Ueber die

empirische Natur unserer Raumvorstellungen.

Von

PROF. DR. O. SIMONY.

Vortrag, gehalten den 17. Februar 1886.

(Mit 3 Figuren im Texte und 4 Tafeln.)

Das Thema, dessen Erörterung mir heute obliegt, schliesst eine Reihe von Problemen in sich ein, die dasselbe einerseits mit exacten Naturwissenschaften, wie der Physiologie, anderseits mit den Axiomen der Geometrie in Verbindung bringen und in letzter Linie Gebiete der Erkenntnisstheorie berühren, in welchen sich vorläufig erst das Streben nach Aufklärung, aber noch nicht diese selbst, wissenschaftlich präcisiren lässt.

Demgemäss kann auch der Gegenstand unserer heutigen Betrachtungen unter mannigfaltigen Gesichtspunkten discutirt werden, deren Auswahl jedoch im vorliegenden Falle durch die Tendenz beschränkt wird, welcher alle an dieser Stelle abgehaltenen Vorlesungen zu dienen haben. Im Hinblick hierauf sei es mir nunmehr gestattet, Ihnen, hochgeehrte Anwesende, zunächst die naturwissenschaftliche Bedeutung meines Vortragsthemas mit Hilfe eines erläuternden Gleichnisses klarzulegen.

Sie Alle kennen wohl aus eigener Erfahrung das unterhaltende Spielzeug, welches den Namen Kaleidoskop führt.[1]) — Zwei ebene rechteckige Spiegel werden in einer innen geschwärzten Röhre derart befestigt, dass ihre einander zugekehrten spiegelnden Flächen unter einem Neigungswinkel von 30—60 Grad zusammenstossen. An dem einen Ende der Röhre ist eine undurchsichtige Scheibe mit kreisförmigem kleinen Guckloch angebracht, das andere Ende wird durch eine gläserne Doppelscheibe geschlossen. Hiebei erhält die innere Glasscheibe von der äusseren, mattgeschliffenen, einen Abstand von 1·5—2 Millimeter und umgrenzt im Vereine mit der letzteren und der Innenfläche der Röhre einen Hohlraum, in welchem sich kleine, frei bewegliche Splitter verschieden gefärbten Glases befinden. Sobald man nun die mattgeschliffene Scheibe dem Tageslichte zuwendet und durch das erwähnte Guckloch hindurchsieht, gewahrt man buntgefärbte Sterne, welche ihre Formen augenblicklich verändern, wenn die sie erzeugenden Glassplitter in Folge einer Drehung des Instrumentes andere Lagen erhalten, aber bei aller Mannigfaltigkeit stets regelmässig gestaltet sind, obgleich die Splitter in jenem Hohlraum gemeiniglich eine völlig unregelmässige Vertheilung zeigen.

Diese Beobachtungen im Auge behaltend, mögen wir uns jetzt vor Allem der Thatsache erinnern, dass die Gesammtheit aller Sinnesempfindungen, welche jedem Einzelnen seine Vorstellung von der Aussenwelt vermitteln, uns nur zu geringfügigen Bruchstücken der letzteren in Beziehung setzt. Denn abgesehen davon, dass erst Reize von endlicher Stärke Sinnesempfindungen hervorrufen können,[2]) bleibt das jedem einzelnen Sinne zugeordnete Wahrnehmungsgebiet auch qualitativ insoferne ein beschränktes, als beispielsweise unsere Sehnerven ausschliesslich durch Aetherschwingungen von ganz bestimmten Wellenlängen afficirbar sind,[3]) desgleichen auch unser Ohr im Mittel nur etwa zehn Octaven verschiedener Töne empfindet.[4]) Da ferner die Qualität der Empfindung, welche ein gegebener äusserer Reiz verursacht, unmittelbar durch die Organisation des in Thätigkeit tretenden Sinnes bestimmt wird — wirken ja doch beispielsweise dieselben Aetherschwingungen, welche unser Auge als Licht empfindet, auf unsere Haut als Wärme — so nehmen wir jene Bruchstücke der Aussenwelt nicht wahr **wie sie sind**, sondern wie sie uns zufolge **unserer** Organisation **erscheinen**,[5]) und gilt in diesem Sinne das Dichterwort:

> „Alles Vergängliche
> Ist nur ein Gleichniss."

Wäre nun die Art, wie wir unsere Sinnesempfindungen in die Aussenwelt verlegen, nicht das Resultat eines Anpassungsprocesses an die Wirklichkeit, sondern uns a priori anerschaffen, so könnte alle Gesetzmässigkeit, welche die Naturerscheinungen uns darbieten, in analoger Weise entstehen, wie die Gesetzmässigkeit in den Formen jener farbenprächtigen Sterne, die uns unregelmässig vertheilte Glassplitter in einem Kaleidoskop vermitteln: Ein Chaos könnte uns einen Schein von Gesetzmässigkeit vortäuschen.

Hieraus erhellt die Bedeutung, welche eine Charakteristik der empirischen Natur unserer Raumvorstellungen in naturwissenschaftlicher Hinsicht besitzt, und mögen nunmehr die diesen Zweck verfolgenden physiologisch-psychologischen Erwägungen in Kürze vorgeführt werden.

Jede psychische Function wird, wenn sie zum Bewusstsein gelangt, insoferne direct localisirt, als wir den Sitz des letzteren in das Haupt verlegen. Zu dieser Localisation tritt speciell bei Sinnesempfindungen noch eine zweite hinzu, indem sich an jede derselben die unmittelbare [6]) Vorstellung zweier Orte, eines Ortes in uns und eines in der Aussenwelt, knüpft.

Aber Vorstellungen von Orten involviren nicht nothwendig solche von Ausdehnung, [7]) denn wir localisiren sowohl unser Bewusstsein, als auch Töne und Worte, ohne hiebei Vorstellungen von Ausdehnung zu entwickeln. Es geschieht dies erst auf Grundlage jener Sinnesempfindungen, welche wir in unser Tastfeld, beziehungsweise in unser Gesichtsfeld localisiren.

Da wir einerseits zwei unsere Haut berührende Zirkelspitzen bei fortgesetzter gegenseitiger Annäherung der letzteren schliesslich an jeder Hautstelle als eine einzige Spitze empfinden, [8]) anderseits zwei leuchtende Punkte, deren scheinbare Entfernung weniger als 30 Secunden beträgt, nicht mehr von einander trennen können, [9]) setzen sich unser Tast- und Gesichtsfeld aus Tast-, respective Gesichtsbezirken von endlicher Grösse zusammen. Die letzteren schliessen sich überdies nicht einmal lückenlos aneinander, indem die Eintrittsstellen beider Sehnerven keine wie immer geartete Lichtempfindung vermitteln.[10])

Die weitere Frage, wie sich auf Grundlage von Tast- und Gesichtswahrnehmungen Vorstellungen von Ausdehnung entwickeln, findet eine Erledigung durch Verwerthung der Thatsache,[11]) dass die Organe des Tast- und Gesichtssinnes mit Muskeln versehene bewegliche Endapparate besitzen, während die Rinde des Grosshirnes als Sitz des Bewusstseins[12]) unbeweglich unter der Schädeldecke ruht und die peripheren Enden beider Hörnerven ebenfalls unverschiebbar im Felsenbeine liegen.

Hieraus ergibt sich als Wahrscheinlichkeitsschluss, dass wir zu Vorstellungen von Ausdehnung durch Association von Tast-, respective Gesichtswahrnehmungen mit Bewegungsvorstellungen, also, da die Vorstellung jeder wie immer gearteten Bewegung des eigenen Leibes mit Muskelgefühlen verknüpft ist,[13]) durch **Verknüpfung** jener Wahrnehmungen mit Gefühlen von Muskelbewegung gelangen. Bei jeder solchen Association tritt dann die Bewegungsvorstellung selbst als ein Quale auf, welches durch keine andere sinnliche Qualität ersetzt werden kann.[14])

Es entsteht jetzt noch die Frage, welche Merkmale die auf Grundlage jener Wahrnehmungen associirten Vorstellungen von Ausdehnung für die letztere liefern?

Sind die associirten Wahrnehmungen speciell Tastwahrnehmungen, so nöthigt uns schon das Bestreben, die beim Betasten gegebener Objecte gewonnenen Eindrücke und die Art, wie dieselben erlangt wurden, gesondert im Bewusstsein festzuhalten, einerseits zur Unterscheidung zwischen Flächen, Kanten und Spitzen, anderseits zur Aufstellung der Richtungsunterschiede: Rechts — Links, Vorwärts — Rückwärts, Aufwärts — Abwärts. Die Entwicklung der letzteren Vorstellungen vermittelt zugleich das Bewusstwerden einer räumlichen Anordnung[15]) der getasteten Gegenstände und ihrer verschiedenen Entfernungen vom tastenden Subjecte, deren Vergleichung die ersten rohen Massbestimmungen in, dem eigenen Körper und dessen Bewegungen — ich erinnere hier an das Schrittmass — entnommenen Masseinheiten begründet.

Einen analogen Weg nimmt die Entwicklung der Vorstellungen von Ausdehnung bei den mit Muskelgefühlen associirten Gesichtswahrnehmungen.

Auch diese erscheinen, wie Beobachtungen an glücklich operirten Blindgeborenen [16]) lehren, anfänglich als Flächenbilder der wahrgenommenen Gegenstände, deren räumliche Vertiefung zunächst unter fortwährender Mitwirkung des Tastsinnes zu Stande kommt. [17]) In Folge dessen liefert die räumliche Anordnung der Tastempfindungen die erste Directive für jene der Gesichtswahrnehmungen und wird in der Folge von den sichtbaren und erreichbaren auf die sichtbaren, aber unerreichbaren Gegenstände ausgedehnt.

