Aus dem XCII. Bande der Sitzb. der kais. Akad. der Wissensch. II. Abth. Juli-Heft. Jahrg. 1885.

Über die Rotation und Präcession eines flüssigen Sphäroids.

Von Dr. **S. Oppenheim**,
Assistent an der k. k. Sternwarte zu Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1885.)

Es ist bisher das Problem der Präcessionsbewegung der Erde nur unter der Annahme vollständig gelöst worden, dass die Erde ein vollkommen starrer Körper ist. Da aber diese Annahme in keiner Weise den auf der Erdoberfläche bestehenden Verhältnissen entspricht, wie dieselben insbesondere durch die Vertheilung von Land und Wasser auf ihr bedingt sind, schien es mir von besonderem Interesse zu sein, das Problem auch noch für einen anderen Fall zu lösen, speciell aber zu untersuchen, welchen Einfluss periodische Bewegungen auf der Erde auf die Präcession und Variation der Schiefe der Ekliptik haben können. Wohl hat Laplace in seiner Mécanique céleste[1] nachgewiesen, dass dieser Einfluss ein äusserst geringer ist, dass daher die Phänomene der Präcession in Länge und Schiefe genau dieselben sind, als ob das Meer mit dem Sphäroid, das es bedeckt, eine einzige starre Masse bildet. Doch muss immerhin ein Einfluss in dieser Richtung angenommen werden, und es scheint vielmehr nach Thomson[2] derselbe nicht so gering zu sein, wie ihn Laplace findet. Dass dies auch in der That der Fall ist, ergibt sich aus den bekannten Untersuchungen G. Darwin's.[3]

In der vorliegenden Abhandlung habe ich es unternommen, das Problem für den speciellen Fall zu behandeln, dass die Erde absolut flüssig ist. Indem es nämlich als unmöglich bezeichnet

[1] Méc. cél. Livre V. Chapt. 1, §. 10.

[2] Thomson-Tait. theor. Physik.

[3] G. Darwin, On the Precession of a Viscous Spheroid and on the remote History of the Earth. Phil. Trans. Lond. 1879.

werden muss, wegen der allzu complicirten Verhältnisse, wie sie uns die Erde bietet, das Problem in seiner ganzen Ausdehnung zu besprechen, wählte ich gerade diesen Fall, hiemit dem Gedanken Ausdruck gebend, dass, wenn auch diese Annahme über die Constitution des Erdkörpers noch weniger den thatsächlich vorhandenen Verhältnissen entspricht als die gewöhnliche, die von der Starrheit der Erde ausgeht, man doch diese beiden Fälle als die Grenzfälle betrachten, innerhalb welcher der wahre Zustand der Erde liegt, und dann hieraus wohl mit einiger Berechtigung schliessen kann, dass die wahren Gesetze der Präcession zwischen den aus diesen beiden Hypothesen sich ergebenden zu suchen sein werden.

I.

Bekanntlich sind es zwei Umstände, durch welche die Präcessionserscheinungen der Erde hervorgerufen werden, einerseits die sphäroidische Gestalt der Erde selbst, anderseits der störende Einfluss von Sonne und Mond, sowie in zweiter Linie der übrigen Planeten des Sonnensystems. Was den letzten Umstand anlangt, so ist es natürlich sowohl für die Art der Einwirkung, als auch für die Berechnung der störenden Kräfte gleichgiltig, ob die Erde als im festen oder im flüssigen Zustande befindlich angenommen wird. Die in der gewöhnlichen Theorie der Präcession aufgestellten Ausdrücke für die störenden Kräfte werden auch für den vorliegenden Fall ihre Giltigkeit nicht verlieren. Anders ist es jedoch mit dem zweiten Factor, der Gestalt der Erde.

Wird die Erde als starr angenommen, so bietet sie den störenden Kräften eine unveränderliche, ein für alle Male gegebene Form entgegen; geht man aber von der Hypothese ihrer Fluidität aus, so fällt diese Constanz der Form und damit auch die Constanz der Trägheitsmomente weg, da durch den störenden Einfluss von Sonne und Mond auch Veränderungen in der Form des Sphäroids hervorgerufen werden.

Es wird daher im Folgenden gerade dieser Factor in besonderer Weise in Rechnung zu ziehen sein und zwar nach doppelter Richtung, indem es sich einerseits darum handelt, die Veränderlichkeit der Form, mit anderen Worten, die Abhängigkeit der

Trägheitsmomente der flüssigen Erde von der Zeit zu bestimmen, anderseits darum, die Differentialgleichungen für die rotirende Bewegung eines Körpers von solch' veränderlicher Form im Gegensatze zu den bekannten Euler'schen Gleichungen, welche für ein starres System gelten, aufzustellen und zu integriren.

II.

Die Figur, welche eine rotirende Flüssigkeitsmasse unter Einwirkung der Fliehkraft annimmt, ist bekanntlich die eines abgeplatteten Rotationsellipsoids. Ist hiebei die Fliehkraft klein im Verhältnisse zur Schwere auf der Oberfläche der Flüssigkeitsmasse, d. h. zur totalen Anziehung derselben, so kann, wie dies zuerst Legendre[1] und Laplace[2] gezeigt haben, das Ellipsoid als ein Sphäroid, d. h. als ein Körper betrachtet werden, der nur unendlich wenig von der reinen Kugelgestalt abweicht.

Für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung genügt es ebenfalls, diese Annahme zu machen, und die Gleichung des Sphäroids directe in der wohlbekannten Form

$$r = a(1 + S) \tag{1}$$

anzusetzen, worin a den Radius der Kugel vorstellt, von welcher das Sphäroid nur unendlich wenig abweicht und die man allgemein die mittlere Kugel nennt, S wiederum die Abweichung des Sphäroids von dieser mittleren Kugel bezeichnet und eine Grösse ist, die, als dem Verhältnisse der Schwere zur Fliehkraft proportional, als eine kleine Grösse erster Ordnung angesehen werden soll.

