

**Smn 156—50**

**Prey A.**

# **Über die Theorie der Landbrücken und die Viskosität der Erde**

Von

**Adalbert Prey**

wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie d. Wissenschaften

(Mit 3 Abbildungen)

Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien  
Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung IIa, 156. Bd., 9. u. 10. Heft, 1947

**Wien 1947**

In Kommission bei Springer-Verlag, Wien

Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Wien

# Über die Theorie der Landbrücken und die Viskosität der Erde

Von

Adalbert Prey

(Mit 3 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung am 26. Juni 1947)

## Einleitung.

Viele geologische und paläobiologische Tatsachen haben uns gezeigt, daß die Kontinente und Inseln, die heute durch weite Meere voneinander getrennt sind, in früheren Zeiten der Erdgeschichte in Zusammenhang gewesen sein müssen. Zur Erklärung dieser Erscheinung liegen heute im wesentlichen zwei Ansichten vor. Die erstere und ältere ist die Landbrückenhypothese, nach der die Landverbindungen zwischen den heute noch bestehenden Landmassen in der Tiefe versunken sind, und die Wegenersche Hypothese von den Kontinentalverschiebungen, nach der die einst vereinten Landmassen auseinandergerückt sind. Die erstere Ansicht verlangt also Vertikalbewegungen, die zweite Horizontalbewegungen. Daraus folgt schon eine bessere Position der ersten Hypothese gegenüber der zweiten. Die Vertikalbewegungen, die meist isostatisch sein werden, hängen weitgehend von der Schwere ab, die eine ungeheure Kraft ist, während für die Kontinentalverschiebungen kaum etwas anderes als die Westdrift der Gezeitenbewegung in Betracht kommt. Nun ist die Flutkraft ihrer Größenordnung nach  $= g \cdot 3 \frac{M}{E} \left(\frac{r}{D}\right)^3 = g \cdot 10^{-7}$ , wenn  $M$  und  $E$  die Massen des Mondes und der Erde und  $r$  und  $D$  der Radius der Erde und die Entfernung des Mondes sind. Die Kraft, mit welcher die Westdrift auf die Erdoberfläche wirkt, ist aber noch im Verhältnis  $7 \cdot 3 \cdot 10^{-8}$  kleiner<sup>1</sup>. Von einer so kleinen Kraft kann

<sup>1</sup> G. H. Darwin, Problems connected with the tides of a viscous spheroid. Scientif. papers II.

man wohl nicht erwarten, daß sie imstande sei, die Kontinente gegen den ungeheuren seitlichen Widerstand des Sima merklich zu bewegen. Nur in Zeiten, da die Viskosität noch sehr klein, etwa  $10^{13}$ — $10^{15}$ , war, konnten wesentliche Verschiebungen auch in kürzerer Zeit entstehen<sup>2</sup>, später, bei höherer Viskosität, nicht mehr. Dabei darf nicht übersehen werden, daß die Kraft der Westdrift an dem Sima ebenso angreift wie an dem Sial. Die Kontinentalschollen bewegen sich daher im Sima nicht wie Schiffe, die das Meer durchneiden, sondern wie Eisberge, die mit dem Wasser schwimmen. Ein Auseinandertreten der Schollen kann also nur eintreten, wenn Unregelmäßigkeiten und Hindernisse vorhanden sind.

Auch die Polfluchtkraft, die herangezogen wird, ist wenigstens für isostatisch gelagerte Schollen unmerklich<sup>3</sup>.

Bei beiden hier betrachteten Hypothesen tritt aber die Frage an uns heran, warum nicht die ganze Erde mit einer einheitlichen Sialschicht bedeckt ist, warum nur Bruchstücke vorhanden sind. Viele Geophysiker sind heute der Ansicht, daß dieses Trümmerfeld von der großen Katastrophe herrührt, die mit der Abtrennung des Mondes von der Erde verbunden war. Der Stille Ozean soll die Narbe sein, die diese Katastrophe an der Erde gelassen hat<sup>4</sup>. In der Tat haben die Erdbebenforschungen festgestellt, daß hier die Sialschicht ganz fehlt, während bei den übrigen Ozeanen der Boden mit einer dünnen Sialschicht bedeckt ist. Auch mit dem Volumen des Mondes und seiner Dichte besteht Übereinstimmung.

Der Mechanismus, der zur Abtrennung des Mondes geführt hat, ist allerdings noch ungeklärt. Daß sich eine Masse auf Grund ihrer Rotationsverhältnisse in zwei Teile spalten kann, hat Poincaré<sup>5</sup> nachgewiesen, und diese Theorie findet

<sup>2</sup> A. Prey, Über Flutreibung und Kontinentalverschiebung. Gerl. Beiträge, Bd. XV, 1926.

<sup>3</sup> A. Prey, Über die Polfluchtkraft. Gerl. Beiträge, Bd. 48, 1936.

<sup>4</sup> W. H. Pickering, The place of origin of the moon. Journal of Geology, 15. Bd.

<sup>5</sup> H. Poincaré, Figures d'équilibre d'une masse fluide. Paris 1903; G. H. Darwin, The pearshaped figure of equilibrium of a rotating masse of liquid. London, Phil. Trans. A 198, 1902.

auch bei Doppelsternsystemen ihre Anwendung. Wir haben Systeme, bei denen die Komponenten so nahe stehen, daß sie sich mit der Oberfläche berühren. Die Kraft, die die Sterne dann auseinandertreibt, ist nach Darwin<sup>6</sup> die Fluttreibung. Hierher gehört auch Darwins Resonanztheorie<sup>7</sup>.

Auf das System Erde-Mond darf man aber diese Theorie nicht ohne weiteres anwenden. Das Rotationsmoment des Systems, jene Größe, die sich nach den mechanischen Gesetzen nicht ändern kann und also heute noch den gleichen Wert haben muß wie zur Zeit der Entstehung, ist nicht groß genug, die Teilung herbeizuführen. Welche Einflüsse dazu geführt haben könnten, das Rotationsmoment zu verkleinern, ist uns derzeit noch unbekannt. Ich glaube aber nicht, daß man deshalb diese Entstehungsweise des Mondes ganz ablehnen darf<sup>8</sup>. Reine Gravitationskräfte kommen nicht in Frage, denn für diese gilt der Satz von der Konstanz des Flächenmomentes, aber es kann noch anderes in Frage kommen, was wir vielleicht noch gar nicht kennen.

Jedenfalls dürfen wir die Hoffnung, das Problem der Mondentstehung auf diesem Wege vollständig zu klären, nicht aufgeben und wenigstens vorläufig an den Anfang der Erdgeschichte eine Katastrophe setzen, bei welcher die Sialschichte gesprengt und ein Teil derselben weggerissen wurde, wobei man sich kaum denken kann, wo die losgerissenen Teile hingegeraten sind, wenn nicht auf den Mond.

Nach der Mondablösung müßte die Erde in einem Zustand zurückgeblieben sein, der je nach der angenommenen Hypothese verschieden war. In beiden Fällen aber müssen wir davon ausgehen, daß die Schollen zu Anfang nicht eingesunken waren, sondern oben auf dem Sima auflagen.

Wir finden also für die Hypothese der Kontinentalverschiebung eine Anfangssituation entsprechend Fig. 1a, die nach entsprechender Zeit etwa in 1b übergehen müßte. Über die Kräfte,

<sup>6</sup> G. H. Darwin, On the Precession of a viscous spheroid and the remote history of the earth, London, Phil. Trans. 170, 1879.

<sup>7</sup> G. H. Darwin, l. c. p. 1.

<sup>8</sup> F. Nölke, Der Ursprungsort des Mondes. Gerl. Beitr., Bd. 41.

die das Auseinanderrücken bewirken könnten, haben wir keinen Anhaltspunkt.

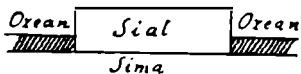


Fig. 1a.

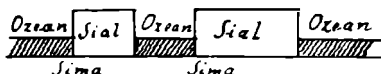


Fig. 1b.

Im Falle der Landbrückentheorie erhalten wir die schematischen Darstellungen 2a, 2b, 2c.



Fig. 2a.



Fig. 2b.



Fig. 2c.

Man kann annehmen, daß nur die oberste Schicht fest und spröde ist. Bei der Katastrophe werden die Schollen gedehnt, aber nur die oberste Schicht bricht und behält bis heute die Konturen, die unser bekanntes geographisches Bild zeigt. Die unteren Schichten werden auseinandergezogen und bilden die Landbrücke. Die Schollen bleiben dort liegen, wohin sie zu Anfang gelangt sind, und beginnen nun einzusinken. Fig. 2b stellt einen Mittelzustand vor; in Fig. 2c ist die Landbrücke versunken, während die höheren Teile der Scholle noch herausragen. Das Sinken hört natürlich auf, wenn das hydrostatische Gleichgewicht soweit erreicht ist, daß der Widerstand des Sima nicht mehr überwunden wird. Die Scholle ist dann fast in isostatischer Lagerung. Zum Erreichen der vollständigen Isostasie ist theoretisch unendlich viel Zeit nötig; daß der beim Einsinken stets wachsende hydrostatische Druck zur Gebirgsbildung führen kann und wohl auch muß, habe ich in einer anderen Arbeit gezeigt<sup>9</sup>.

Es scheint mir, daß die Landbrückentheorie bei dieser Art des Einsinkens verständlicher ist als die Wegenersche

<sup>9</sup> A. Prey, Über die Möglichkeit der Gebirgsbildung durch den hydrostatischen Druck in der Erdkruste. Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-nat. Kl., Abt. IIa, 151. Bd.

Theorie. Wir wollen uns daher im folgenden auf den Boden der ersteren stellen und versuchen, an einem konkreten, schematischen Fall die Schnelligkeit des Einsinkens in Beziehung zu setzen zur Viskosität des Sialmas, um für diese beiden Größen jene zusammengehörigen Werte zu finden, welche dem geologischen Geschehen am besten entsprechen.

