

**XIII. Ueber die Berechnung des variablen Werthes
der Lichtbrechung in beliebig orientirten Schnitten
optisch einaxiger Mineralien von bekannter Licht- und
Doppelbrechung.**

Von

W. Salomon in Pavia.

(Mit 4 Textfiguren.)

Bei der Bestimmung saurer Plagioklase nach Becke's Vorschlag¹⁾ fielen mir zwei kleine Uebelstände auf, von denen der eine die Genauigkeit, der andere die bequeme und schnelle Anwendung der Methode beeinträchtigt. Der erstere besteht darin, dass man, weil die Lage der zur Vergleichung benutzten Quarschnitte nicht bekannt ist, auch nicht den jeweiligen wahren Werth des variablen Brechungsquotienten (ϵ') kennt. Nun giebt zwar Becke ausdrücklich an, dass man sich »nur stark doppeltbrechender, annähernd der Axe paralleler« Schnitte bedienen soll, zu deren Erkennung man gewöhnlich die Interferenzfarben benützt. Da aber deren Lebhaftigkeit ja nicht blos von der Stärke der Doppelbrechung, sondern auch von der Dicke des Schliffes abhängt, und da andererseits, wie ich gleich zeigen werde, eine hinreichend genaue Bestimmung der Schnittlage und somit des Werthes von ϵ' meist leicht auszuführen ist, so kann man die

4) Ueber die Bestimmbarkeit der Gesteinsgemengtheile, besonders der Plagioklase auf Grund ihres Lichtbrechungsvermögens. Sitz.-Ber. Akad. Wien. 1893, S. 358—376; Ref. in dieser Zeitschr. 25, 606. — Petrographische Studien am Tonalit der Rieserferner. Tschermak's Mittheilungen 13, besonders S. 385—388. Vergl. auch C. Viola, Ueber eine neue Methode zur Bestimmung des Brechungsvermögens der Mineralien in den Dünnschliffen. Ebenda 14, S. 554—562 und A. Michel-Lévy, Étude sur la détermination des feldspaths dans les plaques minces. Paris 1894, p. 58—63.

von Becke hervorgehobene Einschränkung ausser Acht lassen, ohne die Genauigkeit der Bestimmung zu vermindern.

Der zweite Uebelstand besteht darin, dass man in Gesteinen, die wenig Quarz und Plagioklas enthalten, oft nur sehr wenige oder gar keine Fälle hat, in denen aneinander stossende Individuen der beiden Mineralien gleichzeitig auslöschen. Auch im günstigsten Falle aber verliert man viel Zeit mit dem Suchen geeigneter Schnitte. Deshalb soll im Folgenden gezeigt werden, wie sich auch dieser Nachtheil ganz leicht beseitigen lässt.

Untersuchen wir einen beliebig, aber nicht horizontal geführten planparallelen Schnitt eines optisch einaxigen positiven Mineralies im Orthoskop über dem Polarisator und betrachten wir ihn vorläufig nur in den beiden Stellungen, in welchen die Projection der krystallographischen Verticalaxe zur Schwingungsrichtung des Polarisators normal und parallel verläuft. Im ersteren Falle beobachten wir als Brechungsexponenten ω , im letzteren einen von der Lage des Schnittes gegen die optische Axe abhängigen, zwischen ω und ε als Grenzwertthen schwankenden Werth ε' . Kennen wir den Winkel α , den der Schnitt mit der optischen Axe bildet, so ist uns auch ε' gegeben und zwar als Halbmesser einer Ellipse, deren grosse und kleine Axe gleich 2ε , bez. 2ω sind. α ist dann der Winkel, welchen der Halbmesser mit der grossen Axe der Ellipse bildet und

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon \cdot \omega}{\sqrt{\varepsilon^2 \cdot \cos^2(90^\circ - \alpha) + \omega^2 \cdot \sin^2(90^\circ - \alpha)}}.$$