Das Coordinatensystem, auf welches sich hiebei diese Gleichung bezieht, ist in allgemeiner Lage und nur insoweit beschränkt, dass dessen Anfangspunkt in dem Mittelpunkt der mittleren Kugel liegt. Bezeichnet man mit $r\theta\varphi$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes bezogen auf dieses Coordinatensystem, so ist die Grösse S als eine Function von θ und φ zu betrachten,

---

[1] Recherches sur la figure des planètes. Mém. de Paris 1789.

[2] Théorie de l'attraction des sphéroids et de la figure des planètes. Mém. de Paris 1782 u. Méc. cél. Livre III.

die wir uns in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe aufgelöst denken und darnach

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots \tag{2}$$

setzen. Es ist dann bekanntlich S_0 eine Constante, ferner ganz allgemein

$$\begin{aligned} S_1 &= s_1^1 \cos\theta + s_2^1 \sin\theta \sin\varphi + s_3^1 \sin\theta \cos\varphi \\ S_2 &= s_1^2 (\cos^2\theta - {}^1/_3) + s_2^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi + s_4^2 \sin^2\theta \sin 2\varphi \\ &\qquad + s_3^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi + s_5^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi \end{aligned}$$

u. s. w., welche Ausdrücke in 1) substituirt, die Gleichung des Sphäroids in ihrer allgemeinsten Form geben würden.

Durch Specialisirung des Coordinatensystems kann jedoch, wie Laplace gezeigt hat, unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung diese Gleichung vereinfacht werden. Nimmt man nämlich an, dass der Anfangspunkt des Coordinatensystems zugleich der Schwerpunkt des Sphäroids ist,[1] wozu bekanntlich die nothwendige Bedingung die ist, dass die über den Rauminhalt des Sphäroids ausgedehnten Integrale

$$\int x\,dm = \int y\,dm = \int z\,dm = 0$$

werden, so fallen zufolge einer bekannten Eigenschaft der Kugelfunctionen, alle jene Coëfficienten s aus der Gleichung 2) weg, welche mit Kugelfunctionen erster Ordnnng multiplicirt sind und man hat

$$s_1^1 = s_1^2 = s_1^3 = S_1 = 0$$

Nimmt man ferner als zweite zu erfüllende Bedingung an, dass der Rauminhalt des Sphäroids gleich ist dem der mittleren Kugel,[2] dass also die Relation besteht,

$${}^4/_3 a^3 \pi = \int\int\int r^3 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

so fällt aus 2) noch das Glied S_0 weg, so dass die Gleichung des Sphäroids nun einfacher

$$r = a(1 + S_2 + S_3 \ldots)$$

[1] Laplace, Méc. cél. Livre III, Chapitre II, §. 12.

[2] Ebenda.

lautet, wobei speciell die Coëfficienten der Kugelfunction zweiter Ordnung

$$S_2 = s_1(\cos^2\theta - {}^1/_3) + s_2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi + s_4 \sin^2\theta \sin 2\varphi$$
$$+ s_3 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi + s_5 \sin^2\theta \cos 2\varphi$$

sein sollen.

III.

Zur Bestimmung der Coëfficienten s in der Grösse S_2 muss nun das aus der Hydrostatik folgende Princip herangezogen werden, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Niveaufläche ist. Es sind aber die auf die Flüssigkeit einwirkenden Kräfte einerseits die wechselseitige Anziehung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, anderseits die durch die Rotation entstehende Fliehkraft und schliesslich die Anziehung irgend eines entfernteren Sternes, wie etwa des Mondes. Bezeichnet man die Potentiale dieser drei Kräfte einzeln mit U, P und V, so spricht sich das obige Princip unter der Voraussetzung, die auch bisher stillschweigend gemacht wurde, dass nämlich die Flüssigkeit homogen ist, in der Gleichung

$$U + V + P = \text{const.} \tag{4}$$

aus. Die erste dieser drei Grössen, d. i. das Potential U, der Anziehung eines Sphäroids auf einen Punkt seiner Oberfläche, hat schon Laplace bestimmt.[1] Setzt man die Gleichung des Sphäroids in der Form

$$r = a(1 + \Sigma S_n)$$

an, so wird

$$U = \frac{4\pi}{3}\rho a^2 - \frac{4\pi}{3}\rho a^2 \sum \frac{2(n-1)}{2n+1} S_n$$

wobei ρ die constante Dichte der homogenen Flüssigkeit ist. Nimmt man ferner die Z-Axe als Rotationsaxe an, bezeichnet die Rotationsgeschwindigkeit mit ω, so ist das Potential der Fliehkraft

$$P = {}^1/_2\, \omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

und nach Substitution der für r angenommenen Reihe und Vernachlässigung der Producte $\omega^2 S$ als Grössen zweiter Ordnung

---

[1] Méc. cél. Livre III. Ch. II. §. 11—13.

$$P = {}^1/_2\,\omega^2 a^2 \sin^2\theta = \frac{\omega^2 a^2}{3} - \frac{\omega^2 a^2}{2}(\cos^2\theta - {}^1/_3)$$