Die Entstehung des Mondes war natürlich eine Katastrophe von riesigem Ausmaße. Ein großer Teil der Erdkruste wurde weggerissen, der übrige Teil der Sialschichte wurde gesprengt und in einzelne Schollen zerrissen, und in die Lücken mußten sich die Wassermassen des Ozeans ergießen in Wasserfällen von 30 bis 50 km Höhe, die ein Chaos von unvorstellbar großen Wasserbewegungen erzeugten, dem wohl auch ein Teil der Schollen zum Opfer gefallen sein dürfte. Mit dem Wasser mußte auch die Atmosphäre in die Tiefe stürzen. Es entstanden Hochplateaus von phantastischer Höhe, die, von Luft und Wasser entblößt, bald einer eisigen Kälte ausgesetzt waren. Die Gewässer aber werden sich in Berührung mit ehemals tief liegenden Schichten der Erde bald erwärmt haben. Hier konnte sich also bald eine Meeresfauna entwickeln. Diese wäre also etwa ebenso alt wie der Mond.

Die Schollen, soweit sie nicht ganz auseinandergerissen wurden, blieben miteinander in Verbindung, wie es Fig. 2a zeigt. Diese Verbindungen sind die Landbrücken. Zu welcher Zeit die einzelnen Landbrücken versunken sind, hängt davon ab, wie tief sie eingerissen waren. Auf dem Grunde dieser Mulden konnte sich eine Land-Fauna und -Flora entwickeln, sobald sie so tief gesunken waren, daß sie eines wärmeren Klimas teilhaftig wurden.

## I.

Als schematisches Beispiel stellen wir uns einen kreisförmigen Kontinent vor oder eine Insel von 2000 km Radius, also etwa von der Größenordnung von Australien, von der Dicke 30 km und der Dichte des Sial = 2·7, welche in das darunter befindliche Sial der Dichte 3·0 langsam einsinkt. In einem zweiten Fall wurde die Dicke gleich 50 km genommen.

Wir machen den Mittelpunkt der Erde zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems und legen die  $Z$ -Achse in die Richtung nach der Mitte der Scholle. Indem wir diese als vollständig fest betrachten, behandeln wir ihre Bewegung als die eines starren Körpers, der unter dem Einfluß seines Gewichtes und des Auftriebes in eine zähe Flüssigkeit einsinkt. Bezeichnen wir also mit  $T$  und  $U$  lebendige Kraft und Potential, so lautet die Energiegleichung:

$$\frac{d(M+U)}{dt} = -F.$$

$F$  ist also der Energieverlust, der durch die innere Reibung in dem langsam verdrängten Sima entsteht. Für den Energieverlust pro Zeiteinheit und Volumeneinheit (Dissipation) gibt Stokes<sup>10</sup> die Formel:

$$\Phi = \sigma \left\{ 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

oder wegen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0: \quad (1)$$

$$\Phi = \sigma \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}. \quad (2)$$

$\sigma$  ist der Koeffizient der Viskosität und  $u, v, w$  sind die Geschwindigkeitskomponenten.

Wenn man die von der Trägheit herrührenden Glieder vernachlässigt, was in unserem Problem, in dem die Entwicklungen nur in Jahrmillionen vor sich gehen, gestattet ist, haben die Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit die Form<sup>11</sup>

<sup>10</sup> Stokes, On the Effekt of the Internal Friction on the Motion of Pendulums (Papers III, 1). Siehe auch Horace Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, 2. Aufl., p. 655.

<sup>11</sup> Lamb, l. c. p. 672.

$$\begin{aligned}\sigma \Delta u &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \sigma \Delta v &= \frac{\partial q}{\partial y} \\ \sigma \Delta w &= \frac{\partial r}{\partial z}\end{aligned}\tag{3}$$

mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

wo  $p$  der Druck ist. Durch Differentiation erhält man

$$\Delta p = 0,\tag{4}$$

woraus folgt, daß sich  $p$  nach räumlichen Kugelfunktionen  $p = \Sigma p_n$  entwickeln läßt. Die allgemeine Lösung des Systems lautet nach Lamb<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\sigma} \sum \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right) \right\} + u_1 \\ v &= \frac{1}{\sigma} \sum \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial y} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right) \right\} + v_1 \\ w &= \frac{1}{\sigma} \sum \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial z} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right) \right\} + w_1\end{aligned}\tag{5}$$

wo  $u_1, v_1, w_1$  gegeben sind durch

$$\begin{aligned}u_1 &= \sum \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \\ v_1 &= \sum \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \\ w_1 &= \sum \frac{\partial \varphi_n}{\partial z},\end{aligned}\tag{6}$$

und  $\varphi$  eine willkürliche Funktion ist, die ebenfalls nach räumlichen Kugelfunktionen entwickelt werden kann.  $\varphi = \Sigma \varphi_n$  hat also den Charakter eines Geschwindigkeitspotentials<sup>13</sup>. Wenn wir Oberflächenfunktionen durch einen Querstrich bezeichnen, so können wir setzen

$$p = \Sigma A_n r^n \bar{P}_n \quad \varphi = \Sigma B_n r^n \bar{P}_n.\tag{7}$$

<sup>12</sup> Lamb,

<sup>13</sup> Lamb, l. c. p. 41.



Auf Grund der Kreissymmetrie in unserem Problem können wir das Problem auf zwei Dimensionen zurückführen, indem wir die zweite Gleichung in (5) ganz weglassen. Die Kugelfunktionen  $P_n$  hängen nur mehr von  $\mu = \cos \vartheta$  ab.  $u$  und  $w$  bezeichnen dann im weiteren die Geschwindigkeiten parallel und senkrecht zur  $z$ -Achse, und es sei

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta, \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (8)$$

Es ist dann in gewohnter Bezeichnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r} = \cos \vartheta = \mu, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r} = \sin \vartheta = \sqrt{1 - \mu^2} = \mu', \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} &= -\frac{z}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mu \mu'}{r} \\ \frac{\partial \mu}{\partial z} &= -\frac{z}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} = \frac{x^2}{r^3} = \frac{\mu'^2}{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Setzen wir nun (7) in (5) ein, so finden wir

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sigma} \left\{ \sum \frac{r^2}{2(2n+1)} \left( A_n n r^{n-1} \mu' \bar{P}_n - A_n r^{n-1} \mu \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right) + \right. \\ &\quad + \sum \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \left( A_n (n+1) r^{-n-2} \mu' \bar{P}_n - \right. \\ &\quad \left. \left. - A_n r^{-n-2} \mu \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right) + \sum B_n n r^{n-1} \mu' \bar{P}_n - B_n r^{n-1} \mu \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right\}, \\ w &= \frac{1}{\sigma} \left\{ \sum \frac{r^2}{2(2n+1)} \left( A_n n r^{n-1} \mu \bar{P}_n + A_n r^{n-1} \mu'^2 \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right) + \right. \\ &\quad + \sum \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \left( -A_n (n+1) r^{-n-2} \mu \bar{P}_n + \right. \\ &\quad \left. \left. + A_n r^{-n-2} \mu'^2 \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right) + \sum B_n n r^{n-1} \mu \bar{P}_n + B_n r^{n-1} \mu'^2 \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{n}{2(2n+1)} - \frac{n(n+1)}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} &= \frac{n}{2n+1} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+3} \right) = \\ &= \frac{n}{2(2n+3)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{1}{2(2n+1)} + \frac{n}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{2n+1} \left( \frac{1}{2} + \frac{n}{(n+1)(2n+3)} \right) =$$

$$= \frac{2n^2 + 7n + 3}{2(n+1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+3)}{2(n+1)(2n+1)(2n+3)},$$

daher

$$u = \frac{1}{\sigma} \left\{ \sum A_n r^{n+1} \frac{n}{2(2n+3)} \mu' \bar{P}_n - A_n r^{n+1} \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} \mu \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} + \right.$$

$$\left. + B_n r^{n-1} n \mu' \bar{P}_n - B_n r^{n-1} \mu \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right\}, \quad (11)$$

$$w = \frac{1}{\sigma} \left\{ \sum A_n r^{n+1} \frac{n}{2(2n+3)} \mu \bar{P}_n + A_n r^{n+1} \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} \mu'^2 \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} + \right.$$

$$\left. + B_n r^{n-1} n \mu \bar{P}_n + B_n r^{n-1} \mu'^2 \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right\}.$$

Wenn wir annehmen, daß die Scholle wie ein fester Körper einsinkt, also ohne Gestaltsänderung, so ist  $w$  für die ganze Scholle konstant. Setzen wir also

$$\frac{1}{\sigma} r^{n-1} \left( A_n \frac{n}{2(2n+3)} r^2 + B_n n \right) = C_n,$$

$$\frac{1}{\sigma} r^{n-1} \left( A_n \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r^2 + B_n \right) = D_n, \quad (12)$$

so erhalten wir die linearen Gleichungen

$$\sum C_n \mu \bar{P}_n + D_n \mu'^2 \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} = w_0, \quad (13)$$

wenn  $w_0$  die zu einer bestimmten Zeit  $t$  gehörige Geschwindigkeit der Scholle ist.

Als zweite Serie von Bedingungsgleichungen stellen wir die Forderung auf, daß an der unteren Seite der Scholle kein Gleiten des Sima stattfinden soll, sondern daß hier das Sima an der Scholle haftet. Bezeichnen wir also die Geschwindigkeit in der Richtung des Radius  $W$ , in der Richtung senkrecht dazu mit  $U$ , so ist

$$W = w \mu + u \mu',$$

$$U = -w \mu' + u \mu. \quad (14)$$

Hier sind  $U$  und  $u$  in der Richtung vom Pole der Kugelfunktion, d. i. von der  $z$ -Achse weg,  $W$  und  $w$  nach „Süden“ positiv gezählt (Fig. 3).

Die Bedingung lautet also:

$$U = -w\mu' + u\mu = 0 \quad (15)$$

oder

$$w = \frac{\mu}{\mu'} \cdot u,$$

somit längs der ganzen Unterseite der Scholle:

$$\sum \frac{\mu}{\mu'} \left( C_n \mu' \bar{P}_n - D_n \mu \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right) = w_1$$

oder

$$\sum \left( C_n \mu \bar{P}_n - D_n \mu^2 \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right) = w_1 \quad (16)$$

wenn  $w_1$  die augenblickliche Sinkgeschwindigkeit der Scholle ist. Subtrahieren wir (16) von (13), so bleibt wegen  $\mu^2 + \mu'^2 = 1$

$$\sum D_n \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} = 0,$$

daraus folgt

$$D_n = 0 \quad (17)$$

und

$$\frac{1}{w_0} \sum C_n \mu \bar{P}_n(\mu) = 1 \quad (18)$$

ein System linearer Gleichungen, das zunächst nach den Unbekannten  $\frac{C_i}{w_1}$  aufzulösen ist. Es bestand zuerst die Hoffnung, mit wenigen Kugelfunktionen auskommen zu können. Wenn man sich aber z. B. auf  $n = 8$  beschränkt und die Darstellung der Insel versucht, während auf der ganzen übrigen Erde die Höhe gleich Null sein soll, so wird die Darstellung noch so schlecht, daß der Inselcharakter gar nicht zum Ausdruck kommt. Es wurde daher beschlossen, wieder bis zur 16. Ordnung zu gehen wie in meiner Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde.

