complex von drei Flächen a, c, p als vorhanden gedacht

Fig. 4.

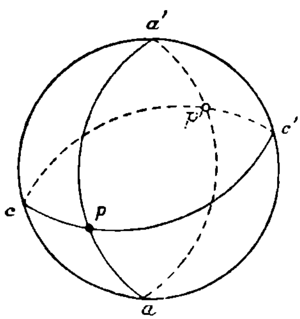
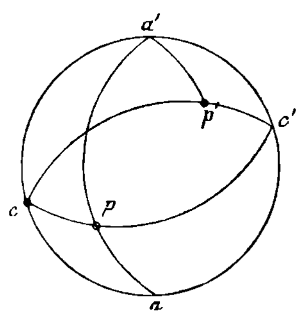


Fig. 5.



und wird angenommen, dass nur eine derselben p sich nicht parallel wiederhole, während die beiden anderen in paralleler Lage wiederkehren, so ergeben sich nach Fig. 5 die Orte dieser Flächen, wenn die Zonen ausgezogen und zu der einen Zone cp eine gleiche zugefügt wird. Diese letztere muss mit der Zone ac einen ebenso grossen Winkel bilden, wie die Zone cp. Wird auf derselben der Bogen $c'p' = cp$ aufgetragen, hierauf a' mit p' durch einen Bogen verbunden, so ergiebt sich das Dreieck $a'c'p'$, das dem Dreieck acp gleich ist. Die Fläche p' ist der Fläche p ident gleich.

Wenn die so erhaltene Construction auf das Neun-Zonensystem übertragen wird, so zeigt sich, gemäss Fig. 6, dass in diesem Falle der Complex *acp* durch eine Drehung von 180° um die Normale der Fläche *b* in die Lage *a'c'p'* übergeht. Dem entsprechend wird diese Art der Flächenwiederholung Hemitropie genannt und werden die so abgeleiteten Formen als hemitrope bezeichnet.

Die Normale von *b* ist zugleich Axe der Zone *ac*. Alle durch *b* laufenden Zonenkreise sind senkrecht zu *ac*, die beiden als gleich angenommenen Zonen *cp* und *c'p'* bilden mit der Zone *ac* gleiche Winkel, ebenso die Zonen *ap* und *ap'*. Wenn also eine Fläche sich in einer nicht parallelen Lage wiederholen soll, so setzt dies eine bestimmte Beschaffenheit des Neun-Zonensystems voraus, die darin besteht, dass zu einem Zonenkreise *ac* alle übrigen beiderseits gleich geneigt sind. Diese Zone *ac* wird hier Medianzone genannt, das neue Zonensystem heisst ein monoklines. Wird der Krystall um 90° gedreht gedacht, so dass die Flächenpole *a* und *b* in den Grundkreis fallen, und werden einige Zonen weggelassen, hingegen die rückwärts liegenden Theile der gleichen Zonenkreise punktirt, so ergiebt das Schema in Fig. 7 den Fall, in welchem die beiden gleichen Flächen auf der einen Seite der Medianzone liegen, Fig. 7a den Fall, in welchem

Fig. 6.

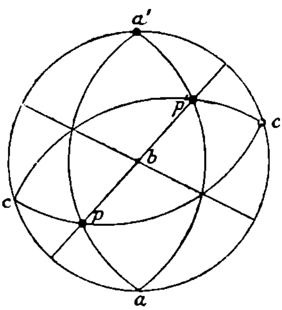


Fig. 7.

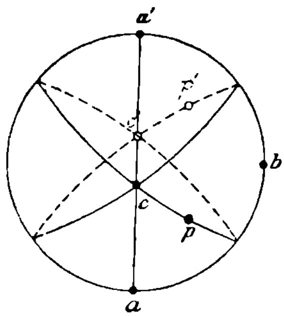
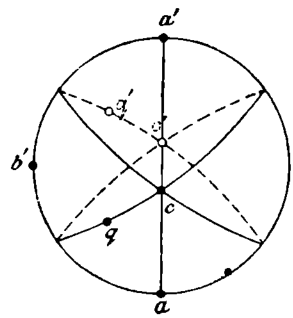


Fig. 7a.



bei gleichen Winkeln dieselben auf der anderen Seite vorkommen. Diese Betrachtung führt zu dem dritten Princip der Formbildung:

III. Jede Fläche wiederholt sich in hemitroper Lage zu einem Pol der Medianzone als ident gleiche Fläche.

Jeder hierher gehörigen Krystallform entspricht eine zweite, ihr spiegelbildlich gleiche Form.

Bei gleicher Zonenlage kann auch eine andere Art der Flächenwiederholung vorkommen, indem, wie Fig. 8 zeigt, zu dem Flächencomplex *acp* ein gleicher *acq* auf der anderen Seite der Medianzone hinzutritt. Die Flächenpole *p* und *q* sind von *c* gleich weit entfernt, ebenso gleich weit von *a*. Die Flächen *p* und *q* sind nicht ident gleich, sondern correlat gleich, beide sind polar, sind nicht von Gegenflächen begleitet. Dieses Verhalten der gleichen Flächen wird hier als sympolar bezeichnet. Die Ebene der

Medianzone wird hier zur Symmetrieebene. Dem entspricht das vierte Princip der Formbildung:

IV. Jede Fläche wiederholt sich mit gleicher Neigung zu denselben Flächen der Medianzone als correlate Fläche. Die Ebene der Medianzone ist Symmetrieebene.

Die Flächen der Medianzone wiederholen sich nicht als gleiche Flächen. Die hierher gehörigen Formen können in zweierlei Stellung abgeleitet werden. Denkt man sich statt der vorhin mit p und q bezeichneten Flächen deren Gegenflächen vorhanden, so erhält man die gleiche Form in zweiter Stellung.

Fig. 8.

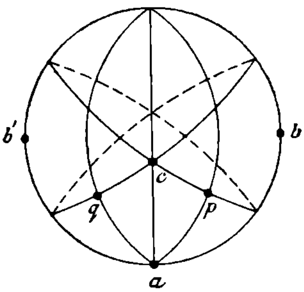
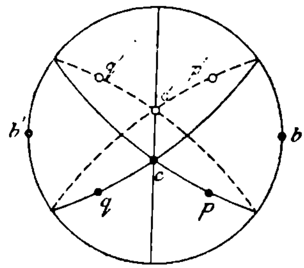


Fig. 9.



Ein Flächencomplex acp kann dem vorher Gesagten zufolge unter Voraussetzung des monoklinen Zonensystems am Krystalle vier gleiche Lagen einnehmen und dem entsprechend sind die Flächenorte p, q, p', q' gleich. Bisher wurden bei der hemitropen Wiederholung die Combinationen $p + p'$ und $q + q'$ gefunden (Fig. 7 und 8), bei der sympolaren die Combinationen $p + q$ und $p' + q'$ (Fig. 9). Wird nun der Versuch mit der Combination $p + q'$ und $p' + q$ gemacht, so heisst dies so viel als Diëdrie, d. i. parallele Wiederholung. Diese aber setzt kein monoklines Zonensystem voraus, gehört nicht in diesen Bereich und ist bereits abgehandelt. Die Annahme, dass drei der gleichen Punkte mit Flächen besetzt seien, enthält einen Widerspruch, denn diese drei Flächen hätten weder gegen einander, noch gegen die übrigen Flächen des Krystalles gleiche Lage. Somit führt der nächste Schritt zu dem ferneren Falle der Flächenwiederholung, in welchem die vier gleichen Flächen p, q, p', q' zugleich auftreten (Fig. 9). Demnach ist jede Fläche p von ihrer Gegenfläche begleitet, ebenso jede Fläche q von ihrer Gegenfläche. Die im vorigen Falle gefundene Symmetrieebene bleibt erhalten. Dem entspricht das fünfte Princip der Formbildung:

V. Jede Fläche wiederholt sich mit gleicher Neigung zur Medianzone als correlate Fläche und beide sind von ihren Gegenflächen begleitet. Die Medianzone ist Symmetrieebene.

Hier wiederholen sich die Flächen der Medianzone und die Flächen b

nur einmal als Gegenflächen. Die hierher gehörigen Formen werden als holoëdrische bezeichnet.

Die vorgenannten drei Arten der Flächenwiederholung oder Symmetrie beruhen auf demselben Zonensysteme und werden als monoklines Krystallsystem zusammengefasst. In diesem Zonensysteme durchschneiden sich zwei gleiche Zonenebenen in einer Geraden, welche in den Polen c und c' endet. Die nach den Principien III, IV und V gleichen Flächen zeigen ein bestimmtes Verhalten zu diesen Polen. Im Falle der Hemitropie ist der Pol p der einen der gleichen Flächen von dem Pol c so weit entfernt, wie der Pol p' der anderen von c'. Die Flächenanordnung ist eine bipolare. Nach dem Princip IV hingegen sind die beiden gleichen Flächenpole p und q von demselben Pol gleich weit entfernt, die Anordnung ist eine unipolare. Gemäss dem Princip V sind wiederum zwei gleiche Flächen $p + q$ zu dem Pol c so angeordnet, wie die beiden anderen $p' + q'$ zu dem zweiten Pol c'. Die Anordnung ist eine bipolare. Daraus ergiebt sich das Gesetz: Jeder unipolaren Anordnung entspricht eine bipolare.