Da wir ferner alle übrigen Sinnesempfindungen auf tastbare, respective sichtbare Objecte beziehen, vereinigen sich die verschiedenen Vorstellungen von Ausdehnung zur Vorstellung eines alle Localisationen unserer Sinnesempfindungen in sich aufnehmenden **Sinnenraumes** als des Inbegriffes sämmtlicher Orte, in welche wir überhaupt Sinnesempfindungen localisiren können.[18])

In diesem Raume finden wir Theile desselben durch sichtbare Flächen zu Körpern abgegrenzt; die Kanten und Spitzen der letzteren bilden sichtbare Linien und sichtbare Punkte, welche aber, weil unsere Gesichtsbezirke von endlicher Grösse sind, ebenso als räumliche Gebilde betrachtet werden müssen wie die Körper selbst. Indem wir also die Eigenschaften sichtbarer Punkte, Linien und Flächen studiren, lernen wir zugleich Eigenschaften unseres Sinnenraumes kennen. Hiebei müssen wir, da die Art, wie wir unsere Sinnesempfindungen localisiren, dieselbe bleibt, wo immer wir uns befinden mögen, auch unserem Sinnenraume an allen Orten und nach allen Richtungen dieselbe Beschaffenheit zuschreiben und gehen demgemäss, indem wir jene Gebilde studiren, von dem Grundsatze aus, dass sich an allen Orten und nach allen Richtungen gleiche geometrische Constructionen vollziehen lassen.[19])

Auf solche Art entwickelt sich zunächst jene Geometrie der einfachsten, anschaulich ausführbaren Constructionen, deren Elemente in Euklid's classischer Bearbeitung schon längst ein Gemeingut aller Gebildeten geworden sind. Aber die sogenannten Axiome dieser Geometrie[20]) bilden nur eine Zusammenstellung aller unmittelbar anschaulichen Sätze, welche zu einer bequemen Beweisführung nothwendig und hinreichend sind; die unseren empirischen Raumvorstellungen möglicherweise specifisch eigenthümlichen Prädicate treten in jenen Axiomen keineswegs direct zu Tage.

Ausserdem ist noch hervorzuheben, dass alle empirischen Massbestimmungen, welche mittelst der beiden elementaren geometrischen Massstäbe, der geraden Linie und des ebenen Winkels, möglich werden, numerisch in ganzen und gebrochenen Zahlen ausdrückbar sind, denn in Folge der endlichen Grösse unserer Gesichtsbezirke lässt sich weder die Theilung einer gegebenen Strecke, noch jene eines gegebenen Winkels beliebig weit fortsetzen. Allerdings werden die Grenzen, bis zu welchen wir hiebei vordringen können, mit der fortschreitenden Verbesserung unserer Mikroskope im Laufe der Zeit weiter hinausgeschoben werden, allein der Umstand, dass gegenwärtig noch keine definitive Grenze für die empirische Theilung jener geometrischen Massstäbe präcisirbar ist, erlaubt keineswegs den Schluss, dass eine solche Grenze überhaupt nicht existirt.

Anders verhält es sich mit der arithmetischen Theilbarkeit der erhaltenen Masszahlen, indem wir nach Einführung gebrochener Zahlen jeder beliebigen Zahl eine kleinere gegenüberstellen können. In der Fortsetzung dieser Operation stossen wir auf keine wie immer geartete Schranke und gelangen so schliesslich zu dem Grenzbegriffe unendlich kleiner Zahlen, d. h. von Zahlen, die kleiner sind als jede noch so klein angenommene Zahl.

Dass nun derartige Zahlen dessenungeachtet als Grössen gedacht werden können, erscheint darin begründet, dass in uns, kraft den an die Spitze unserer physiologisch-psychologischen Erwägungen gestellten Thatsachen, Vorstellungen von Orten ohne jede bestimmte Ausdehnung vorhanden sind. Sobald wir also einen Ort nicht mehr als Ort in unserem Sinnenraume, sondern als innere Gestaltung denken, können wir demselben auch eine nach allen Richtungen unendlich kleine Ausdehnung zuschreiben, d. h. ihn als idealen Punkt denken.

Derartige ideale Punkte lassen sich nunmehr in Folge der Unabhängigkeit eines Theiles unserer Ortsvorstellungen vom Sinnenraume auch nach **anderen** Gesetzen als nach jenen der Euklid'schen Geometrie einander zuordnen, so dass ausser der genannten Geometrie noch andere in sich widerspruchsfreie Geometrien auf mathematischem Wege entwickelt werden können, an deren Grössenbegriffe jedoch nur die Forderung ihrer **Denkbarkeit** zu stellen ist, ohne dass man hieraus auf die Anschaulichkeit, **geschweige denn** auf die Wirklichkeit der definirten Grössen schliessen dürfte.[21])

Da übrigens unsere Sehnerven im wachen Zustande fortwährend erregt sind, verknüpfen wir mit der Vorstellung des idealen Punktes zumeist unwillkürlich jene eines sichtbaren Punktes, und verfallen, indem wir die erstere Vorstellung nur durch Abstraction von der letzteren wieder herstellen können,[22]) leicht dem Irrthume, es sei auch jeder Inbegriff idealer Punkte, respective jede ideale Mannigfaltigkeit überhaupt nur eine Abstraction, nicht aber eine, vielleicht uns allein eigenthümliche, selbstständige Schöpfung unseres Geistes.

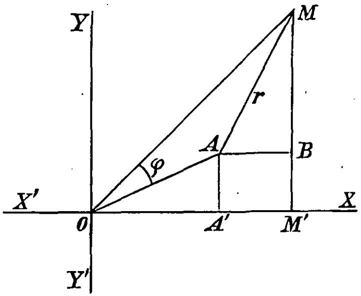
Anderseits vervollständigt gerade die **logische** Möglichkeit, Mannigfaltigkeiten von Punkten zu denken, welche anders als unser Sinnenraum geartet sind, unsere Einsicht in die empirische Natur unserer Raumvorstellungen, weil die letzteren hiedurch den Charakter einer a priori nothwendigen Form aller äusseren Anschauung definitiv verlieren.

Es erscheint mir daher in Anbetracht dieser Thatsache angemessen, hier wenigstens den Begriff einer einzigen idealen Mannigfaltigkeit so weit zu entwickeln, als dies mit völlig elementaren Hilfsmitteln möglich ist, wenngleich wir hiermit ein Gebiet mathematischer Forschung betreten, welches, wie Helmholtz sich ausdrückt,[23]) „eine höhere Kraft der Abstraction in Anspruch nimmt als fast irgend ein anderes“.

Da ferner unter allen derartigen Mannigfaltigkeiten in erster Linie die vierfach ausgedehnte[24]) dem Interesse von Nichtmathematikern insoferne näher gerückt worden ist, als die Thatsache ihrer Denkbarkeit anlässlich der Interpretation gewisser spiritistischer Knotenexperimente[25]) zur Aufstellung der Hypothese eines wirklich existirenden „vierdimensionalen Raumes" verleitet hat,[26]) mag speciell der mathematische Begriff dieser höheren Mannigfaltigkeit im Folgenden näher präcisirt werden.

Wir gelangen hiezu am leichtesten mittelst einer vergleichenden Betrachtung jener analytisch-geometrischen Definitionen der Ebene und des Raumes,[27]) welche die wesentliche Grundlage einerseits der analytischen Geometrie der Ebene, anderseits der analytischen Raumgeometrie bilden.

Fig. 1.



Denken wir uns zunächst in einer gegebenen **Ebene zwei** einander rechtwinklig durchschneidende gerade Linien: XX', YY' (siehe die schematische Fig. 1) gezogen, so ist die Lage jedes Punktes dieser Ebene in Bezug auf die letzteren vollständig bestimmt, wenn man seine **beiden** rechtwinkligen Coordinaten, d. h. die Abstände des Punktes von den zwei als Coordinatenaxen bezeichneten Geraden XX', YY' kennt. Sind dann speciell OA', $A'A$; OM', $M'M$ die Coordinaten zweier derartiger Punkte A und M, so lässt sich deren Distanz: r, wie die Ziehung der zu OX parallelen Hilfslinie AB unmittelbar ersichtlich macht, stets als Hypothenuse eines bei B rechtwinkligen Dreieckes auffassen, in welchem die Coordinatendifferenzen:

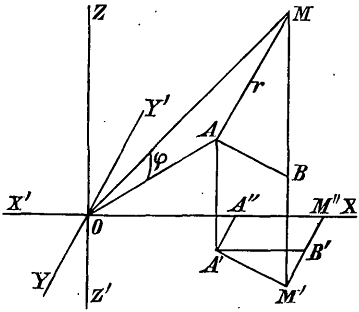
$$OM' - OA' = AB, \quad M'M - A'A = BM$$

als Katheten auftreten. Da nun kraft des allbekannten Pythagoräischen Lehrsatzes das Quadrat der Hypothenuse jedes rechtwinkligen ebenen Dreieckes der Summe der Quadrate seiner beiden Katheten gleich ist, erhalten wir für jene **zweifach ausgedehnte** Mannigfaltigkeit von Punkten, deren Gesammtheit die in Betracht gezogene Ebene constituirt, die nachstehende analytisch-geometrische Definition:

Die **Ebene** ist eine Mannigfaltigkeit, in welcher jede Ortsbestimmung in Bezug auf **zwei** einander rechtwinklig durchschneidende gerade Linien **zwei** Grössenbestimmungen erfordert, und das Quadrat der Entfernung zweier beliebiger Punkte durch die Summe der Quadrate von **zwei** Coordinatendifferenzen ausdrückbar ist.[28])

