Überreicht vom Verfasser

Sonderdruck aus **„Gerlands Beiträge zur Geophysik"**, Bd. 42, Heft 4, 1934
Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. in Leipzig

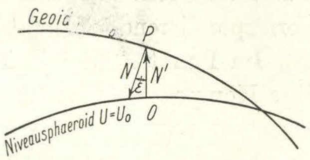
Eine Richtigstellung betreffend Gebrauch des Terms von Bruns.

Von
Robert Schwinner, Graz.

(Mit 1 Figur.)

Bekanntlich bestehen über Sinn und Vorzeichen der Geoidundulationen zwei Anschauungsweisen, welche in fast allen Punkten der Erde einander kontradiktorisch widersprechende Aussagen geben. Wenn nur hier und da, das könnte auf die verschiedene Berechnungsweise zurückgeführt werden; in solcher Allgemeinheit kann das aber unmöglich zu Recht nebeneinander bestehen. Vielleicht ist hier eine Berichtigung nützlich, welche mir bei Studium des grundlegenden Werkes von Hopfner[1]) aufgestoßen ist.

Die nebenstehende Figur (Fig. 2, S. 317 bei Hopfner) zeigt einen Normalschnitt durch das Geoid — es sei als solches die Niveaufläche im Meeresspiegel angesehen — und das Niveausphäroid gleichen Arbeitswertes. Im Punkt P errichte man eine Normale aufs Geoid (N) und fälle von P eine Normale aufs Niveausphäroid (N'), und zwar sollen die Normalabstände (N, N') positiv gezählt werden, wenn sie im Außenraum der respektiven Fläche liegen, auf der sie normal sind. Das Geoid sei charakterisiert durch $W = U_0$, und die Kräftefunktion W bestehe aus einem normalen Teil U, der nur Funktion der Erdmasse und der Hauptträgheitsmomente ist, und der Restfunktion T, die von den Massenunregelmäßigkeiten bestimmt wird, das zugehörige Niveausphäroid gleichen Arbeitswertes ist dann definiert durch $U = U_0$. Aus der Gleichung



$$(1) \qquad W = U + T = U_0$$

folgt, wenn die aufs Niveausphäroid $U = U_0$ bezüglichen Werte in eckige Klammern gesetzt werden:

$$(2) \qquad [U] + \left[\frac{\partial U}{\partial n}\right] \cdot N' + T = U_0 \,.$$

[1]) Fr. Hopfner, Neue Wege zur Bestimmung der Erdfigur. Gerl. Beitr. Geophys., Suppl.-Bd. I: Ergebnisse der kosmischen Physik 1 (1931) 291—372. Leipzig.

Es ist nun (nach unserer Definition des Niveausphäroides) $[U] = U_0$ und γ, die theoretische Schwerebeschleunigung im Punkte 0 des Niveausphäroides, ist gegeben durch

$$\gamma = -\left[\frac{\partial U}{\partial n}\right], \tag{3}$$

dann folgt aus Gleichung (2) weiter:

$$N' = \frac{T}{\gamma}. \tag{4}$$

Die Figur zeigt:

$$N' = -N \cdot \cos\varepsilon. \tag{5}$$

Das Zeichen muß derart gewählt werden, daß N und N', wie es im Zwischenraum zwischen beiden Flächen sein muß, verschiedenes Vorzeichen bekommen. Der Winkel ε ist klein, es kann mit geringer Vernachlässigung gesetzt werden $\cos\varepsilon = 1$, und dann folgt aus Gleichung (4) und (5)

$$N = -N' \quad \text{und daher} \quad N = -\frac{T}{\gamma}. \tag{6}$$

Damit ist Größe und Sinn des Abstandes beider Flächen in den einander korrespondierenden Punkten P und 0 vollkommen bestimmt.