Demnach leitet sich aus der unipolaren Anordnung nach IV die bipolare nach III dadurch ab, dass statt der zweiten gleichen Fläche q deren Gegenfläche p' eingesetzt wird, ferner die bipolare nach V dadurch, dass zu dem Paar $p + q$ ein zweites $p' + q'$ mit der gleichen Neigung zu dem zweiten Pol c' zugefügt wird. Das Princip der bipolaren Ableitung wird später Anwendung finden.

Die ferneren Arten der Flächenwiederholung (höhere Grade der Symmetrie).

Um die ferneren Arten der Flächenwiederholung aufzufinden genügt es, von dem Neun-Zonensystem ausgehend jene einzelnen Zonensysteme aufzusuchen, in welchem nicht blos zwei, sondern mehrere Zonen gleich sind. Dabei kann man den zuletzt erwähnten Fall zu Grunde legen, in welchem von den neun Zonen ursprünglich nur zwei gleich gesetzt wurden, und kann vorerst nur die vier in der Geraden cc' sich schneidenden Zonenebenen in Betracht nehmen.

In Fig. 10 (S. 441) sind dem monoklinen Zonensysteme entsprechend die Zonenstücke cm_1 und cm_2 einander gleich, und daraus folgte, dass die Bogen $bc = b'c = 90^0$. Wenn im Weiteren Gleichheit der Zonen cm_1, cm_2 mit einer der übrigen angenommen wird, so sind auch die entsprechenden in der Figur von c auslaufenden Zonenstücke gleich anzunehmen, und es ergiebt sich in jedem einzelnen Falle als erstes Resultat, dass diese Zonenstücke 90^0 messen, wonach in der Figur der Punkt c in die Mitte des Grundkreises rückt. Werden dabei zwei Zonenstücke, die um 180^0 verschieden liegen, gleich gesetzt, so erhält die ganze Zone einen binären Charakter.

Wenn die Zonen einander gleich sind, so können dieselben vertauscht werden, ohne dass das Zonensystem geändert wird, insbesondere dass dabei die fixe Lage der Zonen ac und bc ungeändert bleibt. Dies wird hier zur Auffindung der möglichen Fälle so benutzt, dass immer die dritte an die Stelle der zweiten gesetzt wird, was einer Drehung des Zonensystems um die Axe cc' gleichkommt, wobei der Drehungswinkel soviel als der Winkel zwischen der dritten und zweiten Zone beträgt.

Bei dieser Ausführung ergeben sich vier Fälle:

1. Das dem ersten und dem zweiten Zonenstücke, also cm_1 und cm_2, gleiche sei cm_4. Wenn $cm_2 = cm_4$ ist, so muss jeder dieser zwei Bogen 90^0 messen. Denkt man sich jetzt cm_4 in die Lage von cm_2 gebracht, so entspricht dies einer Drehung von 180^0, wodurch in den Winkeln des Zonensystems weiter nichts geändert wird und der Winkel zwischen den Zonen cm_1 und cm_2 variabel bleibt. Die Zonen ac und bc bleiben ungleich, doch werden sie binär. Dasselbe gilt von den zuletzt genannten Zonen.

Diese Ableitung führt demnach auf ein fixes Zonensystem von drei zu einander senkrechten ungleichen Zonen. Die übrigen Zonen sind paarweise gleich. Rhombisches Zonensystem Fig. 11.

2. Das dritte mit cm_1 und cm_2 gleiche Zonenstück sei ca'. Wenn diese drei Bögen gleich sein sollen, dann muss jeder derselben 90^0 messen. Wird nun ca' in die Lage von cm_2 gebracht, so beträgt der Winkel der Drehung $180^0 - \frac{\alpha}{2}$ wenn unter α der Winkel zwischen cm_1 und cm_2 verstanden wird. Dabei soll gleichzeitig cm_2 in die Lage von cm_1 kommen, der Drehungswinkel gleichzeitig α sein. Demnach ergiebt sich der Betrag des Winkels aus der Gleichstellung $180^0 - \frac{\alpha}{2} = \alpha$ zu 120^0. Die drei gleichen Zonen weichen also um je 120^0 von einander ab.

Fig. 10.

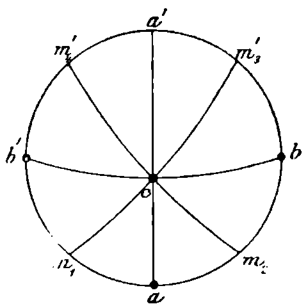
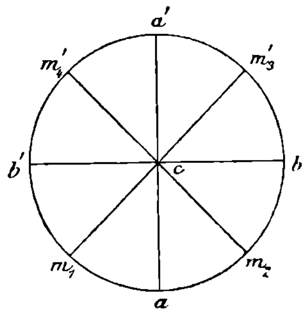


Fig. 11.



Bei dieser Vertauschung behalten die Stücke ca und ca' ihren ungleichen Charakter, ebenso die Stücke cm_1 und cm_3, ebenso cm_2 und cm_4. Die drei gleichen Zonen bleiben also immer einfache Zonen. In der Zeichnung in Fig. 12 ist es damit angedeutet, dass diese Bogen zur Hälfte stärker ausgezogen sind. Jede dieser Zonen ist zugleich Medianzone. Die Zone ca' bringt die dazu senkrechte bc mit sich, und wegen der Gleichheit von ca' mit cm_2 und cm_1 treten auch zu diesen senkrechte Zonen hinzu.

So wird ein System von diesen drei gleichen einfachen fixen Zonen der einen Art und von drei gleichen zu den vorigen senkrechten Zonen der anderen Art und einer zu allen diesen senkrechten Zone erhalten: Trigonales Zonensystem, Fig. 12.

Fig. 12.

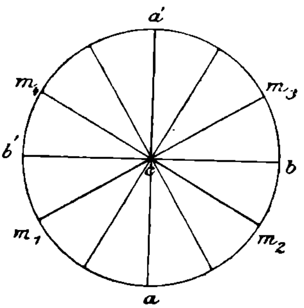
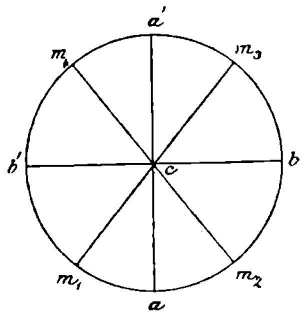


Fig. 13.



3. Das dritte mit cm_1 und cm_2 gleiche Zonenstück sei cm_3. Dann müssen die Bogen cm_1 und cm_3 je 90⁰ messen, ebenso cm_2 und cm_4. Wird nun cm_3 in die Lage von cm_2 gebracht und gleichzeitig cm_2 nach cm_1, so beträgt der Winkel der Drehung 90⁰, und es ergeben sich zwei gleiche binäre Zonen, die zu einander senkrecht sind. Bei dieser Vertauschung wiederholt sich die Zone bc in der Lage von ac, folglich sind auch diese beiden Zonen einander gleich und halbiren die Winkel der vorigen.

Dies führt auf ein System von gleichen binären Zonen der einen Art, zwei ebensolchen Zonen der anderen Art und einer zu allen diesen senkrechten Zone, zusammen von fünf fixen Zonen: Tetragonales Zonensystem, Fig. 13.

4. Das dritte mit cm_1 und cm_2 gleiche Zonenstück sei cb. Da letzteres invariabel 90⁰ misst, so entsprechen auch die beiden vorgenannten Bogen einem rechten Winkel. Wenn nun das Zonenstück cb nach cm_2 rückt, so kommt cm_2 auf cm_1 zu liegen. Beides ist ohne Aenderung des Zonensystemes nur möglich, wenn die Winkel zwischen den drei gleichen Zonen gleich sind, folglich je 60⁰ betragen. Die Zone bc bringt die dazu senkrechte ac mit sich, und die Gleichheit der zuerst genannten drei Zonen fordert auch für cm_2 und cm_1 die dazu senkrechten Zonen. So ergiebt sich ein Zonensystem mit drei gleichen Zonen der einen Art, drei gleichen zu den vorigen senkrechten Zonen der anderen Art und einer zu allen

diesen senkrechten Zone, zusammmen von sieben fixen Zonen: Hexagonales Zonensystem, Fig. 14.

Die vier in einem Punkte zusammentreffenden Zonen des Neun-Zonensystems sind immer von zweierlei Art, und dies überträgt sich auch auf den Fall, dass in demselben Punkte noch mehr Zonenkreise sich schneiden. Wollte man die Annahme versuchen, alle vier genannten Zonen gleich zu setzen, so führt dies zu einem Widerspruche mit dem Zonengesetze.

Denkt man sich nämlich in diesen als gleich angenommenen Zonen von c aus Flächenpole in gleichen Distanzen angesetzt, so sind die abwechselnden vier Pole von den anderen vier nicht durch Zonen ableitbar.

Dieselbe Methode, nach welcher die Gleichheiten der Zonen, die sich zu vieren schneiden, aufgesucht werden, lässt sich auch auf die dreigliedrigen Schnittpunkte anwenden. In einem solchen treffen sich die Zonen $a'p$, bp, cp, Fig. 15. Geht man wiederum davon aus, dass die Zonen cp und cq gleich sind, und nimmt an, dass eine jener Zonen z. B. bp mit

Fig. 14.