Eine analoge Charakteristik ergibt sich im Anschlusse hieran auch für den Raum. — Denken wir uns nämlich durch irgend einen Punkt: O im **Raume drei** einander rechtwinklig durchschneidende gerade Linien: XX', YY', ZZ' (siehe die schematische Fig. 2) gezogen, so erscheint die Lage jedes anderen Raumpunktes in Bezug auf die letzteren durch Angabe seiner **drei** rechtwinkligen Coordinaten, das heisst jener Abstände vollkommen bestimmt, welche der betreffende Punkt von den drei durch die sogenannten Coordinatenaxen: XX', YY', ZZ' präcisirten Ebenen: XOY, XOZ, YOZ besitzt. Sind dann speciell: OA'', $A''A'$, $A'A$; OM'', $M''M'$, $M'M$ die Coordinaten zweier beliebig gewählter Raumpunkte A und M, so genügt die Ziehung dreier Hilfslinien, und zwar der zu OX parallelen, mithin $M''M'$ in B' rechtwinklig treffenden Geraden $A'B'$, ferner der Verbindungslinie $A'M'$ der Fusspunkte beider, auf der Ebene XOY senkrecht stehenden Coordinaten $A'A$ und $M'M$, endlich der zu $A'M'$ parallelen Geraden AB, um zu erkennen, dass sich das Quadrat der Distanz r jener zwei Raumpunkte hier gleichfalls durch Quadrate von Coordinatendifferenzen ausdrücken lässt. Denn da $A'M'$ als eine der Ebene XOY angehörige, durch den Fusspunkt von $M'M$ gezogene Gerade mit $M'M$ einen rechten Winkel einschliesst, und AB gemäss seiner Construction zu $A'M'$ parallel läuft, ist das Quadrat von r

Fig. 2.



offenbar gleich dem Quadrate der Coordinatendifferenz:

$$M'M - A'A = BM,$$

vermehrt um das Quadrat von AB, welches zufolge der Gleichheit von AB und $A'M'$ seinerseits wieder durch die Summe der Quadrate der Coordinatendifferenzen:

$$OM'' - OA'' = A'B', \quad M''M' - A''A' = B'M'$$

ersetzt werden kann. Die vorstehenden Ueberlegungen begründen sonach für jene **dreifach ausgedehnte** Mannigfaltigkeit von Punkten, deren Inbegriff den Raum bildet, folgende analytisch-geometrische Definition:

Der **Raum** ist eine Mannigfaltigkeit, in welcher jede Ortsbestimmung in Bezug auf **drei** einander rechtwinklig durchschneidende gerade Linien **drei** Grössenbestimmungen erheischt, und das Quadrat der Entfernung zweier beliebiger Punkte durch die Summe der Quadrate von **drei** Coordinatendifferenzen ausdrückbar ist. [29])

Indem wir nunmehr die hier abgeleiteten Definitionen der Ebene und des Raumes mit einander vergleichen, zeigt sich, dass einerseits die Ortsbestimmung in beiden Mannigfaltigkeiten auf völlig analoge Art erfolgt, anderseits auch die Beziehung, welche zwischen dem Quadrate der Entfernung zweier Punkte und den Quadraten ihrer Coordinatendifferenzen stattfindet, beim Uebergange von der zweifach zur dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ihre Form beibehält, und dass hiebei nur die Anzahl der zu bildenden Coordinatendifferenzen mit den Coordinaten beider Punkte von 2 auf 3 steigt.

Es liefern daher unsere letzten Bemerkungen zugleich eine sichere Directive für die Bildung des analytisch-geometrischen Begriffes der **vierfach ausgedehnten** Mannigfaltigkeit. Wir werden dieselbe als eine Mannigfaltigkeit idealer Punkte zu definiren haben, in welcher jede Ortsbestimmung **vier** Grössenbestimmungen erfordert, und das Quadrat der Entfernung zweier Punkte durch die Summe der Quadrate von **vier** Coordinatendifferenzen ausdrückbar ist. [30]) Da wir uns jedoch zufolge unserer körperlichen Organisation **vier** einander in einem Punkte **senkrecht** durchschneidende gerade Linien nicht mehr **anschaulich** vorstellen können, lässt sich auch die eben präcisirte Mannigfaltigkeit zwar analog wie die Ebene und der Raum analytisch-geometrisch definiren, aber im Gegensatze zu den genannten Mannigfaltigkeiten nicht mehr anschaulich vorstellen. Dasselbe gilt von allen jenen, in der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit angenommenen Gebilden, welchen sich keine congruenten Gebilde in der Ebene oder im Raume zuordnen lassen, so dass auch die Fragen nach den denkbaren Formveränderungen derartiger Gebilde zumeist keiner anschaulichen Interpretation fähig sind, sondern nur auf analytisch-geometrischem Wege [31]) erledigt werden können.

Hiebei gewinnt man nun eine Reihe hochinteressanter Resultate, welche gerade durch den Gegensatz, in welchen sie zu den landläufigen Auffassungen analoger Probleme im Bereiche unserer geometrischen

Anschauung treten, neue Gesichtspunkte für eine vollständige Charakteristik der letzteren eröffnen und daher trotz ihres rein theoretischen Inhaltes insoferne eine praktische Bedeutung erhalten, als sie bisher unbeachtet gebliebene Eigenthümlichkeiten unserer empirischen Raumvorstellungen[32]) klar hervortreten lassen. Theoretische Ergebnisse solcher Art sind in erster Linie die folgenden:

(A) In der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit liesse sich in jedem beliebigen körperlichen Ringe ohne Ausführung eines Querschnittes ein Knoten erzeugen.[33])

(B) Körper, welche sich hinsichtlich ihrer Formen wie die rechte zur linken Hand verhalten, könnten durch einen reingeometrischen Bewegungsvorgang in einander congruente Gebilde verwandelt werden.

(C) Man könnte in der genannten Mannigfaltigkeit unendlich viele geschlossene Flächen construiren, die durch einen in sich selbst zurücklaufenden Schnitt in zwei Hälften von gleichem Umfange und Inhalte, im Uebrigen aber von verschiedener geometrischer Beschaffenheit, zerfallen würden.

Jeder der drei hier angegebenen Transformationen entsprechen nämlich, wie eine eingehende Discussion derselben lehrt, nach Hinzufügung gewisser näherer Bestimmungen analoge Umformungen von Gebilden im empirischen Raume, wobei sich zugleich anschauliche Lösungen geometrischer Probleme ergeben, welche, ohne nennenswerthe mathematische Vorkenntnisse zu beanspruchen, gerade die Ausbildung unseres räumlichen Vorstellens nicht unwesentlich zu fördern vermögen. In diesem Sinne repräsentiren die jetzt noch folgenden Betrachtungen gewissermassen eine concrete Ergänzung zu den früher gepflogenen abstracten Untersuchungen, und mag nunmehr, um Kürze mit Uebersichtlichkeit zu verbinden, eine vorwiegend schematische Form der Darstellung[34]) platzgreifen.

I. Die Transformation (A) im Raume.

Eine präcise Charakteristik der diese Transformation ermöglichenden geometrischen Experimente erfordert vor Allem die Einführung der Hilfsbegriffe: positive, beziehungsweise negative Drehung um 1×180^0, 2×180^0, 3×180^0 etc., welche sich ohne Schwierigkeit in gemeinfasslicher Weise erläutern lassen.

Man verwendet hiezu am besten einen rechteckigen Papierstreifen, in dessen Ecken auf seiner oberen und unteren Fläche beispielsweise nach dem Muster der schematischen Fig. 1 auf Tafel I die Ziffern 1, 2, 3, 4 geschrieben werden mögen, wobei jede Ecke beiderseits mit derselben Ziffer zu versehen ist. Biegt man hierauf die beiden Enden des Streifens in der durch die schematische Fig. 2 auf Tafel I versinnlichten Art gegen einander und verdreht dessen rechtseitiges Ende so lange, bis die Ecken (1) und (4), (2) und (3) zum ersten Male nebeneinander zu liegen kommen, so hat man eine Drehung um 1 $\times$ 180^0 ausgeführt. Ich nenne dieselbe positiv (+), wenn sie im Sinne des Pfeiles *(p)*, negativ (—), wenn sie im entgegengesetzten Sinne vorgenommen worden ist. Durch Verdopplung, Verdreifachung etc. der eben charakterisirten Drehung lässt sich analog eine Verdrehung des rechtseitigen Endes um 2 $\times$ 180^0, 3 $\times$ 180^0 etc. erzeugen; sie wird als positiv oder negativ zu bezeichnen sein, je nachdem sie aus einer Verdopplung, Verdreifachung etc. einer positiven oder negativen Drehung um 1 $\times$ 180^0 hervorgegangen ist.

Die Vereinigung beider Enden des Streifens [35]) liefert natürlich stets einen ringförmig geschlossenen knotenfreien Streifen, dessen Gesammttorsion *(T)* mit jener des rechtseitigen Endes des ungeschlossenen Streifens übereinstimmt. Handelt es sich also umgekehrt um den Nachweis einer bestimmten Gesammttorsion in einem ringförmig geschlossenen knotenfreien Streifen, so verwandle man denselben mittelst eines seine ganze Breite durchsetzenden Querschnittes in einen Streifen mit zwei freien Enden und verdrehe dessen rechtseitiges Ende bei negativem T in positivem, bei positivem T in negativem Sinne um jenes Vielfache von 180^0, welches für T angegeben wurde. War die betreffende Angabe richtig, so müssen nach Vollendung dieser Operation sämmtliche Torsionen aus dem Streifen verschwunden sein. Ebenso einfach gestaltet sich die Prüfung der Gesammttorsion eines ringförmig geschlossenen Streifens, falls derselbe einen Knoten von dem

Habitus der schematischen Figuren 17, 18 auf Tafel I, oder 1, 2 auf Tafel III besitzt. Schneidet man nämlich den Streifen unmittelbar neben den Umschlingungen des Knotens quer durch und zieht jenen Theil des Streifens, welcher die Umschlingungen trägt, ohne Drehung aus den letzteren heraus, so hat man den vorgelegten Streifen ohne Aenderung seiner Gesammttorsion in einen knotenlosen Streifen mit zwei freien Enden transformirt, dessen Gesammtverdrehung wieder in der zuvor beschriebenen Weise controlirt werden kann.

Dies vorausgeschickt, mag zunächst eine Beschreibung und graphische Erklärung der einfachsten Erscheinungen, welche ringförmig geschlossene, verdrehte Streifen bei längs ihren Mittellinien in sich selbst zurücklaufenden Längsschnitten zeigen, in schematischer Form gegeben werden.