Wir nehmen an, daß die kreisförmige Insel von der  $z$ -Achse, dem Pole der Kugelfunktionen, bis zur Breite  $d = 90 - 18^\circ 4' 14'' = 71^\circ 55' 46''$  reicht, d. i. bis zu der zweiten

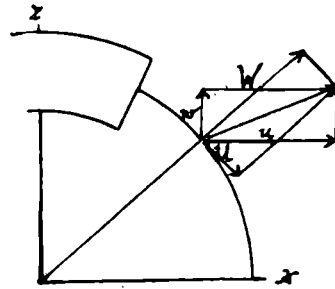


Fig. 3.

Wurzel der Gleichung  $P_{17}(\mu) \doteq 0$  und nehmen auf einen Meridian 16 äquidistante Punkte, für welche die Kugelfunktionen berechnet werden müssen.

Das Resultat dieser Berechnung ist in Taf. 1 zusammengestellt; Taf. 2 gibt die Größen  $\mu P_n(\mu)$ . Die Auflösung der Gleichungen (18) gestaltet sich sehr langwierig und mühevoll; verlangt doch die Rechnung einen Aufwand von mehr als zwanzigtausend Ziffern. Bei der sukzessiven Elimination sinkt die Zahl der verlässlichen Stellen immer mehr. Obwohl die Rechnung sechsstellig geführt wurde, ist doch das Resultat auf nicht mehr als vier Stellen sicher. Taf. 3 gibt das Resultat:

$$x_i = \frac{C_i}{w_0}. \quad (19)$$

Es ist also nach (12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} r_1^{n-1} \left( A_n \frac{n}{2(2n+3)} r_1^2 + B_n n \right) &= x_n w_0, \\ \frac{1}{\sigma} r_1^{n-1} \left( A_n \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r_1^2 + B_n \right) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

wo  $r_1$  der Radius der unteren Schollenbegrenzung ist, wozu auch die Größe  $w_1$  gehört.

Durch Elimination von  $B_n$  wird:

$$A_n \left( \frac{n}{2(2+3)} r_1^2 - \frac{n(n+3)}{2(n+1)(2n+3)} r_1^2 \right) = \frac{x_n w_1 \sigma}{r_1^{n-1}}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{2n+3} - \frac{n+3}{(n+1)(2n+3)} = - \frac{2}{(n+1)(2n+3)},$$

daher

$$A_n = - \frac{x_n w_1 \sigma}{n r_1^{n+1}} (n+1)(2n+3) \quad (21)$$

und

$$B_n = -A_n \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r_1^2 = \frac{x_n w_1 \sigma}{n r_1^{n-1}} \frac{n+3}{2}. \quad (22)$$

## II.

Wir wenden uns nun zur Bestimmung der Dissipation. Wegen der Kreissymmetrie können wir in dem Ausdruck (2)

alle Glieder mit  $v$  oder  $y$  weglassen. Dadurch erhält er die Form:

$$\Phi = \sigma \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 4 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]. \quad (23)$$

Wir behandeln zunächst das erste Glied. Es wird

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \mu + \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu'^2}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} \mu' - \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu \mu'}{r}.$$

Nun ist nach (14)

$$\begin{aligned} u &= W\mu' + U\mu, \\ w &= W\mu - U\mu', \end{aligned} \quad (14')$$

daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \left( \frac{\partial W}{\partial r} \mu' + \frac{\partial U}{\partial r} \mu \right) \mu + \left( \frac{\partial W}{\partial \mu} \mu' + W \frac{\partial \mu'}{\partial \mu} + \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu + U \right) \frac{\mu'^2}{r} - \\ &- \left( \frac{\partial W}{\partial r} \mu - \frac{\partial U}{\partial r} \mu' \right) \mu' + \left( \frac{\partial W}{\partial \mu} \mu + W - \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu' - U \frac{\partial \mu'}{\partial \mu} \right) \frac{\mu \mu'}{r}, \end{aligned}$$

oder wegen

$$\frac{\partial \mu'}{\partial \mu} = \frac{\partial \sqrt{1-\mu^2}}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot -2\mu = -\frac{\mu}{\mu'}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial r} \mu \mu' + \frac{\partial U}{\partial r} \mu^2 + \frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\mu'^3}{r} - W \frac{\mu \mu'}{r} + \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\mu \mu'^2}{r} + \\ &+ U \frac{\mu'^2}{r} - \frac{\partial W}{\partial r} \mu \mu' + \frac{\partial U}{\partial r} \mu'^2 + \frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\mu^2 \mu'}{r} + W \frac{\mu \mu'}{r} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\mu \mu'^2}{r} + \\ &+ U \frac{\mu^2}{r} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\mu'}{r} + \frac{U}{r}. \end{aligned} \quad (25)$$

Bilden wir nun

$$W = w\mu + u\mu' = \sum \frac{r^{n-1}}{\sigma} \left( A_n \frac{n}{2(2n+3)} r^2 + B_n \right) \bar{P}_n(\mu), \quad (26)$$

$$U = -w\mu' + u\mu = \sum \frac{r^{n-1}}{\sigma} \left( A_n \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)} r^2 + B_n \right) \mu' \frac{\partial \bar{P}_n(\mu)}{\partial \mu},$$

so können wir die Funktionen von  $r$  und die von  $\mu$  trennen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{\sigma} \frac{n}{2(2n+3)} r^{n+1} &= -x_n w_1 \frac{n+1}{2} \frac{r^{n+1}}{r_1^{n+1}}, \quad \frac{1}{\sigma} n B_n = x_n w_1 \frac{n+3}{2} \frac{r^{n-1}}{r_1^{n-1}} \\ - \frac{A_n}{\sigma} \frac{n+3}{2(2n+1)(2n+3)} &= x_n w_1 \frac{n+3}{2n} \frac{r^{n+1}}{r_1^{n+1}} \\ - \frac{1}{\sigma} B_n &= -x_n w_1 \frac{n+3}{2n} \frac{r^{n-1}}{r_1^{n-1}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Setzen wir also

$$\begin{aligned}
 f_n &= -x_n w_1 \left( \frac{n+1}{2} \frac{r^{n+1}}{r_1^{n+1}} - \frac{n+3}{2} \frac{r^{n-1}}{r_1^{n-1}} \right) \text{ und} \\
 f_n' &= \frac{\partial f_n}{\partial r} = -x_n w_1 \left( \frac{(n+1)^2}{2} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} - \frac{(n+3)(n-1)}{2} \frac{r^{n-2}}{r_1^{n-1}} \right), \\
 g_n &= x_n w_1 \left( \frac{n+3}{2n} \frac{r^{n+1}}{r_1^{n+1}} - \frac{n+3}{2n} \frac{r^{n-1}}{r_1^{n-1}} \right) \text{ und} \\
 g_n' &= \frac{\partial g_n}{\partial r} = x_n w_1 \left( \frac{(n+3)(n+1)}{2n} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} - \frac{(n+3)(n-1)}{2n} \frac{r^{n-2}}{r_1^{n-1}} \right),
 \end{aligned} \tag{28}$$

So wird

$$\begin{aligned}
 W &= \sum f_n(r) \bar{P}_n(\mu) & U &= \sum g_n(r) \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \\
 \frac{\partial W}{\partial r} &= \sum f_n'(r) \bar{P}_n(\mu) & \frac{\partial U}{\partial r} &= \sum g_n'(r) \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \\
 \frac{\partial W}{\partial \mu} &= \sum f_n(r) \frac{\partial \bar{P}_n(\mu)}{\partial \mu} & \frac{\partial U}{\partial \mu} &= \sum g_n(r) \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu} \right).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Setzen wir (29) in (25) ein, so wird

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \sum \left( g_n' + \frac{f_n}{r} + \frac{g_n}{r} \right) \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu}, \\
 &= \sum x_n w_1 \left[ \frac{n+3}{2n} \left( (n+1) \frac{r^n}{r_1^{n+1}} - (n-1) \frac{r^{n-2}}{r_1^{n-1}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n+1}{2} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} + \frac{n+3}{2} \frac{r^{n-2}}{r_1^{n-1}} + \frac{n+3}{2n} \left( \frac{r^n}{r_1^{n+1}} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{r^{n-2}}{r_1^{n-1}} \right) \right] \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu}, \\
 &= \sum x_n w_1 \left[ \frac{r^n}{r_1^{n+1}} \frac{(n+3)(n+1) - n(n+1) + n+3}{2n} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r^{n-2}}{r_1^{n-1}} \frac{n+3}{2n} (n-1 - n+1) \right] \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Das letzte Glied fällt weg, und es bleibt

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \sum x_n w_1 \frac{r^n}{r_1^{n+1}} \frac{2n+3}{n} \mu' \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu}. \tag{31}$$

Dieser Ausdruck ist nach (17) zu quadrieren, mit dem Volumenelement  $r^2 dr d\lambda d\mu$  und mit  $\sigma$  zu multiplizieren und über die

ganze Kugel zu integrieren. Dabei wird der Raum der Erdkugel, der von der sinkenden Scholle eingenommen wird, vernachlässigt. Über die Berechtigung dazu muß später noch gesprochen werden.