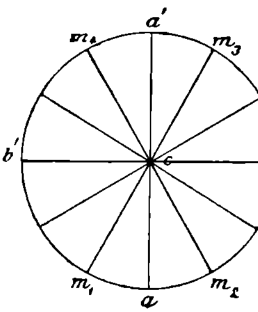


Fig. 15.

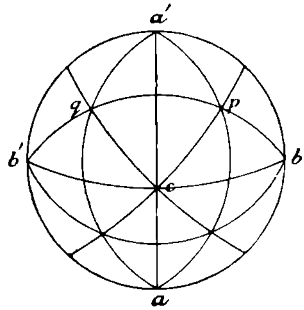
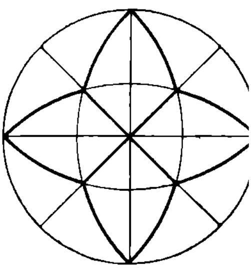


Fig. 16.



diesen gleich sei, so sind damit zwei Zonen des dreigliedrigen Poles p gleichgesetzt. Die nunmehr gleichen Zonen cp, cq, bp liefern, da sie vertauschbar sind, drei gleiche Bogen $cp = cq = pq$. Da jetzt auch die Zonen bc, $a'p$, $a'q$ gleich werden, so liefern deren Durchschnitte drei Pole, deren Verbindungen mit c, p, q drei gleiche, unter 120^0 zusammentreffende Zonen, im Ganzen ein trigonales Zonensystem ergeben. Dieses lässt sich also auch aus der Annahme ableiten, dass drei Zonen erster Art einander gleich sind.

Der nächste Schritt führt zu der Annahme, dass nicht nur die beiden Zonen cp und cq, sondern auch die beiden anderen in einem dreigliedrigen Schnittpunkte zusammentreffenden Zonen ap und bq mit den vorigen gleich sind. Daraus folgt zunächst, dass auch die anderen dreigliedrigen Schnittpunkte sich dem ersten gleich verhalten müssen, also alle sechs Zonen der ersten Art unter einander gleich sind. Dadurch werden aber auch die Zonen zweiter Art gleich, und da schon ursprünglich zwei derselben rechtwinkelig gestellt waren, so bilden jetzt die Zonen zweiter Art sämmtlich rechte Winkel. Dies führt auf ein System von sechs gleichen Zonen erster Art und drei gleichen zu einander senkrechten Zonen der zweiten Art: Tesserales Zonensystem, Fig. 16.

Sowie vorher, sind auch hier die vom viergliederigem Punkte ausgehenden zuerst abgeleiteten Zonen bis zu ihrem Zusammentreffen durch stärkere Linien hervorgehoben.

Wird schliesslich der Versuch mit den zweigliedrigen Schnittpunkten gemacht und werden die hier sich kreuzenden Zonen gleich angenommen, so führt dies auf ein tetragonales Zonensystem.

Demnach sind die Annahmen bezüglich der Gleichheit von Zonen in dem Neun-Zonensystem erschöpft: Die Zahl der Krystallsysteme beschränkt sich auf sieben.

Abtheilungen der Krystallsysteme (Klassen).

Mit Berücksichtigung der Zahl und Beschaffenheit der gleichen Zonen leiten sich die Abtheilungen eines jeden Krystallsystems vom rhombischen an bis zum tesseralen dadurch ab, dass die Forderungen berücksichtigt werden, die sich aus der Gleichheit der Zonen ergeben.

Wird ausserhalb der fixen Zonenkreise ein Flächenpol angenommen, so wird jede der gleichen einfachen Zonen von einem solchen begleitet sein müssen, jede binäre wird deren zwei erfordern. Der Flächenpol kehrt demnach in allen ident gleichen Punkten wieder, und es herrscht bezüglich jeder der gleichen Zonen das Princip I der Formbildung, die entsprechende Gesammtform wird hier eine polare genannt. Tritt zu jedem der vorgedachten Flächenpole der Pol der Gegenfläche hinzu, so herrscht das Princip II und die Gesammtform heisst eine diëdrische. Bei den folgenden Ableitungen kann die Medianzone sammt ihren Wiederholungen zur Orientirung dienen.

Wird auf der einen Seite derselben ein Flächenpol angenommen, so kann gemäss dem Princip der Hemitropie III auf derselben Seite dieser Zone der Pol einer ident gleichen Fläche hinzukommen, und diese beiden Flächenpole werden so oftmal auftreten, als der Medianzone gleiche Zonen vorhanden sind. Die entsprechende Form ist eine hemitrope. Wird beiderseits der Medianzone je ein Pol correlater Flächen angenommen, so herrscht das Princip IV und die entsprechende Gesammtform ist eine sympolare. Kommen endlich zu den vorgedachten Flächen auch die Gegenflächen gemäss dem Principe V hinzu, so leitet dies zu einer holoëdrischen Gesammtform. Demnach ergeben sich in allen vorher genannten Krystallsystemen je fünf Abtheilungen, blos im rhombischen fallen zwei weg. Im tetragonalen und im hexagonalen Systeme aber, die eine gerade Zahl gleicher durch den Pol c laufenden Zonen darbieten, treten zufolge der Bipolarität noch zwei neue Abtheilungen hinzu, ohne dass in der Lage der Zonen etwas geändert würde.

Die Betrachtung des tetragonalen Zonensystemes lässt dies sogleich erkennen.

Hier kann gemäss dem Principe I eine unipolare Anordnung der gleichen Flächen eintreten (Fig. 17). Aus dieser lässt sich eine bipolare ableiten, wenn statt jeder zweiten also statt der abwechselnden gleichen Flächen deren Gegenfläche eingesetzt wird (Fig. 18). In der That behalten alle Zonen dieselbe Lage und die angenommenen Flächen sind zu

Fig. 17.

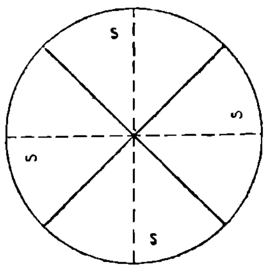
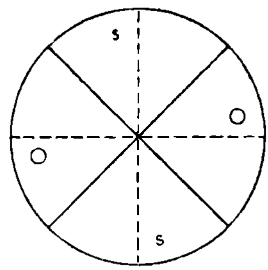


Fig. 18.



einander gleich angeordnet. Die so abgeleitete Form wird hier als eine *allomere* bezeichnet. Dies führt zu dem sechsten Principe, das für die tetragonalen und hexagonalen Krystalle gilt:

Ia. *Jeder polaren Form entspricht eine zweite, in der von den gleichen Flächen die abwechselnden durch deren Gegenflächen ersetzt sind.*

Sowie ferner aus jeder polaren, nach Princip I gebildeten Form eine sympolare nach Princip IV gebildete sich ableitet, indem zu jeder Fläche die correlate hinzutritt, so ergiebt sich aus jeder allomeren Form eine zweite.

Fig. 19.

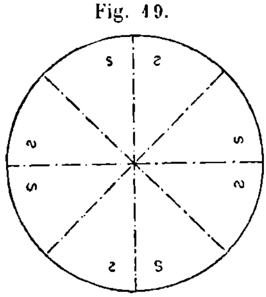
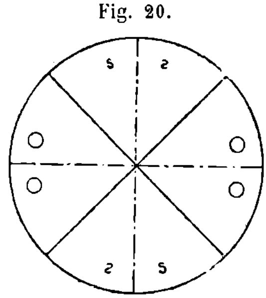


Fig. 20.



Diese kann auch aus der sympolaren in Fig. 19 so abgeleitet werden, dass statt jedem zweiten Paar correlater Flächen das dazu parallele Paar eingesetzt wird (Fig. 20). Die in solcher Art abgeleiteten Formen werden hier als dimere bezeichnet. Daraus ergibt sich für die beiden Krystallsysteme ein siebentes Princip der Formbildung:

IVa. Jeder sympolaren Form entspricht eine zweite, in der die abwechselnden Gruppen correlat-gleicher Flächen durch deren Gegenflächen ersetzt sind.

Der vorstehenden Ableitung entsprechend ergeben sich 32 mögliche Klassen der Krystallformen, die im Folgenden gemäss dem darin herrschenden Principe der Formbildung bezeichnet sind.

	Triklin und monoklin:	Rhombisch:	Trigonal:	Tetragonal:	Hexagonal:	Tesseral:
Polar.	I. Thioschw. *Ca*	—	I. *Na*-Perjodat	I. Wulfenit?.	I. Nephelin.	I. *Na*-Chlorat.
Diëdrisch.	II. Albit.	—	II. Dolomit.	II. Scheelit.	II. Apatit.	II. Pyrit.
Hemitrop.	III. Rohrzucker.	III. Bittersalz.	III. Quarz.	III. *Ni*-Sulfat.	III. *R* w. *SbO.Ba*	III. Salmiak.
Sympolar.	IV. Skolezit.	IV. Struvit.	IV. Turmalin.	IV. *Ag*-Fluorid.	IV. Greenockit.	IV. Fahlerz.
Holoëdrisch.	V. Gyps.	V. Topas.	V. Calcit.	V. Vesuvian.	V. Beryll.	V. Bleiglz.
Allomer.	—	—	—	Ia.	Ia.	—
Dimer.	—	—	—	IVa. Kupferkies.	IVa.	—

In allen polaren Abtheilungen erhält man bei gleichen Winkeln je vier Formen, von denen je zwei enantiomorph sind. In den diëdrischen Abtheilungen werden für jede Form zwei Stellungen gefunden. In den hemitropen Klassen enthält man je zwei enantiomorphe Formen. In den sympolaren Klassen leiten sich je zwei nur durch die Stellung verschiedene Formen ab. Für die holoëdrischen ergiebt sich immer nur eine Stellung. In den allomeren werden je vier, in den dimeren Abtheilungen werden je zwei Stellungen erhalten.

