

## Zur Darstellung und Deutung von Kornverteilungen

Von H. zur Strassen, Wiesbaden-Biebrich

(Verschiedene Anschauungen über die „richtige“ Darstellung eines Körnungs-Kollektivs; kritische Betrachtung über lineare und logarithmische Intervallteilung, Gewichts- und Oberflächenverteilung; Deutung statistisch-gesetz-mäßiger Kornverteilungen; rationelle Kennzeichnung beliebiger Kollektive.)

(Different views on the correct presentation of a grain collective; critical considerations regarding the linear and logarithmic presentation of interval division, weight and surface distribution; interpretation of grain distribution in accordance with statistical laws; rational characterization of collectives in general.)

(Des opinions diverses concernant la présentation correcte d'un collectif de grains. Des considérations critiques quant à la présentation linéaire et logarithmique de la division en intervalles et de la répartition du poids et de la surface; interprétation de la répartition de grain suivant les lois statistiques, la caractéristique rationnelle des collectifs en général.)

### I.

Die Frage, was unter „Kornverteilung“ zu verstehen ist, ist noch durchaus umstritten. Das Ergebnis einer experimentellen Kornanalyse ist zunächst die (Durchgangs- oder Rückstands-) Kennlinie. Hierfür gibt es je nach der verwendeten Funktion von Korndurchmesser  $a$  und Rückstand  $R$  die verschiedensten zeichnerischen Darstellungsmöglichkeiten, von denen eine Auswahl in den Abbildungen 1—3 wiedergegeben ist; wenn auch die Formen der Kurven verschieden sind, handelt es sich doch in jedem Fall um den gleichen eindeutigen Zusammenhang zwischen  $a$  und  $R$ .

an sich gleichwertigen — Verteilungskurven einen wirklichen physikalischen Sinn hat.

Feifel (1, 2), der sich sehr eingehend mit den analytischen Zusammenhängen der verschiedensten Kornverteilungs-Funktionen befaßt hat, hält ebenso wie Rammler (3, 4) die lineare Kornverteilungskurve für die richtige; Bierbrauer und Hönig (5) haben dargelegt, daß die wahre Gewichtsverteilung durch die logarithmische Darstellung gegeben ist; nach Theimer und Moser (6) wiederum ist die Frage gegenstandslos, da „jede eindeutig definierte physikalische Größe wohl zweckmäßig oder unzulässig, aber niemals falsch oder richtig sein kann“. In der

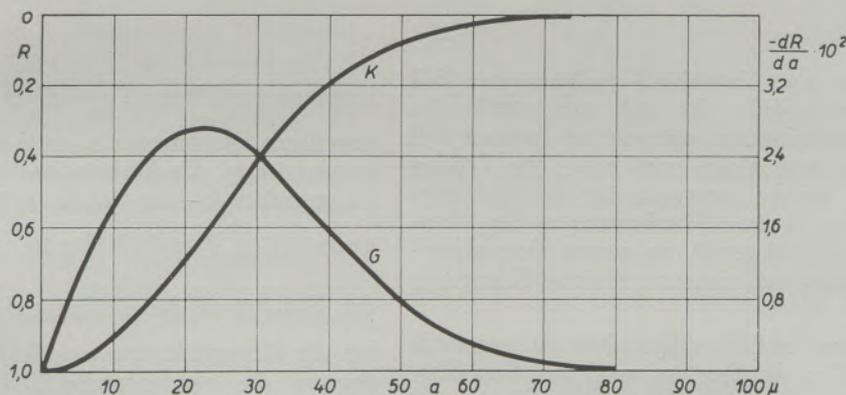


Abb. 1

Lineare Darstellung einer Kornverteilung nach dem Zerkleinerungsgesetz

K = lineare Kennlinie

G = lineare Gewichtsverteilungskurve

Aus der Kennlinie erhält man die Gewichtsverteilungskurve durch Differentiation. Hier ist das Ergebnis aber verschieden, je nachdem, ob man die lineare (Abb. 1), logarithmische (Abb. 2) oder andere, hier nicht gezeigte Funktionen des Durchmessers verwendet. So hat die lineare Gewichtsverteilungskurve ihr Maximum der Korngröße bei  $22,4 \mu$ , die logarithmische bei  $31,6 \mu$ , und es erhebt sich die Frage, welche von diesen — mathematisch

sonstigen Literatur werden teils die lineare, teils die logarithmische Darstellung, oder auch beide gleichberechtigt nebeneinander angewandt.

### II.

Um unseren Standpunkt zu dieser Frage zu finden, knüpfen wir an die Argumente an, mit denen Bierbrauer und Hönig zu einer Ablehnung der linearen Gewichtsverteilung gekommen sind.

Wenn wir erst einmal von der Differentiation absehen, so erhält man die Gewichtsverteilung, indem man die Kennlinie in gleiche Intervalle teilt, die lineare Kennlinie also in arithmetisch gleiche Intervalle, und den zu jedem Durchmesser-Intervall gehörenden Gewichtsanteil ermittelt. Auf diese Weise erhält z. B. der Bereich von 1—2  $\mu$  dieselbe Bedeutung wie der von 100—101  $\mu$ , denn beide besitzen als gemeinsames Kennzeichen die In-

Verhältnis der Intervallgrenzen in allen Bereichen konstant, die Kornbereiche sind einander ähnlich. Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man von der linearen zur logarithmischen Kennlinie übergeht und die logarithmische Abszisse in arithmetisch gleiche Intervalle teilt.