Was die Entwicklung der dritten Kraft V anlangt, so ergibt sich diese ebenfalls nach Laplace,[1] wenn man mit M die Masse des anziehenden Sternes, als welchen wir hier nur den Mond betrachten wollen, mit Δ seine Distanz vom Mittelpunkte des Erdsphäroids und α und δ dessen geocentrische Rectascension und Declination bezeichnet, und der Kürze halber

$$\tau = {}^3/_2\,\frac{M}{\Delta^3}$$

setzt, zu

$$V = a^2\tau\,[(\cos\theta\,\sin\delta + \sin\theta\,\cos\delta\,\cos(\omega t + \varphi - \alpha))^2 - {}^1/_3]$$

oder nach Kugelfunctionen aufgelöst:

$$\begin{aligned} V = a^2\tau\,[&(\cos^2\theta - {}^1/_3)(1 - {}^3/_2\cos^2\delta) \\ &+ 2\sin\theta\,\cos\theta\,\cos\varphi\,.\,\sin\delta\,\cos\delta\,\cos(\omega t - \alpha) \\ &+ {}^1/_2\sin^2\theta\,\cos 2\varphi\,.\,\cos^2\delta\,\cos 2(\omega t - \alpha) \\ &- 2\sin\theta\,\cos\theta\,\sin\varphi\,.\,\sin\delta\,\cos\delta\,\sin(\omega t - \alpha) \\ &- {}^1/_2\sin^2\theta\,\sin 2\varphi\,.\,\cos^2\delta\,\sin 2(\omega t - \alpha)] \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in 4) ein, vergleicht die gleichartigen Glieder mit einander, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \text{const} &= \frac{4\pi}{3}\rho a^2 + \frac{\omega^2 a^2}{3} \\ s_1 &= -\frac{\varkappa\omega^2}{2} + \tau\varkappa(1 - {}^3/_2\cos^2\delta) \\ s_2 &= \quad - \tau\varkappa\sin 2\delta\,\sin(\omega t - \alpha) \\ s_3 &= \quad + \tau\varkappa\sin 2\delta\,\cos(\omega t - \alpha) \\ s_4 &= \quad - {}^1/_2\,\tau\varkappa\cos^2\delta\,\sin 2(\omega t - \alpha) \\ s_5 &= \quad + {}^1/_2\,\tau\varkappa\cos^2\delta\,\cos 2(\omega t - \alpha) \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

wobei $\varkappa = \dfrac{15}{8\pi\rho}$ ist. Hierin sind die Grössen α und δ als bekannte Functionen der Zeit zu betrachten, die durch die Bewegung des Mondes um die Erde gegeben sind. Wird so, was für die Zwecke

[1] Méc. cél. Livre IV, Ch. 1, §. 4 u. Livre XIII, Ch. II, §. 2.

der vorliegenden Untersuchung genügt, angenommen, dass der Mond sich in einer kreisförmigen Bahn in der Ebene der Ekliptik um die Erde bewegt, und ist ☾ seine Länge in dieser Bahn, und ε die Schiefe der Ekliptik, so ist

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos☾$$
$$\sin\alpha\cos\delta = \sin☾\cos\varepsilon$$
$$\sin\delta = \sin☾\sin\varepsilon$$

unter welcher Annahme man den Coëfficienten s noch die Form geben kann

$$s_1 = -\tfrac{1}{2}\varkappa\omega^2 + \varkappa\tau - s_0$$
$$s_0 = \tfrac{3}{4}\tau\varkappa[(1+\cos^2\varepsilon) + \sin^2\varepsilon\cos 2☾]$$
$$s_2 = \tau\varkappa[\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\omega t - \sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\omega t\cos 2☾ - \sin\varepsilon\sin\omega t\sin 2☾]$$
$$s_3 = \tau\varkappa[\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\omega t - \sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\omega t\cos 2☾ + \sin\varepsilon\cos\omega t\sin 2☾]$$
$$s_4 = \tfrac{1}{4}\tau\varkappa[-\sin^2\varepsilon\sin 2\omega t - (1+\cos^2\varepsilon)\sin 2\omega t\cos 2☾ + 2\cos\varepsilon\cos 2\omega t\sin 2☾]$$
$$s_5 = \tfrac{1}{4}\tau\varkappa[+\sin^2\varepsilon\cos 2\omega t + (1+\cos^2\varepsilon)\cos 2\omega t\cos 2☾ - 2\cos\varepsilon\sin 2\omega t\sin 2☾]$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned}
s_1 &= -\tfrac{1}{2}\varkappa\omega^2 + 3a_0 - 3a_1\cos 2☾\\
s_2 &= a_5\cos\omega t + a_6\cos(\omega t + 2☾) - a_7\cos(\omega t - 2☾)\\
s_3 &= a_5\sin\omega t + a_6\sin(\omega t + 2☾) - a_7\sin(\omega t - 2☾)\\
s_4 &= -a_2\sin 2\omega t - a_3\sin(2\omega t + 2☾) - a_4\sin(2\omega t - 2☾)\\
s_5 &= +a_2\cos 2\omega t + a_3\cos(2\omega t + 2☾) + a_4\cos(2\omega t - 2☾)
\end{aligned}\right\} \quad 5a)$$

worin

$$a_0 = \tfrac{1}{4}\varkappa\tau(\tfrac{1}{3} - \cos^2\varepsilon) \quad a_1 = a_2 = \tfrac{1}{4}\tau\varkappa\sin^2\varepsilon$$
$$a_3 = \tfrac{1}{4}\tau\varkappa(1 - \cos\varepsilon) \quad a_4 = \tfrac{1}{4}\tau\varkappa(1 + \cos\varepsilon)^2$$
$$a_5 = \tau\varkappa\sin\varepsilon\cos\varepsilon \qquad a_6 = \tau\varkappa\sin\varepsilon(1 - \cos\varepsilon) \quad a_7 = \tau\varkappa\sin\varepsilon(1 + \cos\varepsilon)$$

ist.

IV.