Die Krystallklassen.

Hier wird die Ableitung der Klassen im Einzelnen durchgeführt, und schliesslich werden diese so bezeichnet, dass zuerst das Krystallsystem, dann die Abtheilung, letztere durch eine römische Ziffer von der früher angeführten Bedeutung angegeben werden.

Die einfachen, nach den Principien I bis V gebildeten Formen müssen in zwei verschiedenen Systemen untergebracht werden, weil die einen keine bestimmte Lage der Zonen aufweisen, während die anderen schon eine bestimmte Lage derselben darbieten.

Triklines Krystallsystem.

Triklin I, polar.

1. Klasse (hemipinakoidale oder pediale Klasse nach Groth. Asymmetrische, triklin-hemiëdrische Kl. der Autoren).

Triklin II, diëdrisch.

2. Klasse (pinakoidale Kl. Groth, triklin-holoëdrische Kl. Aut.).

Monoklines Krystallsystem.

Monoklin III, hemitrop.

3. Klasse (sphenoidische Kl. Groth, monoklin-hemimorphe Kl. Aut.).

Monoklin IV, sympolar.

4. Klasse (domatische Kl. Groth, monoklin-holoëdrische Kl. Aut.).

Monoklin V, holoëdrisch.

5. Klasse (prismatische Kl. Groth, monoklin-holoëdrische Kl. Aut.).

Für das rhombische Krystallsystem wurde durch die früher gegebene Ableitung ein System von drei fixen, zu einander senkrechten binären Zonen enthalten (Fig. 11 a). Eine derselben, *ac*, wird hier als Medianzone angenommen, durch die dazu senkrechte Zonenebene *bc* zerfällt der Krystall in zwei gleiche Theile. Würde nun versucht, nach dem Principe I in beide Theile ausserhalb der fixen Zonen je eine ident gleiche Fläche zu legen und dies durchgeführt, indem in jeder Hälfte der Projection ein Punkt in gleicher Lage zu den Zonenkreisen eingesetzt wird, so ergäbe sich ein Schema, das jenem für monoklin III ähnlich ist, jedoch einen Widerspruch enthält, weil das Princip III wohl zwei ident gleiche Flächen fordert, aber nicht drei zu einander senkrechte Zonen voraussetzt. Auf denselben Widerspruch führt die Anwendung des Principes II, daher die beiden ersten Abtheilungen im rhombischen Systeme wegfallen.

Bei Anwendung des Principes III wird zuerst in dem einen Theile ein Flächenort angenommen, der auf der einen z. B. auf der rechten Seite der Medianzone liegt, hierauf der Ort der zugehörigen ident gleichen Fläche auf derselben Seite der Medianzone bestimmt. Sodann wird der zweite

Fig. 11a.

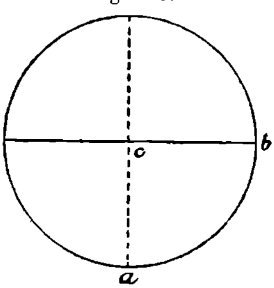
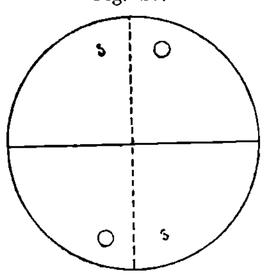


Fig. 21.



Theil der Projection in derselben Weise behandelt wie vorhin der erste, indem wiederum auf der jetzt rechts liegenden Seite der Medianzone ein den vorigen gleicher Flächenort angenommen und schliesslich der Ort der zugehörigen hemitrop liegenden Fläche bestimmt wird. So ergibt sich das hemitrope Schema in Fig. 21. Beginnt man mit der Annahme einer Fläche auf der linken Seite der Medianzone, so erhält man ein Schema, das der enantiomorphen Form entspricht. Demnach sind bei gleichen Winkeln zwei enantiomorphe Gestalten der hemitropen Abtheilung möglich. Nach dem Principe IV werden in dem Schema Fig. 11a in beiden Theilen zu den beiden Seiten der Medianzone eine Fläche und die correlate angenommen, entsprechend dem sympolaren Schema in Fig. 22. Dadurch entstehen zwei Symmetrieebenen, die durch die Ebenen der Zonen ac und bc gegeben sind. Hier leiten sich zwei Stellungen ab, eine obere (positive), eine untere (negative).

Fig. 22.

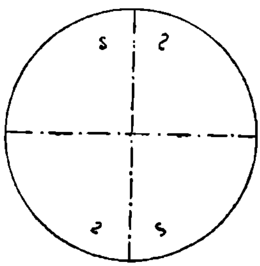
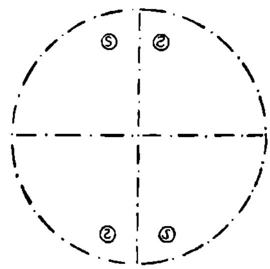


Fig. 23.



Soll endlich das Princip V zur Geltung kommen, so genügt es, in dem zuletzt erhaltenen Schema die Orte der Gegenflächen hinzuzufügen. Holoëdrisches Schema in Fig. 23. Damit ist eine dritte Symmetrieebene gegeben entsprechend der Ebene der Zone ab.

Rhombisches Krystallsystem.

Rhombisch III, hemitrop.

6. Klasse (bisphenoidische Kl. Groth, rhombisch-hemiëdrische Kl. Aut.).

Rhombisch IV, sympolar.

7. Klasse (rhombisch-pyramidale Kl. Groth, rhombisch-hemimorphe Kl. Aut.).

Rhombisch V, holoëdrisch.

8. Klasse (rhombisch-bipyramidale Kl. Groth, rhombisch-holoëdr. Kl. Aut.).

Das Schema des trigonalen Krystallsystemes gibt drei fixe einfache Zonen mc an, die sich unter 120° treffen, und diese sind zugleich Medianzonen (Fig. 24). Der Grundkreis gibt eine vierte Zone an. Die zu Zonen mc senkrechten, die bei folgender Ableitung keine Rolle spielen, sind hier weggelassen.

Wird nun das Princip I der Formbildung angewandt, so ist in gleicher Lage zu jeder der drei Medianzonen ausserhalb der fixen Zonen je ein Flächenort anzunehmen. Die so erhaltenen drei Flächenorte bedeuten drei ident gleiche Flächen. Dem entspricht das Schema in Fig. 25. Wird dieselbe Art der Ableitung befolgt, indem jetzt auf der anderen Seite der Medianzonen in gleicher Lage wie im vorigen Falle Flächenorte angenommen werden, so leitet dies auf eine Form, die mit der vorigen spiegelbildlich gleich ist.

Den bis jetzt genannten zwei Formen entsprechen aber zwei andere, deren Flächen zu dem Gegenpol c' so geneigt sind, wie die Flächen der vorigen Formen zu c. Somit wurden hier vier Formen abgeleitet, die zu zweien spiegelbildlich gleich sind und die man durch r, l, r', l' andeuten kann.

Wenn gemäss dem Principe II angenommen wird, dass mit den drei vorher bezeichneten ident gleichen Flächen auch deren Gegenflächen verbunden erscheinen, so ergiebt sich das diëdrische Schema in Fig. 26. Wird

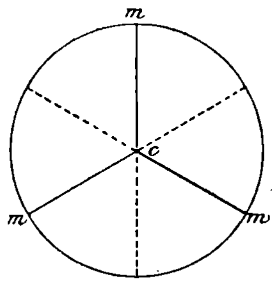


Fig. 24.

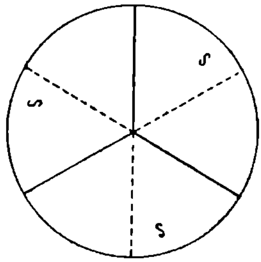


Fig. 25.

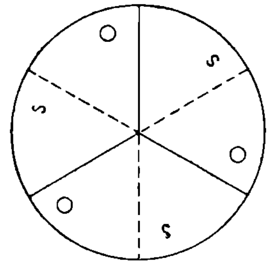


Fig. 26.

bei der Ableitung mit einem Flächenorte auf der anderen Seite der Medianzone der Anfang gemacht, so ergiebt sich eine zweite Form, die der vorigen geometrisch gleich, durch die Stellung von ihr verschieden ist.

Die Ableitung nach dem Principe III geht von zwei ident gleichen Flächenorten aus, die auf derselben Seite der Medianzone liegen und zur Axe dieser Zone hemitrop angeordnet sind. Die dreimalige Ausführung dieser Regel gibt das Schema in Fig. 27. Die damit angedeutete Form ist

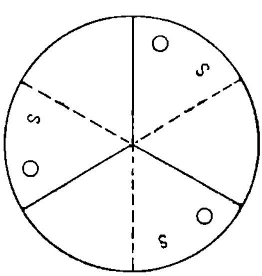


Fig. 27.