Sind nun  $i$  und  $k$  zwei beliebige Indizes, so wird

$$\sigma \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \sigma \sum_{i=0}^{r+1} \sum_{k=0}^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} x_i x_k w_1^2 \frac{r^{i+k+2}}{r_1^{i+k+2}} \frac{(2i+3)(2k+3)}{ik} \mu \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial \mu} \cdot \mu \frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \mu} dr d\lambda d\mu.$$

$\mu \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial \mu}$  ist die erste adjungierte Kugelfunktion zu  $P$ ; sie wird gewöhnlich mit  $P_{i1}$  bezeichnet. In dem obigen Ausdruck verschwinden nun alle Integrale mit  $i \neq k$  nach den Integraleigenschaften der Kugelfunktionen, und es bleiben nur die Ausdrücke mit  $i = k$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \mu \frac{\partial \bar{P}_{ik}}{\partial \mu} \right)^2 d\mu d\lambda = \frac{4\pi}{2i+1} \cdot \frac{(i+k)!}{(i-k)!}, \quad (32)$$

für  $k=1$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \mu \frac{\partial \bar{P}_{i1}}{\partial \mu} \right)^2 d\mu d\lambda = \frac{4\pi}{2i+1} \cdot \frac{(i+1)!}{(i-1)!} = \frac{4\pi}{2i+1} i(i+1). \quad (33)$$

Führen wir auch die Integration nach  $r$  durch zwischen der Grenze  $r=0$  und  $r=r_0$ , wo  $r_0$  der Radius der Erde sei, so wird endlich

$$\begin{aligned} \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 &= \sigma \sum x_i^2 w_1^2 \frac{r_0^{2i+3}}{(2i+3)r_1^{2i+2}} \frac{(2i+3)^2}{i^2} \cdot \frac{4\pi}{2i+1} i(i+1) = \\ &= \sigma \sum 4\pi x_i^2 w_1^2 \frac{(2i+3)(i+1)}{i(2i+1)} \cdot \frac{r_0^{2i+3}}{r_1^{2i+2}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Wenn  $z_1$  die momentane Tauchtiefe ist, so ist  $r_1 = r_0 - z_1$ .

Daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1^{2i+2}} &= \frac{1}{r_0^{2i+2}} \left( 1 - \frac{z_1}{r_0} \right)^{-(2i+2)} = \frac{1}{r_0^{2i+2}} \left( 1 + \frac{z_1(2i+2)}{r_0} \right) = \\ &= \frac{1}{r_0^{2i+2}} + \frac{(2i+2)z_1}{r_0^{2i+3}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also endlich

$$\begin{aligned} \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 &= \sigma \sum 4 \pi x_i^2 w_1^2 \frac{(2i+3)(i+1)}{i(2i+1)} r_0 + \\ &+ \sigma \sum 4 \pi x_i^2 w_1^2 \frac{2(2i+3)(i+1)^2}{i(2i+1)} z_1. \end{aligned} \quad (35)$$

Das Zusatzglied also erhalten wir, wenn man den Koeffizienten des Hauptgliedes mit  $2(i+1)$  multipliziert und  $r_0$  durch  $z_1$  ersetzt.

Die Werte der hier verwendeten Koeffizienten sind aus pg. 14 zu entnehmen. Die beiden Glieder in (35) werden hier wie in den folgenden Fällen mit  $m$  und  $n$  bezeichnet.

Wir wenden uns nun zu dem zweiten Gliede in (23). Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial r} \mu + \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu'^2}{r} & \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \mu' - \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu \mu'}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \mu' - \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu \mu'}{r} & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial r} \mu + \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu'^2}{r}. \end{aligned} \quad (36)$$

Somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \mu \mu' - \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu^2 \mu'}{r} + \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\mu'^3}{r} - \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu \mu'^3}{r^2} - \\ - \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \mu \mu' - \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu'^3}{r} + \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\mu^2 \mu'}{r} + \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu \mu'^3}{r}. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} &= - \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu'}{r} + \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\mu'}{r} = \\ &= \frac{\mu'}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right); \end{aligned}$$

Es ist weiter nach (18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial W}{\partial r} \mu' + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \mu \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} &= \frac{\partial W}{\partial \mu} \cdot \mu' + W \frac{\partial \mu'}{\partial \mu} + \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu + U = \frac{\partial W}{\partial \mu} \mu' - W \frac{\mu}{\mu'} + \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu + U \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial W}{\partial r} \mu - \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \mu' \\ \frac{\partial w}{\partial \mu} &= \frac{\partial W}{\partial \mu} \cdot \mu + W - \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu' - U \frac{\partial \mu'}{\partial \mu} = \frac{\partial W}{\partial \mu} \mu + W - \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu' + U \frac{\mu}{\mu'}. \end{aligned} \quad (37)$$



Daher

$$\begin{aligned} & \frac{\mu'}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{\mu'}{r} \left[ \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mu} \mu \mu' + W \frac{\partial W}{\partial r} \mu' - \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu'^2 + \frac{\partial W}{\partial r} U \mu + \frac{\partial W}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \mu^2 + W \frac{\partial U}{\partial r} \mu - \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu \mu' + U \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\mu^2}{\mu'} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mu} \mu \mu' + W \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{\mu^2}{\mu'} - \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu^2 - \frac{\partial W}{\partial r} U \mu + \frac{\partial W}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \mu^2 - W \frac{\partial U}{\partial r} \mu + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mu} \mu \mu' + U \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\mu^2}{\mu'} \right] \\ & = \frac{\mu'}{r} \left[ W \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{1}{\mu'} - \frac{\partial W}{\partial r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\partial W}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{1}{\mu'} \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir nun hier (28) und (29) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum \sum \frac{1}{r} f_i f_k \bar{P}_i \bar{P}_k - \sum \sum \frac{1}{r} f_i' g_k \mu' \bar{P}_i \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu \frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \mu} \right) + \\ & \quad + \sum \sum \frac{1}{r} (f_i + g_i) g_k' \left( \mu' \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial \mu} \right) \left( \mu' \frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \mu} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Dieser Ausdruck ist wieder mit  $\sigma r^2 dr d\lambda d\mu$  zu multiplizieren und über die ganze Kugel zu integrieren.

Das erste Glied ist wieder quadratisch, denn es ist für  $i \neq k$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \bar{P}_i \bar{P}_k d\mu d\lambda = 0$$

dagegen für  $i = k$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \bar{P}_i^2(\mu) d\mu d\lambda = \frac{4\pi}{2i+1}. \quad (39)$$

Es wird nach (28)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} f_i f_i' r^2 &= x_i^2 w_1^2 \left[ \frac{(i+1)^3}{4} \cdot \frac{r^{2i+2}}{r_1^{2i+2}} - \frac{(i+1)^2(i+3)}{4} \cdot \frac{r^{2i}}{r_1^{2i}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{(i+1)(i-1)(i+3)}{4} \cdot \frac{r^{2i}}{r_1^{2i}} + \frac{(i+3)^2(i-1)}{4} \cdot \frac{r^{2i-2}}{r_1^{2i-2}} \right]. \end{aligned}$$

Nach Integration von  $r=0$  bis  $r=r_0$

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} \frac{1}{r} f_i f_i' r^2 dr &= x_i^2 w_1^2 \left[ \frac{(i+1)^3}{4(2i+3)} \cdot \frac{r_0^{2i+3}}{r_1^{2i+2}} - \frac{(i+1)(i+3)}{2(2i+1)} \cdot \frac{r_0^{2i+1}}{r_1^{2i}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(i+3)^2(i-1)}{4(2i-1)} \cdot \frac{r_0^{2i-1}}{r_1^{2i-2}} \right]. \end{aligned}$$

Ersetzen wir wieder  $r_1$  durch  $r_0 - z$ , so wird mit Hilfe von (39)

$$\int_0^{r_0} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \sum f_i f'_k \bar{P}_i \bar{P}_k r dr d\lambda d\mu = x_i^2 w_1^2 \frac{4\pi r_0}{2i+1} \left[ \frac{(i+3)^3}{4(2i+3)} - \frac{i(i+1)(i+3)}{2(2i+1)} + \frac{(i+3)^2(i-1)}{4(2i-1)} \right] + \quad (40)$$

$$+ x_i^2 w_1^2 \frac{4\pi z}{2i+1} \left[ \frac{(i+3)^3(2i+2)}{4(2i+3)} - \frac{i(i+1)(i+3)}{2(2i+1)} 2i + \frac{(i+3)^2(i-1)(2i-2)}{4(2i-1)} \right].$$

Die Werte der Koeffizienten finden sich auf pg. 14.

Komplizierter wird das 2. Glied, weil die Kugelfunktionen nicht in so einfacher Form eintreten. Es ist

$$\mu' \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu' \frac{\partial P_k}{\partial \mu} \right) = \mu' \left[ \frac{\partial \mu'}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial P_k}{\partial \mu} + \mu' \frac{\partial^2 P_k}{\partial \mu^2} \right] = -\mu \frac{\partial P_k}{\partial \mu} + \mu'^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \mu^2}.$$

Nun gilt für die Kugelfunktionen die Differentialgleichung

$$k(k+1) P_k - 2\mu \frac{\partial P_k}{\partial \mu} + \mu'^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \mu^2} = 0,$$

daher

$$-\mu \frac{\partial P_k}{\partial \mu} + \mu'^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \mu^2} = \mu \frac{\partial P_k}{\partial \mu} - k(k+1) P_k. \quad (41)$$

Um wieder die Integraleigenschaften der Kugelfunktionen anwenden zu können, muß das erste Glied rechts durch einen Ausdruck in  $P_k$  oder in den zugehörigen adjungierten Funktionen ersetzt werden. Wenn  $P_k$  eine gerade Funktion ist, so ist  $\mu \frac{\partial P_k}{\partial \mu}$  ebenfalls eine gerade Funktion; der Ausdruck rechts enthält daher nur gerade Funktionen, oder nur ungerade. Die geraden und ungeraden Funktionen trennen sich also von selbst.