Den bisherigen Entwicklungen liegt zunächst die Voraussetzung zu Grunde, dass die das Sphäroid erfüllende Flüssigkeitsmasse homogen ist. Es ist jedoch leicht, die Entwicklungen auch auf den Fall auszudehnen, dass die Flüssigkeit nicht mehr homogen ist, sondern sich in concentrischen Schichten von gegen die Oberfläche hin abnehmender Dichte lagert. Diese Annahme hat zur Folge, dass, wenn die Gleichung des Sphäroids wie oben in der Form

$$r = a(1 + \Sigma S_n)$$

angeschrieben wird, die Dichte ρ der Flüssigkeit als eine Function von a angesehen werden muss, wofern a den Radius der einer jeden Flüssigkeitsschichte entsprechenden mittleren Kugel vorstellt. Das Potential eines solchen Sphäroids auf einen beliebigen Punkt im Innern ist dann nach Laplace[1]

$$U = \frac{4\pi}{3r}\int_0^a \rho\, da^3 + \frac{4\pi}{r}\int_0^a \rho\, d\sum\frac{a^{n+2}S_n}{(2n+1)r^n} + 2\pi\int_a^{a_1}\rho\, da^3$$
$$+ 4\pi\int_a^{a_1}\rho\, d\frac{r^n S_n}{(2n+1)\, a^{n-2}}$$

worin bei den Integrationsgrenzen a den Radius der Schichte bezeichnet, inerhalb welcher der bezogene Punkt liegt, a_1 dagegen der constante Werth von a an der Oberfläche des Sphäroids ist.

Wie Laplace[2] bewiesen, kann man auch in diesem allgemeinen Fall

$$S_0 = S_1 = 0$$

setzen, so dass, wenn speciell die Entwickelung von r nur bis auf Kugelfunctionen zweiter Ordnung fortgeführt wird,

$$r = a(1 + S_2)$$

wird. Durch diese Annahme geht der Ausdruck für U über in

$$U = \frac{4\pi}{3a}\int_0^a \rho\, da^3 - \frac{4\pi}{3a}S_2\int_0^a \rho\, da^3 + \frac{4\pi}{5a^3}\int_0^a \rho d\,(a^5 S_2) + 2\pi\int_a^{a_1}\rho\, da_3$$
$$+ \frac{4\pi a^2}{5}\int_a^{a_1}\rho\, dS_2$$

welcher nun in 4) einzusetzen ist, wobei aber an Stelle der dortigen Constanten das Integral $\int\frac{dp}{\rho}$ gesetzt werden muss. Die Gleichung 4) wird daher lauten:

$$\int\frac{dp}{\rho} = U + \frac{a^2\omega^2}{3} - \frac{a^2}{2}(\cos^2\theta - {}^1\!/_3) + V \qquad 4a)$$

---

[1] Méc. cél. Livre III, Ch. III, §. 14,

[2] Ebenda. Ch. IV, §. 29—30.

und durch Vergleichung der gleichartigen Glieder zerfallen in

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{4\pi}{3a}\int_0^a \rho\, da^3 + 2\pi \int_a^{a_1} \rho\, da^3 + \frac{a^2\omega^2}{3}$$

$$-\frac{4\pi}{3a} S_2 \int_0^a \rho\, da^3 + \frac{4\pi}{5a^3}\int_0^a \rho d(a^5 S_2) + \frac{4\pi a^5}{5}\int_a^{a_1} \rho dS_2$$

$$+ V - \frac{a^2}{2}(\cos^2\theta - {}^1\!/_3) = 0$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt den auf der Oberfläche einer jeden Flüssigkeitsschichte lastenden Druck, die zweite die Grösse S_2 in ihrer Abhängigkeit von a und V.

Setzt man

$$V - \frac{a_2}{2}(\cos^2\theta - {}^1\!/_3) = a^2 V_2$$

so ist V_2 von a unabhängig und nur aus Kugelfunctionen zweiter Ordnung der Winkel Θ und φ zusammengesetzt. Differenzirt man daher die letzte Gleichung zweimal nach a, so kann man durch ein geeignetes Verfahren aus den drei sich so ergebenden Gleichungen V_2 eliminiren, und erhält als Differentialgleichung

$$\frac{d^2 S_2}{da^2} = \left(6a^2 - \frac{6\rho a}{\int_0^a \rho\, da^3}\right) S_2 - \frac{6\rho a^2}{\int_0^a \rho\, da^3}\frac{dS_2}{da}$$

aus welcher S_2 als Function von a und durch Substitution in die ursprüngliche Gleichung als Function von V_2 bestimmt werden kann. Dem entsprechend kann directe

$$S_2 = h\, S_2'$$

angenommen werden, wo h blos eine Function von a, S_2' dagegen nur von θ und φ abhängig sein soll. Für die Grösse h gilt dann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 h}{da^2} = \left(6a^2 - \frac{6\rho a}{\int_0^a \rho\, da^3}\right) h - \frac{6\rho a^2}{\int_0^a \rho\, da^3}\frac{dh}{da}$$

Für S_2' dagegen

$$S_2'\left[\frac{4\pi a^2}{5}\int_a^{a_1} \rho\, dh - \frac{4\pi h}{3a}\int_0^a \rho da^3 + \frac{4\pi}{5a^2}\int_0^a \rho\, d\,(a^5 h)\right] = a^2 V_2$$

Bezeichnet man die Summe dieser drei Integrale, die von θ und φ unabhängig sind, mit $\frac{a^2}{\varkappa}$ so wird

$$S_2' = \varkappa \, . \, V_2$$

woraus für die Coëfficienten s dieselben Werthe sich ergeben wie oben. Es bleiben also auch in diesem allgemeineren Falle, dass die das Sphäroid erfüllende Flüssigkeitsmasse von veränderlicher Dichte ist, die Gleichungen 5) giltig, nur dass die Grösse $\varkappa$ den Werth

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{4\pi}{5}\int_0^{a_1} \rho \, dh - \frac{4\pi h}{3a^3}\int_0^{a} \rho \, da^3 + \frac{4\pi}{5a^5}\int_0^{a} \rho \, d(a^5 h)$$

hat, welcher, sobald ρ als Function von a gegeben ist, berechnet werden kann.

V.