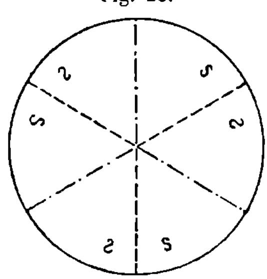


Fig. 28.

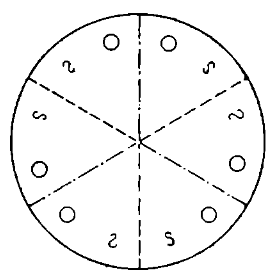


Fig. 29.

bipolar. Beginnt die Ableitung mit der anderen Seite der Medianzone, so wird eine Form erhalten, welche der vorigen spiegelbildlich gleich ist. Demnach kann eine und dieselbe Substanz in zwei enantiomorphen Formen auftreten.

Das sympolare Schema in Fig. 28 wird erhalten, wenn gemäss dem Principe IV angenommen wird, dass je zwei correlat gleiche Flächen zu beiden Seiten der Medianzone auftreten. Ausser der entsprechenden positiven Form wird auch eine negative abgeleitet. Beide weisen drei Symmetrieebenen auf.

Eine Form, an der nach dem Principe V die zuletzt angegebenen Flächen von deren Gegenflächen begleitet sind, entspricht dem holoëdrischen Schema in Fig. 29 und zeigt drei Symmetrieebenen.

Trigonales Krystallsystem.

Trigonal I, polar.
9. Klasse (trigonal-pyramidale Klasse Groth, hemimorph-tetartoëdrische oder ogdoëdrische Klasse Aut.).

Trigonal II, diëdrisch.
10. Klasse (rhomboëdrische Kl. Gr., rhomboëdrisch-tetartoëdrische Kl. Aut.).

Trigonal III, hemitrop.
11. Klasse (trigonal-trapezoëdrische Kl. Gr., trapezoëdrisch-tetartoëdrische Kl. Aut.).

Trigonal IV, sympolar.
12. Klasse (ditrigonal-pyramidale Kl. Gr., hemimorph-hemiëdrische Kl. Aut.).

Trigonal V, holoëdrisch.
13. Klasse (ditrigonal-skalenoëdrische Kl. Gr., rhomboëdrische oder rhomboëdrisch-hemiëdrische Kl. Aut.).

Das tetragonale Zonenschema giebt zwei gleiche, zu einander senkrecht gestellte binäre Zonen an, ferner zwei gleiche Medianzonen ac und die zu allen diesen senkrechte Zone im Grundkreise Fig. 13.

Wenn gemäss dem Principe I zwischen diesen Zonen an ident gleichen Stellen je ein Flächenpol angenommen wird, so führt dies zu dem Schema in Fig. 17.

Fig. 17.

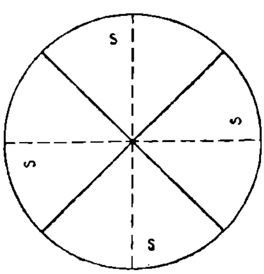


Fig. 30.

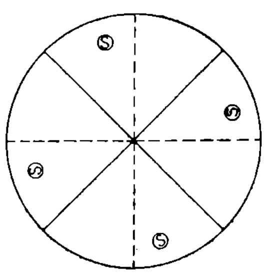
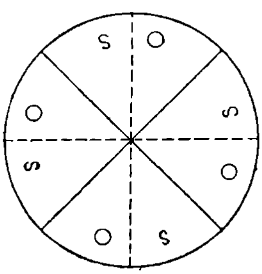


Fig. 31.



Durch die Annahme ident gleicher Flächen an der anderen Seite der Medianzone gelangt man zu einer zweiten, der vorigen spiegelbildlich gleichen Form. Beide verhalten sich bezüglich des Poles c gleich. Ausserdem sind zwei den vorigen gleiche Formen in solcher Stellung möglich, dass dieselben zu dem Pole c' sich so verhalten, wie die beiden vorigen zu c. Man kann diese Formen wiederum durch r, l, r', l' unterscheiden.

Dem Principe II nach lässt sich durch die Annahme, dass die vorgenannten vier Flächen von ihren Gegenflächen begleitet sind, das diëdrische Schema in Fig. 30 erhalten. Wiederum lassen sich hier zwei nur durch die Stellung verschiedene Formen ableiten.

Die Axe der Medianzone vermittelt die Ableitung nach dem Principe III. Werden je zwei Flächenorte in hemitroper Lage zu diesen Axen angenommen, so ergibt sich das hemitrope Schema in Fig. 31, und es werden je zwei enantiomorphe Gestalten abgeleitet.

Je zwei correlate Flächen zu beiden Seiten der Medianzone gelagert gedacht leiten zu dem sympolaren Schema in Fig. 19. Vier Symmetrieebenen. Eine positive und eine negative Form möglich.

Werden den im letzten Falle angenommenen Flächen die dazu parallelen beigefügt, so ergiebt sich das holoëdrische Bild in Fig. 32. Vier Symmetrieebenen und eine fünfte parallel *c*.

Fig. 19.

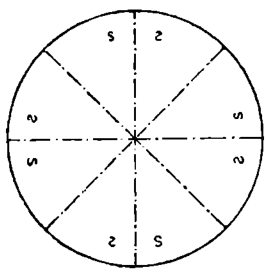
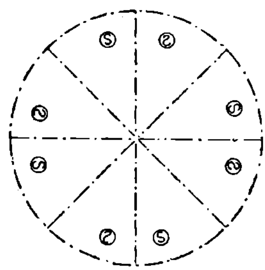


Fig. 32.



Im tetragonalen Systeme fügen sich mit Rücksicht auf das Gesetz der Bipolarität noch zwei Abtheilungen zu.

Das polare Schema in Fig. 17 giebt fünf bestimmte und auch zwei gleiche Zonen von unbestimmter Lage an. Um das entsprechende bipolare Schema zu erhalten, wird unter Beibehaltung jener Zonen gemäss dem Principe Ia

Fig. 18.

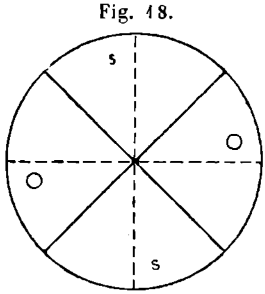
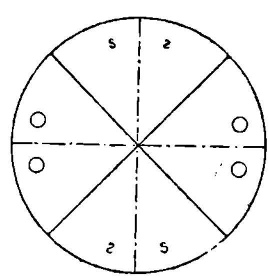


Fig. 20.



statt jeder zweiten Fläche die zu dieser parallele angenommen und so das allomere Schema in Fig. 18 gewonnen. Vier nur durch die Stellung verschiedene Formen.

Aus dem sympolaren Schema in Fig. 19 lässt sich ein bipolares dadurch ableiten, dass bei gleicher Zonenlage und gleichem Zonencharakter nach Princip IVa statt jeder zweiten Gruppe correlat gleicher Flächen die dazu parallelen angenommen werden. Dies führt zu dem dimeren Schema in Fig. 20. Die beiden den Medianzonen entsprechenden Symmetrieebenen bleiben erhalten. Es lassen sich zwei nur durch die Stellung verschiedene Formen ableiten.

Tetragonales Krystallsystem.

Tetragonal I, polar.

14. Klasse (tetragonal-pyramidale Klasse Groth, hemimorph-hemiëdrische Klasse Aut.).

Tetragonal II, diëdrisch.

15. Klasse (tetragonal-bipyramidale Kl. Gr., pyramidal-hemiëdrische Kl. Aut.).

Tetragonal III, hemitrop.

16. Klasse (tetr.-trapezoëdrische Kl. Gr., trapezoëdrisch-hemiëdrische Kl.).

Tetragonal IV, sympolar.

17. Klasse (ditetragonal-pyramidale Kl. Gr., hemimorph-holoëdrische Kl.).

Tetragonal V, holoëdrisch.

18. Klasse (ditetragonal-bipyramidale Kl. Gr., holoëdrische Kl.).

Tetragonal Ia, allomer.

19. Klasse (bisphenoïdische Kl. Gr., sphenoïdisch-tetartoëdrische Kl.).

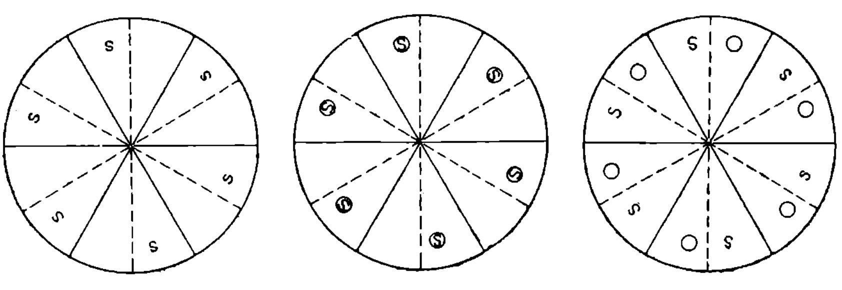
Tetragonal IVa, dimer.

20. Klasse (tetragonal-skalenoëdrische Kl. Gr., sphenoïdisch-hemiëdr. Kl.).

Das hexagonale Schema giebt drei fixe binäre Zonen an, die um je 60° von einander abweichen, ferner drei Medianzonen, den Winkel der vorigen halbirend, und eine zu allen diesen senkrechte Zone Fig. 14 a. S. 443.