In diesem Ausdrücke ersetzen wir $\sin(90^\circ - \alpha)$, bez. $\cos(90^\circ - \alpha)$ durch $\cos \alpha$, bez. $\sin \alpha$ und erhalten so

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon \cdot \omega}{\sqrt{\varepsilon^2 \cdot \sin^2 \alpha + \omega^2 \cdot \cos^2 \alpha}}.$$

Es handelt sich also jetzt nur noch um die Bestimmung von α . Wir bedienen uns zu diesem Zwecke der Interferenzbilder, welche einaxige Krystalle im convergenten Lichte zwischen gekreuzten Nicols geben, und müssen dabei vier praktisch verschiedene Fälle unterscheiden.

1) Das Centrum des tetrasymmetrischen Interferenzbildes der basalen Schnitte befindet sich im Gesichtsfelde.

2) Es liegt ausserhalb des Gesichtsfeldes, die schwarzen Balken aber sind noch scharf und gerade genug, um eine Messung ihrer Entfernung vom Centrum des Gesichtsfeldes mit hinreichender Genauigkeit zu gestatten.

3) Wie im zweiten Falle, nur dass die schwarzen Balken keine genaue Messung mehr gestatten.

4) Man nimmt bereits das für Verticalschnitte einaxiger Krystalle charakteristische disymmetrische Interferenzbild wahr.

Im ersten Falle ist die scheinbare horizontale Entfernung des Bild-

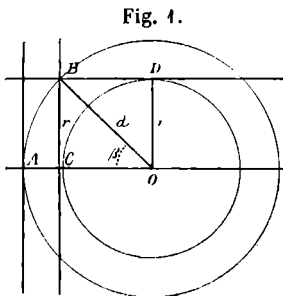
centrums vom Centrum des Gesichtsfeldes direct messbar und zwar in mit Bertrand'scher Linse versehenen Mikroskopen mit Hülfe des gewöhnlichen Mikrometer-Oculares oder besser noch des Schraubenmikrometer-Oculares. Fehlt die Bertrand'sche Linse, so wird man am zweckmässigsten Czapski'sches Ocular und Klein'sche Lupe¹⁾ anwenden. Doch kann man sich auch des von Lenk²⁾ vorgeschlagenen Verfahrens bedienen. Die Anwendung des für andere Zwecke sehr praktischen Klein'schen Unversaldreapparates für Dünnschliffe³⁾ ist möglich, aber in unserem speciellen Falle kaum anzurathen, da man sonst das Deckglas entfernen müsste. Die Umwandlung der scheinbaren horizontalen Entfernung in den wahren Winkel α geschieht nun in hergebrachter Weise nach der Mallard'schen Formel und unter Berücksichtigung des ω des untersuchten Mineralen, ganz analog, wie dies auch Becke in seinen ausgezeichneten Studien über die »Klein'sche Lupe mit Mikrometer« und über die »Bestimmung kalkreicher Plagioklase durch die Interferenzbilder von Zwillingen«⁴⁾ demonstrirt hat. Der Sinus des scheinbaren Winkels s ist gleich dem Product aus der gemessenen Horizontalabstand d und einer für das angewandte Instrument empirisch bestimmten Constanten C :

$$\sin s = C \cdot d.$$

Will man den Sinus des wahren Winkels α erhalten, so dividirt man den Sinus des scheinbaren Winkels durch das ω des untersuchten Mineralen. Es ist dann

$$\sin \alpha = \frac{\sin s}{\omega}.$$

Hat man also ein für alle Male C durch Messung mehrerer Winkel an einem Axenwinkelmeßapparate und Vergleichung mit den entsprechenden Horizontalabständen im Mikroskope bestimmt, so kann man den gesuchten Werth α direct berechnen.



Im zweiten Falle, wenn das Centrum des Interferenzbildes schon ausserhalb des Gesichtsfeldes liegt, kann man seine Centraldistanz auf folgende Weise bestimmen (vergl. die nebenstehende Fig. 4).