Eine zweite beschränkende Voraussetzung, von welcher die Giltigkeit der Gleichungen 5) noch abhängt, ist das der Gleichung 4) zu Grunde liegende Princip, nach welchem die freie Flüssigkeitsoberfläche eine Niveaufläche ist. Diese Annahme vernachlässigt bekanntlich die Wirkung, welche auch die Trägheit der Moleküle auf die Gestaltung der Oberfläche ausüben kann. Nach einem Vorgange, welcher analogen Untersuchungen von Thomson [1] und Darwin [2] nachgebildet ist, lässt sich auch diese in einfacher Weise in Rechnung ziehen.

Bezeichnet man mit u v w die nach den drei Coordinatenaxen genommenen Geschwindigkeitscomponenten eines Molecüles, mit p den Druck, mit XYZ die Componenten der äusseren einwirkenden Kräfte, so bestehen die Differentialgleichungen

---

[1] Thomson, On the Free Oscillations of Fluid Spheres. Phil. Trans 1863, pag. 608.

[2] G. Darwin, Problems, connected with the Tides of a Viscous Spheroid. — The Forced Oscillations of a Fluid Spheroid. Philos. Transact. 1879. pag. 581.

$$\left.\begin{aligned}
\rho\left[\frac{du}{dt}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]+\frac{\partial p}{\partial x}=X\\
\rho\left[\frac{dv}{dt}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]+\frac{\partial p}{\partial y}=Y\\
\rho\left[\frac{dw}{dt}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]+\frac{\partial p}{\partial z}=Z
\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Ist nun die Gleichung der Oberfläche, für irgend eine Zeit, etwa $t = t_0$ gegeben durch

$$r = a(1+S_2)$$

so ist sie in der Zeit $t = t_0 + dt$ offenbar bestimmt, durch

$$r+\frac{dr}{dt}dt = a(1+S_2+\frac{dS_2}{dt}dt)$$

so dass

$$\frac{dr}{dt}=a\frac{dS_2}{dt} \qquad 7)$$

wird. Die Grösse $\frac{dr}{dt}$ stellt aber die radiale Geschwindigkeitscomponente der Flüssigkeitstheilchen an der Oberfläche vor, und setzt sich, wie bekannt, aus den Grössen $u\,v\,w$ in der Weise zusammen, dass

$$\frac{dr}{dt}=\frac{u}{r}x+\frac{v}{r}y+\frac{w}{r}z. \qquad 8)$$

ist. Die Integration der Gleichungen 6) wird also die Werthe $u\,v\,w$ liefern, die in 8) eingesetzt $\frac{dr}{dt}$ und mit Rücksicht auf 7) S_2 bestimmen.

Wie aber aus 8) ersichtlich ist, sind die Grössen $u\,v\,w$ von der Ordnung der Grösse S_2; es können daher, zur Vereinfachung von 6) die Producte $u\frac{\partial u}{\partial x}$ u. s. w als von der Ordnung $(S_2)^2$, d. i. des Quadrates der Abweichung des Flüssigkeitssphäroids von der mittleren Kugel vernachlässigt werden. Hiedurch werden diese Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{du}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x}&=X\\ \rho\frac{dv}{dt}+\frac{\partial p}{\partial y}&=Y\\ \rho\frac{dw}{dt}+\frac{\partial p}{\partial z}&=Z\end{aligned}\right\}\qquad 6a)$$

Die einwirkenden Kräfte sind dieselben wie oben, nämlich die wechselseitige Anziehung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, die Fliehkraft und die Anziehung des Mondes. Die Potentiale dieser Kräfte sind

$$U=\frac{2\pi\rho}{3}(3a^2-r^2)-\frac{8\pi\rho}{15}r^2S_2 = U_1+U_2$$

$$P=\frac{\omega^2}{2}r^2\sin{}^2\Theta$$

$$V=r^2V_2$$

und daher das Gesammtpotential

$$W=U_1+U_2+P+V.$$

Von diesen genügen U_2 und V der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=0.$$

Differenzirt man daher die Gleichungen $6a$) der Reihe nach nach $x\ y\ z$, berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}(U_1+P)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(U_1+P)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(U_1+P),$$

woraus

$$p=U_1+P+C$$

folgt, wenn C eine von θ und φ abhängige Grösse ist, die ebenfalls der Gleichung

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}=0$$

genügen muss.

Zur Bestimmung derselben gehen wir von der Annahme aus, dass der auf der mittleren Kugel lastende Druck gleich ist der auf derselben lagernden Flüssigkeitsmasse von der Dicke S_2, d. h. dass für $r=a$

$$p=4\pi\rho a^2 S_2$$

wird. Für $r=a$ ist aber

$$p=\frac{4\pi}{3}\rho a^2+\frac{\omega^2 a^2}{2}\sin^2\theta+C$$

und daher

$$C=4\pi\rho a^2 S_2-\frac{4\pi}{3}\rho a^2-\frac{\omega^2 a^2}{2}\sin^2\theta,$$

sowie endlich

$$p=\frac{2\pi}{3}\rho(a^2-r^2)+4\pi\rho a^3 S_2-\frac{w^2}{2}(a^2-r^2)\sin^2\theta.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für p, sowie die für XYZ, nämlich

$$X=\frac{\partial W}{\partial x}\qquad Y=\frac{\partial W}{\partial y}\qquad Z=\frac{\partial W}{\partial z}$$

in die Gleichungen 6a, so werden diese mit Hinweglassung der constanten Theile

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{du}{dt}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(r^2 V_2-\frac{8\pi\rho}{15}r^2 S_2-4\pi\rho a^2 S_2\right)\\
\rho\frac{dv}{dt}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(r^2 V_2-\frac{8\pi\rho}{15}r^2 S_2-4\pi\rho a^2 S_2\right)\\
\rho\frac{dw}{dt}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(r^2 V_2-\frac{8\pi\rho}{15}r^2 S_2-4\pi\rho a^2 S_2\right)
\end{aligned}\right\}\qquad 6\,b)$$

Unter der Voraussetzung, dass ρ constant ist, gibt die Integration dieser Gleichungen bezüglich der Zeit, die Grössen