1. $T = \pm 1 \times 180^0$: Es entsteht durch Ausführung des Schnittes längs der Mittellinie ein einziger ringförmig geschlossener Streifen, dessen Gesammtverdrehung mit jener des ursprünglichen Streifens gleichsinnig ist und ihrem absoluten Werthe nach 4×180^0 beträgt. Um sich dieses Ergebniss auf graphischem Wege verständlich zu machen, gehe man von der Thatsache aus, dass die Grenzen des gegebenen Streifens in Folge der Vereinigung der Ecken (1) und (4), (2) und (3) eine einzige geschlossene Curve bilden,[36]) deren Verlauf sich für $T = + 1 \times 180^0$ durch Fig. 3 (Tafel I), für $T = - 1 \times 180^0$ durch

Fig. 5 schematisch veranschaulichen lässt. Da nun der in der Mittellinie des Streifens geführte Längsschnitt dessen Ränder natürlich nirgends treffen kann und nach einem einzigen Umlaufe in sich selbst zurückkehrt, erhält man in beiden Fällen einen einzigen ringförmig geschlossenen Streifen, dessen Grenzen durch die Randcurve des ursprünglichen Streifens und die Schnittlinie gebildet werden. Vor Ausführung des Schnittes besitzt jede der beiden Hälften des Streifens eine Torsion um 180^0, indem jedoch dessen ursprüngliche Randcurve nach Vollendung des Schnittes im ersten Falle nach dem Muster von Fig. 4 Tafel I, im zweiten nach jenem von Fig. 6 Tafel I aufklappt, und hiedurch die Beseitigung der jetzt zwischen den beiden Hälften des Streifens vorhandenen Ueberkreuzung möglich wird, treten zu den erwähnten zwei Torsionen um je 180^0 in Folge des letzteren Processes zwei weitere gleichsinnige Torsionen um je 180^0 hinzu, so dass der absolute Betrag der Gesammtverdrehung im neu erzeugten Streifen auf 4 $\times$ 180^0 steigt.

An die hier gegebene elementare Erläuterung des ersten und zweiten Experimentes knüpft sich ausserdem noch eine theoretische Folgerung, deren Kenntniss speciell zur graphischen Erklärung des letzten in diesem Vortrage zu besprechenden geometrischen Experimentes unerlässlich ist. Da sich nämlich die Figuren 4 und 6 lediglich durch die zwischen ihren Hälften auftretenden Ueberkreuzungen unterscheiden, so bildet eine Ueberkreuzung zweier Theile eines und desselben geschlossenen Streifens gemäss unseren letzten Bemerkungen das charakteristische Aequivalent für eine Torsion um $+ 2 \times 180^0$, respective um $- 2 \times 180^0$, je nachdem sie mit der als positiv zu bezeichnenden Ueberkreuzung in Fig. 4 oder mit der negativen Ueberkreuzung in Fig. 6 gleichsinnig ist. Es kann daher auch umgekehrt eine Torsion um $+ 2 \times 180^0$ als positive Ueberkreuzung, eine solche um $- 2 \times 180^0$ als negative Ueberkreuzung zweier Streifentheile auftreten, welcher Satz sich unter Anderem durch Flachdrücken eines um $+ 2 \times 180^0$, respective um $- 2 \times 180^0$ verdrehten, ringförmig geschlossenen Streifens besonders anschaulich demonstriren lässt.

2. $T = \pm 2 \times 180^0$: Man erhält zwei ringförmig geschlossene Streifen in derartiger Verbindung, dass jeder von beiden auf einem unverdrehten Theile des anderen Streifens einmal aufgehangen werden kann (Fig. 11, 12 auf Tafel I). Hiebei lässt sich die Aufhängung sowohl für $T = + 2 \times 180^0$, als auch für $T = - 2 \times 180^0$ entweder im Sinne der schematischen Fig. 11 oder im entgegengesetzten Sinne (Fig. 12) vornehmen; es erscheint übrigens im Hinblick auf die weiteren Experimente geboten, speciell die erste Aufhängung der Verdrehung um $+ 2 \times 180^0$, hingegen jene im Sinne der Fig. 12 der Verdrehung um $- 2 \times 180^0$ zuzuordnen. Jeder der beiden Streifen zeigt dieselbe Gesammtverdrehung wie der ursprüngliche Streifen

und kann von dem andern erst nach einem dessen ganze Breite durchsetzenden Querschnitte isolirt werden. — Um sich dieses Ergebniss auf graphischem Wege verständlich zu machen, gehe man von der Thatsache aus, dass die Grenzen des gegebenen Streifens hier in Folge der Vereinigung der Ecken (1) und (3), (2) und (4) durch zwei geschlossene Curven gebildet werden, deren Verlauf sich für $T = + 2 \times 180^0$ durch Fig. 7, für $T = - 2 \times 180^0$ durch Fig. 9 schematisch veranschaulichen lässt. Es theilt daher die Mittellinie des Streifens denselben stets in zwei Hälften, deren äussere Ränder *(m)* und *(n)* keinen einzigen gemeinsamen Punkt besitzen, so dass der in dieser Mittellinie in sich selbst zurückkehrende Längsschnitt in beiden Fällen je zwei geschlossene Streifen liefern muss, deren Gesammtverdrehungen mit jenen übereinstimmen, welche die Hälften des ursprünglichen Streifens besassen, das heisst im ersten Falle je $+ 2 \times 180^0$, im zweiten je $- 2 \times 180^0$ betragen. Da ferner die Grenzcurven *(m)* und *(n)*, sobald sie in Folge der Vollendung des erwähnten Schnittes nicht mehr einem einzigen Streifen angehören, augenscheinlich stets die durch die Figuren 8 und 10 (Tafel I) charakterisirten Lagen einnehmen können, lassen sich auch die diesen Grenzcurven zugehörigen Hälften des ursprünglichen Streifens in dieselben Lagen bringen, womit speciell die einmalige Aufhängung des einen Streifens auf dem andern ihre Erklärung gefunden hat.

3. $T = \pm 3 \times 180^0$: Es entsteht ein einziger ringförmig geschlossener Streifen mit einem längs desselben verschiebbaren Knoten, welcher sich auf gewöhnlichem Wege dadurch herstellen lässt, dass man die rechtseitige Hälfte eines ungeschlossenen Streifens einmal um die linkseitige windet und dessen rechtseitiges Ende durch die anfänglich gebildete Schlinge hindurchzieht (Fig. 17, 18 auf Tafel I). Hiebei erfolgt die Knotenbildung speciell für $T = + 3 \times 180^0$ im Sinne der schematischen Fig. 17, hingegen für $T = - 3 \times 180^0$ in jenem von Fig. 18, ohne dass eine Transformation des ersten Knotens in den zweiten oder umgekehrt möglich ist. — Um dieses interessante Ergebniss graphisch zu erklären, stütze man sich auf die Thatsache, dass die Grenzen des gegebenen Streifens hier ebenso wie für $T = \pm 1 \times 180^0$ eine einzige geschlossene Curve bilden, deren Verlauf für $T = + 3 \times 180^0$ durch Fig. 13 (Tafel I), für $T = - 3 \times 180^0$ durch Fig. 15 (Tafel I) schematisch darstellbar ist. Es entsteht mithin durch Ausführung des in der Mittellinie des Streifens[37]) in sich selbst zurückkehrenden Längsschnittes aus denselben Gründen wie bei einem ringförmig geschlossenen einmal verdrehten Bande in beiden Fällen ein einziger ringförmig geschlossener Streifen. Indem ferner die Randcurve des ursprünglichen Streifens nach Vollendung des Schnittes im ersten Falle nach dem Muster von Fig. 14 (Tafel I), im zweiten nach jenem von Fig. 16 aufklappt, verschlingen

sich nunmehr die beiden Hälften des Streifens augenscheinlich conform mit dessen ursprünglicher Randcurve, so dass der Sinn, in welchem die Knotenbildung vor sich geht, bereits durch den Verlauf dieser Randcurve bestimmt wird. — Schliesslich überzeugt man sich nach der früher gegebenen Anleitung leicht, dass die Gesammtverdrehung des zerschnittenen Streifens im ersten Falle $+ 8 \times 180^0$, im zweiten $- 8 \times 180^0$ beträgt.

4. $T = \pm 4 \times 180^0$: Man erhält zwei ringförmig geschlossene Streifen in derartiger Verbindung, dass jeder von beiden auf einem unverdrehten Theile des anderen Streifens zweimal aufgehangen werden kann (Fig. 23, 24 auf Tafel I). Hiebei erfolgen die Aufhängungen speciell für $T = + 4 \times 180^0$ im Sinne der schematischen Fig. 23, hingegen für $T = -4 \times 180^0$ in jenem von Fig. 24, ohne dass eine Transformation der ersten Aufhängungsweise in die zweite oder umgekehrt möglich ist. Jeder der beiden Streifen zeigt dieselbe Gesammtverdrehung wie der ursprüngliche Streifen und kann von dem anderen erst nach einem dessen ganze Breite durchsetzenden Querschnitte isolirt werden. — Um diese Erscheinungen graphisch zu erläutern, gehe man von der Thatsache aus, dass die Grenzen des ursprünglichen Streifens hier ebenso wie für $T = \pm 2 \times 180^0$ durch zwei geschlossene Curven gebildet werden, deren Verlauf sich für $T = + 4 \times 180^0$ durch Fig. 19, für $T = - 4 \times 180^0$ durch Fig. 21 schematisch wieder-

geben lässt. Es entstehen daher nach Ausführung des in der Mittellinie des Streifens in sich selbst zurückkehrenden Längsschnittes aus denselben Ursachen wie bei einem ringförmig geschlossenen zweimal verdrehten Bande in beiden Fällen je zwei geschlossene Streifen, deren Gesammtverdrehungen jenen gleich sind, welche die Hälften der ursprünglichen Streifen besassen, d. h. im ersten Falle je $+ 4 \times 180^0$, im zweiten je $- 4 \times 180^0$ betragen. Da ferner die Grenzcurven *(m)* und *(n)*, sobald sie in Folge der Vollendung des Schnittes nicht mehr einem einzigen Streifen angehören, augenscheinlich stets die durch die Figuren 20 und 22 (Tafel I) charakterisirten Lagen einnehmen können, lassen sich auch die diesen Grenzcurven zugehörigen Hälften des ursprünglichen Streifens in dieselben Lagen bringen, womit speciell die Erklärung der zweimaligen Aufhängung des einen Streifens auf dem anderen gegeben ist.