Nachdem der Objecttisch des Mikroskopes sorgfältig centrirt ist, dreht man ihn, bis einer

1) Vergl. F. Becke, Tschermak's Mittheilungen **14**, 375—378.

2) Messung des Winkels der optischen Axen im Mikroskope. Diese Zeitschr. 1895, 379—380.

3) Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Berlin 1895, 1151—1159.

4) Tschermak's Mitth. **14**, 375—378 und 445—442.

der schwarzen Kreuzbalken genau durch den Mittelpunkt O des Gesichtsfeldes (vom Radius OD) verläuft und liest am Nonius des Objecttisches die Stellung ab. Dreht man nun weiter, bis derselbe Balken gerade durch D verläuft, so hat sich offenbar die Spur A der optischen Axe auf einem um O mit dem Radius OA beschriebenen Kreise bis nach B bewegt. Denken wir uns nun das Loth BC von B auf AO gefällt, so kennen wir im Dreieck OBC den Winkel β , um den wir den Objecttisch gedreht haben, und r , den Halbmesser des Gesichtsfeldes, den wir auf eine der Weisen, welche schon bei der Beschreibung des ersten Falles angeführt wurden, ein für alle Male messend bestimmen mögen. Da ferner $\sphericalangle BCO$ ein Rechter ist, so ergiebt sich $OB = d = \frac{r}{\sin \beta}$. Die Umformung dieses Werthes in den wahren Winkel geschieht, wie oben dargestellt.

Im dritten Falle ist eine annähernd genaue Bestimmung des Winkels α nicht möglich, und es wird stets von dem Tact des Beobachters abhängen müssen, ob er die eben beschriebene Methode noch zu einer natürlich wesentlich ungenaueren Messung benutzen will oder ganz darauf verzichtet.

Im vierten Falle endlich wird man sich zwar durch Messung oder Schätzung leicht davon überzeugen können, ob man sehr wenig von ϵ abweichende Werthe hat oder nicht, auf eine genaue Bestimmung des Winkels α aber wohl besser verzichten, da wenigstens in Dünnschliffen das Interferenzbild meist zu verschwommen ist, als dass eine Messung der Centraldistanz genaue Resultate liefern könnte.

Bei den beschriebenen Verfahren wird man natürlich, um Centrirungsfehler möglichst zu vermindern, jede Messung in verschiedenen Stellungen wiederholen. Die Genauigkeit der Methode im zweiten Falle hängt wesentlich von der Schärfe der Axenbalken ab, die ihrerseits mit der Grösse der Doppelbrechung des untersuchten Mineralen, der Dicke des benutzten Schliffes und der Convergenz der das Bild erzeugenden Strahlen zunimmt. Aus diesem Grunde ist es auch nicht möglich, allgemeingültig anzugeben, bei welcher Grösse des Winkels α die Axenbalken nicht mehr zur Messung benutzt werden können.

Haben wir so gesehen, in welcher Weise wir den jeweiligen Werth von ϵ' in beliebig orientirten Schnitten optisch einaxiger Mineralien von bekannter Licht- und Doppelbrechung finden können, so bleibt uns noch übrig, auf die praktische Bedeutung dieser Berechnung hinzuweisen. Sie besteht, wenn wir von ihrer Anwendung auf die Becke'sche Methode der Bestimmung saurer Plagioklase abschen, wesentlich darin, dass man mit ihrer Hülfe bei gleichzeitiger Untersuchung der Interferenzfarben geeigneter Mineralien von constanter Doppelbrechung die Dicke eines Schliffes sehr genau feststellen kann. Umgekehrt kann sie bei bekannter Dicke eines