Die Ableitung der Klassen erfolgt ebenso wie in dem tetragonalen Systeme. Fig. 33 giebt das polare Schema und lässt erkennen, dass hier wiederum vier Formen mit denselben Winkeln sich ergeben, wovon je

Fig. 33. Fig. 34. Fig. 35.



zwei correlat sind. Fig. 34 zeigt die diëdrische Anordnung. Die zwei ableitbaren Formen sind nur durch die Stellung verschieden. Fig. 35 ist das Schema der hemitropen Abtheilung und leitet darauf, dass zwei enantiomorphe Formen auftreten können. Fig. 36 giebt das sympolare Schema mit sechs Symmetrieebenen. Positive und negative Formen möglich. Fig. 37 entspricht der holoëdrischen Abtheilung mit sieben Symmetrieebenen.

Die nächste Abtheilung Ia leitet sich aus dem polaren Schema in Fig. 33 ab, indem angenommen wird, dass statt jeder zweiten Fläche deren Gegenfläche auftritt. So ergiebt sich das Bild einer allomeren Form in Fig. 38, das eine zur Fläche *e* parallele Symmetrieebene andeutet und die Möglichkeit von vier gleichen, nur durch die Stellung verschiedenen Formen erkennen lässt.

Fig. 36.

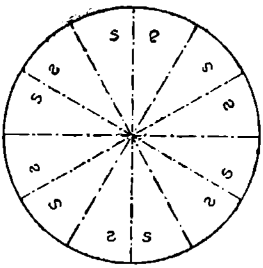
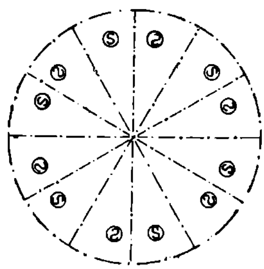


Fig. 37.



Wenn ferner das sympolare Schema in Fig. 36 benutzt wird, so ergiebt die Regel IVa, nach der statt jeder zweiten Gruppe correlater Flächen deren Gegenflächen auftreten, das dimere Schema in Fig. 39. Dasselbe

Fig. 38.

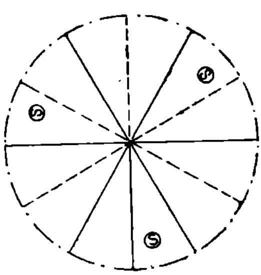
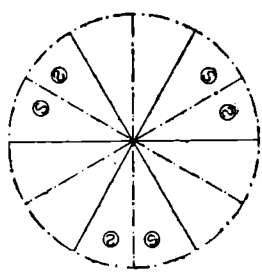


Fig. 39.



weist drei Symmetrieebenen auf, die den Ebenen der Medianzonen entsprechen und eine dazu senkrechte Symmetrieebene. Zwei durch die Stellung verschiedene Formen möglich.

Hexagonale Klassen.

Hexagonal I, polar.

21. Klasse (hexagonal-pyramidale Kl. Gr., hemimorph-hemiëdrische Kl.).

Hexagonal II, diëdrisch.

22. Klasse (hexagonal-bipyramidale Kl. Gr., pyramidal-hemiëdrische Kl.).

Hexagonal III, hemitrop.

23. Klasse (hexagonal-trapezoëdrische Kl. Gr., trapezoëdr.-hemiëdrische Kl.).

Hexagonal IV, sympolar.

24. Klasse (dihexagonal-pyramidale Kl. Gr., hexagonal-hemimorphe Kl.).

Hexagonal V, holoëdrisch.

25. Klasse (dihexagonal-bipyramidale Kl. Gr., holoëdrische Kl.).

Hexagonal VI, allomer.

26. Klasse (trigonal-bipyramidale Kl. Gr., trigonotyp-tetartoëdrische Kl.).

Hexagonal VII, dimer.

27. Klasse (ditrigonal-bipyramidale Kl. Gr., trigonotyp-hemiëdrische Kl.).

Für das tesserale Krystallsystem ist das Neun-Zonensystem fix. Die sechs Zonen erster Art sind unter einander gleich, und dasselbe gilt für die Zonen zweiter Art. Zwischen den Zonenkreisen bleiben auf der Sphäre der Projection 48 der Form nach gleiche Felder, Fig. 40. Da bei der Ableitung der Klassen nach den Principien I bis V eine bis vier Flächen zu Vertheilung kommen, so werden alle jene Felder in zwölf gleiche Gruppen gebracht. Dies geschieht, indem die Zonenstücke, welche die dreigliedrigen Schnittpunkte mit den nächstliegenden viergliedrigen verbinden, stärker hervorgehoben werden. In jedem so gebildeten Zwölftheil werden die erhaltenen vier Felder mit Ziffern und zwar immer in derselben Folge bezeichnet, so dass die gleichliegenden stets dieselbe Ziffer erhalten.

Zur Orientirung ist noch zu bemerken, dass die Ableitung durch Gleichsetzung der in den dreigliedrigen Punkten sich schneidenden Zonenkreise erfolgte, daher um diese Punkte die Eintheilung dieselbe ist, wie im trigonalen Systeme um den Flächenort *c*. Demgemäss ist jede der dort zusammentreffenden Zonen zugleich eine Medianzone.

Fig. 40.

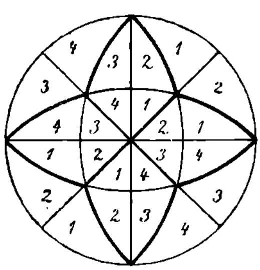
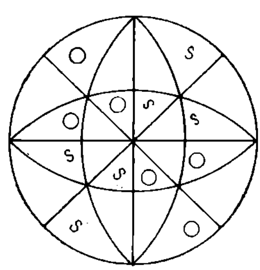


Fig. 41.



Bei Anwendung des Principes I werden zwölf gleichliegende Flächenorte, z. B. jene in den mit 1 bezeichneten Feldern liegende, ausgewählt und werden die entsprechenden Flächen als vorhanden angenommen. Dies führt zu dem polaren Schema in Fig. 41, und die vorige Figur lässt erkennen, dass auch hier wiederum vier Formen von gleichen Winkeln abgeleitet werden können, von denen je zwei enantiomorph sind.

Wird gemäss dem Principe II verfahren und angenommen, dass die vorher genannten zwölf Flächen von ihren Gegenflächen begleitet sind, so werden in der Projection dieselben Punkte wiederum erhalten, jedoch bedeuten sie jetzt die Flächen der Vorder- und der Rückseite zugleich. In jedem Zwölftheil erscheinen jetzt die Flächen 1 und 4 vorhanden und dies giebt das diëdrische Schema in Fig. 42, das drei Symmetrieebenen erkennen lässt. Die Annahme, dass die Felder 2 und 3 mit gleichen Flächen besetzt sind, führt auf eine Gestalt, welche von der zuvor angedeuteten blos durch die Stellung verschieden ist.

Soll nach dem Principe III verfahren werden, so ist zu berücksichtigen, dass die Zonenaxen, welche den Medianzonen entsprechen, in den Mittelpunkten der Zwölftheile austreten. Um jede solche Axe sind die Felder 1

Fig. 42.

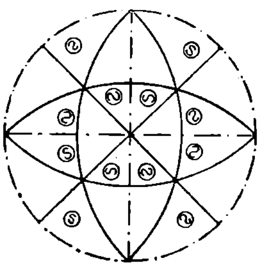
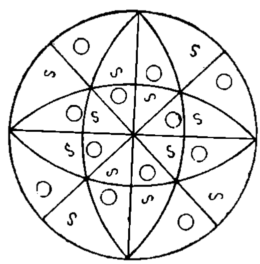


Fig. 43.



und 3 hemitrop angeordnet. Die Annahme, dass in diesen gleiche Flächenorte liegen, führt auf das hemitrope Schema in Fig. 43. Wird hingegen angenommen, dass die gleichfalls hemitrop liegenden Felder 2 und 4 ebenso besetzt seien, so leitet dies auf eine zweite, mit der vorigen enantiomorphe Gestalt.

Fig. 44.

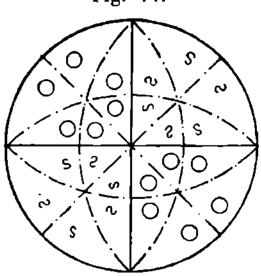
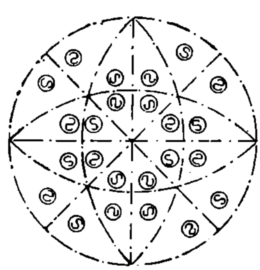


Fig. 45.



Das Princip IV wird in der Weise befolgt, dass die zu beiden Seiten der Medianzone liegenden Felder 1 und 2 mit correlat gleichen Flächen besetzt gedacht werden, wie dies in dem sympolaren Schema Fig. 44 angedeutet ist, welches sechs Symmetrieebenen aufweist und im Zusammenhalte mit der Fig. 40 erkennen lässt, dass immer auch eine der vorigen gleiche, nur durch die Stellung verschiedene Form ableitbar ist.

Dem Principe V endlich entspricht das holoëdrische Schema in Fig. 45

mit neun Symmetrieebenen, worin mit den vorher bezeichneten Flächen auch deren Gegenflächen verbunden dargestellt sind.

Tesserale Klassen.

Tesseral I, polar.