In der logarithmischen Darstellung kann man wieder zur Grenze übergehen, wobei man die unendlich kleinen Bereiche  $d \ln a$  erhält. Diese sind, wie die

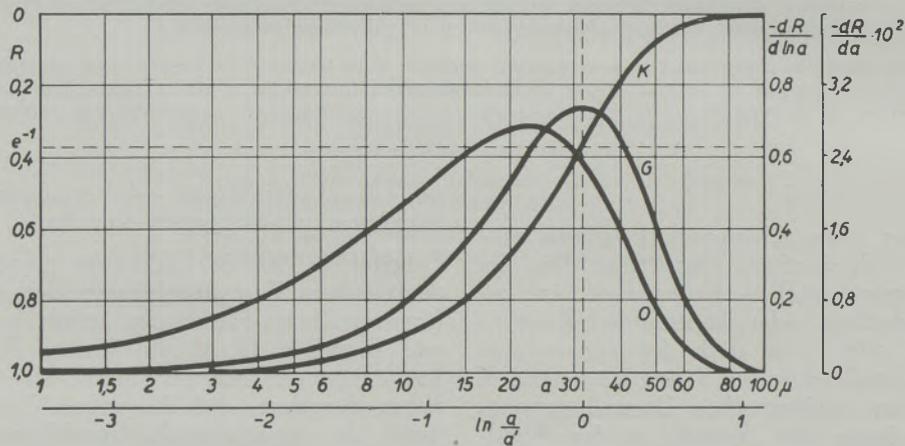


Abb. 2

Logarithmische Darstellung einer Kornverteilung nach dem Zerkleinerungsgesetz

- K = logarithmische Kennlinie
- G = logarithmische Gewichtsverteilungskurve
- O = logarithmische Oberflächenverteilungskurve

tervallbreite von 1  $\mu$ . Tatsächlich sind im einen Fall Körner zusammengefaßt, die sich um 100 % im Durchmesser unterscheiden, während im anderen Fall alle Körner praktisch gleich groß sind. Die Teilung in arithmetisch gleiche Intervalle ist also unbefriedigend; sie führt zu einer Überbewertung der kleinsten Körner und demgemäß zu einem Verteilungs-Maximum, welches bei einer zu kleinen Korngröße liegt.

Gehen wir von endlichen Bereichen zu unendlich kleinen Intervallen  $da$  über, so wird der Gewichtsanteil  $\frac{dR}{da} \cdot da$ . Der Zahlenwert des Differentialquotienten  $\frac{dR}{da}$  ist dabei der auf die Einheit der Intervallbreite  $a_2 - a_1 = 1$  ( $\mu$  oder mm) entfallende Gewichtsanteil, falls der bei  $a = \frac{1}{2} (a_1 + a_2)$  gemessene Richtungskoeffizient der Kennlinie über die ganze Intervallbreite konstant bliebe. Die an der arithmetischen Intervallteilung geübte Kritik gilt natürlich auch für die lineare Differentialkurve; das Maximum dieser Kurve, welches wir bei 22,4  $\mu$  gefunden haben, liegt also bei einem zu kleinen Durchmesser.

Die Forderung nach Ähnlichkeit oder Vergleichbarkeit der Intervallgrenzen wird erfüllt, wenn man statt der arithmetischen eine geometrische Intervallteilung vornimmt, also z. B. die Intervallgrenzen bei 1, 2  $\mu$ , 4  $\mu$ , 8  $\mu$  usw. wählt. In diesem Fall bleibt das

Umformung  $d \ln a = \frac{1}{a} \cdot da$  zeigt, proportional zum jeweiligen Durchmesser  $a$ , so daß die Forderung nach geometrischer Ähnlichkeit der Intervallgrenzen auch im unendlich kleinen Bereich erfüllt bleibt. Der Mengenanteil im Bereich  $d \ln a$  ist  $\frac{dR}{d \ln a} \cdot d \ln a$ , und

der Zahlenwert des Differentialquotienten  $\frac{dR}{d \ln a}$  ist bei der Korngröße  $\ln a = \frac{1}{2} (\ln a_1 + \ln a_2)$  gleich dem auf die logarithmische Einheit  $\ln a_2 - \ln a_1 = 1$ , d. h.  $a_2 : a_1 = e$ , bezogenen Gewichtsanteil. Das Maximum der logarithmischen Kornverteilungskurve bei 31,6  $\mu$  gibt also diejenige Korngröße an, die von allen beliebig kleinen, aber stets den gleichen prozentualen Anteil des Durchmessers ausmachenden Bereichen den größten Gewichtsanteil hat.

Diese Betrachtungsweise wurde von zur Strassen und Strätling (7) von der Gewichtsverteilung auf die Oberflächenverteilung übertragen. Sei  $dO$  ein unendlich kleines Oberflächenelement, dann gibt  $\frac{dO}{d \ln a} d \ln a$  den zu dem unendlich kleinen Intervall  $d \ln a$  gehörigen Oberflächenanteil an. Nach der bekannten Beziehung zwischen Oberfläche und Gewicht der gleichen Korngröße (Formfaktor = 1 gesetzt, spezifisches Gewicht =  $\sigma$ )

$$dO = \frac{6}{\sigma} \cdot \frac{1}{a} dR \quad [1]$$

wird

$$\frac{dO}{d \ln a} = \frac{6}{\sigma} \cdot \frac{dR}{a d \ln a} = \frac{6}{\sigma} \cdot \frac{dR}{da} \quad [2]$$

$\frac{dR}{da}$  ist aber der Differentialquotient der linearen Kennlinie, der damit in der logarithmischen Darstellung die Bedeutung eines Maßes für die Oberflächenverteilung hat: er gibt also nicht nur den Gewichtsanteil bezogen auf die Einheit der linearen Intervallbreite  $a_2 - a_1 = 1$  an, sondern auch — bis auf einen Zahlenfaktor — den Oberflächenanteil bezogen auf die Einheit der logarithmischen Intervallbreite  $a_2 : a_1 = e$ . Das Maximum des linearen Differentialquotienten bei  $22,4 \mu$  (Abb. 1) bedeutet also in der logarithmischen Darstellung diejenige Korngröße, bei der die Oberflächenentwicklung am größten ist und die Funktion  $\frac{dO}{d \ln a} = \frac{6}{\sigma} \cdot \frac{dR}{da}$  in Abhängigkeit von  $\ln a$  stellt die logarithmische Oberflächenverteilungskurve dar (Abb. 2). Das Flächenintegral der Oberflächenverteilungskurve zwischen den Grenzen  $a_{\min}$  und  $a_{\max}$

$$O = \frac{6}{\sigma} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{dR}{da} d \ln a \quad [3]$$

ist die Odén'sche Darstellung der Oberfläche (7).