5. $T = \pm 5 \times 180^0$: Es entsteht ein einziger ringförmig geschlossener Streifen mit einem längs desselben verschiebbaren Knoten, welcher sich auf gewöhnlichem Wege dadurch erzeugen lässt, dass man die rechtseitige Hälfte des ungeschlossenen Streifens zweimal um die linkseitige windet und dessen rechtseitiges Ende durch die anfänglich gebildete Schlinge hindurchzieht (Fig. 1, 2 auf Tafel III). Hiebei erfolgt die Knotenbildung speciell für $T = + 5 \times 180^0$ im Sinne der schematischen Fig. 1, hingegen für $T = - 5 \times 180^0$ in jenem von Fig. 2, ohne dass es

möglich ist, die so erhaltenen Knoten in einander umzuformen. — Die graphische Erklärung dieser Erscheinungen ist jener des fünften und sechsten Experimentes vollkommen analog, und auch die Bestimmung der Gesammtverdrehungen der neu erzeugten Streifen auf dieselbe Art durchführbar wie für $T = \pm 3 \times 180^0$. Man überzeugt sich dann leicht, dass die Gesammtverdrehung des zerschnittenen Streifens für $T = + 5 \times 180^0$ auf $+ 12 \times 180^0$, für $T = - 5 \times 180^0$ auf $- 12 \times 180^0$ gestiegen ist.

Aus den hier mitgetheilten und erläuterten speciellen Experimenten resultiren jetzt die beiden nachstehenden allgemeinen[38]) Schlüsse:

(a) Ist die Zahl: Z der in dem gegebenen verdrehten Streifen vorhandenen Torsionen um je 180^0 eine ungerade, so liefert der in der Mittellinie des Streifens in sich selbst zurücklaufende Längsschnitt, sobald Z gleich oder grösser als 3 ist, stets einen einzigen ringförmig geschlossenen Streifen mit einem Knoten, welcher ebensoviele Windungen besitzt, als die Hälfte der um 1 verminderten Zahl: Z Einheiten enthält. Zugleich wächst die Anzahl der Torsionen in dem zerschnittenen Streifen auf einen Betrag, welcher regelmässig durch Verdopplung der um 1 vermehrten Zahl: Z gefunden wird.

(b) War jedoch der gegebene Streifen mit einer geraden Anzahl: Z von Torsionen versehen, so werden durch Ausführung des erwähnten Längsschnittes immer zwei ringförmig geschlossene, ineinander

hängende Streifen erzeugt, deren Verbindung aus ebensovielen Aufhängungen besteht, als die Hälfte der Zahl: Z Einheiten aufweist. Hiebei besitzen die neu erzeugten Streifen stets dieselbe Gesammtverdrehung wie der ursprüngliche Streifen.

Die directe Verwerthbarkeit dieser Ergebnisse zu einer anschaulichen Lösung des Problems: In einen beliebigen körperlichen Ring ohne Ausführung eines Querschnittes einen Knoten zu machen — geht nunmehr aus der Thatsache hervor, dass bei Verwandlung eines ringförmig geschlossenen unverdrehten Streifens in einen ringförmig geschlossenen verdrehten Streifen dessen Mittellinie dieselbe bleibt, und die den aufeinanderfolgenden Punkten der Ränder des unverdrehten Streifens correspondirenden Randpunkte des verdrehten Streifens zwar ihre Lagen gegen die Mittellinie, nicht aber ihre Abstände von der letzteren verändert haben. Es lassen sich daher die Randcurven der hier besprochenen verdrehten Streifen zugleich als Linien auf der Oberfläche eines körperlichen Ringes von kreisförmigem Querschnitte betrachten, dessen Mittellinie mit jenen der Streifen übereinstimmt, und dessen Querschnittsradien der halben Streifenbreite entsprechen. Führt man also durch einen derartigen Ring einen in seiner Mittellinie fortlaufenden Schnitt,[39] bei welchem die Achse des schneidenden Instrumentes in einem einzigen Umlaufe um irgend ein ganzes Vielfaches von 180^0 gedreht wird, so verhalten sich die beiden Hälften des zerschnittenen

Ringes ebenso zu einander wie jene eines zerschnittenen Streifens, dessen Gesammtverdrehung durch dasselbe Vielfache von 180^0 bestimmt erscheint.

Hieraus folgt, dass das in Betracht gezogene Problem auch eine unbegrenzte Reihe anschaulicher Lösungen besitzt, deren einfachste dadurch gewonnen wird, dass man die Achse des schneidenden Instrumentes während des Schnittes speciell um 3×180^0 dreht (Tafel II). — In diesem Falle entsteht nämlich ein Knoten mit einer einzigen Windung, während bei einer Achsendrehung um ein höheres ungerades Vielfaches von 180^0 immer Knoten mit zwei und mehr Windungen erzeugt werden.[40])

II. Die Transformation (B) im Raume.

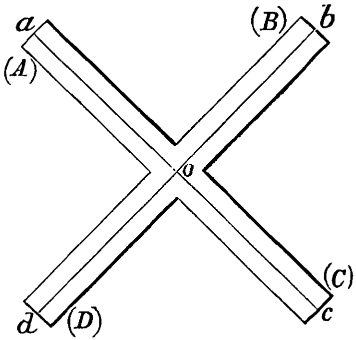
Da die Formen der rechten und linken Hand[41]) sich zu einander geometrisch wie die Gestalt eines gegebenen Objectes zum Spiegelbilde seiner Rückseite verhalten, hängt die theilweise Ausführbarkeit der Transformation (B) in unserem empirischen Raume davon ab, irgend welche geschlossene materielle Gebilde herzustellen, die einander in dem eben präcisirten Sinne entsprechen und zugleich eine derartige Biegsamkeit besitzen, dass die geforderte Umwandlung ohne jede partielle Unterbrechung des Zusammenhanges ihrer einzelnen Theile durchgeführt werden kann. Solche materielle Gebilde lassen sich nun in der That in unbegrenzter Anzahl construiren, besitzen jedoch mit Ausnahme der beiden auf Tafel III schematisch abgebildeten geschlossenen Flächen ziemlich complicirte Formen, so dass wir uns hier mit einer kurzen Anleitung zur Transformation der letzteren Flächen in einander begnügen wollen.

Wir gehen hiebei am zweckmässigsten von der in Fig. 3 (Tafel III) dargestellten Fläche aus, deren Verschlingung sich aus einem Knoten und einer Aufhängung nach dem Muster der Figuren 17 und 11 zusammensetzt, während dem Spiegelbilde der Rückseite der Fläche (*Fig.* 4) augenscheinlich ein Knoten und eine Aufhängung nach dem Muster der Figuren 18 und 12 zukommen. — Vorerst drehe man die rechte Ecke des Knotens der umzuformenden Fläche gegen sich und bilde hierauf aus den zwei in dieser Ecke zusammenstossenden Streifentheilen die Knotenwindung der neuen Fläche, wobei derselbe Streifentheil, welcher ursprünglich von der Windung des ersten Knotens umschlungen wurde, nunmehr die rechte Hälfte der Windung des neuen Knotens, beziehungsweise die linke Hälfte für die der zweiten Verschlingung charakteristische Aufhängung zu liefern hat. Die Erfüllung dieser Forderung erheischt natürlich die Einbiegung neuer Ecken in die Fläche, wobei man mit der Herstellung der obersten Knotenecke nach dem Muster der Fig. 4 beginnt und die gleichzeitig in zwei verschiedenen Streifentheilen auftretenden Torsionen längs des Streifens bis zur wechselseitigen Aufhebung gegeneinander schiebt. Man erhält so ohne besondere Schwierigkeit das gewünschte Spiegelbild der Rückseite der ursprünglichen Fläche, deren Unterseite jetzt dessen Oberseite bildet, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann, indem man vor Ausführung der Transformation an irgend einer Stelle der Oberseite der ursprünglichen Fläche eine Marke anbringt. Dreht man jedoch die Basis der neuen Verschlingung an einer beliebigen Stelle um 180°, fixirt die letztere und verschiebt dann die rechter Hand auftretende Torsion unter vorübergehender Aufbiegung der Ecken durch die Verschlingung hindurch in den unverschlungenen Theil des Streifens, so wird diese Torsion bei fortgesetzter Annäherung an die gleichzeitig links von der fixirten Stelle hervorgebrachte entgegengesetzte Torsion aufgehoben, d. h. man kann die transformirte Fläche auf solche Art schliesslich auch mit derselben Oberseite versehen wie die ursprüngliche Fläche.[42])

III. Die Transformation (C) im Raume.

Während die Ausführung der Transformation **(B)** im empirischen Raume selbst in dem vorhin beschriebenen einfachen Specialfalle einiges Verständniss für geometrische Formen voraussetzt, kann die Transformation **(C)** an unbegrenzt vielen Gebilden ohne irgendwelche geometrische Schulung anschaulich vollzogen, ja in einigen Fällen auch auf graphischem Wege gemeinfasslich erklärt werden. — Wir beschränken uns hier auf die Mittheilung des einfachsten Verfahrens, eine geschlossene materielle Fläche von der gewünschten Beschaffenheit herzustellen, und construiren dem entsprechend zunächst ein Streifenkreuz von der in Fig. 3 dargestellten Form, worauf wir das Ende *(C)* vor seiner Vereinigung mit *(A)* von *(D)* gegen *(B)* hin, ferner das Ende *(B)* vor seiner Vereinigung mit *(D)* von *(C)* gegen *(A)* hin um je 1×180^0 drehen.

Fig. 3.