Schliffes im Verein mit der Beobachtung der Interferenzfarben zur Diagnose einaxiger Mineralien benutzt werden. Ihre Hauptbedeutung wird sie aber wohl als Verfeinerung der praktisch sehr wichtigen Becke'schen Methode haben. Die Differenz $\varepsilon - \omega$ ist nämlich für Quarz nach Rudberg $1,553\bar{3} - 1,544\bar{2} = 0,0091$. Da nun γ des Oligoklas, β des basischen Oligoklas und des sauren Andesins, α aller Andesinmischungen zwischen den Hauptbrechungsquotienten des Quarzes liegen und da man nach Becke¹⁾ noch Differenzen von nur 0,004 in der Lichtbrechung wahrnimmt und unterscheidet, so ist es ein unleugbarer Vortheil, wenn man die zwischen ω und ε gelegenen Brechungsindices ε' des Quarzes in neun Gruppen zerlegen kann, die sich durch eine Differenz von 0,004 von einander unterscheiden. Auf der anderen Seite erhellt aber, dass Ungenauigkeiten von 5 Graden bei der Bestimmung der Schnittlage gegen die optische Axe meist ganz vernachlässigt werden können und dass somit auch die angegebene Methode zur Bestimmung der Schnittlage in den meisten Fällen hinreichend genau sein wird. Praktisch wird es sich nicht empfehlen, in jedem besonderen Falle die Rechnung für ε' durchzuführen, sondern es ist anzurathen, entweder ein für alle Male die Werthe von ε' für Winkeldifferenzen von je 5^0 zu berechnen, oder ε' als Curve in einem Coordinatensysteme zu zeichnen, dessen Ordinate die Werthe von α und dessen Abscisse die von ε' angiebt.

Zur Beseitigung des zweiten in der Einleitung erwähnten Uebelstandes der Becke'schen Methode dient die folgende Ueberlegung.

Die von Becke angegebene Erkennung des stärker lichtbrechenden von zwei mit verticaler Grenze an einander stossenden Mineralien eines Dünnschliffes beruht darauf, dass bei einer bestimmten Art der Beleuchtung und bei Hoch- (bezw. Nieder-) Stellung des Mikroskoptubus sich wesentlich infolge von Totalreflexion eines Theiles der die Grenzfläche durchsetzenden Strahlen eine helle Linie innerhalb des stärker (bezw. schwächer) lichtbrechenden Mineralies parallel der Grenze herausbildet. Mit wachsender Differenz der Brechungsindices wächst auch die Intensität der hellen Linie. Wir bedienen uns demnach der Intensität dieser Linie zur Beurtheilung der Differenz der Lichtbrechung. Jedes Phänomen, das die Intensität der Lichtlinie schwächt, wird in uns den Eindruck hervorrufen, als ob jene Differenz geringer wäre, bezw. wenn der eine der verglichenen Brechungsquotienten einen constanten Werth besitzt, als ob der andere einen vom Werthe des ersteren weniger abweichenden Werth erhielte. Unter dieser Voraussetzung können wir also die Intensität der Becke'schen Lichtlinie²⁾ geradezu als eine Function des variabeln Brechungsquotienten bezeichnen. Sehen wir nun, wie sich die Verhältnisse in dem speciellen Falle des Contactes zwischen

1) Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien 1893, S. 365.

2) Es möge gestattet sein, diese Linie ihrem Entdecker zu Ehren so zu nennen.