Wir können also als Ergebnis dieses Abschnitts auf die eingangs gestellte Frage die Antwort geben, daß die Bierbrauer-Hönig'sche Anschauung die richtige ist: Allein die logarithmische Darstellung der Kornverteilung erfüllt die Forderung nach geometrischer Ähnlichkeit der Intervalle, indem bei gleichmäßiger Teilung das Verhältnis der Intervallgrenzen konstant ist. Sie vermag außerdem nicht nur das Maximum der logarithmischen Verteilungskurve — als Gewichtsmaximum —, sondern auch dasjenige der linearen Verteilungskurve — als Oberflächenmaximum — zu erklären.

### III.

Vor anderen Kornverteilungen sind die bei Mahlvorgängen entstehenden Kollektive dadurch ausgezeichnet, daß sie in den meisten Fällen näherungsweise durch ein einfaches Gesetz, das Rosin-Rammler'sche Zerkleinerungsgesetz

$$R = e^{-\left(\frac{a}{a'}\right)^n} \quad [4]$$

oder

$$-\ln \ln R = n \ln \frac{a}{a'} \quad [5]$$

darzustellen sind. An dieser Gesetzmäßigkeit soll die Richtigkeit der im vorigen Abschnitt entwickelten Gedanken kontrolliert werden.

Die Gültigkeit des Exponentialgesetzes wird bekanntlich im Bennett-Diagramm (Abb. 3) geprüft, in welchem der doppelte Logarithmus des Rückstandes gegen den einfachen Logarithmus des Durchmessers aufgetragen ist; nach [5] besteht zwischen diesen Größen eine lineare Proportionalität, und man erhält die Kennwerte der Kornverteilung, nämlich den

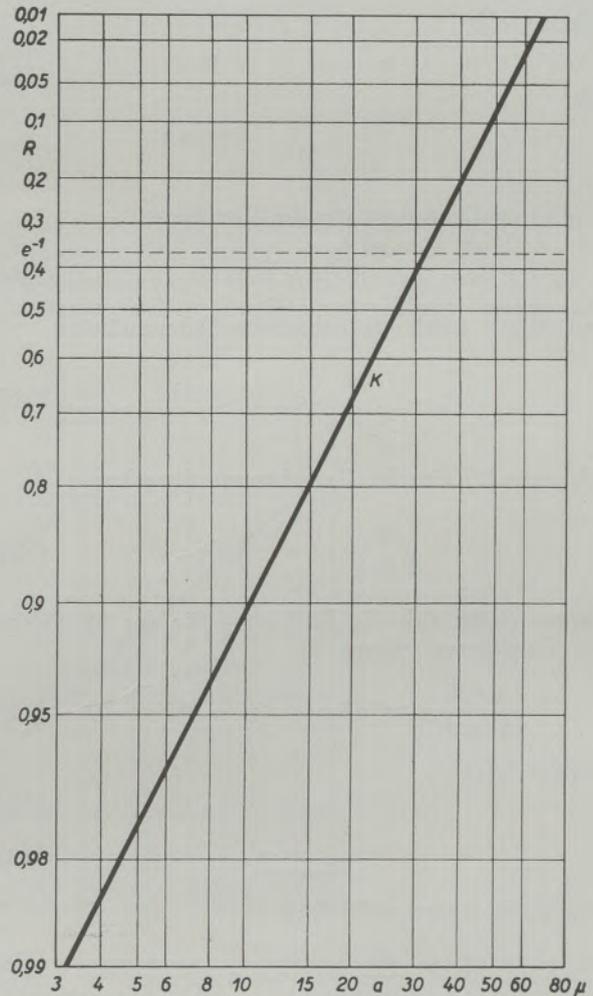


Abb. 3

Kennlinie im Bennett-Diagramm

Die gleiche Funktion wie in den Abb. 1 und 2

$$a' = 31,6 \mu, n = 2$$

„kennzeichnenden Durchmesser“  $a'$  und den „Verteilungsexponenten“  $n$  aus dem Schnittpunkt mit der Ordinate  $R = \frac{1}{e} = 0,368$  bzw. aus der Richtungskonstanten der Geraden.

Mit den dem Bennett-Diagramm entnommenen Kenngrößen weiß man aber noch nichts über deren Bedeutung; denn diese ergibt sich erst aus der Kornverteilungskurve, während das Zerkleinerungsgesetz eine Kennlinie beschreibt.

Nun ist bereits von Rammler (4) und Feifel (2) festgestellt worden, daß die lineare Kornverteilungs-

kurve in keiner direkten Beziehung zu den Kennwerten des Zerkleinerungsgesetzes steht. Wir kommen später darauf zurück und berechnen zunächst die logarithmische Verteilungskurve.