$u\ v\ w$, die Multiplication derselben mit $\frac{x}{r}$, respective $\frac{y}{r}$ und $\frac{z}{r}$ sodann, unter Berücksichtigung, dass

$$\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}$$

die radiale Geschwindigkeitscomponente

$$\rho\frac{dr}{dt}=\frac{\partial}{\partial r}\int dt(r^2 V_2-\frac{8\pi\rho}{15}r^2 S_2-4\pi\rho a^2 S_2),$$

worin, nach der Differentiation $r=a$ zu setzen ist. Differenzirt man nach t, so ergibt sich schliesslich mit Rücksicht auf 7) zur Bestimmung von S_2 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 S}{dt^2}+\frac{16\pi\rho}{15}S_2=2V_2.$$

Insofern der oben angeschriebene Ausdruck für V_2 nur Glieder von der Form $\vartheta\cos(\eta t+\eta_1)$ enthält, wo ϑ eine Kugelfunction zweiter Ordnung ist, die von der Zeit unabhängig ist, ist das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung gegeben durch

$$S_2=\frac{1}{\frac{8\pi\rho}{15}-\frac{\eta^2}{2}}V_2 \qquad 5b)$$

also auch hier die Grösse S in derselben Weise abhängig von V_2 wie oben, wenn nur wieder

$$\varkappa=\frac{1}{\frac{8\pi\rho}{15}-\frac{\eta^2}{2}}$$

angenommen wird.

V.

Durch die Gleichungen 5) und die ihnen entsprechenden $5a$ und $5b$ ist die Form des Sphäroids in ihrer Abhängigkeit von der Zeit vollständig bestimmt. Es erübrigt nun die Berechnung der Trägheitsmomente. Bezeichnet man dieselben mit $A\ B\ C$, sowie die Trägheitsproducte mit $D E F$, setzt man also

$$A = \int\int\int (y^2+z^2)\rho\, dx\, dy\, dz \qquad D = \int\int\int yz\rho\, dx\, dy\, dz$$
$$B = \int\int\int (z^2+x^2)\rho\, dx\, dy\, dz \qquad E = \int\int\int zx\rho\, dx\, dy\, dz$$
$$C = \int\int\int (x^2+y^2)\rho\, dx\, dy\, dz \qquad F = \int\int\int xy\rho\, dx\, dy\, dz,$$

so wird nach Einführung von Polarcoordinaten und Auflösung der entstehenden Glieder in Kugelfunctionen

$$A = \int\int\int \rho r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, [\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}(\cos^2\theta - {}^1/_3) - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta \cos 2\varphi]$$
$$B = \int\int\int \rho r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, [\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}(\cos^2\theta - {}^1/_3) + \tfrac{1}{2}\sin^2\theta \cos 2\varphi]$$
$$C = \int\int\int \rho r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, [\tfrac{2}{3} - (\cos^2\theta - {}^1/_3)]$$
$$D = \int\int\int \rho r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, \sin\theta \cos\theta \sin\varphi$$
$$E = \int\int\int \rho r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, \sin\theta \cos\theta \cos\varphi$$
$$F = \int\int\int \rho r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi$$

worin für r sein Werth $a(1+S_2)$ zu substituiren ist.

Nehmen wir der grösseren Allgemeinheit wegen an, dass die Flüssigkeit nicht homogen ist, sondern in concentrischen Schichten von gegen die Oberfläche hin abnehmender Dichte sich befinde, so ergibt sich zunächst, nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Kugelfunctionen,

$$A = \frac{8\pi}{15}\int \rho d(a^5) + \int\int\int \rho d(a^5 S_2) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, [\tfrac{1}{2}(\cos^2\theta - {}^1/_3) - \tfrac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\varphi)$$

$$B = \frac{8\pi}{15}\int \rho d(a^5) + \int\int\int \rho d(a^5 S_2) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, [\tfrac{1}{2}(\cos^2\theta - {}^1/_3) + \tfrac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\varphi)$$

$$C = \frac{8\pi}{15}\int \rho d(a^5) - \int\int\int \rho d(a^5 S_2) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, [\cos^2\theta - {}^1/_3)$$

und daraus, da, wie oben gezeigt wurde, $S_2 = h \,.\, S'_2$ gesetzt werden kann, wobei h nur von a, S'_2 nur von den Winkelgrössen θ und φ abhängt,

$$A = \frac{8\pi}{15}\int \rho d(a^5) + \frac{8\pi}{45}(s_1 - 3s_5)\int \rho d(a^5 h) \qquad D = \frac{4\pi}{15} s_2 \int \rho d(a^5 h)$$

$$B = \frac{8\pi}{15}\int \rho d(a^5) + \frac{8\pi}{45}(s_1 + 3s_5)\int \rho d(a^5 h) \qquad E = \frac{4\pi}{15} s_3 \int \rho d(a^5 h)$$

$$C = \frac{8\pi}{15}\int \rho d(a^5) - \frac{16\pi}{45} s_1 \int \rho d(a^5 h) \qquad F = \frac{8\pi}{15} s_4 \int \rho d(a^5 h)$$

oder in kürzerer Schreibweise,

$$
\begin{aligned}
A &= K + K_1(\tfrac{1}{3}s_1 - s_5) \qquad & D &= \tfrac{1}{2}K_1 s_2 \\
B &= K + K_1(\tfrac{1}{3}s_1 + s_5) \qquad & E &= \tfrac{1}{2}K_1 s_3 \\
C &= K - K_1\tfrac{2}{3}s_1 \qquad & F &= K_1 s_4
\end{aligned}
$$

wenn

$$K = \frac{8\pi}{15}\int \rho d(a^5) \qquad K_1 = \frac{8\pi}{15}\int \rho d(a^5 h)$$

ist. Für den Fall, dass die Flüssigkeit homogen ist, wird

$$K = K_1 = \frac{8\pi a^5}{15}\rho$$

und stellt das Trägheitsmoment der mittleren Kugel vor.