Nach der bekannten Formel für die Kugelfunktion

$$P_k(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2k-1}{k!} \left[ \mu^k - \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} \mu^{k-2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2k-1)(2k-3)} \mu^{k-4} - \dots \right].$$

Finden wir für gerade  $k$

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 1 \\
 0.666667 & P_2 = \mu^2 - 0.333333 \\
 0.228571 & P_4 = \mu^4 - 0.857143 \mu^2 + 0.085741 \\
 6.92641 \cdot 10^{-2} & P_6 = \mu^6 - 1.363636 \mu^4 + 0.45455 \mu^2 - 0.021645 \\
 1.98912 \cdot 10^{-2} & P_8 = \mu^8 - 1.866667 \mu^6 + 1.07692 \mu^4 - 0.19580 \mu^2 + 5.53898 \cdot 10^{-} \\
 5.54245 \cdot 10^{-3} & P_{10} = \mu^{10} - 2.36842 \mu^8 + 1.95046 \mu^6 - 0.65015 \mu^4 + 7.50179 \cdot 10^{-} \\
 1.51470 \cdot 10^{-3} & P_{12} = \mu^{12} - 2.86957 \mu^{10} + 3.07453 \mu^8 - 1.51030 \mu^6 + 3.33154 \cdot 10^{-} \\
 4.08410 \cdot 10^{-4} & P_{14} = \mu^{14} - 3.37037 \mu^{12} + 4.44889 \mu^{10} - 2.90145 \mu^8 + 9.67149 \cdot 10^{-} \\
 1.09030 \cdot 10^{-4} & P_{16} = \mu^{16} - 3.87097 \mu^{14} + 6.07341 \mu^{12} - 4.94871 \mu^{10} + 2.22692
 \end{aligned}$$

für ungerade  $k$ :

$$\begin{aligned}
 1.00000 & P_1 = \mu \\
 0.40000 & P_3 = \mu^3 - 0.60000 \mu \\
 0.12698 & P_5 = \mu^5 - 1.11111 \mu^3 + 0.33810 \cdot 10^{-1} \mu \\
 3.72960 \cdot 10^{-2} & P_7 = \mu^7 - 1.61538 \mu^5 + 7.34266 \cdot 10^{-1} \mu^3 - 8.15850 \cdot 10^{-2} \mu \\
 1.05306 \cdot 10^{-2} & P_9 = \mu^9 - 2.11765 \mu^7 + 1.48235 \mu^5 - 3.80089 \cdot 10^{-1} \mu^3 + \\
 2.90319 \cdot 10^{-3} & P_{11} = \mu^{11} - 2.61905 \mu^9 + 2.48120 \mu^7 - 1.02167 \mu^5 + \\
 7.87647 \cdot 10^{-4} & P_{13} = \mu^{13} - 3.12000 \mu^{11} + 3.73043 \mu^9 - 2.13168 \mu^7 + \\
 2.11246 \cdot 10^{-4} & P_{15} = \mu^{15} - 3.62069 \mu^{13} + 5.22989 \mu^{11} - 3.83525 \mu^9 +
 \end{aligned}$$

Dreht man diese Systeme um, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \mu^0 &= P_0 \\
 \mu^2 &= 0.33333 P_0 + 0.66667 P_2 \\
 \mu^4 &= 0.20000 P_0 + 0.57143 P_2 + 0.22587 P_4 \\
 \mu^6 &= 0.14286 P_0 + 0.47619 P_2 + 0.31169 P_4 + 0.06926 P_6 \\
 \mu^8 &= 0.11111 P_0 + 0.40404 P_2 + 0.33567 P_4 + 0.12929 P_6 + 0.01989 P_8 \\
 \mu^{10} &= 0.09092 P_0 + 0.34966 P_2 + 0.33567 P_4 + 0.17112 P_6 + 0.04711 P_8 + 0.00554 P_{10} \\
 \mu^{12} &= 0.07692 P_0 + 0.30773 P_2 + 0.32580 P_4 + 0.19813 P_6 + 0.07404 P_8 + 0.01590 P_{10} \\
 \mu^{14} &= 0.06664 P_0 + 0.27458 P_2 + 0.31209 P_4 + 0.21463 P_6 + 0.09766 P_8 + 0.02894 P_{10} \\
 \mu^{16} &= 0.05878 P_0 + 0.24767 P_2 + 0.29724 P_4 + 0.22396 P_6 + 0.11720 P_8 + 0.04288 P_{10} \\
 \mu^1 &= P_1 \\
 \mu^3 &= 0.60000 P_1 + 0.40000 P_3 \\
 \mu^5 &= 0.42857 P_1 + 0.44444 P_3 + 0.12698 P_5 \\
 \mu^7 &= 0.33333 P_1 + 0.42425 P_3 + 0.20513 P_5 + 0.03730 P_7 \\
 \mu^9 &= 0.27273 P_1 + 0.39162 P_3 + 0.24615 P_5 + 0.07898 P_7 + 0.01053 P_9 \\
 \mu^{11} &= 0.23078 P_1 + 0.35898 P_3 + 0.26545 P_5 + 0.11431 P_7 + 0.02758 P_9 + 0.00290 P_{11} \\
 \mu^{13} &= 0.20002 P_1 + 0.32941 P_3 + 0.27242 P_5 + 0.14152 P_7 + 0.04677 P_9 + 0.00906 P_{11} \\
 \mu^{15} &= 0.17651 P_1 + 0.30333 P_3 + 0.27239 P_5 + 0.16151 P_7 + 0.06549 P_9 + 0.01762 P_{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 1.36396 \cdot 10^{-3} \\
 & - 2.66523 \cdot 10^{-2} \mu^2 + 3.46133 \cdot 10^{-4} \\
 & - 1.52708 \cdot 10^{-1} \mu^4 + 8.98282 \cdot 10^{-3} \mu^2 - 8.55506 \cdot 10^{-5} \\
 & - 5.42206 \cdot 10^{-1} \mu^6 + 6.45484 \cdot 10^{-2} \mu^4 - 2.91196 \cdot 10^{-3} \mu^2 + 2.14115 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 & 1152 \cdot 10^{-2} \mu \\
 & 1279 \cdot 10^{-1} \mu^3 - 7.85902 \cdot 10^{-3} \mu \\
 & 1017 \cdot 10^{-1} \mu^5 - 6.92961 \cdot 10^{-2} \mu^3 + 2.30987 \cdot 10^{-3} \mu \\
 & 1075 \mu^7 - 3.00149 \cdot 10^{-1} \mu^5 + 2.63289 \cdot 10^{-2} \mu^3 - 6.63754 \cdot 10^{-4} \mu
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

(44)

$$\begin{aligned}
 & 0.00151 P_{12} \\
 & 0.00509 P_{12} + 0.00041 P_{14} \\
 & 0.01053 P_{12} + 0.00159 P_{14} + 0.00011 P_{16}
 \end{aligned}$$

(45)

$$\begin{aligned}
 & 0.00079 P_{13} \\
 & 0.00285 P_{13} + 0.00021 P_{15}
 \end{aligned}$$

Bilden wir nun aus (42) und (43) die rechte Seite von (41) und ersetzen dann die auftretenden Potenzen von  $\mu$  nach (44) und (45), so finden wir

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{\partial P_2}{\partial \mu} - 6 P_2 &= P_0 - 4 P_2 \\
 \mu \frac{\partial P_4}{\partial \mu} - 20 P_4 &= P_0 + 5 P_2 - 16 P_4 \\
 \mu \frac{\partial P_6}{\partial \mu} - 42 P_6 &= P_0 + 5 P_2 + 9 P_4 - 36 P_6 \\
 \mu \frac{\partial P_8}{\partial \mu} - 72 P_8 &= P_0 + 5 P_2 + 9 P_4 + 13 P_6 - 64 P_8 \\
 \mu \frac{\partial P_{10}}{\partial \mu} - 110 P_{10} &= P_0 + 5 P_2 + 9 P_4 + 13 P_6 + 17 P_8 - 100 P_{10} \\
 \mu \frac{\partial P_{12}}{\partial \mu} - 156 P_{12} &= P_0 + 5 P_2 + 9 P_4 + 13 P_6 + 17 P_8 + 21 P_{10} - 144 P_{12} \\
 \mu \frac{\partial P_{14}}{\partial \mu} - 210 P_{14} &= P_0 + 5 P_2 + 9 P_4 + 13 P_6 + 17 P_8 + 21 P_{10} + 25 P_{12} - 196 P_{14} \\
 \mu \frac{\partial P_{16}}{\partial \mu} - 272 P_{16} &= P_0 + 5 P_2 + 9 P_4 + 13 P_6 + 17 P_8 + 21 P_{10} + 25 P_{12} + 29 P_{14} - 256 P_{16}
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
 \mu \frac{\partial P_1}{\partial \mu} - 2 P_1 &= -P_1 \\
 \mu \frac{\partial P_3}{\partial \mu} - 12 P_3 &= 3 P_1 - 9 P_3 \\
 \mu \frac{\partial P_5}{\partial \mu} - 30 P_5 &= 3 P_1 + 7 P_3 - 25 P_5 \\
 \mu \frac{\partial P_7}{\partial \mu} - 56 P_7 &= 3 P_1 + 7 P_3 + 11 P_5 - 49 P_7 \\
 \mu \frac{\partial P_9}{\partial \mu} - 90 P_9 &= 3 P_1 + 7 P_3 + 11 P_5 + 15 P_7 - 81 P_9 \\
 \mu \frac{\partial P_{11}}{\partial \mu} - 132 P_{11} &= 3 P_1 + 7 P_3 + 11 P_5 + 15 P_7 + 19 P_9 - 121 P_{11} \\
 \mu \frac{\partial P_{13}}{\partial \mu} - 182 P_{13} &= 3 P_1 + 7 P_3 + 11 P_5 + 15 P_7 + 19 P_9 + 23 P_{11} - 169 P_{13} \\
 \mu \frac{\partial P_{15}}{\partial \mu} - 240 P_{15} &= 3 P_1 + 7 P_3 + 11 P_5 + 15 P_7 + 19 P_9 + 23 P_{11} + 27 P_{13} - 225 P_{15}
 \end{aligned} \tag{47}$$

Wenn man die Koeffizienten dieser Ausdrücke logarithmisch oder mit der Rechenmaschine berechnet, so werden sie zum Schlusse immer unsicherer erhalten. Man überzeugt sich aber leicht, daß diese Koeffizienten tatsächlich genau ganzzahlig sind.

Wir haben nun zu bilden

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_i \left( \mu \frac{\partial P_k}{\partial \mu} - k(k+1) P_k \right) d\mu d\lambda.$$

Führen wir hier die Ausdrücke (46) und (47) ein, so finden wir mit Rücksicht auf (39), daß  $i$  und  $k$  entweder beide gerade oder beide ungerade sein müssen, ferner daß  $i \leq k$  sein muß.