Hierzu verwendet man zweckmäßig die häufig gebrauchte Substitution

$$q = \left(\frac{a}{a'}\right)^n, \quad [6]$$

woraus folgt

$$d \ln q = n \cdot d \ln a \quad [7]$$

oder

$$\frac{dq}{q} = n \cdot \frac{da}{a} \quad [8]$$

Man erhält danach für die Kennlinie

$$R = e^{-q} \quad [9]$$

und daraus durch logarithmische Differentiation

$$-\frac{dR}{d \ln q} = q \cdot e^{-q} \quad [10]$$

oder mit [7] für die Gewichtsverteilungskurve

$$-\frac{dR}{d \ln a} = n \cdot q \cdot e^{-q} \quad [11]$$

Daraus ergibt sich die Bedingung für das Maximum der Gewichtsverteilung

$$\frac{d^2 R}{(d \ln a)^2} = n^2 e^{-q} (q - 1) = 0, \quad [12]$$

woraus folgt

$$q_{\max} = 1 \quad [13]$$

$$\underline{a_{\max} = a'} \quad [14]$$

und durch Einsetzen in [11]

$$\underline{\left(-\frac{dR}{d \ln a}\right)_{\max} = n \cdot e^{-1}} \quad [15]$$

Bezeichnet man den zum Gewichtsmaximum gehörenden Rückstandswert mit  $R'$ , so folgt aus [9] und [13] die Beziehung

$$\underline{R' = e^{-1}} \quad [16]$$

Man erhält also aus der logarithmischen Gewichtsverteilungskurve eine äußerst anschauliche Deutung für die Kennwerte des Exponentialgesetzes als Korngröße und Höhe des Gewichtsmaximums sowie den allgemeinen Satz: Alle dem Zerkleinerungsgesetz folgenden Kornverteilungen haben ihr Gewichtsmaximum bei dem gleichen Rückstandswert  $R' = e^{-1}$ .

Da Bennett (8) das Zerkleinerungsgesetz aus Wahrscheinlichkeitsstatistischen Annahmen abgeleitet hat, kann man den Satz auch folgendermaßen fassen: Bei

allen dem Zerkleinerungsgesetz folgenden statistischen Kornverteilungen ist die Wahrscheinlichkeit, eine größere Korngröße als die des häufigsten Gewichtes anzutreffen, gleich  $e^{-1}$ .

Nunmehr berechnen wir den Differentialquotienten der linearen Kennlinie, wobei wir direkt durch Umformung von [11] schreiben können

$$-\frac{dR}{da} = \frac{n \cdot q}{a} \cdot e^{-q} \quad [17]$$

und als Bedingung für das Maximum

$$\frac{d^2 R}{da^2} = \frac{n \cdot q}{a^2} \cdot e^{-q} (nq + 1 - n) = 0, \quad [18]$$

daraus

$$q_{\max} = \frac{n-1}{n} \quad [19]$$

$$\underline{a_{\max} = a'' = a' \sqrt{\frac{n-1}{n}}} \quad [20]$$

Für die Höhe des Verteilungsmaximums

$\left(-\frac{dR}{da}\right)_{\max}$  ergibt sich ein komplizierter Ausdruck, der hier nicht weiter interessiert. Dagegen berechnen wir noch aus [9] und [19] den zur Korngröße  $a''$  gehörenden Rückstandswert

$$\underline{R'' = e^{-\frac{n-1}{n}}} \quad [21]$$

Bei der Korngröße  $a''$  und dem Rückstandswert  $R''$  befindet sich nach der logarithmischen Auffassung (Gl. [2]) das Oberflächenmaximum. Nach [21] würde für  $n < 1$   $R'' > 1$  werden, was nicht möglich ist. Das heißt also: Bei den dem Zerkleinerungsgesetz folgenden Kornverteilungen hängt die Lage des Oberflächenmaximums

$$R'' = e^{-\frac{n-1}{n}}$$

vom Verteilungsexponenten  $n$  ab; bei  $n < 1$  hat die Oberflächenverteilung überhaupt kein Maximum. Wenn kein Oberflächenmaximum vorhanden ist, werden die Oberflächenanteile in gleichen Intervallen  $d \ln a$  immer größer, je kleiner die Korngröße wird, und die Gesamtoberfläche wird unendlich; das ist dasselbe Ergebnis, welches durch Berechnung der Oberfläche aus dem Zerkleinerungsgesetz erhalten wird (9).\*

\*) Das ist ein Zeichen dafür, daß das Zerkleinerungsgesetz im Bereich kleinster Korngrößen nicht mehr stimmt; denn eine reale Oberfläche kann nicht unendlich werden und muß auch ein Verteilungsmaximum haben. Rechnerisch hilft man sich damit, daß man die Integration, von der maximalen Korngröße ausgehend, bei einer willkürlich festgesetzten unteren Grenze abbricht, wodurch natürlich das Resultat auch mit einem willkürlichen Fehler behaftet bleibt, je nach der Annahme, die man über die untere Korngröße trifft.

Deutet man dagegen mit Rammler und Feifel die lineare Verteilungskurve als Gewichtsverteilung, dann wird es völlig unverständlich, warum in einer durch eine einfache Formel beschriebenen statistischen Gewichtsverteilung das wesentlichste Merkmal einer statistischen Verteilung, nämlich die Gruppierung von nach beiden Seiten abweichenden, selteneren Werten um einen häufigsten Mittelwert, auf einmal nicht mehr Gültigkeit haben sollte.

Diese analytischen Folgerungen aus dem Zerkleinerungsgesetz sind der beste Beweis dafür, daß nur die logarithmische Darstellung eine sinnvolle Interpretation der Kornverteilung gestattet. Die lineare Darstellung gerät mit der Interpretation des Maximums bei  $a'$  als Gewichtsmaximum in unhaltbare Konsequenzen, während sie auf der anderen Seite mit der wichtigsten Korngröße  $a'$  nichts anzufangen weiß; Ausdrücke wie „Feinheitsmodul“ (4) oder „Relaxationswert“ (1, 2) sind nur Bezeichnungen, aber keine Erklärung.