28. Klasse (tetraëdrisch-pentagondodekaëdr. Kl. Gr., tesseral-tetartoëdr. Kl.).

Tesseral II, diëdrisch.

29. Klasse (dyakisdodekaëdrische Kl. Gr., pentagonal-hemiëdrische Kl.).

Tesseral III, hemitrop.

30. Klasse (pentagon-ikositetraëdrische Kl. Gr., plagiëdrisch- oder gyroëdr.-hemiëdrische Kl.).

Tesseral IV, sympolar.

31. Klasse (hexakistetraëdrische Kl. Gr., tetraëdrisch-hemiëdrische Kl.).

Tesseral V, holoëdrisch.

32. Klasse (hexakisoktaëdrische Kl. Gr., holoëdrische Kl.).

Zwillingsgesetze.

Die allgemeinen Gesetze, nach welchen die Zwillingskrystalle gebaut sind, ergeben sich aus einer bestimmten Auffassung des Wesens der Zwillingsbildung. Der Zwillingskrystall ist nicht eine Vereinigung zweier Krystalle, und die gewöhnliche Angabe, dass derselbe eine regelmässige Verwachsung je zweier (oder mehrerer) gleicher Krystalle in unparalleler Stellung sei, ist wohl eine allgemeine Beschreibung der äusseren Form, doch entspricht der Ausdruck: Verwachsung zweier Krystalle, nicht genau dem Wesen dieser Formbildung. Die mikroskopische Beobachtung zeigt, dass der Zwillingskrystall ebenso mit einem Schlage in dem flüssigen Medium entsteht, wie der einfache Krystall, und die Bildung der Druckzwillinge zeigt, dass aus dem einfachen Krystalle mit einem Schlage ein Product entsteht, in dem zwei oder mehrere bestimmte Gleichgewichtslagen unterschieden werden. Der Zwillingskrystall ist demnach einheitlich gebildet, er ist ein Doppelkrystall, an dem gleichzeitig zwei Gleichgewichtslagen dargestellt erscheinen. Bei seiner Entstehung tritt kein neues Moment der Formbildung hinzu, vielmehr wirken dieselben allgemeinen Gestaltungsgesetze, wie bei der Bildung des einfachen Krystalles. Die Stellung der Theile eines Zwillingskrystalles leitet sich demnach aus denselben geometrischen Grundsätzen ab, wie die Form des einfachen Krystalles. Demnach besteht keine Nöthigung, zur Erklärung der Zwillingsbildung, wie ich dies vor längerer Zeit versuchte [1]), die Molekularhypothese herbeizuziehen, und wie Groth versuchte [2]), die Reticulardichte ins Treffen zu führen, vielmehr folgen die Gesetze der Zwillingsbildung aus demselben Gedanken, der den Symmetriegesetzen zur Grundlage dient.

---

1) Mineralogische und petrogr. Mittheilungen 1880, 2, 499. Lehrbuch der Mineralogie V. Aufl., 1897, S. 94.

2) Physikalische Krystallographie 3. Aufl., 1895, S. 336.

Der Zwillingskrystall bietet die Wiederholung eines Flächencomplexes dar, geradeso wie der einfache Krystall, an dem irgend ein Grad der Symmetrie beobachtet wird. Der Unterschied besteht aber darin, dass an dem einfachen Krystalle die Wiederholung dem Zonengesetze gemäss an bestimmte Bedingungen geknüpft ist, während bei dem Zwillingskrystalle diese Bedingungen wegfallen. Dem Zwillingskrystalle ist weder die geschlossene Form ohne einspringende Winkel vorgeschrieben, noch die Bedingung, dass die Gesammtform, wie sich dieselbe in einer Projection des Zwillings darstellt, dem Zonengesetze gehorchen müsse. Nur die Grundsätze der Wiederholung, welche vorher als Principien der Formbildung bezeichnet wurden, sind für die Zwillingsbildung maassgebend.

Die Entwickelung der Zwillingsgesetze vereinfacht sich dadurch, dass zuerst nur jene drei Principien, die sich auf die einfachste Wiederholung beziehen, bei denen also nur je zwei gleiche Flächen des einfachen Krystalles in Betracht kommen, zur Anwendung gelangen, da sich alles Weitere als Wiederholung des Vorigen darstellt. Demnach sind wesentlich drei Arten der Zwillingsbildung zu unterscheiden: nach Princip II diëdrische, nach III hemitrope, nach IV sympolare Bildungen.

Diëdrische Zwillingsbildungen. Nach dem Principe II wiederholt sich am selben Krystalle eine polare Flächengruppe derart, dass zu jeder Fläche die damit parallele hinzukommt. Der entsprechende Zwillingskrystall ist also derjenige, an dem zwei triklin-polare Theile unterscheidbar sind, in solcher Lage, dass den Flächen des einen Theiles die Flächen des anderen parallel sind. Hier ist durch das Zonengesetz für den einfachen Krystall keine Bedingung gestellt, welche bei dem Zwilling wegzufallen hätte, daher bleiben den beiden Theilen dieselben Zonen gemein. Das hier gewonnene Zwillingsgesetze der bipolaren Wiederholung befolgen alle diëdrischen Zwillingsbildungen der polaren und der sympolaren Abtheilungen der Krystallsysteme. Beispiele sind Kieselzinkerz, Struvit, Rotgiltigerz, wohl auch Nephelin (nach Baumhauer).

Hemitrope Zwillingsbildungen. Dem Principe III zu Folge wiederholt sich ein Flächencomplex in Bezug auf eine bestimmte Axe im Azimuth von 180°. Dem entspricht der Zwilling, an dem zwei triklin-polare Theile unterschieden werden, die eine hemitrope Lage zu einer bestimmten Axe einehmen. Derselbe Grundsatz wird von allen hemitropen Zwillingskrystallen der übrigen Krystallsysteme befolgt.

Die beiden Gleichgewichtslagen ergeben sich aus der Projection eines hemitropen Krystalles, Fig. 46 (S. 458). Da jedoch die zu entwickelnden Gesetze von dem allgemeinsten Falle ausgehen müssen, ist zum Vergleiche die Projection eines triklinen Krystalles in Fig. 47 daneben gestellt. Die Stellung eines Krystalles ist durch Angabe dreier Flächen genügend bezeichnet, daher jede der beiden Gleichgewichtslagen oder Stellungen am Zwilling durch je einen solchen Flächencomplex chrakterisirt ist.

Die hier gestellte Aufgabe läuft darauf hinaus, zu bestimmen, wie viele von einander verschiedene Stellungen die durch das Neun-Zonensystem angegebenen sphärischen Dreiecke zu der Axe der Hemitropie einnehmen.

Diese Dreiecke wiederholen sich, daher ist blos die Hälfte der in Fig. 46 erkennbaren in Betracht zu nehmen. Letztere sind die möglichen zehn Combinationen der Flächenorte *p*, *q*, *a*, *b*, *c*, wonach sich mit Rücksicht darauf, dass *b*, welches der Axe der Hemitropie näher liegt als *a* und *c*, eine andere Rolle spielt als diese, vier Fälle ableiten:

A) Zwei Flächen erster Art mit *b*
bpq.

B) Zwei Flächen erster Art mit *a*
apq.

C) Zwei Flächen zweiter Art mit einer Fläche erster Art, ohne *b*.
acp, *acq*.

D) Zwei Flächen zweiter Art mit einer Fläche erster Art, mit *b*.
abp, *abq*, *bcp*, *bcq*.

Ausserdem ist noch die Combination der drei Flächen zweiter Art: *abc* anzuführen, doch ergiebt diese entweder dasselbe wie der Fall A, oder als Zusammenfassung der schon aufgezählten Dreiecke *acp*, *bcp*, *abp* dasselbe wie C oder D. Die Combination *cpq* ist kein Dreieck.

Fig. 46.

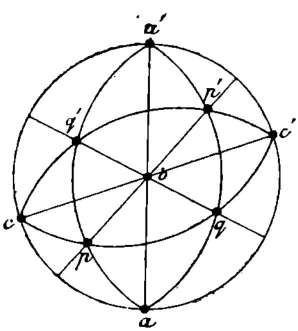
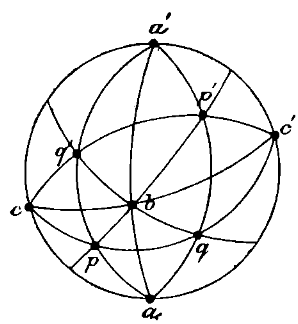


Fig. 47.



Nunmehr können mittelst der Projection in Fig. 46 die Gesetze der Hemitropie für jeden dieser Complexe namhaft gemacht, ferner durch Hinweis auf die allgemeine Projection in Fig. 47 die entsprechenden Zwillingsgesetze formulirt werden. Hier fallen aber die aus dem Zonengesetze folgenden Bedingungen, die für den einfachen Krystall gelten, weg, auch die Unterscheidung von Flächen erster und zweiter Art, die zur Aufsuchung der verschiedenartigen Dreiecke diente, hat hier keine Bedeutung mehr, da eine solche Unterscheidung nicht von Natur aus gegeben ist.

A) An dem einfachen hemitropen Krystalle wiederholt sich der Complex pqb um die Normale von b in der Lage $p'q'b'$ unter Gemeinsamkeit zweier Zonen und der Fläche b. Bedingung: Die Normale von b ist zugleich Axe einer möglichen Zone ac.