Substituirt man hierin für die Grössen s ihre Werthe aus 5, so erhält man schliesslich ($K = K_1$ gesetzt)

$$
\left.
\begin{aligned}
A &= K\Big[1 - \frac{\varkappa\omega^2}{6} + a_0 - a_1\cos 2\copyright - a_2\cos 2\omega t - a_3\cos(2\omega t + 2\copyright) \\
&\qquad - a_4\cos(2\omega t - 2\copyright)\Big] \\
B &= K\Big[1 - \frac{\varkappa\omega^2}{6} + a_0 - a_1\cos 2\copyright + a_2\cos 2\omega t + a_3\cos(2\omega t + 2\copyright) \\
&\qquad + a_4\cos(2\omega t - 2\copyright)\Big] \\
C &= K\Big[1 + \frac{\varkappa\omega^2}{3} - 2a_0 + 2a_1\cos 2\copyright\Big] \\
D &= K[a_5\cos\omega t + a_6\cos(\omega t + 2\copyright) - a_7\cos(\omega t - 2\copyright)] \\
E &= K[a_5\sin\omega t + a_6\sin(\omega t + 2\copyright) - a_7\sin(\omega t - 2\copyright) \\
F &= K[-a_2\sin 2\omega t - a_3\sin(2\omega t + 2\copyright) - a_4\sin(2\omega t - 2\copyright)]
\end{aligned}
\right\} \quad 8)
$$

Ich füge noch die Werthe der Trägheitsmomente eines starren, mit der Geschwindigkeit ω rotirenden Sphäroids, unter denselben Annahmen berechnet, hinzu. Diese sind

$$A_0 = B_0 = K\left(1 - \frac{\varkappa\omega^2}{6}\right) \quad C_0 = K\left(1 + \frac{\varkappa\omega^2}{3}\right)$$

VI.

Es liessen sich nun leicht die Fälle vermehren, für welche die Berechnung der Grössen s und speciell des Coëfficienten $\varkappa$ in ihnen, sowie die der Trägheitsmomente durchführbar ist. Die bisher behandelten stellen die einfachsten vor, und sind daher auch die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen nur als die ersten Annäherungen an die wahren Gesetze jener periodischen Bewegungen zu betrachten, wie sie, auf der Oberfläche der Erde durch die Wirkung des Mondes, den wir hier einzig betrachten, hervorgerufen werden.

Ich will auch den angenommenen Grenzen dieser Abhandlung gemäss, weitere Fälle nicht mehr entwickeln, sondern mich begnügen, zu zeigen, in welcher Weise diese Gleichungen auf einem mehr empirischen Wege vervollständigt werden können, und dann als eine zweite Annäherung an die wahren Gesetze dieser periodischen Bewegungen anzusehen sind.

Vermehrt man nämlich die Zahl der Constanten in diesen Gleichungen dadurch, dass man zunächst dem in den einzelnen Grössen s auftretenden Coëfficienten $\varkappa$ verschiedene Werthe beilegt, ferner zu den Winkelgrössen noch andere Constante hinzufügt, also die Gleichungen 5) etwa in der Form schreibt

$$\left.\begin{aligned}
s_1' &= -{}^1\!/_2\varkappa\omega^2 + 3\alpha_0 - 3\alpha_1\cos(2☾ + \eta_1) \\
s_2' &= \alpha_5\cos(\omega t + \eta_5) + \alpha_6\cos(\omega t + 2☾ + \eta_6) - \alpha_7\cos(\omega t - 2☾ + \eta_7) \\
s_3' &= \alpha_5\sin(\omega t + \eta_5) + \alpha_6\sin(\omega t + 2☾ + \eta_6) - \alpha_7\sin(\omega t - 2☾ + \eta_7) \\
s_4' &= -\alpha_2\sin(2\omega t + \eta_2) - \alpha_3\sin(2\omega t + 2☾ + \eta_3) - \alpha_4\sin(2\omega t - 2☾ + \eta_4) \\
s_5' &= \alpha_2\cos(2\omega t + \eta_2) + \alpha_3\cos(2\omega t + 2☾ + \eta_3) + \alpha_4\cos(2\omega t - 2☾ + \eta_4)
\end{aligned}\right\} \quad 5')$$

so findet man in der That, dass diese allgemeineren Formeln auch eine grosse Zahl der bei den Ebbe- und Flutbewegungen auftretenden Anomalien erklären, insbesondere jener, die von mehr localen Umständen abhängen, wie es beispielsweise die wirkliche Vertheilung von Land und Wasser auf der Erdoberfläche, und die Tiefe des Meeres sind. [1]

Entsprechend diesen Formeln, können wir uns nun noch die Gleichungen für die Trägheitsmomente in derselben Weise vervollständigt denken, und wollen diese in der Form annehmen:

---

[1] Laplace, Méc. cél. Livre IV, Ch. III, §. 15—20 und auch Thomson-Tait, Theoret. Physik, Band I, §. 806: „Correction der Gleichgewichtstheorie von Ebbe u. Flut“.