Bezeichnen wir den obigen Ausdruck symbolisch mit  $4\pi [ik]$ , so erhalten wir für  $[ik]$  das folgende Schema.

| $\begin{matrix} k \\ \backslash \\ i \end{matrix}$ | 2              | 4               | 6                | 8                | 10                | 12                | 14                | 16                |
|--|----------------|-----------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 2  | $-\frac{4}{5}$ | 1               | 1                | 1                | 1                 | 1                 | 1                 | 1                 |
| 4  |                | $-\frac{16}{9}$ | 1                | 1                | 1                 | 1                 | 1                 | 1                 |
| 6  |                |                 | $-\frac{36}{13}$ | 1                | 1                 | 1                 | 1                 | 1                 |
| 8  |                |                 |                  | $-\frac{64}{17}$ | 1                 | 1                 | 1                 | 1                 |
| 10   |                |                 |                  |                  | $-\frac{100}{21}$ | 1                 | 1                 | 1                 |
| 12   |                |                 |                  |                  |                   | $-\frac{144}{25}$ | 1                 | 1                 |
| 14   |                |                 |                  |                  |                   |                   | $-\frac{196}{29}$ | 1                 |
| 16   |                |                 |                  |                  |                   |                   |                   | $-\frac{256}{33}$ |

(48)

| $k \backslash i$ | 1              | 3              | 4                | 7                | 9                | 11                | 13                | 15                |
|------------------|----------------|----------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1                | $-\frac{1}{3}$ | 1              | 1                | 1                | 1                | 1                 | 1                 | 1                 |
| 3                |                | $-\frac{9}{7}$ | 1                | 1                | 1                | 1                 | 1                 | 1                 |
| 5                |                |                | $-\frac{25}{11}$ | 1                | 1                | 1                 | 1                 | 1                 |
| 7                |                |                |                  | $-\frac{49}{15}$ | 1                | 1                 | 1                 | 1                 |
| 9                |                |                |                  |                  | $-\frac{81}{19}$ | 1                 | 1                 | 1                 |
| 11               |                |                |                  |                  |                  | $-\frac{121}{23}$ | 1                 | 1                 |
| 13               |                |                |                  |                  |                  |                   | $-\frac{169}{27}$ | 1                 |
| 15               |                |                |                  |                  |                  |                   |                   | $-\frac{225}{31}$ |

(49)

Es ist weiter: nach (28)

$$r f'_i g_k = -x_i x_k w_1^2 \left[ \frac{(i+1)^2(k+3)}{4k} \cdot \frac{r^{i+k+2}}{r_1^{i+k+2}} - \frac{(i+3)(i-1)(k+3)}{4k} \cdot \frac{r^{i+k}}{r_1^{i+k}} - \frac{(i+1)^2(k+3)}{4k} \cdot \frac{r^{i+k}}{r_1^{i+k}} + \frac{(i+3)(i-1)(k+3)}{4k} \cdot \frac{r^{i+k-2}}{r_1^{i+k-2}} \right]$$

oder nach der Integration und unter Berücksichtigung von  $r_1 = r_0 - z_1$ 

$$\int_0^{r_0} r f'_i g_k dr = -x_i x_k w_1^2 r_0 \left[ \frac{(i+1)^2(k+3)}{4k(i+k+3)} - \frac{k+3}{4k} \cdot \frac{(i+3)(i-1) + (i+1)^2}{i+k+1} + \frac{(i+3)(i-1)(k+3)}{4k(i+k-1)} \right] - x_i x_k w_1^2 z_1 \left[ \frac{(i+1)^2(k+3)}{4k} \cdot \frac{i+k+2}{i+k+3} - \frac{(k+3)}{4k} \cdot \frac{(i+3)(i-1) + (i+1)^2}{i+k+1} + \frac{(i+3)(i-1)(k+3)}{4k} \cdot \frac{(i+k-2)}{i+k-1} \right] \quad (50)$$

Die hier auftretenden Koeffizienten sind auf pag. 616 gegeben.

Koeffizienten  
zu (35)                      zu (40)

| $i$ | $m$    | $n$     | $m$     | $n$     |
|-----|--------|---------|---------|---------|
| 1   | 3·3333 | 13·3333 | -0·9333 | -2·0647 |
| 2   | 2·1010 | 12·6060 | +0·0476 | -2·0476 |
| 3   | 1·7143 | 13·7144 | +0·2350 | -2·2344 |
| 4   | 1·5278 | 15·2780 | +0·3131 | -2·3134 |
| 5   | 1·4182 | 17·0184 | +0·3557 | -2·3576 |
| 6   | 1·3462 | 18·8468 | +0·3826 | -2·3844 |
| 7   | 1·2952 | 20·7232 | +0·4008 | -2·4068 |
| 8   | 1·2574 | 22·6332 | +0·4159 | -2·4028 |
| 9   | 1·2281 | 24·5620 | +0·4246 | -2·42   |
| 10  | 1·2048 | 26·5056 | +0·4334 | -2·42   |
| 11  | 1·1858 | 28·4592 | +0·4401 | -2·43   |
| 12  | 1·1700 | 30·4200 | +0·4455 | -2·43   |
| 13  | 1·1567 | 32·3876 | +0·4490 | -2·44   |
| 14  | 1·1453 | 34·3590 | +0·4538 | -2·44   |
| 15  | 1·1355 | 36·3360 | +0·4563 | -2·46   |
| 16  | 1·1269 | 38·3146 | +0·4586 | -2·53   |

Koeffizienten  
zu (52)

| $i$ | mit $r_0$ | mit $z_1$ |
|-----|-----------|-----------|
| 1   | +0·8000   | +3·2000   |
| 2   | +0·3453   | +2·1550   |
| 3   | +0·1842   | +1·8164   |
| 4   | +0·1193   | +1·6306   |
| 5   | +0·0863   | +1·5140   |
| 6   | +0·0668   | +1·4334   |
| 7   | +0·0541   | +1·3744   |
| 8   | +0·0453   | +1·3296   |
| 9   | +0·0388   | +1·2934   |
| 10  | +0·0340   | +1·2670   |
| 11  | +0·0301   | +1·2424   |
| 12  | +0·0271   | +1·2246   |
| 13  | +0·0245   | +1·2060   |
| 14  | +0·0223   | +1·1889   |
| 15  | +0·0207   | +1·1818   |
| 16  | +0·0191   | +1·1686   |

Koeffizienten zu (50), gerade Glieder mit  $r_0$

| $i \backslash k$ | 2       | 4       | 6       | 8       | 10      | 12      | 14      | 16      |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2                | +0·0952 | 0·0000  | -0·0087 | -0·0086 | -0·0073 | -0·0060 | -0·0050 | -0·0042 |
| 4                |         | +0·0707 | +0·0282 | +0·0128 | +0·0063 | +0·0031 | +0·0015 | +0·0005 |
| 6                |         |         | +0·0476 | +0·0265 | +0·0161 | +0·0104 | +0·0074 | +0·0047 |
| 8                |         |         |         | +0·0352 | +0·0230 | +0·0158 | +0·0113 | +0·0082 |
| 10               |         |         |         |         | +0·0278 | +0·0199 | +0·0147 | +0·0112 |
| 12               |         |         |         |         |         | +0·0229 | +0·0174 | +0·0135 |
| 14               |         |         |         |         |         |         | +0·0194 | +0·0154 |
| 16               |         |         |         |         |         |         |         | +0·0169 |

mit  $z_1$

| $i \backslash k$ | 2       | 4       | 6       | 8       | 10      | 12      | 14      | 16      |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2                | -0·0952 | 0·0000  | +0·0088 | +0·0085 | +0·0073 | +0·0062 | +0·0052 | +0·0045 |
| 4                |         | -0·0706 | -0·0235 | -0·0128 | -0·0063 | -0·0032 | -0·0011 | -0·0004 |
| 6                |         |         | -0·0476 | -0·0269 | -0·0161 | -0·0106 | -0·0070 | -0·0052 |
| 8                |         |         |         | -0·0355 | -0·0230 | -0·0158 | -0·0110 | -0·0085 |
| 10               |         |         |         |         | -0·0276 | -0·0199 | -0·0148 | -0·0115 |
| 12               |         |         |         |         |         | -0·0227 | -0·0173 | -0·0136 |
| 14               |         |         |         |         |         |         | -0·0210 | -0·0167 |
| 16               |         |         |         |         |         |         |         | -0·0178 |





ungerade Glieder

| $i \backslash k$ | 1       | 3       | 5       | 7       | 9       | 11      | 13      | 15      |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1                | +1.7562 | -1.4646 | +1.2532 | -0.6692 | -1.1069 | +0.8476 | +0.1438 | -0.0375 |
| 3                |         | +1.2215 | -1.0452 | +0.5581 | +0.9232 | -0.7069 | -0.1199 | +0.0313 |
| 5                |         |         | +0.8943 | -0.4776 | -0.7899 | +0.6049 | +0.1026 | -0.0268 |
| 7                |         |         |         | +0.2550 | +0.4218 | -0.3230 | -0.0548 | +0.0143 |
| 9                |         |         |         |         | +0.6977 | -0.5343 | -0.0906 | +0.0236 |
| 11               |         |         |         |         |         | +0.4091 | +0.0694 | -0.0181 |
| 13               |         |         |         |         |         |         | +0.0118 | -0.0031 |
| 15               |         |         |         |         |         |         |         | -0.0006 |

Wir wenden uns zu dem letzten Gliede in (38): Es ist, soweit die Kugelfunktionen in Betracht kommen, nach (33) zu behandeln.