(Abb. 3) nur durch die veränderte Ordinatenteilung (nach dem Gauß'schen Fehlerintegral), ist ihm aber in der sonstigen Handhabung sehr ähnlich.

Die mathematische Behandlung solcher Fälle, die durch die Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben werden, hat von der Gauß'schen Verteilungsfunktion (11)

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad [22]$$

oder

$$f(hx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(hx)^2}$$

auszugehen. Hierin bedeutet  $x$  die Abweichung vom Mittelwert, den „Fehler“, und  $f(x) dx$  die Höhe der Wahrscheinlichkeit, eine Abweichung vom Betrage  $x$  zu finden. Daß  $x$  als Quadrat vorliegt, besagt, daß

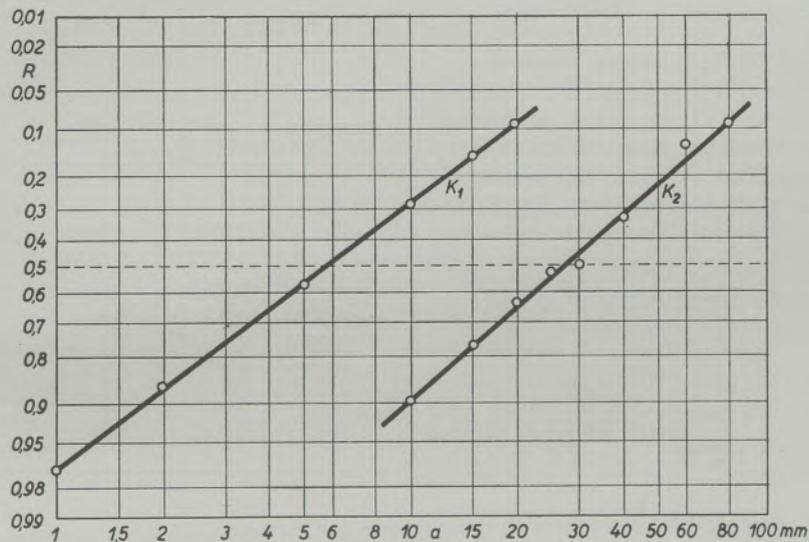


Abb. 4

Kennlinien im Wahrscheinlichkeitsnetz (Konopicky)

$K_1$  = gesinterte Magnesia (Konopicky) l. c. Abb. 3 M<sub>1</sub>)

$a' = 5,7$  mm,  $n = 0,76$

$K_2$  = Granalien aus Quarzmehl und Wasser

(Konopicky l. c. Abb. 2, Nr. 7)

$a' = 27,6$  mm,  $n = 0,89$

#### IV.

Außer dem Zerkleinerungsgesetz ist noch eine weitere statistisch-gesetzmäßige Verteilung beobachtet worden. Wie Konopicky (10) gezeigt hat, befolgen Granalienbildungen der verschiedensten Art näherungsweise das Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsgesetz. Diese Gesetzmäßigkeit erfordert, daß im „Wahrscheinlichkeitsnetz“ die Kennlinie zu einer Geraden wird, wovon Abb. 4 einige Beispiele zeigt. Das Wahrscheinlichkeitsnetz unterscheidet sich vom Bennett-Diagramm

positive und negative Abweichungen vom gleichen Betrag auch gleich wahrscheinlich sind; die Verteilungskurve hat einen Höchstwert bei  $x = 0$  und erstreckt sich völlig symmetrisch auf beiden Seiten bis  $x = \pm \infty$ , wo  $f(x) = 0$  wird. Die Konstante  $h$ , das „Präzisionsmaß“ der Fehlertheorie, bestimmt die Höhe des Maximums und die Steilheit des Abfalls nach beiden Seiten.

Versuchen wir jetzt, diese Formulierung auf die Kornverteilung nach dem Gauß'schen Gesetz anzuwenden. Eine beliebige Korngröße sei wie früher

mit  $a$ , die mittlere Korngröße mit  $a'$  bezeichnet. Die Abweichung vom Mittelwert wäre  $a-a'$ , aber man sieht sofort, daß es sinnlos ist, diesen Wert für  $x$  in die Formel [22] einzuführen; denn für  $a = 0$ , die untere Grenze, der die Kornverteilung zustrebt, würde nach [22] noch eine endliche Wahrscheinlichkeit  $f(x)$  vorhanden sein.

Man wird auch durch diese Betrachtungsweise zwangsläufig dazu geführt, daß nicht die lineare, sondern — wie auch der experimentelle Befund (Abb. 4) zeigt — die logarithmische Funktion des Durchmessers für die Kornverteilung maßgeblich und als Abweichung vom Mittelwert die logarithmische Differenz der Korngrößen

$$x = \ln a - \ln a' \quad [23]$$

zu definieren ist; nur diese Größe hat die von der Formel [22] verlangte Eigenschaft, den Grenzwerten  $-\infty$  und  $+\infty$  zuzustreben. Schreiben wir noch statt  $h$  den uns vom Zerkleinerungsgesetz her geläufigen Verteilungsexponenten  $n$ , dann wird

$$nx = n(\ln a - \ln a') = \ln \left( \frac{a}{a'} \right)^n = \ln q, \quad [24]$$

womit wir dieselbe charakteristische Verknüpfung der kennzeichnenden Größen  $a'$  und  $n$  bei der Gauß'schen Verteilung wie nach [6] bei dem Zerkleinerungsgesetz haben.