Das so entstandene geschlossene Gebilde ist augenscheinlich als ein Complex von zwei um je $+ 1 \times 180^0$ verdrehten, ringförmig geschlossenen Streifen zu betrachten, deren Ränder demnach (man vergleiche die schematische Fig. 3 auf Tafel I) stets übereinstimmend mit den Doppellinien der Fig. 1 auf Tafel IV verlaufen. Sobald man nun die Fläche halbirt, d. h. die beiden sie constituirenden Streifen längs ihren Mittellinien $a\,c$ und $b\,d$ vollständig zerschneidet, erhält man zwei von einander isolirte Hälften, von welchen die eine der Randcurve mit der Ueberkreuzung: u (Fig. 2, Tafel IV), die andere der Randcurve mit der Ueberkreuzung: u' (Fig. 3, Tafel IV) zugehört. Die Ueberkreuzung u ist mit jener in Fig. 4 auf Tafel I, die Ueberkreuzung u' dagegen mit jener in Fig. 6 auf Tafel I gleichsinnig, d. h. es besitzt die eine Hälfte eine positive, die andere eine negative Ueberkreuzung zweier Streifentheile, deren Beseitigung kraft eines früheren Satzes die Gesammtverdrehung der einen Hälfte um 2×180^0 erhöht, jene der anderen Hälfte um 2×180^0 vermindert. Hieraus geht hervor, dass die beiden Hälften der Fläche, welche vor Ausführung des erwähnten Doppelschnittes nicht nur gleichen Umfang und Inhalt, sondern auch eine und dieselbe, der Summe der Torsionen beider Streifen gleichkommende Gesammtverdrehung um je $+ 2 \times 180^0$ besassen, in Folge des Schnittes insoferne eine verschiedene geometrische Beschaffenheit gewinnen, als die Gesammtverdrehung der einen Hälfte durch Verwandlung der Ueberkreuzung u in Torsionen nunmehr auf:

$$2 \times 180^0 + 2 \times 180^0 = 4 \times 180^0$$

steigt, während die andere Hälfte, deren Ueberkreuzung u' zwei Torsionen um je $- 1 \times 180^0$ äquivalent ist, ihre Gesammtverdrehung auf:

$$2 \times 180^0 - 2 \times 180^0 = 0$$

reducirt, d. h. jede Torsion verliert.

Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass sich das hier beschriebene Streifenkreuz überdies zur Construction einer geschlossenen Fläche verwenden lässt, [43]) welche nach Zerschneidung der Mittellinien beider Streifen die Transformation **(B)** ermöglicht. Dreht man nämlich das Ende *(C)* vor seiner Vereinigung mit *(A)* von *(D)* gegen *(B)* hin, ferner das Ende *(B)* vor seiner Vereinigung mit *(D)* von *(A)* gegen *(C)* hin um je 2×180^0, so liefert jener Doppelschnitt eine einzige geschlossene und unverdrehte Fläche, deren charakteristische Verschlingung ohne Entstehung irgendwelcher Torsionen nach dem Muster von jeder der beiden Figuren 3 und 4 auf Tafel III flachgedrückt werden kann, folglich auch stets in das Spiegelbild ihrer Rückseite transformirbar ist.

Anmerkungen.

1. Das erste Kaleidoskop wurde 1817 von dem grossen englischen Physiker D. Brewster construirt.

2. Hiebei liegt übrigens die Reizschwelle für einzelne Sinnesempfindungen ungemein niedrig. So ergab sich beispielsweise aus der empirisch bestimmbaren Entfernung, bis zu welcher Orgelpfeifen noch hörbar sind, auf dem Wege der Rechnung, dass Hören noch stattfindet, wenn die Lufttheilchen am Ohre eine Druckschwankung von 0·018 Mm. Wasser und eine Schwingungsamplitude von 0·00004 Mm. aufweisen. (S. h. L. Hermann's Lehrbuch der Physiologie, 7. Auflage, p. 353.)

3. Bekanntlich erstreckt sich das unmittelbar sichtbare Spectrum (s. das zuvor citirte Werk, p. 395) nur von den Fraunhofer'schen Linien *A* bis *H* und umfasst demgemäss nur Schwingungen von 0·00076 bis 0·00039 Mm. Wellenlänge, so dass beispielsweise Aetherschwingungen von 0·0001 Mm. Wellenlänge keinerlei Lichtempfindung erzeugen können.

4. Damit überhaupt ein Ton und nicht getrennte Stösse gehört werden, sind 15—40 Oscillationen in der Secunde erforderlich, während den höchsten noch hörbaren Tönen 16000 bis 41000 Oscillationen in der Secunde entsprechen. Hiernach erstreckt sich die Hörfähigkeit mindestens auf $8^1/_2$ und höchstens auf $11^1/_2$ Octaven. (S. das zuvor citirte Werk, p. 354.)

5. Im Anschlusse hieran mag auf folgende Betrachtungen von H. Helmholtz (s. dessen 1879 zu Berlin im Druck erschienene Rede: „Die Thatsachen in der Wahrnehmung", p. 12, 13) verwiesen werden: „Insofern die Qualität unserer Empfindung uns von der Eigenthümlichkeit der äusseren Einwirkung, durch welche sie erregt ist, eine Nachricht gibt, kann sie als ein *Zeichen* derselben gelten, aber nicht als ein *Abbild*. Denn vom Bilde verlangt man irgend eine Art der Gleichheit mit dem abgebildeten Gegenstande, von einer Statue Gleichheit der Form, von einer Zeichnung Gleichheit der perspectivischen Projection im Gesichtsfelde, von einem Gemälde auch noch Gleichheit der Farben. Ein Zeichen aber braucht gar keine Art der Aehnlichkeit mit dem zu haben, dessen Zeichen es ist. Die Beziehung zwischen beiden beschränkt sich darauf, dass das *gleiche* Object, unter *gleichen* Umständen zur Einwirkung kommend, das *gleiche* Zeichen hervorruft, und dass also *ungleiche* Zeichen immer *ungleicher* Einwirkung entsprechen.

„Der populären Meinung gegenüber, welche auf Treu und Glauben die volle Wahrheit der Bilder annimmt, die uns unsere Sinne von den Dingen liefern, mag dieser Rest von Aehnlichkeit, den wir anerkennen, sehr geringfügig erscheinen. In Wahrheit ist er es nicht; denn mit ihm kann noch eine Sache von der allergrössten Tragweite geleistet werden, nämlich die Abbildung der *Gesetzmässigkeit* in den Vorgängen der wirklichen Welt. Jedes Naturgesetz sagt uns, dass auf Vorbedingungen, die in gewisser Beziehung gleich sind, immer Folgen eintreten, die in gewisser anderer Beziehung gleich sind. Da *Gleiches* in unserer Empfindungswelt durch *gleiche Zeichen* angezeigt wird, so wird der *naturgesetzlichen* Folge gleicher Wirkungen auf gleiche Ursachen auch eine *ebenso regelmässige* Folge im Gebiete unserer Empfindungen entsprechen.

„Wenn Beeren einer gewissen Art beim Reifen zugleich rothes Pigment und Zucker ausbilden, so werden in unserer Empfindung bei Beeren dieser Form rothe Farbe und süsser Geschmack sich immer zusammenfinden.

„Wenn also unsere Sinnesempfindungen in ihrer *Qualität* auch nur *Zeichen* sind, deren besondere Art ganz von unserer Organisation abhängt, so sind sie doch nicht als leerer Schein zu verwerfen, sondern sie sind eben Zeichen von Etwas, sei es etwas Bestehendem oder Geschehendem, und, was das Wichtigste ist, das Gesetz dieses Geschehens können sie uns abbilden. — Die Qualitäten der Empfindung also erkennt auch die Physiologie als blosse Form der Anschauung an."

6. S. h. S. Stricker's 1877 im LXXVI. Bd. d. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, III. Abth., p. 283—305, publicirte Abhandlung: „Untersuchungen über das Ortsbewusstsein und dessen Beziehungen zu der Raumvorstellung."

7. Auch dieser fundamentale Satz ist in der eben citirten Abhandlung Prof. Stricker's enthalten.

8. Die kleinste Distanz, bis zu welcher die Zirkelspitzen einander genähert werden können, ehe sie als eine einzige Spitze empfunden werden, ist für verschiedene Oberflächentheile des menschlichen Körpers sehr verschieden. So beträgt dieselbe nach den Versuchen Weber's (vergl. W. Wundt's Grundzüge der physiologischen Psychologie, 2. Aufl., 2. Bd., p. 7) beispielsweise für die Zungenspitze im Mittel 1 Mm., für den rothen Rand der Lippen 5 Mm., für den Handrücken 31 Mm., endlich für die Mitte des Rückens 68 Mm.

9. Näheres hierüber findet man im Handbuche der physiologischen Optik von H. Helmholtz, p. 215—222.

10. Auf dem Durchmesser dieses „blinden Flecks" könnten nach den Messungen von H. Helmholtz (s. dessen eben citirtes Werk, p. 213) eilf Vollmonde nebeneinander Platz finden.

11. S. h. S. Stricker's 1879 zu Wien erschienene „Studien über das Bewusstsein", p. 45—49.

12. Vergl. hierüber die eben citirte Broschüre Prof. Stricker's, p. 8—10.

13. S. h. S. Stricker's 1882 zu Wien erschienene „Studien über die Bewegungsvorstellungen", p. 11—13.

14. S. h. die eben citirte Broschüre Prof. Stricker's, p. 35—38.

15. S. h. die Schrift: „Die Thatsachen in der Wahrnehmung", p. 20, 21.

16. S. h. z. B. die Berichte Cheselden's und Wardrop's (reproducirt in H. Helmholtz's Handbuch der physiologischen Optik, p. 587—592) unter Hinzuziehung des eingehenden Resumé's über die Mittheilungen der genannten und anderer Aerzte in C. Stumpf's Werk: „Ueber den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung", p. 289—293.

17. Kinder pflegen in den ersten Stadien ihrer Entwicklung nach allen Gegenständen, welche sie sehen, zu greifen, selbst nach dem Monde.

18. Nur auf diesen Raum können die bekannten Worte Kant's (Einleitung in die Kritik der reinen Vernunft) bezogen werden: „Lasset von Eurem Erfahrungsbegriffe eines Körpers Alles, was daran empirisch ist, nach und nach weg, die Farbe, die Härte oder Weiche, die Schwere, die Undurchdringlichkeit, so bleibt doch der Raum übrig, den er (welcher nun ganz verschwunden ist) einnahm, und den könnt Ihr nicht weglassen."