Im Punkt P des Geoides mißt man die Schwerebeschleunigung g, ihre Komponenten sind:

$$-\frac{\partial W}{\partial x}, \quad -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad -\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Im korrespondierenden Punkte 0 des Niveausphäroides wäre die theoretische Schwerebeschleunigung γ, ihre Komponenten:

$$-\frac{\partial U}{\partial x}, \quad -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Dann ist der Winkel zwischen beiden Vektoren (ε in der Figur) gegeben durch

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{g\,\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial W}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Setzen wir wieder (mit geringer Vernachlässigung) $\cos\varepsilon = 1$, und berücksichtigen, daß $W = U + T$ ist, so wird die „wahre Schwerkraftanomalie“

$$\Delta g_w = g - \gamma = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{8}$$

Bei der gewöhnlichen Art zu reduzieren nimmt man nun stillschweigend an, daß der Punkt P im Meeresniveau identisch wäre mit einem Punkte des Niveausphäroides. Das stimmt nun im allgemeinen nicht. Daher vergleicht die gebräuchliche Rechnungsweise die gemessene Schwere g nicht mit der wahren Normalschwere γ, sondern mit jener γ', die für

einen Punkt gilt, der um N' vom Niveausphäroid entfernt ist, und man erhält derart nur die „scheinbare Schwerkraftanomalie“:

$$\Delta g_s = g - \gamma'. \tag{9}$$

Das Verhältnis von Δg_w und Δg_s kann man leicht ermitteln: es ist

$$\gamma' = \gamma + N'\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial n}. \tag{10}$$

(Hopfner schreibt S. 328 dagegen $\gamma' = \gamma + N\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial n}$. Das ist unrichtig; denn γ bezieht sich auf das Niveausphäroid, und daher muß der Abstand von diesem in Rechnung gestellt werden, und der ist N' bezeichnet.) Also

$$\Delta g_s = g - \gamma - N'\frac{\partial\gamma}{\partial n} = \Delta g_w - N'\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial n} = \Delta g_w + N\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial n}, \tag{11}$$

wenn wir schließlich aus Gleichung (6) N für N' substituieren. Dagegen schreibt Hopfner S. 328:

$$g - \gamma' = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial T}{d z}\right) - N\frac{\partial\gamma}{\partial n}$$

und auf S. 332, als Ausgangspunkt weiterer Deduktionen:

$$g - \gamma' = g - \gamma - N\frac{\partial\gamma}{\partial n}.$$

Wegen der Verwechslung von N mit N' hat also bei Hopfner der letzte Term rechts, der Brunssche Term, ein unrichtiges Vorzeichen bekommen.

Die Schwere nimmt nach außen ab, es ist immer $\frac{\partial\gamma}{\partial n} < \varnothing$, und daher muß bei Hebung des Geoides übers Niveausphäroid, d. i. $N < \varnothing$, die nach der gebräuchlichen Methode berechnete Schwereanomalie (algebraisch) größer ausfallen als die „wahre“, oder, bei sonst ungestörtem Feld ($\Delta g_w = \varnothing$) positiv. Das ist auch das Ergebnis einer leicht durchführbaren „synthetischen“ (wie es Helmert genannt hat) Proberechnung. Nimmt man zu einer ganz ungestörten Erdkugel eine einzige positive Störungsmasse nahe der Oberfläche dazu, so hebt sich gerade über ihr die Niveaufläche übers Niveausphäroid empor, und gerade dort ist die Schwere größer als sonst irgendwo auf der Kugel, also die Schwereanomalie positiv: ein Verhältnis, auf das ja auch andere Erwägungen hinführen[1]).

Vielleicht kann durch Berücksichtigung des aufgezeigten Vorzeichenfehlers der Widerstreit, der bisher in den Angaben über den Sinn der Geoidundulationen bestand, aufgeklärt werden.

[1]) R. Schwinner, Außenraum und Innenraum (Schlichtung des Streites um die Schwerkraftreduktion). Z. Geophys. X, 1934. 240.

Printed in Germany.