An dem Zwillingskrystalle, dessen Projection in Fig. 48 gegeben ist, wiederholt sich pqb um die Normale von b unter Gemeinsamkeit zweier Zonen und der Fläche b. Die obige Bedingung fällt weg. Die Stellung des Krystalles ist so gewählt, dass der Punkt, in dem die Axe der Hemitropie die Sphäre der Projection trifft, in den Mittelpunkt des Grundkreises fällt. Das Gleiche ist in den folgenden Bildern beobachtet.

Das hier entwickelte Gesetz ist das am häufigsten verwirklichte

Flächennormalengesetz: Die Axe der Hemitropie (Zwillingsaxe) ist eine Flächennormale.

Die bezügliche Fläche ist wohl häufig eine Fläche zweiter Art (Endfläche), aber nach dem zuvor Gesagten können auch andere Flächen die Axe der Hemitropie liefern.

B) An dem einfachen hemitropen Krystalle wiederholt sich der Complex apq in der Stellung $a'p'q'$ unter Gemeinsamkeit der Normale aa' und der Zonen ap und aq, wobei die Axe der Hemitropie von diesen beiden Zonenkreisen gleich weit absteht. Bedingung: Die Axe der Hemitropie ist eine Flächennormale und zugleich Axe einer möglichen Zone ac.

Fig. 48.

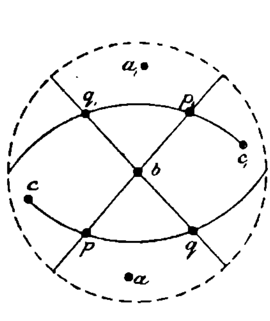
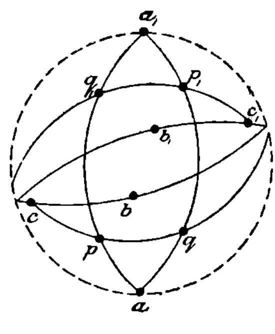


Fig. 49.



An dem Zwillingskrystalle Fig. 49 wiederholt sich der Complex apq in der Stellung $a_1 p_1 q_1$ unter gemeinsamem Verlaufe der Zonen ap und aq und Gemeinsamkeit der Normale aa', wobei die Axe der Hemitropie gegen die beiden genannten Zonenkreise gleich geneigt ist. Die vorige Bedingung fällt weg. Die beiden Zonen ap und aq entsprechen Kanten, die in der Fläche a liegen, der die Axe der Hemitropie parallel ist.

Das hier abgeleitete Gesetz ist das zuerst von Brögger am Hydrargillit aufgefundene

Mediangesetz: »Die Zwillingsaxe liegt in einer Fläche gegen zwei in derselben liegende Kanten gleich geneigt.«

Die Zonen ap und aq sind an dem einfachen triklinen Krystalle von einander verschieden. An dem Zwillingskrystalle setzt sich ap in einer davon verschiedenen Zone $a_1 q_1$ fort, ebenso die Zone aq in der davon verschiedenen $a_1 p_1$. Ueberhaupt sind es zwei verschiedene Zonen, die am Zwillingskrystalle gemeinsam verlaufen, am Hydrargillit sind es die Zonen ap und ac. An den Feldspäthen ist dieses Gesetz bisher wohl nur übersehen worden.

C) An dem einfachen hemitropen Krystalle wiederholt sich der Complex acp in der Lage $a'c'p'$ mit Gemeinsamkeit der Zone ac. Bedingung: Die Axe der Zone ac ist zugleich Normale einer möglichen Fläche.

An dem Zwillingskrystalle Fig. 50 wiederholt sich der Complex acp hemitrop um die Axe der Zone ac dieses Complexes. Die obige Bedingung fällt weg.

Fig. 50.

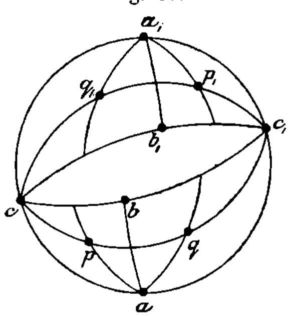
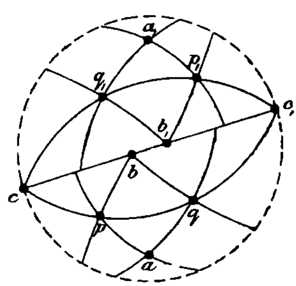


Fig. 51.



Dem entspricht das zuerst von G. vom Rath erkannte Periklingesetz, hier allgemein bezeichnet als

Zonenaxengesetz: »Zwillingsaxe eine Zonenaxe.«

Beispiele liefern die Plagioklase, der Cyanit.

D) An dem einfachen hemitropen Krystalle wiederholt sich der Complex bcp in der Lage $bc'p'$. Dies führt auf zwei Lösungen: entweder Gemeinsamkeit der Zonen bp und bc sowie der Fläche b, deren Normale zugleich Axe der Hemitropie, was mit dem Flächennormalengesetz übereinstimmt, oder: Gemeinsamkeit einer der beiden Zonen bc oder bp und Hemitropie um eine Axe, die in dieser Zonenebene senkrecht zu der Normalen von c liegt. Bedingung: Die Axe der Hemitropie ist zugleich Normale einer Fläche. Dies liefert einen neuen Fall.

An dem Zwillingskrystalle Fig. 51 wiederholt sich der Complex bcp in der Stellung $b_1 c_1 p_1$, wobei die Zone bc gemeinsam, ebenso die Normale

cc_1 und die Axe der Hemitropie in der Zonenebene bc senkrecht zur Normalen von c liegt. Demnach ist diese Axe parallel zur Fläche c und senkrecht zu der Kante, die der Zone bc entspricht. Die genannte Bedingung fällt weg.

Dies führt auf jenes Zwillingsgesetz, das G. vom Rath an dem Labradorit vom Hafnefjord entdeckte:

Kantennormalengesetz: Zwillingsaxe in einer Fläche senkrecht zu einer in dieser liegenden Kante.

Beispiele liefern die Plagioklase, Glimmer, Chlorite, der Cyanit.

Die vier Gesetze der hemitropen Zwillingsbildung entsprechen demnach den vier Definitionen der Lage, welche die Axe der Hemitropie gegenüber dem Neun-Zonensysteme einnimmt, wie dieses aus Fig. 46 zu entnehmen ist:

Die Axe der Hemitropie liegt im Durchschnitte von Zonen (Flächennormalengesetz);

sie liegt in je einer Zonenebene senkrecht zu einer Flächennormale (Kantennormalengesetz);

sie liegt median gegen zwei Zonenebenen (Mediangesetz);

sie ist zugleich Axe einer Zone (Zonenaxengesetz).

Andere als diese vier Gesetze der Hemitropie halte ich für ausgeschlossen, und möchte auch die ferneren von Baumhauer für möglich gehaltenen Zwillingsgesetze[1]) nicht als solche betrachten.

Sympolare Zwillingskrystalle. Nach dem Principe IV wiederholt sich ein polarer Flächencomplex in der correlaten Gruppirung symmetrisch zu einer Zonenebene. Dem entspricht ein Zwillingskrystall, dessen Theile triklin-polare Gestalt bei spiegelbildlich gleicher Form darbieten und zu einer Zonenebene symmetrisch liegen. Dasselbe Gesetz befolgen alle Zwillingskrystalle der übrigen Systeme, deren Theile zwei zu einer Zonenebene symmetrische Stellungen einnehmen, in erster Linie die aus enantiomorphen Theilen bestehenden, wie die Quarzzwillinge nach dem sogenannten Brasilianischen Gesetze, die Zinnoberzwillinge. Aber auch die anderen, die zwei correlate Stellungen aufweisen, wie die Doppeltetraëder am Diamant, Fahlerz, die Doppelpentagondadekaëder am Pyrit, überhaupt alle als Ergänzungszwillinge bezeichneten, die nicht zu den diëdrischen Zwillingen gehören. Alle diese Bildungen, deren Theile nicht enantiomorphe Gestaltung besitzen, können auch als hemitrope Zwillinge betrachtet werden.

Viellinge. Dem Principe V entspricht ein Vierling, an dem die vier gleichen Theile triklin-polare Formbildung zeigen, wobei je zwei correlat

1) Diese Zeitschr. 1899, **31**, 252.

sind. Der Form nach würde ein solcher Vierling mit einem Zwillinge übereinstimmen, an dem triklin-diëdrische Theile in hemitroper Stellung erscheinen. Ein Beispiel dafür bieten die von G. Rose beobachteten Albitzwillinge vom Roc tourné. Aus dem Principe VI, VII und aus allen Symmetrieklassen können Viellinge abgeleitet werden. Solche sind nicht selten, und sie werden gewöhnlich als hemitrope Zwillinge nach mehreren Gesetzen aufgefasst. Hierher gehören die mimetischen Bildungen, die schon Mallard in ähnlicher Weise zu erklären versuchte, und ein schönes Beispiel sind die beim Phillipsit vorkommenden Bildungen, die wie ein Rhombendodekaëder aussehen und 24 Stellungen repräsentiren.

Verschieden von derlei Viellingen, die einem Symmetriegesetze entsprechen, sind jene, die Repetitionen hemitroper Zwillingsbildung darstellen und nach meinem Vorschlage als Wiederholungszwillinge bezeichnet werden.