Die Funktion von  $r$  wird:

$$\begin{aligned}
 r(f_i + g_i) g_i &= x_i^2 w_1^2 \left[ \left( -\frac{i+1}{2} + \frac{i+3}{2i} \right) \frac{r^{i+2}}{r_1^{i+1}} + \left( \frac{i+3}{2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{i+3}{2i} \right) \frac{r^i}{r_1^{i-1}} \right] \left[ (i+1) \frac{r^i}{r_1^{i+1}} - \right. \\
 &\quad \left. - (i-1) \frac{r^{i-2}}{r_1^{i-1}} \right] \frac{i+3}{2i}, \\
 &= x_i^2 w_1^2 \left[ \frac{3-i^2}{2i} \frac{r^{i+2}}{r_1^{i+1}} + \frac{(i+3)(i-1)}{2i} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \frac{r^i}{r_1^{i-1}} \right] \left[ \frac{(i+3)(i+1)}{2i} \cdot \frac{r^i}{r_1^{i+1}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(i+3)(i-1)}{2i} \cdot \frac{r^{2i-2}}{r_1^{i+1}} \right], \\
 &= x_i^2 w_1^2 \left[ \frac{(3-i^2)(i+3)(i+1)}{4i^2} \cdot \frac{r^{2i+2}}{r_1^{2i+2}} + \right. \\
 &\quad + \frac{(i+3)^2(i+1)(i-1)}{4i^2} \cdot \frac{r^{2i}}{r_1^{2i}} - \\
 &\quad - \frac{(3-i^2)(i+3)(i-1)}{4i^2} \cdot \frac{r^{2i}}{r_1^{2i}} - \\
 &\quad \left. - \frac{(i+3)^2(i-1)^2}{4i^2} \cdot \frac{r^{2i-2}}{r_1^{2i-2}} \right] \quad (51)
 \end{aligned}$$

oder nach Integration

$$\begin{aligned}
 \int_0^{r_0} r (f_i + g_i) g_i' dr &= x_i^2 w_1^2 r_0 \left[ \frac{(3-i^2)(i+3)(i+1)}{4i^2(2i+3)} + \right. \\
 &+ \frac{(i+3)^2(i+1)(i-1) - (3-i^2)(i+3)(i-1)}{4i^2(2i+1)} - \\
 &- \left. \frac{(i+3)^2(i-1)^2}{4i^2(2i-1)} \right] + x_i^2 w_1^2 z_1 \left[ \frac{(3-i^2)(i+3)(i+1)}{4i^2(2i+3)} (2i+2) + \right. \\
 &+ \frac{(i+3)^2(i+1)(i-1) - (3-i^2)(i+3)(i-1)}{4i^2(2i+1)} 2i - \\
 &\left. - \frac{(i+3)^2(i-1)^2}{4i^2(2i-1)} (2i-2) \right]. \tag{52}
 \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Koeffizienten finden sich auf pag. 616. Um die Rechnung vollenden zu können, fehlen noch die Produkte der  $x_i$ . Sie sind auf pag. 616 und 617 angegeben.

Was endlich den von der Scholle eingenommenen Raum anbelangt, den wir widerrechtlich in die Integrationsgrenze einbezogen haben, so ist die Berechnung seines Einflusses sehr weitläufig. Da sich nämlich die Integration nun nur auf die kleine Kalotte, welche von der Insel eingenommen ist, erstreckt und nicht mehr auf die ganze Kugel, so können die Integraleigenschaften der Kugelfunktionen nicht mehr angewendet werden, es kommen daher  $i$  und  $k$  in allen Kombinationen vor. Da aber die einzelnen Glieder in ihrer Größe und auch nach den Vorzeichen verschieden sind, so läßt sich von vornherein nicht sagen, ob die Summe groß oder klein ausfällt. Es bleibt also nichts übrig, als alle Glieder — es sind mehr als tausend — wirklich zu berechnen. Die Integrale wurden in einfacher Weise nach der Trapezformel gerechnet. Bei diesen umfangreichen Rechnungen wurde ich durch meinen Assistenten Dr. Ferrari wesentlich unterstützt. Der Endwert ist so klein, daß er hätte vernachlässigt werden können. Da er nun schon berechnet war, wurde er mitgenommen.

Wir erhalten nach (23), (34) und (38) den Wert

$$\Phi = (4 \cdot 9021 \cdot 10^{10} + 595 \cdot 71 z) \sigma w_1^2 = \Phi' \sigma w^2, \quad (53)$$

wo  $w_1 = \frac{dz}{dt}$  ist.

### III.

Wir brauchen nun die Differentialgleichung für den Fall, daß eine starre Masse  $m$  von der Dichte  $\rho$  unter dem Einfluß des Auftriebes in eine zähe Flüssigkeit von der Dichte  $\rho'$  und dem Viskositätskoeffizienten  $\sigma$  einsinkt. Legen wir ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt in die Erdoberfläche und mit der  $z$ -Achse nach abwärts, so ist die lebendige Kraft gleich  $\frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ . Die nach abwärts wirkende Kraft ist  $mg$ . Ist  $f$  der Flächeninhalt unserer Scholle, ihre Dicke  $d$  und ihre Dichte  $\rho$  und ist diese Scholle bis zur Tiefe  $z$  in das Sima von der Dichte  $\rho'$  eingetaucht, so ist der Auftrieb gleich  $gf\rho d - gf\rho'z = mg\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}z\right)$ . Das zugehörige Potential ist gleich  $mg\left(z - \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{z^2}{2}\right)$ . Der Energieverlust ist nach (53) gegeben durch  $\sigma \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \Phi'$ . Es lautet also die Gleichung für die Änderung der Energie:

$$d\left[\frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = d\left[mg\left(z - \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{z^2}{2}\right)\right] - \sigma \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \Phi' dt. \quad (54)$$

Führen wir die Differentiation nach  $t$  aus, so erhalten wir mit  $\Phi' = E + E'z$ :

$$m \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = mg \frac{dz}{dt} - mg \frac{\rho'}{\rho} z \frac{dz}{dt} - \sigma (E + E'z) \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

oder

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} z\right) - \frac{\sigma}{m} (E + E'z) \frac{dz}{dt}. \quad (55)$$

Wir setzen

$$1 - \frac{\rho'}{\rho} z = u \quad \text{oder} \quad z = (1 - u) \frac{\rho d}{\rho'}, \quad (56)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\rho d}{\rho'} \cdot \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\rho d}{\rho'} \frac{d^2u}{dt^2}.$$

Somit

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + g \frac{\rho'}{\rho d} \cdot u + \frac{\sigma}{m} \left[ E + E' (1 - u) \frac{\rho d}{\rho'} \right] \frac{du}{dt} = 0. \quad (57)$$

Für kleine  $z$  ist  $u$  nahe gleich 1; wir können dann das Glied mit  $1 - u$  weglassen, und wir erhalten eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Mit den Zahlen

$$g = 980.6 \text{ cm}, \quad \rho = 2.7, \quad \rho' = 3.0, \quad d = 3 \cdot 10^6 \text{ cm}$$

ergibt sich

$$g \cdot \frac{\rho'}{\rho d} = 980.6 \frac{3.0}{2.7 \cdot 3 \cdot 10^6} = 3.63185 \cdot 10^{-4}. \quad (58)$$

Für die Masse unserer kreisförmigen Insel mit einem Radius von etwa 2000 km =  $2 \cdot 10^8$  cm finden wir

$$m = r^2 \pi d \cdot \rho = 1.0179 \cdot 10^{24},$$

ferner

$$\begin{aligned} \sigma E &= 4.0921 \cdot 10^{10} \cdot \sigma, & \frac{\sigma E}{m} &= 4.8159 \cdot 10^{-14} \cdot \sigma, \\ \sigma E \frac{\rho d}{\rho'} &= 1.60842 \cdot 10^9 \cdot \sigma. \end{aligned} \quad (58)$$

Daher lautet nun die Gleichung:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 4.8159 \cdot 10^{-14} \sigma \frac{du}{dt} + 3.6319 \cdot 10^{-4} u = 0. \quad (59)$$

Das Integral hat die Form

$$u = A e^{\alpha t} \quad (60)$$

und  $\alpha$  wird bestimmt aus der Gleichung

$$\alpha^2 + 4.8159 \cdot 10^{-14} \sigma \alpha + 3.6319 \cdot 10^{-4} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= - \frac{3.6319 \cdot 10^{-4}}{4.8159 \cdot 10^{-14} \cdot \sigma} = \frac{0.7541 \cdot 10^{10}}{\sigma} \\ \alpha_2 &= - 4.8159 \cdot 10^{-14} \cdot \sigma. \end{aligned} \quad (61)$$

Es ist also das vollständige Integral

$$u = A e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \quad (62)$$

Die Integrationskonstanten  $A_1$  und  $A_2$  müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden: es muß für  $t = 0$

$$z = 0 \text{ und } \frac{dz}{dt} = 0 \text{ sein oder } u = 1 \text{ und } \frac{du}{dt} = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} A_1 \text{ und } A_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} A_1 = 1. \\ A_1 &= \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Da  $\alpha_2$  gegenüber  $\alpha_1$  sehr groß ist, da es die große Zahl  $\epsilon$  im Zähler hat, so wird der zweite Teil des Integrals in sehr kurzer Zeit unmerklich.

Wir können also mit  $u = e^{\alpha_1 t}$  rechnen. Bei Berücksichtigung des in (59) weggelassenen Gliedes ändert sich bei Einsetzen des jeweiligen  $u$  nur der Koeffizient von  $\frac{du}{dt}$  und

die Gleichung behält ihre Form, und daher bleibt auch die Form des Integrals ungeändert. Wir können daher bei numerischer Integration der Differentialgleichung, von Schritt zu Schritt immer wieder mit der gleichen Integralformel rechnen. Für eine Scholle von anderem Flächeninhalt wächst die Größe  $\Phi$  und die Masse bei gleicher Dicke in demselben Verhältnisse, so daß der für den ganzen Vorgang charakteristische zweite Koeffizient in (59) ziemlich ungeändert bleiben wird. Die Zeit des Einsinkens dürfte also bei allen Schollen so ziemlich die gleiche sein.

Den Zusammenhang zwischen der Zeit und der jeweiligen Tauchtiefe ersieht man aus der folgenden Zusammenstellung (pag. 623).

Die Zeiteinheit ist im Falle  $\sigma = 10^{10}$ :

$$10^4 \text{ sec.} = 2 \cdot 7773^4 = 2^h 47^m.$$

Eine Scholle von 30 km Dicke kann bei den angenommenen Dichteverhältnissen nur bis zu 27 km einsinken. Das entspräche dem Falle der vollständigen Isostasie. Bei einer bis neun Zehntel reichenden Isostasie käme die Oberfläche der Scholle noch etwa 6 km über dem Niveau der Sima zu liegen. Da der Ozean mit 5 km Tiefe angenommen wird, so liegt die Oberfläche der Scholle noch 1000 m über dem Meere; wir wollen dies als beiläufig dem heutigen Zustand entsprechend ansehen. Eine Scholle von 50 km Dicke würde bei isostatischer Lagerung bis auf 5 km eingesunken sein, also bis zum Meeresniveau, und im heutigen Zustand noch 1 km hinausragen. Im ersteren Falle wären nach der Zusammenstellung 31 Zeiteinheiten, im zweiten etwa 51 notwendig. Bei der Einheit von nur wenig Stunden müßte die Scholle in wenigen Tagen versunken sein. Das heißt also, das Versinken der Schollen fände so gut wie gleichzeitig mit der Entstehung des Mondes statt, sie bildet einen Teil der großen Katastrophe und die hier dargelegte Landbrückentheorie müßte fallen.