19. Dieser oberste Grundsatz jeder empirischen Geometrie ist zuerst von H. Grassmann (s. dessen 1844 zu Leipzig erschienene „Lineale Ausdehnungslehre", p. 35) ausgesprochen worden.

20. Zur weiteren Charakteristik der Bedeutung der geometrischen Axiome mögen folgende Auseinandersetzungen von H. Helmholtz (s. dessen populäre wissenschaftliche Vorträge, 3. Heft, p. 50, 51) dienen: „Es ist übrigens nicht meine Absicht, zu behaupten, dass die Menschheit erst durch sorgfältig ausgeführte Systeme genauer geometrischer Messungen Anschauungen des Raumes, die den Axiomen des Euklides entsprechen, gewonnen habe. Es musste vielmehr eine Reihe alltäglicher Erfahrungen, namentlich die Anschauung von der geometrischen Aehnlichkeit grosser und kleiner

Körper darauf führen, jede geometrische Anschauung, die dieser Thatsache widersprach, zu verwerfen. Dazu war keine Erkenntniss des begrifflichen Zusammenhanges zwischen der beobachteten Thatsache geometrischer Aehnlichkeit und den Axiomen nöthig, sondern nur durch zahlreiche und genaue Beobachtungen von Raumverhältnissen gewonnene anschauliche Kenntniss ihres typischen Verhaltens, eine solche Art der Anschauung, wie sie der Künstler von den darzustellenden Gegenständen besitzt, und mittelst deren er sicher und fein entscheidet, ob eine versuchte neue Combination der Natur des darzustellenden Gegenstandes entspricht oder nicht. Das wissen wir zwar in unserer Sprache auch mit keinem anderen Namen als dem der „Anschauung" zu bezeichnen; aber es ist dies eine empirische, durch Häufung und Verstärkung gleichartig wiederkehrender Eindrücke in unserem Gedächtniss gewonnene Kenntniss, keine transcendentale und vor aller Erfahrung gegebene Anschauungsform. Dass dergleichen empirisch erlangte und noch nicht zur Klarheit des bestimmt ausgesprochenen Begriffes durchgearbeitete Anschauungen eines typisch gesetzlichen Verhaltens häufig genug den Metaphysikern als a priori gegebene Sätze imponirt haben, brauche ich hier nicht weiter zu erörtern."

21. Ich habe diesen Satz bereits im Jahre 1881 in meiner Broschüre: „Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen — und verwandter merkwürdiger Probleme" ausgesprochen und im Anschlusse hieran speciell jene vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit analytisch präcisirt, welche ich in meinen bisherigen Untersuchungen über unbegrenzte und endliche dreidimensionale Mannigfaltigkeiten als analytischen Hilfsbegriff verwendet habe.

22. Die Fähigkeit hiezu dürfte vielen Menschen vollständig fehlen. — So erklären z. B. Berkeley und Stumpf, es liesse sich keine Ausdehnung ohne Farbe denken, während Kant in seinem früher citirten Ausspruche andeutet, er könne sich auch Ausdehnung ohne jede Farbe vorstellen. — Sicherlich thun dies alle Blindgebornen, welche auch die räumlichen Verhältnisse ihrer nächsten Umgebung richtig beurtheilen.

23. S. h. dessen populäre Vorlesungen, 3. Heft, p. 25.

24. Ihr analytisch-geometrischer Begriff repräsentirt eine einfache Specialisirung des zuerst von B. Riemann in seinem Vortrage „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ (s. die von H. Weber veranstaltete Gesammtausgabe der Werke Riemann's, p. 254—268) aufgestellten analytisch-geometrischen Begriffes einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

25. S. h. Prof. Zöllner's „Wissenschaftliche Abhandlungen“, 2. Bd., p. 214—219 und p. 911—913.

26. Ich habe die physikalische Unzulässigkeit dieser Annahme bereits am 1. December 1881 in einer im Vortragssaale des „Wissenschaftlichen Club“ in Wien abgehaltenen Vorlesung: „Ueber die Verwendbarkeit des Begriffes: ‚Vierdimensionaler Raum‘ zur Erklärung gewisser spiritistischer Phänomene“ (s. die „Monatsblätter des Wissenschaftlichen Club in Wien“, III. Jahrgang, Nr. 4, p. 44, 45) dargethan und weise hier neuerdings darauf hin, dass die erwähnte Hypothese mit den mathematischen Untersuchungen über höhere Mannigfaltigkeiten überhaupt in keinem inneren Zusammenhange steht. Um übrigens den Leser über den sachlichen Werth derartiger Forschungen noch anderweitig aufzuklären, mögen an dieser Stelle folgende Worte von Helmholtz (s. dessen 1878 zu Berlin im Druck erschienene Rede: „Das Denken in der Medicin“, 2. Auflage, p. 30, 31) reproducirt werden: „Seit Kant ist die reine Anschauung a priori der Ankerplatz der Metaphysiker geworden. Sie ist noch bequemer als das reine Denken, weil man ihr Alles aufbürden kann, ohne sich in Schlussketten hineinzubegeben, die einer Prüfung und Widerlegung fähig wären. Die nativistische Theorie der Sinneswahrnehmungen ist der Ausdruck dieser Theorie in der Physiologie. Alle Metaphysiker kämpfen vereinigt gegen jeden Versuch, die Anschauungen, seien es sogenannte reine oder empirische, die Axiome der Geometrie, die Grundsätze der Mechanik oder die Gesichtswahrnehmungen in ihre rationellen Elemente aufzulösen. Eben wegen dieses Sachverhaltes halte ich die neueren mathematischen Untersuchungen von Lobatschewsky, Gauss, Riemann u. A. über die logisch möglichen Abänderungen der Axiome der Geometrie und den Nachweis, dass die Axiome Sätze sind, die durch die Erfahrung bestätigt oder vielleicht auch widerlegt und deshalb aus der Erfahrung gewonnen werden können, für einen sehr wichtigen Fortschritt."

27. Da es vollkommen unmöglich ist, bei Nichtmathematikern eine klare Einsicht in den Begriff einer unbegrenzten, aber endlichen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit herbeizuführen, identificire ich hier unseren Sinnenraum stillschweigend mit einer — im Riemann'schen Sinne — „ebenen", dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, was sich in Anbetracht seines jedenfalls sehr kleinen Krümmungsmasses auch mathematisch rechtfertigen lässt. Anderseits sei jedoch darauf hingewiesen, dass die gerade für die praktische Verwerthung mancher Ingenieurwissenschaften unentbehrliche Geometrie der Lage — Culmann's bahnbrechende Constructionsmethoden gründen sich zumeist auf diese Geometrie — gezwungen ist, die gerade Linie im Gegensatze zur Geometrie Euklid's als eine geschlossene Linie mit einem einzigen, unendlich fernen Punkte zu definiren.

28. Dieser Satz bildet im Vereine mit der Relation:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2,$$

in welcher φ; α_1, α_2; β_1, β_2 (s. die schematische Fig. 1) der Reihe nach die Winkel:

$$AOM; AOX, MOX; AOY, MOY$$

vorstellen, zugleich das analytische Fundament für alle Massbestimmungen in einer gegebenen Ebene.

29. Dieser Satz bildet im Vereine mit der Relation:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2,$$

in welcher φ; α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 (s. die schematische Fig. 2) der Reihe nach die Winkel:

$$AOM;\ AOX,\ MOX;\ AOY,\ MOY;\ AOZ,\ MOZ$$

vorstellen, zugleich das analytische Fundament für alle Massbestimmungen im Raume.

30. Zu diesem Satze tritt dann noch die Relation:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2$$

in welcher φ nunmehr den Winkel zwischen den Radienvectoren zweier Punkte der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit vorstellt, und α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2 die Winkel der beiden Radienvectoren mit den vier Coordinatenachsen repräsentiren.

31. Die eigenthümlichen Vorzüge der analytisch-geometrischen Forschungsmethode sind bereits im Jahre 1868 von Helmholtz in seiner in den „Göttinger Nachrichten" publicirten Abhandlung: „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen", wie folgt, gekennzeichnet worden: „Die analytische Behandlung der Frage, wodurch sich der Raum unterscheide von anderen abmessbaren, mehrfach ausgedehnten und continuirlichen Grössen, empfiehlt sich gerade durch den Umstand, dass sie der Anschaulichkeit ermangelt und deshalb den auf diesem Gebiete so schwer zu vermeidenden Täuschungen durch die besondere Begrenztheit unserer Anschauungen nicht ausgesetzt ist."

32. Um den Leser auch mit den diesbezüglichen Ansichten des grössten deutschen Mathematikers: F. Gauss, bekannt zu machen, citire ich hier aus der 1856 zu Leipzig erschienenen Schrift von Sartorius von Waltershausen: „Gauss zum Gedächtniss" — folgende Worte: „Gauss, nach seiner öfters ausgesprochenen innersten Ansicht, betrachtete die drei Dimensionen des Raumes als eine specifische Eigenthümlichkeit der menschlichen Seele; Leute, welche dieses nicht einsehen könnten, bezeichnete er einmal in seiner humoristischen Laune mit dem Namen: Boeotier. Wir können uns, sagte er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewusst sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken, und er habe, fuhr er scherzend fort, gewisse Probleme hier zur Seite gelegt, die er in einem höheren Zustande später geometrisch zu behandeln gedächte."

33. Das erste hieher gehörige Problem wurde von R. Hoppe (s. dessen 1879 im 64. Bande von Grunert's Archiv der Mathematik und Physik publicirte Abhandlung: „Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten nebst Auflösung in vierter Dimension") analytisch gelöst.

34. Die wörtliche Wiedergabe meines frei gehaltenen Vortrages würde in Anbetracht des mir zur Verfügung stehenden Raumes eine sachlich nachtheilige Einschränkung der Anmerkungen nach sich gezogen haben.