Plagioklas und Quarz gestalten. Ein jeder im Polarisator geradlinig polarisirte Strahl wird, falls der Quarz nicht normal zur optischen Axe geschnitten ist, in zwei Strahlen zerlegt, die in allen nicht der optischen Axe parallelen Schnitten verschiedene Richtung erhalten. Sie sind, genau genommen, elliptisch polarisirt, und zwar so, dass die grossen Axen der Ellipsen senkrecht zu einander stehen und die eine der Projection der optischen Axe, die andere der der Basis entspricht. Da sich indessen schon bei nicht sehr grosser Neigung des Schnittes gegen die Basis die Ellipsen durch Verkleinerung ihrer kleinen Axen nicht mehr sehr von einer geraden Linie unterscheiden und die elliptische Polarisation für unseren praktischen Zweck ohne Bedeutung ist, so wollen wir im Folgenden ganz davon absehen und annehmen, dass die beiden Strahlen geradlinig polarisirt seien. An der oberen Fläche des Quarzes angelangt, treten sie an verschiedenen Stellen aus; es wird aber für jeden von ihnen¹⁾ einen zweiten Strahl geben, und zwar für jeden ordentlichen einen ausserordentlichen und umgekehrt, der an derselben Stelle und mit derselben Fortpflanzungsrichtung, wenn auch mit normaler Schwingungsrichtung austritt. Infolgedessen werden je zwei solche Strahlen in denselben Punkt der Retina gelangen und hier nur einen einzigen Eindruck hervorrufen, obwohl sie in dem Quarz verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit hatten und demnach verschiedenen Brechungsquotienten entsprechen. Nun kann zwar unser Auge diese Thatsache nicht direct wahrnehmen; doch giebt es einige optische Erscheinungen, die in ihrer Intensität von der Grösse des Brechungsquotienten abhängen, wie z. B. das scheinbare Relief eines von anderen Mineralien umgebenen Schnittes in einem Dünnschliffe und gerade auch die schon besprochene Becke'sche Lichtlinie. Nehmen wir an, unser Quarz sei nur von ordentlichen Strahlen durchsetzt, so wird sein Relief offenbar geringer²⁾ sein, als wenn er nur von ausserordentlichen Strahlen durchdrungen würde. Entspricht aber die Schwingungsrichtung des Polarisators nicht einer der Schwingungsrichtungen des Quarzes und werden demnach alle eintretenden Strahlen in je einen ordentlichen und je einen ausserordentlichen Strahl von meist verschiedener Amplitude zerlegt, so wird das Relief offenbar je nach der Lage des Quarzes alle Werthe erhalten können, die zwischen den ω und ε' entsprechenden Werthen liegen. Das Gleiche gilt aber auch von der Intensität der Becke'schen Lichtlinie. Wollen wir uns also dieser auch in dem angeführten Falle zur Vergleichung der Brechungsindices des Quarzes mit denen eines Plagioklases bedienen, so müssen wir für den Quarz den durch »Superponirung«³⁾ zweier Strahlen von verschiedenem

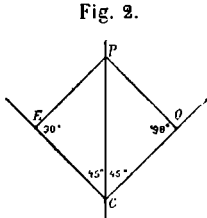
1) Hiervon ist nur eine verschwindend geringe Zahl von Strahlen ausgenommen.

2) Unter der Voraussetzung, dass die Brechungsquotienten der umgebenden Mineralien kleiner als ω sind.

3) Dieser Ausdruck ist natürlich »cum grano salis« zu nehmen, da sich die beiden

Brechungsquotienten entstehenden gewissermassen »scheinbaren Brechungsquotienten« berechnen.

Betrachten wir zunächst den Fall, in dem die beiden Schwingungsrichtungen des Quarzes 45° mit der des Polarisators bilden. (Vgl. die nebenstehende Fig. 2.) Füllen wir von einem beliebigen Punkte P der Schwingungsrichtung PC des Polarisators zwei Lothe PE und PO auf die Schwingungsrichtungen des ausserordentlichen und ordentlichen Strahles, so geben uns CE und CO das Verhältniss der Amplituden und Lichtintensitäten der beiden Strahlen an. Sie sind in unserem speciellen Falle ($\sphericalangle PCE = \sphericalangle PCO = 45^\circ$) einander gleich. Die Intensität der Becke'schen Lichtlinie wird also genau in der