Wählen wir  $\sigma$  größer, etwa  $10^{20}$ , so erhält man dieselben Zahlen wie in (65), aber mit einem  $10^5$ mal größeren Zeitmaßstab. Die Einheit ist nun  $10^9 \text{ sec.} = 31 \cdot 69$  Jahre. Auch hier wären noch die Zeiten von lächerlicher Kürze gegenüber dem geologischen Geschehen.

Nimmt man dagegen  $\sigma = 10^{25}$ , so erhält man für die Dauer der Entwicklung 100—200 Millionen Jahre und damit auch eine Zahl, die wenigstens der Größenordnung nach der Darwinschen (55 Millionen) entspricht. Es wäre sehr dankenswert, die Darwinsche Rechnung mit einem anderen Werte der Viskosität zu wiederholen. Es läßt sich gar nicht abschätzen, wie sich das Resultat ändern würde, denn es konkurrieren in der Flutreibung zwei nach entgegengesetzter Richtung wirkende Einflüsse. Bei größerer Viskosität wächst die Verdrehung des Flutberges gegen die Richtung nach dem Monde, wodurch sein Drehmoment steigt. Dagegen nimmt die Höhe des Flutberges ab, was das Drehmoment verkleinert.

Tauchtiefen und Tauchgeschwindigkeiten  
 als Funktion von  $\tau$ .

| $\tau$ | $d = 30 \text{ km}$ |        | $d = 50 \text{ km}$ |        | $\tau$ | $d = 30 \text{ km}$ |      | $d = 50 \text{ km}$ |      |
|--------|---------------------|--------|---------------------|--------|--------|---------------------|------|---------------------|------|
| 0      | 0                   | 0      | 0                   | 0      | 46     | 26·07               | 0·02 | 43·41               | 0·05 |
| 1      | 1·96                | + 0·60 | 3·26                | + 0·99 | 47     | 26·12               | 0·02 | 53·51               | 0·04 |
| 2      | 3·78                | 0·55   | 6·29                | 0·92   | 48     | 26·19               | 0·02 | 43·61               | 0·04 |
| 3      | 5·45                | 0·51   | 9·08                | 0·85   | 49     | 26·25               | 0·01 | 43·72               | 0·03 |
| 4      | 7·01                | 0·47   | 11·66               | 0·78   | 50     | 26·31               | 0·01 | 43·80               | 0·03 |
| 5      | 8·45                | 0·44   | 14·05               | 0·73   | 51     | 26·37               | 0·01 | 43·89               | 0·03 |
| 6      | 9·81                | 0·41   | 16·26               | 0·67   | 52     | 26·41               | 0·01 | 43·96               | 0·03 |
| 7      | 11·02               | 0·38   | 18·31               | 0·62   | 53     | 26·46               | 0·01 | 44·03               | 0·03 |
| 8      | 12·17               | 0·35   | 20·21               | 0·58   | 54     | 26·50               | 0·01 | 44·10               | 0·02 |
| 9      | 13·23               | 0·32   | 21·97               | 0·54   | 55     | 26·53               | 0·01 | 44·17               | 0·02 |
| 10     | 14·21               | 0·30   | 23·60               | 0·50   | 56     | 26·57               | 0·01 | 44·23               | 0·02 |
| 11     | 15·13               | 0·28   | 25·11               | 0·46   | 57     | 26·60               | 0·01 | 44·28               | 0·02 |
| 12     | 15·98               | 0·26   | 26·52               | 0·43   | 58     | 26·63               | 0·01 | 44·33               | 0·02 |
| 13     | 16·76               | 0·24   | 27·82               | 0·40   | 59     | 26·65               | 0·01 | 44·38               | 0·01 |
| 14     | 17·49               | 0·22   | 29·03               | 0·37   | 60     | 26·67               | 0·01 | 44·41               | 0·01 |
| 15     | 18·17               | 0·21   | 30·15               | 0·34   | 61     | 26·70               | 0·01 | 44·46               | 0·01 |
| 16     | 18·80               | 0·19   | 31·19               | 0·32   | 62     | 26·72               | 0·01 | 44·49               | 0·01 |
| 17     | 19·38               | 0·18   | 32·16               | 0·29   | 63     | 26·73               | 0·01 | 44·52               | 0·01 |
| 18     | 19·92               | 0·16   | 33·06               | 0·27   | 64     | 26·75               | 0·01 | 44·55               | 0·01 |
| 19     | 20·42               | 0·15   | 33·89               | 0·25   | 65     | 26·76               | 0·01 | 44·59               | 0·01 |
| 20     | 20·89               | 0·12   | 34·67               | 0·24   | 66     | 26·78               | 0    | 44·62               | 0·01 |
| 21     | 21·32               | 0·13   | 35·39               | 0·22   | 67     | 26·79               |      | 44·64               | 0·01 |
| 22     | 21·73               | 0·11   | 36·06               | 0·20   | 68     | 26·81               |      | 44·66               | 0·01 |
| 23     | 22·10               | 0·11   | 36·68               | 0·19   | 69     | 26·82               |      | 44·69               | 0·01 |
| 24     | 22·45               | 0·11   | 37·26               | 0·18   | 70     | 26·84               |      | 44·70               | 0·01 |
| 25     | 22·77               | 0·10   | 37·80               | 0·16   | 71     | 26·85               |      | 44·73               | 0·01 |
| 26     | 23·02               | 0·09   | 38·30               | 0·15   | 72     | 26·86               |      | 44·74               | 0·01 |
| 27     | 23·34               | 0·08   | 38·77               | 0·14   | 73     | 26·87               |      | 44·76               | 0·01 |
| 28     | 23·60               | 0·08   | 39·20               | 0·13   | 74     | 26·87               |      | 44·77               | 0·01 |
| 29     | 23·84               | 0·07   | 39·60               | 0·12   | 75     | 26·88               |      | 44·79               | 0·01 |
| 30     | 24·07               | 0·07   | 39·98               | 0·11   | 76     | 26·89               |      | 44·80               | 0·01 |
| 31     | 24·27               | 0·06   | 40·33               | 0·11   | 77     | 26·90               |      | 44·81               | 0    |
| 32     | 24·47               | 0·06   | 40·65               | 0·10   | 78     | 26·91               |      | 44·83               | .    |
| 33     | 24·65               | 0·05   | 40·94               | 0·09   | 79     | 26·91               |      | 44·84               |      |
| 34     | 24·82               | 0·05   | 41·22               | 0·09   | 80     | 26·92               |      | 44·86               |      |
| 35     | 24·98               | 0·05   | 41·48               | 0·08   | 81     | 26·93               |      | 44·87               |      |
| 36     | 25·13               | 0·04   | 41·72               | 0·08   | 82     |                     |      | 44·88               |      |
| 37     | 25·56               | 0·04   | 41·94               | 0·07   | 83     |                     |      | 44·88               |      |
| 38     | 25·38               | 0·04   | 42·16               | 0·07   | 84     |                     |      | 44·89               |      |
| 39     | 25·49               | 0·04   | 42·36               | 0·06   | 85     |                     |      | 44·90               |      |
| 40     | 25·59               | 0·03   | 42·54               | 0·06   | 86     |                     |      | 44·91               |      |
| 41     | 25·68               | 0·03   | 42·72               | 0·05   | 87     |                     |      | 44·91               |      |
| 42     | 25·76               | 0·03   | 42·88               | 0·05   | 88     |                     |      | 44·92               |      |
| 43     | 25·84               | 0·03   | 43·01               | 0·05   | 89     |                     |      | 44·93               |      |
| 44     | 25·92               | 0·02   | 43·15               | 0·04   | 90     |                     |      | 44·93               |      |
| 45     | 26·00               | 0·02   | 43·28               | 0·04   | 91     |                     |      | 44·94               |      |

Schwinner<sup>14</sup> berechnet aus den allerdings recht unsicheren heutigen Akzelerationen des Mondes und der Sonne für das Alter

<sup>14</sup> R. Schwinner, Lehrbuch der physikalischen Geologie, Bd. I, p. 300.



des Mondes Werte von ca.  $1.4 - 3.8 \cdot 10^9$  Jahre, das geht also schon bis auf das Alter der Erde, das man heute mit  $1.5 \cdot 10^9$  annimmt. Dies würde dann besagen, daß die Abtrennung des Mondes sehr bald nach der Entstehung der Erde, also bald nach der Entstehung der Erdkruste, stattgefunden hat.

Mit dem Wert  $\sigma = 3 \cdot 10^{25}$  rechnet auch Jeffreys<sup>15</sup>, allerdings für die Erdoberfläche, es ist aber nicht wahrscheinlich, daß die Abnahme mit der Tiefe gleich mehrere Größenklassen beträgt. Gutenberg<sup>16</sup> gibt als untere Grenze  $\sigma = 10^{20}$ .

Eine Landbrücke, die heute 2000 m unter dem Meeresspiegel liegt, müßte nach der obigen Tabelle vor etwa 23 Millionen Jahren versunken sein, eine Landbrücke, die aber heute nur 200 m versenkt ist, wäre vor 3 Millionen Jahren versunken, wenn sie heute aber noch 200 m über dem Meere liegt, so müßte sie nach der gleichen Zeit untertauchen.

Der hier gerechnete Fall ist rein schematisch und so einfach gewählt, daß er sich noch mathematisch behandeln läßt. Es ist klar, daß ein reeller geologischer Fall in hundert Belangen sich diesem Schema nicht fügen wird und daß hundert Zweifel und Schwierigkeiten, die ich als Nicht-Geologe gar nicht sehe, auftauchen werden. Andererseits steht aber die physikalische Grundlage so fest, daß man sie jedenfalls nicht außer Betracht lassen kann. Ich hoffe also doch, daß es möglich sein wird, die vorläufig noch leere Form mit geologischem Geiste zu erfüllen.

<sup>15</sup> H. Jeffreys, The Viscosity of the Earth. Monthly Notices, Suppl. 1, 1926.

<sup>16</sup> Gutenberg, Handboek d. Geophysik II, p. 556.