Weiterhin hat dann  $f(x)$  die Bedeutung der logarithmischen Gewichtsverteilungsfunktion, so daß wir schließlich mit [22] und [24] als Verteilungsfunktion (Abb. 5) erhalten

$$f(x) = \frac{-dR}{d \ln a} = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 \left( \ln \frac{a}{a'} \right)^2} = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(\ln q)^2} \quad [25]$$

Aus diesem Ausdruck ist einerseits durch Integration die Rückstandskennlinie, andererseits durch Differentiation die Lage der Verteilungsmaximums zu erhalten.

Die Integration führt zu der Gleichung der logarithmischen Kennlinie (Abb. 5)

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\ln q}^{\infty} e^{-(\ln q)^2} d \ln q = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \Phi(nx) \right) \quad [26]$$

wobei  $\Phi(nx)$  das Gauß'sche Fehlerintegral darstellt, dessen Werte für beliebige Argumente  $nx = \ln q$  unmittelbar aus Tabellen (12) zu entnehmen sind, (Tabelle 1).

Tabelle 1

Einige Werte für Fehlerintegral  $\Phi$  und Rückstandsfunktion  $R$ .

$nx = \ln q$	$R$	$\Phi$	$R$	$nx = \ln q$
$-\infty$	1	1	0	$+\infty$
-3	0,99999	0,99998	0,00001	+3
-2	0,9977	0,9953	0,0023	+2
-1	0,9213	0,8427	0,0787	+1
-0,9062	0,9	0,8	0,1	+0,9062
-0,5951	0,8	0,6	0,2	+0,5951
-0,3708	0,7	0,4	0,3	+0,3708
-0,1791	0,6	0,2	0,4	+0,1791
0	0,5	0	0,5	0

Durch Differentiation gewinnen wir dieselben Daten für das Maximum der Gewichtsverteilung, die

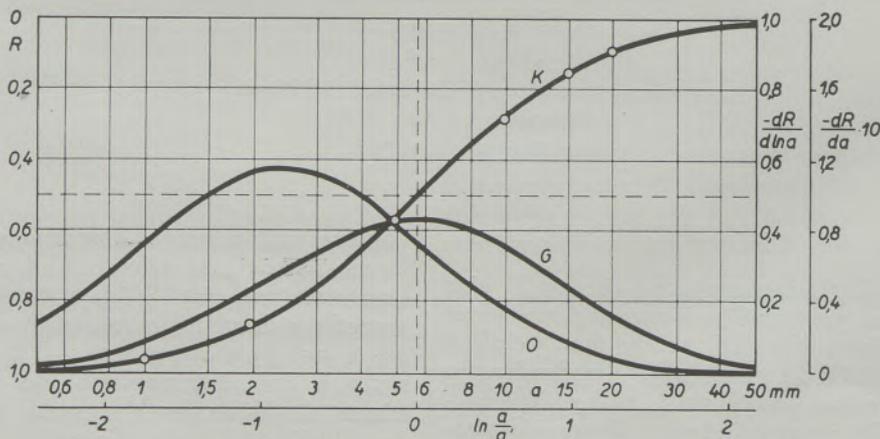


Abb. 5

Logarithmische Darstellung einer Gauß'schen Verteilung  
Die gleiche Verteilungsfunktion wie  $K_1$  in Abb. 4

sich durch direkte Diskussion der Formel [22] bzw. [25] erhalten lassen:

$$\ln q_{\max} = 0 \quad [27]$$

$$\underline{a_{\max} = a'} \quad [28]$$

$$\underline{\left(\frac{-dR}{d \ln a}\right)_{\max} = \frac{n}{\sqrt{\pi}}} \quad [29]$$

$$\underline{R' = \frac{1}{2} \left(1 \pm \Phi_{(0)}\right) = 0,5} \quad [30]$$

Der Vergleich mit den Formeln [14], [15] und [16] zeigt die vollkommene Analogie der kennzeichnenden Parameter des Gauß'schen Verteilungsgesetzes mit denen des Zerkleinerungsgesetzes.

Für den linearen Differentialquotienten und das lineare Maximum — welche, wie früher gezeigt, die Oberflächenverteilung kennzeichnen — erhält man in gleicher Weise

$$\frac{-dR}{da} = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{-(\ln q)^2} \quad [31]$$

$$\frac{d^2R}{(da)^2} = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot e^{-(\ln q)^2} \cdot (1 + 2n \ln q) = 0 \quad [32]$$

$$\ln q_{\max} = -\frac{1}{2n} \quad [33]$$

$$\underline{a'' = a' \cdot e^{-\frac{1}{2n^2}}} \quad [34]$$

$$\underline{R'' = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{1}{2n}\right)\right]} \quad [35]$$

Weise bestimmt werden wie bei dem Bennett-Diagramm, wobei nur die Korngröße  $a'$  als Schnittpunkt mit der Rückstandslinie  $R' = 0,5$  gefunden wird. Die Übereinstimmung zwischen beiden Diagrammen liegt darin, daß in beiden Fällen nach [6] oder [24] nur die Abhängigkeit von  $\ln q$  (Ordinate) gegen  $\ln a$  (Abszisse) graphisch dargestellt wird, woraus dann die Konstanten der Geraden zu ermitteln sind;\* an Stelle von  $\ln q$  sind die entsprechenden  $R$ -Werte auf der Ordinate angeschrieben, im Bennett-Diagramm nach Gleichung [9], im Wahrscheinlichkeitsnetz nach Gleichung [26].

## V.

Das Bennett-Diagramm ist die zweckmäßigste Darstellung für dem Zerkleinerungsgesetz folgende Kornverteilungen und ebenso das Wahrscheinlichkeitsnetz für die der Gauß'schen Verteilung folgenden. Dagegen eignen sich diese Diagramme nicht für Kornverteilungen, welche nicht in das betreffende Gesetz passen. In diesen Fällen wählt man besser die an keine spezielle Gesetzmäßigkeit gebundene logarithmische Kennlinie und Gewichtsverteilungskurve.