Mitte stehen zwischen der, welche nur von ausserordentlichen, und der, welche nur von ordentlichen Strahlen erzeugt werden würde, während die gesammte Lichtintensität des Quarzes nicht verschieden ist von der im Falle des Parallelismus zwischen einer der Schwingungsrichtungen des Quarzes und der des Polarisators vorhandenen. Die Becke'sche Lichtlinie wird also eine Intensität haben, wie sie einem nur von ausserordentlichen Strahlen vom Brechungsquotienten $\frac{\omega + \varepsilon'}{2}$ durchsetzten

Quarze zukommt. — Um nun den beschriebenen speciellen Fall zu verallgemeinern, geben wir dem Winkel ECP den veränderlichen Werth γ und untersuchen, welche Werthe wir für EC und OC bei verschiedenen Werthen von γ finden. Offenbar ist

$$EC = \cos \gamma \cdot PC \quad \text{und} \quad OC = \cos(90 - \gamma) \cdot PC = \sin \gamma \cdot PC.$$

Das Verhältniss von EC zu OC wird also durch $\cotang \gamma$ ausgedrückt oder

$$\frac{EC}{OC} = \cotang \gamma.$$

Mit anderen Worten, $\cotang \gamma$ giebt uns an, wie viele Male grösser oder kleiner die Intensität der ausserordentlichen als die der ordentlichen Strahlen ist. Daher wird für jeden von 45° verschiedenen Werth von γ der scheinbare Brechungsexponent des Quarzes n_q nicht mehr das arithmetische Mittel zwischen ω und ε' sein. Wollen wir ihn finden, so können wir uns jedes von der Höhe des Brechungsquotienten abhängige Phänomen hervor gebracht denken von einem ordentlichen Strahl mit dem Brechungsquotienten ω und von einer durch $\cotang \gamma$ ausgedrückten Zahl ausserordentlicher

Strahlen in der Luft entweder zu einem geradlinig oder zu einem circular, meist aber zu einem elliptisch polarisirten Strahle vereinigen werden. Das ändert aber an der oben gemachten Folgerung nichts.

Strahlen vom Brechungsquotienten ε' , aber von gleicher Intensität als der ordentliche Strahl. Nun sind aber sowohl dieser wie die $\cotang \gamma$ mal zahlreicheren ausserordentlichen Strahlen nur aus einem einzigen geradlinig polarisirt in den Quarz eintretenden Strahl hervorgegangen und in ihrer Gesamtintensität diesem gleich. Wir können uns also umgekehrt jeden in den Quarz eintretenden Strahl in $(\cotang \gamma) + 1$ Theile zerlegt denken, von denen $\cotang \gamma$ Theile den Brechungsindex ε' , einer den Brechungsindex ω haben, woraus sich für den scheinbaren Brechungsindex direct ergibt

$$n_q = \frac{\omega + \varepsilon' \cotang \gamma}{1 + \cotang \gamma}.$$

Die Nothwendigkeit der Berechnung dieses scheinbaren Brechungsquotienten für Quarzschnitte, die nicht gleichzeitig mit den anstossenden Plagioklassen auslöschen, erhellt aus den schon auf S. 182 angegebenen Daten über die Differenz von $\varepsilon - \omega$ im Quarz und die Werthe α , β und γ in den sauren Plagioklassen. Denn im Falle, dass der Quarz parallel der optischen Axe geschnitten ist, kann schon eine Differenz von 40° in der Auslöschung eine Abweichung im Brechungsquotienten von 0,004 hervorbringen und somit die Genauigkeit der Bestimmung beeinträchtigen. Abweichungen von weniger als 5° wird man unberücksichtigt lassen können. Die Ausschliessung der nicht annähernd gleichzeitig auslöschenden Quarzschnitte aber hat zur Folge, dass die Zahl der brauchbaren Contacte auf ungefähr den neunten Theil vermindert wird.

Da die vorstehenden Ausführungen nicht nur für den Quarz, sondern auch für jedes andere einaxige Mineral gültig sind, so ergibt sich als Resultat, dass die Becke'sche Methode für jeden Contact beliebiger Mineralien mit beliebig orientirten Schnitten optisch einaxiger Mineralien von bekannter Licht- und Doppelbrechung anwendbar ist.