35. Handelt es sich um eine rasche Demonstration der im Folgenden beschriebenen Experimente, so ist es am zweckmässigsten, die beiden Enden des Streifens nur mit zwei seiner Mittellinie parallel gesteckten Nadeln derart aufeinander zu heften, dass man zwischen den Nadeln noch bequem hindurchschneiden kann.

36. Diese Thatsache ermöglicht zugleich die Lösung der nachstehenden Aufgabe: Es sei ein derartiger ringförmig geschlossener Streifen herzustellen, dass ein einziger Längsschnitt zwei ringförmig geschlossene Streifen erzeugt, von welchen der eine ebenso breit, aber doppelt so lang als der andere ist. — Zieht man nämlich auf der oberen und unteren Fläche eines rechteckigen Streifens parallel zu dessen Längsseiten je zwei gerade Linien, welche den Streifen in drei gleiche Theile theilen, und verdreht hierauf dessen rechtseitiges Ende vor seiner Vereinigung mit dem anderen Ende um $\pm 1 \times 180^0$, so liefert ein in jenen Linien fortlaufender Längsschnitt, da er kraft der erwähnten Thatsache erst nach Durchlaufung beider Linienpaare in sich selbst zurückkehrt, das gewünschte Resultat.

37. Führt man in dem um 3×180^0 verdrehten, ringförmig geschlossenen Streifen den in der vorigen Anmerkung charakterisirten Schnitt aus, so erhält man zwei Streifen, von welchen der eine ebenso breit, aber doppelt so lang als der andere und auf diesem einmal aufgeknüpft ist.

38. Die Schlüsse bilden ihrerseits wieder Specialisirungen zweier allgemeinerer Gesetze, welche ich zuerst 1880 in der zweiten Auflage meiner früher citirten Broschüre veröffentlicht habe.

39. Nach meinen Erfahrungen sind Ringe aus weichem, vulcanisirten Kautschuk die zu einer Demonstration der hier discutirten Erscheinungen geeignetsten Versuchsobjecte. Es genügt dann zur Ausführung des betreffenden Schnittes ein scharfes Federmesser, dessen Klinge man, um leichter schneiden zu können, öfter in Wasser zu tauchen hat.

40. Ausser den hier beschriebenen Knoten lassen sich in einem körperlichen Ringe durch Längsschnitte noch unendlich viele andere, zumeist sehr complicirte Verschlingungen herstellen, deren vollständige Charakteristik ich in meiner Abhandlung: „Ueber eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze" (veröffentlicht im 85., 87. und 88. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie) gegeben habe.

41. Kant war der Erste, welcher die theoretische Bedeutung der Thatsache, dass die rechte Hand nicht in die linke transformirbar ist, klar erkannt und zu einer Erörterung der Frage nach der Existenz eines absoluten Raumes philosophisch verwerthet hat. (S. die im 2. Bande der Hartenstein'schen Gesammtausgabe der Werke Kant's reproducirte Abhandlung: „Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume", p. 389—391). — In Hinblick hierauf bemerkt Prof. Zöllner (s. dessen „wissenschaftliche Abhandlungen", 1. Band, p. 223, 224) mit Recht: „Diejenigen Wahrheiten, welche die grösste Tragweite für das Verständniss der Welt haben, verbirgt die Natur am sichersten unter dem Schleier der Alltäglichkeit, den zu lüften sie nur ihren Auserwählten und Lieblingen gestattet. So enthüllte sie Newton in der Ursache eines fallenden Apfels das Geheimniss der materiellen Bewegungen im Universum, und dieselbe Gunst bewies sie Kant fast genau hundert Jahre später, als sie ihm in dem Unterschiede zwischen der rechten und linken Hand das Geheimniss der räumlichen Anschauungsformen enthüllte, in denen unser Verstand gezwungen ist, sich alle wahrgenommenen Unterschiede und Bewegungen des Universums vorzustellen."

42. Die bekannte Manipulation, einen Handschuh für die rechte Hand durch Umstülpen in einen solchen für die linke Hand zu verwandeln, darf hiernach mit der hier geschilderten Transformation überhaupt nicht verglichen werden.

43. Eine vollständige Beschreibung aller diesbezüglichen von mir entdeckten Flächenformen findet der Leser in meiner 1881 im 84. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie (2. Abtheilung) veröffentlichten Abhandlung: „Ueber jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und gewisse in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen."

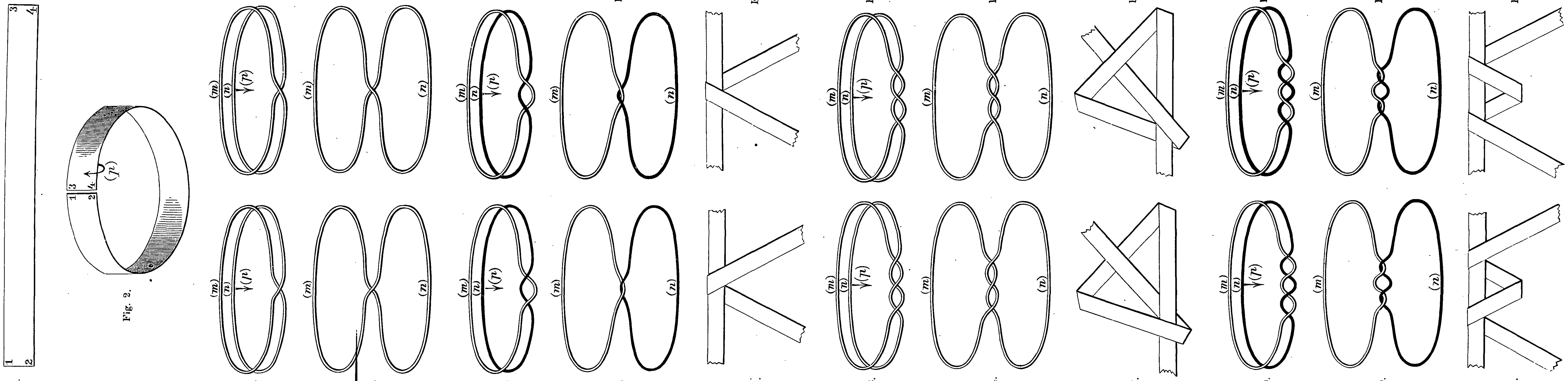
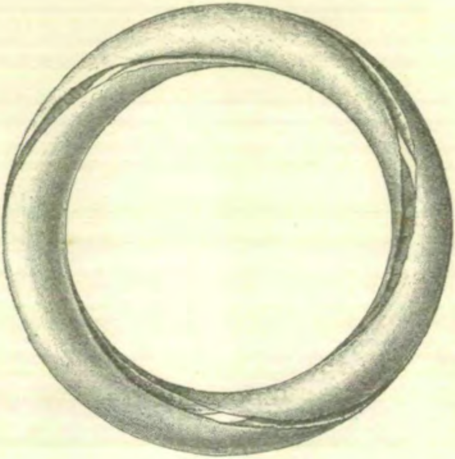
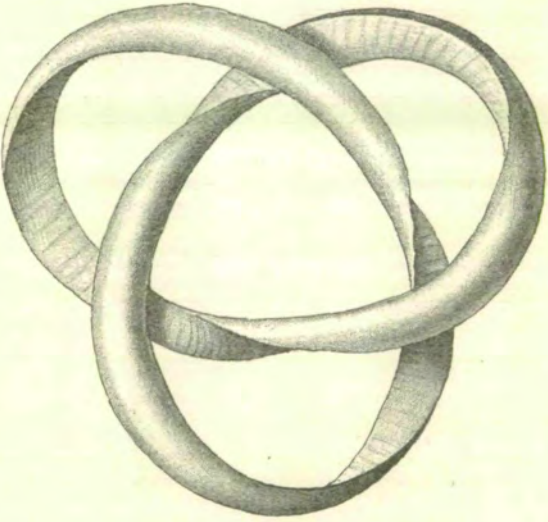


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14. Fig. 15. Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23. Fig. 24.

Tafel II.





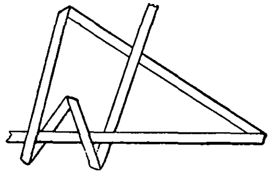


Fig. 1.

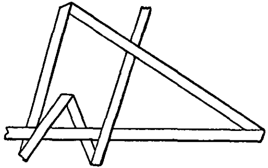


Fig. 2.

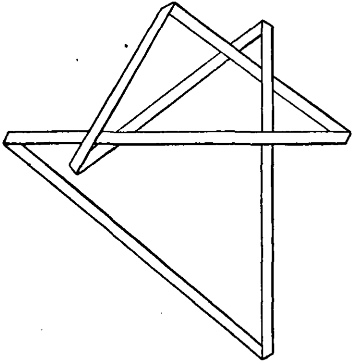


Fig. 3.

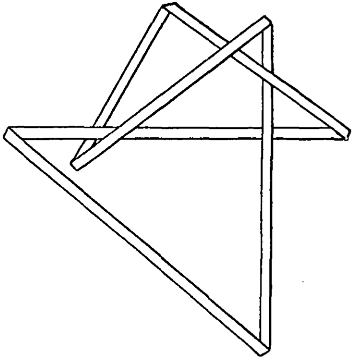


Fig. 4.

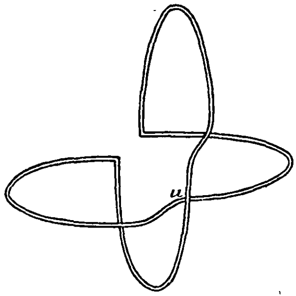


Fig. 2.

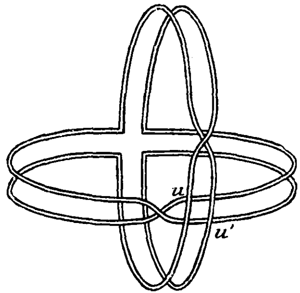


Fig. 1.

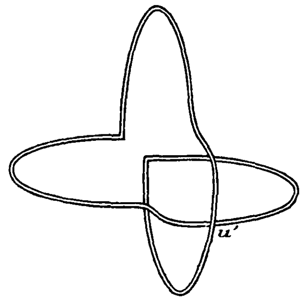


Fig. 3.