Es besteht aber weiterhin das Bedürfnis, unregelmäßige Kornverteilungen durch Mittelwerte und Maßzahlen kurz zu kennzeichnen, ohne die vollständige Kurvendarstellung zeichnen zu müssen. Rammler (4) und Feifel (2) haben dieses Problem in der linearen Darstellung behandelt. Naturgemäß ergeben sich etwas andere Verhältnisse, wenn wir die Frage auf die logarithmische Darstellung übertragen.

Wir haben bei der Untersuchung der verschiedenen Verteilungsgesetzmäßigkeiten gesehen, daß die wichtigsten Kenngrößen der Verteilung durch die Daten des logarithmischen Gewichtsmaximums gegeben sind, die im folgenden nochmals zusammengestellt werden:

Tabelle 2

Kenngrößen des logarithmischen Gewichtsmaximums

	Zerkleinerungsgesetz	Gauß'sche Verteilung
Rückstandswert	$R' = e^{-1} = 0,368$	$R' = R_z = 0,5$
Korngröße	$a'$	$a'$
Höhe der Verteilung	$-\left(\frac{dR}{d \ln a}\right)_{\max} = \frac{n}{e}$	$-\left(\frac{dR}{d \ln a}\right)_{\max} = \frac{n}{\sqrt{\pi}}$

In der Oberflächenverteilung (Abb. 5) zeigt sich ein bemerkenswerter Unterschied zum Zerkleinerungsgesetz insofern, als für alle Werte des Verteilungsexponenten ein reelles Maximum der Oberflächenverteilung existiert (z. B. in Abb. 5 für  $n = 0,76$ ).

Über das Wahrscheinlichkeitsnetz ist noch zu sagen, daß die Kennwerte  $a'$  und  $n$  in genau der gleichen

\*) Dabei ist, worauf auch Feifel aufmerksam macht, darauf zu achten, daß man den richtigen Wert für  $n$  aus dem Diagramm nur entnehmen kann, wenn beide Koordinaten den gleichen Maßstab haben. Bei dem „Körnnetz“ Nr. 421<sup>1/2</sup> von Schleicher & Schüll für das Bennett-Diagramm ist das auch der Fall, dagegen muß bei dem Wahrscheinlichkeitsnetz Nr. 297<sup>1/2</sup> die Abszisse um den Faktor 1,32 gedehnt, bzw. der dem Diagramm entnommene  $n$ -Wert durch 1,32 dividiert werden.

Mit diesen Werten sind die typische Lage des Maximums (gegeben durch das Verteilungsgesetz), die durchschnittliche Feinheit und der Verteilungsbereich gekennzeichnet.  $R'$  und  $a'$  sind die Koordinaten des Wendepunktes der logarithmischen Kennlinie (Abb. 2 und 5) und

$$\left( \frac{-dR}{d \ln a} \right)_{\max}$$

ist der Differentialquotient der Kennlinie im Wendepunkt.

Man kann demnach auch eine beliebige nicht gesetzmäßige Kornverteilung in erster Linie durch die Koordinaten und den Richtungsquotienten des Wendepunktes der logarithmischen Kennlinie beschreiben. Zusätzlich kommt die Korngröße  $a_z$  des Zentralwertes  $R_z = 0,5$  in Betracht, die ebenfalls unmittelbar aus der Kennlinie abzulesen ist.

Als „Asymmetrie“ oder „Schiefe“ der Verteilung, welche in der linearen Darstellung besondere Schwierigkeiten macht, definieren wir in der logarithmischen Darstellung den Wert  $R' - R_z$ , d. h. den Abstand der Rückstandskordinate vom Zentralwert. Dieser Wert ist ebenso wie  $R'$  typisch für jede Gesetzmäßigkeit. Für die Gauß-Verteilung ist  $R' - R_z = 0$ , d. h. die Gauß-Verteilung ist symmetrisch. Für das Zerkleinerungsgesetz gilt  $R' - R_z = -0,132$ , d. h. eine rechtsseitig-asymmetrische Verteilung, gleichfalls typisch für alle diesem Gesetz folgenden Kornverteilungen.

Dieses Schiefenmaß ist zweckmäßiger, als der Abszissenabstand der zugehörigen Korngrößen  $\ln a_z - \ln a'$ . Hierfür ergibt sich im Falle der Gauß'schen Verteilung wieder  $\ln a_z - \ln a' = 0$ , aber bei dem Zerkleinerungsgesetz wird  $\ln a_z - \ln a' = \frac{1}{n} \ln \ln 2 = -\frac{1}{n} \cdot 0,367$ ; dieser Ausdruck hatte also keinen konstanten Wert, sondern wäre noch vom Verteilungsexponenten  $n$  abhängig und daher nicht so „typisch“ wie  $R' - R_z$ .

Zusammenfassung

Es wird untersucht, welche der mathematischen Darstellungen der Kornverteilung einen physikalischen Sinn haben. Dabei wird im Sinne von Bierbrauer und Hönig festgestellt, daß nicht die lineare, sondern die logarithmische Darstellung der Korngröße die richtige ist. Die logarithmische Darstellung erklärt das Maximum der logarithmischen Kornverteilungskurve als Gewichtmaximum und das der linearen Verteilungskurve als Oberflächenmaximum.

In der logarithmischen Darstellung bedeuten die Konstanten des Rosin-Rammler'schen Zerkleinerungsgesetzes Korngröße und Höhe des Gewichtmaximums. Das Gewichtmaximum liegt stets bei dem gleichen Rückstandswert  $R' = e^{-1}$ , während das Oberflächenmaximum eine vom Verteilungsexponenten abhängige Lage hat und bei  $n < 1$  verschwindet.