Um die praktische Anwendung der beschriebenen Bestimmungen zu erleichtern, habe ich hinreichend viele Werthe von ε' und n_q auf Grund der im Vorhergehenden begründeten Formeln berechnet und auf der folgenden Seite in einer Tabelle zusammengestellt. Um aber ε' für jeden beliebigen Werth von α und n_q für eine grössere Anzahl von Werthen von ε' und jeden beliebigen Werth von γ direct ohne Berechnung finden zu können, habe ich sie auf den folgenden beiden Seiten als Curven und zwar die Werthe von n_q für 10 verschiedene ε' dargestellt.

Die folgende Tabelle gibt die berechneten Werthe von ϵ' und n_q an.

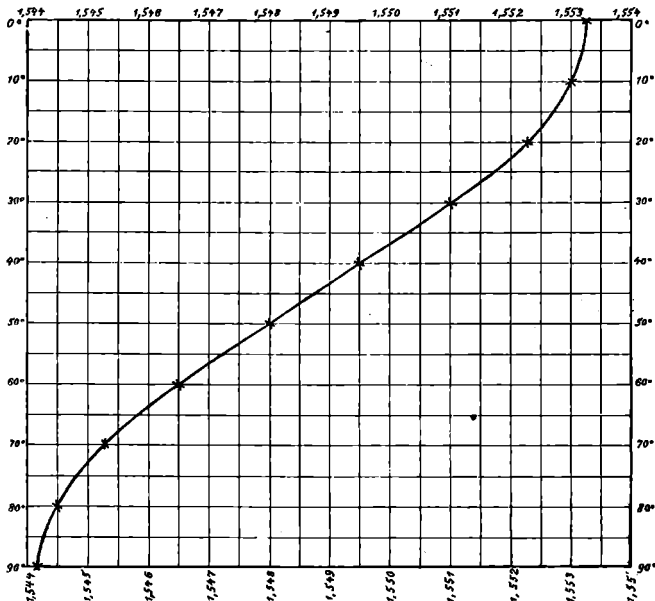
Werthe von ϵ' für α^0 (Neigung gegen die optische Axe).

| | | | | | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\alpha=90^0$ | $\alpha=80^0$ | $\alpha=70^0$ | $\alpha=60^0$ | $\alpha=50^0$ | $\alpha=40^0$ | $\alpha=30^0$ | $\alpha=20^0$ | $\alpha=10^0$ | $\alpha=0^0$ |
| $\epsilon' = 1,5442$ | $\epsilon' = 1,5445$ | $\epsilon' = 1,5453$ | $\epsilon' = 1,5465$ | $\epsilon' = 1,5480$ | $\epsilon' = 1,5495$ | $\epsilon' = 1,5510$ | $\epsilon' = 1,5522$ | $\epsilon' = 1,5530$ | $\epsilon' = 1,5533$ |

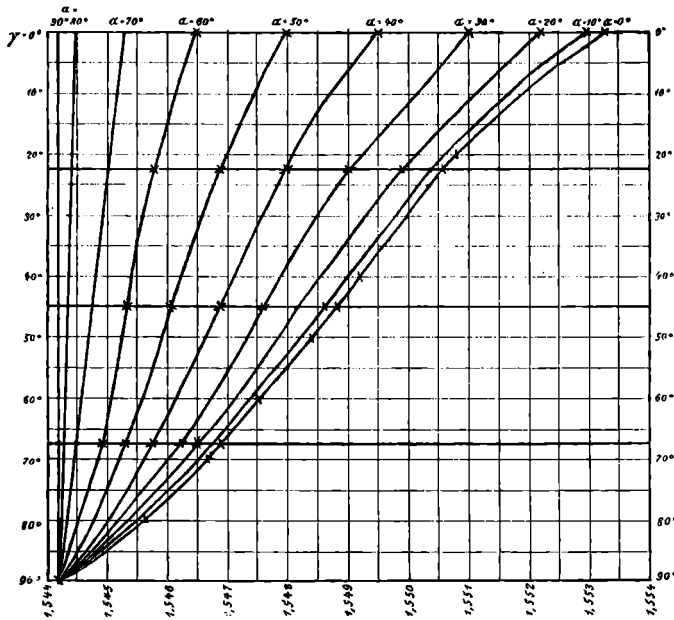
Werthe von n_q für verschiedene Werthe von γ .

| | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|--------|----------------------------|
| $\gamma = 0^0$ | 1,5442 | 1,5445 | 1,5453 | 1,5465 | 1,5480 | 1,5495 | 1,5510 | 1,5522 | 1,5530 | 1,5533 | $\gamma = 0^0$ |
| $\gamma = 10^0$ | 1,5442 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,5519 | $\gamma = 10^0$ |
| $\gamma = 20^0$ | 1,5442 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,5508 | $\gamma = 20^0$ |
| $\gamma = 22\frac{1}{2}^0$ | 1,5442 | — | — | 1,5458 | 1,5469 | 1,5480 | 1,5490 | 1,5499 | — | 1,5506 | $\gamma = 22\frac{1}{2}^0$ |
| $\gamma = 30^0$ | 1,5442 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,5500 | $\gamma = 30^0$ |
| $\gamma = 40^0$ | 1,5442 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,5492 | $\gamma = 40^0$ |
| $\gamma = 45^0$ | 1,5442 | 1,5444 | 1,5448 | 1,5454 | 1,5461 | 1,5469 | 1,5476 | 1,5482 | 1,5486 | 1,5488 | $\gamma = 45^0$ |
| $\gamma = 50^0$ | 1,5442 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,5484 | $\gamma = 50^0$ |
| $\gamma = 60^0$ | 1,5442 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,5475 | $\gamma = 60^0$ |
| $\gamma = 67\frac{1}{2}^0$ | 1,5442 | — | — | — | 1,5453 | 1,5458 | 1,5462 | 1,5465 | — | 1,5469 | $\gamma = 67\frac{1}{2}^0$ |
| $\gamma = 70^0$ | 1,5442 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,5467 | $\gamma = 70^0$ |
| $\gamma = 80^0$ | 1,5442 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,5456 | $\gamma = 80^0$ |
| $\gamma = 90^0$ | 1,5442 | 1,5442 | 1,5442 | 1,5442 | 1,5442 | 1,5442 | 1,5442 | 1,5442 | 1,5442 | 1,5442 | $\gamma = 90^0$ |
| $\alpha=90^0$ | $\alpha=80^0$ | $\alpha=70^0$ | $\alpha=60^0$ | $\alpha=50^0$ | $\alpha=40^0$ | $\alpha=30^0$ | $\alpha=20^0$ | $\alpha=10^0$ | $\alpha=0^0$ | | |

Werthe von ϵ' für alle Werthe von α .



Werthe von n_q für alle Werthe von γ und 10 Werthe von α .



Es ist zu beachten, dass die Werthe für $\gamma = 45^\circ$ das arithmetische Mittel zwischen den Werthen für $\gamma = 90^\circ$ und $\gamma = 0^\circ$ sind und dass die Werthe für $\gamma = 22\frac{1}{2}^\circ$ und $\gamma = 67\frac{1}{2}^\circ$ gleich weit von einer die Endpunkte verbindenden Geraden entfernt sind. Die Curven für $\alpha = 80^\circ$ und $\alpha = 70^\circ$ lassen sich ohne merkbare Fehler durch Gerade ersetzen. Die Curve für $\alpha = 10^\circ$ liegt so nahe an der Curve für $\alpha = 0^\circ$, dass man sie auf Grund ihrer Endpunkte und des Mittelpunktes ohne merkbare Fehler wird darstellen können.