Die Kornverteilung nach dem Gauß'schen Fehlergesetz wird mathematisch formuliert; auch diese Gesetzmäßigkeit läßt sich widerspruchlos nur mit der logarithmischen Funktion des Durchmessers darstellen. Die Konstanten dieses Gesetzes haben eine analoge Bedeutung wie im Zerkleinerungsgesetz.

Nicht gesetzmäßige Kornverteilungen werden durch die logarithmische Kennlinie dargestellt. Die wichtigsten Größen zur Kurzbeschreibung einer Kornverteilung sind die Koordinaten und der Richtungsquotient des Wendepunktes der logarithmischen Kennlinie; diese bestimmen den Typus der Verteilung, die häufigste Korngröße und die Verteilungshöhe des Gewichtmaximums.

### Summary

The question is gone into as to which of the mathematical presentations of grain distribution does make sense from the physical point of view. In agreement with Bierbrauer and Hönig it is established that the logarithmic presentation of the grain size rather than the linear presentation is the correct one.

The logarithmic presentation explains the maximum of the logarithmic grain distribution curve as weight maximum and the linear distribution curve as surface maximum.

In the logarithmic presentation the constants of the Rosin — Rammler law of crushing represent the grain sizes and the height of the weight maximum. The weight maximum is always reached when the residual value is  $R' = e^{-1}$ , whereas the position of

the surface maximum is depending upon the distribution exponent and disappears at  $n < 1$ .

The grain distribution based on Gauß's law of errors is formulated mathematically. This can — without fear of contradiction — be represented only by the logarithmic function of the diameter. The significance of the constants of this law is the same as in the law of crushing.

Grain distributions not in accordance with this law are represented by the logarithmic indicial line. The most important values of the brief description of a given grain distribution are the coordinates and the direction quotient of the turning point of the logarithmic indicial line. These determines the type of distribution, the most frequent grain size and the distribution height of the weight maximum.

## Résumé

L'auteur définit la meilleure des présentations mathématiques de la répartition de grain quant à leur importance physique. On constate d'accord avec MM Bierbrauer et Hönig que la présentation logarithmique de la grosseur du grain est exacte et non celle de la présentation linéaire. La présentation logarithmique définit le maximum de la courbe logarithmique de la répartition des grains comme maximum en poids et la courbe de répartition linéaire comme maximum de surface. Les constantes de la loi de broyage suivant Rosin-Rammler représentent dans la présentation logarithmique des grosseurs de grain tandis que la hauteur représente le poids maximum. — Le maximum du poids sera toujours atteint lorsque le valeur résiduaire est  $R' = e^{-1}$  tandis que le maximum de surface dépend de l'exposant de répartition et disparaît à  $n < 1$ .

La répartition de grain basant sur la lois d'erreur suivant Gauss est représentée par des formules mathématiques. Elle sera sans discussion exprimée seulement par le fonction logarithmique du diamètre. Les constantes de cette loi ont la même importance que dans la loi de broyage.

Les répartitions de grain qui ne s'accordent pas avec cette loi sont représentées par la courbe logarithmique.

Les valeurs les plus importantes caractérisant une répartition donnée de grain sont les coordonnées et le quotient de direction du point d'inflexion de la courbe logarithmique. Ils déterminent le type de répartition, la grosseur la plus fréquente du grain et la hauteur de répartition du poids maximum.

## Literaturverzeichnis

1. Feifel, E., Kennlinie, Kenngleichung, Kennbruch, Radex-Rundschau 1952, Heft 6, S. 235.
2. Feifel, E., Mittleres Korn, Radex-Rundschau 1953, Heft 6, S. 8.
3. Rammler, E., Gesetzmäßigkeiten in der Kornverteilung zerkleinerter Stoffe. Zeitschr. VDI Beiheft Verfahrenstechnik 1937, Nr. 5, S. 161.
4. Rammler, E., Die Verteilungskennwerte des Mahlgutes, Zeitschr. VDI Beiheft Verfahrenstechnik 1944, Nr. 4, S. 94.
5. Bierbrauer, E., und F. Hönig, Über die Erfassung des Zerteilungszustandes fester Stoffe. Zement 24 (1935), 285, 301.
6. Theimer, O., und F. Moser, Über die Auswertung von Zermahlungsexperimenten mit Hilfe von Zermahlungsfunktionen. Kolloid-Zeitschr. 128 (1952), 68.
7. zur Strassen, H., und W. Strätling, Oberflächenbestimmung pulverförmiger Stoffe aus Kornanalysen. Tonind-Zeitg. 64 (1940), 181, 199, 207.
8. Bennett, J. G., Broken coal. J. Inst. Fuel 15 (1936), Dezember, Zitiert bei E. Rammler (3).
9. Rammler, E., Zur Ermittlung der spezifischen Oberfläche des Mahlgutes, Zeitschr. VDI Beiheft Verfahrenstechnik 1940, Nr. 5, S. 150.  
Kiesskalt, S., u. G. Matz, Zur Ermittlung der spezifischen Oberfläche von Kornverteilungen. Zeitschr. VDI 93 (1951), 58.  
Weidenhammer, F., Berechnung der Oberfläche eines körnigen Gutes nach Rosin-Rammler, Tonind.-Zeitg. 75 (1951), 133.
10. Konopicky, K., Beitrag zur Frage der Ansatzbildung in Drehrohröfen, Zement-Kalk-Gips 4 (1951), 240.
11. Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung, Band 1, 6. Auflage Leipzig und Berlin 1941.  
Sirk, H., Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker, 5. Aufl. Dresden und Leipzig 1947, S. 241 ff.
12. Czuber, E., l. c. S. 455 ff.  
Jahnke-Emde, Tafeln höherer Funktionen, 4. Auflage, Leipzig 1948, S. 24.