$$\left.\begin{aligned}
A' &= K'\left(1-\frac{\varkappa\omega^2}{6}\right)+K_1''\Big[-\frac{\varkappa\omega^2}{6}+\alpha_0-\alpha_1\cos(2\mathbb{C}+\eta_1)-\alpha_2\cos(2\omega t+\eta_2)-\alpha_3\cos(2\omega t+2\mathbb{C}+\eta_3)\\
&\qquad -\alpha_4\cos(2\omega t-2\mathbb{C}+\eta_4)\Big]+K_1'\\
B' &= K'\left(1-\frac{\varkappa\omega^2}{6}\right)+K_1''\Big[-\frac{\varkappa\omega^2}{6}+\alpha_0-\alpha_1\cos(2\mathbb{C}+\eta_1)+\alpha_2\cos(2\omega t+\eta_2)+\alpha_3\cos(2\omega t+2\mathbb{C}+\eta_3)\\
&\qquad +\alpha_4\cos(2\omega t-2\mathbb{C}+\eta_4)\Big]+K_1'\\
C' &= K'\left(1+\frac{\varkappa\omega^2}{3}\right)+K_1''\Big[+\frac{\varkappa\omega^2}{3}-2\alpha_0+2\alpha_1\cos(2\mathbb{C}+\eta_1)\Big]+K_1'\\
D' &= K_1''\left[\alpha_5\cos(\omega t+\eta_5)+\alpha_6\cos(\omega t+2\mathbb{C}+\eta_6)-\alpha_7\cos(\omega t-2\mathbb{C}+\eta_7)\right]\\
E' &= K_1''\left[\alpha_5\sin(\omega t+\eta_5)+\alpha_6\sin(\omega t+2\mathbb{C}+\eta_6)-\alpha_7\sin(\omega t-2\mathbb{C}+\eta_7)\right]\\
F' &= K_1''\left[-\alpha_2\sin(2\omega t+\eta_2)-\alpha_3\sin(2\omega t+2\mathbb{C}+\eta_3)-\alpha_4\sin(2\omega t-2\mathbb{C}+\eta_4)\right]
\end{aligned}\right\}\quad 8')$$

wobei wir uns etwa vorstellen, als ob

$$K'\left(1-\frac{\varkappa w^2}{6}\right)\qquad K'\left(1+\frac{\varkappa w^2}{3}\right)$$

die Trägheitsmomente des starren sphäroidalen Erdkernes, die anderen Glieder aber nämlich K_1' und K_1'' die Trägheitsmomente der auf diesem starren Erdkerne lagernden Wassermasse sind, entsprechend den beiden Integralen $\int \rho d(a^5)$ und $\int \rho d(a^5 h)$.

Hiebei haben wir die Grössen η, sowie die in den verschiedenen α vorkommenden Coëfficienten $\varkappa$ als Functionen der geographischen Coordinaten eines Punktes, d. h. als Functionen von θ und φ zu betrachten.

VII.

Die Differentialgleichungen für die rotirende Bewegung eines Körpers von veränderlicher Form hat zuerst Liouville[1] abgeleitet und gefunden, dass, wenn $p\ q\ r$ die Drehungsmomente des Körpers um drei durch seinen Schwerpunkt gehende, mit ihm fest verbundene Coordinaten, wenn ferner $A\ B\ C$, und $D\ E\ F$, wie oben die Trägheitsmomente und Producte um diese Axen, und schliesslich

$$\alpha = \int\int\int \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) dm$$

$$\beta = \int\int\int \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right) dm$$

$$\gamma = \int\int\int \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) dm$$

sind, die Differentialgleichungen lauten,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(Ap - Fq - Er + \alpha) + D(r^2 - q^2) + (C - B)qr + Fpr - Epq \\
&\qquad\qquad + q\gamma - r\beta = L \\
&\frac{d}{dt}(Bq - Dr - Fp + \beta) + E(p^2 - r^2) + (A - C)pr + Dpq - Fqr \\
&\qquad\qquad + r\alpha - p\gamma = M \\
&\frac{d}{dt}(Cr - Ep - Dq + \gamma) + F(q^2 - p^2) + (B - A)pq + Eqr - Drp \\
&\qquad\qquad + p\beta - q\alpha = N
\end{aligned}\right\} \quad 9$$

worin noch $L\ M\ N$ die Drehungsmomente der äusseren Kräfte auf dasselbe Axensystem bezogen, sind.

Man kann diese Differentialgleichungen auch aus dem Hamilton'schen Principe ableiten, und zwar in genau derselben Weise, in welcher Kirchhoff[2] die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt abgeleitet hat. Man gelangt zunächst zu den Gleichungen:

---

[1] Liouville, Journ. d. Math. II. série. tome 3. 1858. „Développement sur une chapitre de la mécanique de Poisson."

[2] Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Physik. 1877. Vorl. 6 u. 7.

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} - r\frac{\partial T}{\partial q} + q\frac{\partial T}{\partial r} &= L\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} - p\frac{\partial T}{\partial r} + r\frac{\partial T}{\partial p} &= M\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} - q\frac{\partial T}{\partial p} + p\frac{\partial T}{\partial q} &= N\end{aligned}\right\} \qquad 9a)$$

worin pqr, LMN dieselbe Bedeutung haben, wie oben, T die lebendige Kraft des Körpers ausdrückt, und speciell zu berechnen ist.

Es seien xyz die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf ein mit dem rotirenden Körper fest verbundenes Axensystem, $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf ein im Raume festes System, es mögen ferner zur Transformation der Coordinaten von dem einen Coordinatensystem auf das andere die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\xi &= a_1x + a_2y + a_3z\\ \eta &= b_1x + b_2y + b_3z\\ \zeta &= a_1x + c_2y + c_3z\end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

gelten, denen zufolge dann auch die Relationen bestehen

$$\left.\begin{aligned}&a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \quad a_1^2 + a_2^2 + c_3^2 = 1 \quad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0\\ &a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \quad b_1^2 + b_2^2 + c_3^2 = 1 \quad a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0\\ &a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \quad a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0\\ &\qquad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0\\ &\qquad b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0\\ &\qquad c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0\end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

Die Bedingung, dass der Körper von veränderlicher Form ist, soll dann gegenüber der gewöhnlichen, dass derselbe starr ist, dadurch ausgedrückt werden, dass in diesen Transformationsgleichungen nicht blos die neun Grössen abc von der Zeit t abhängen, sondern auch die xyz bekannte Functionen der Zeit sind. Nimmt man daher mit dem Körper eine virtuelle Verrückung vor, so wird:

$$\left.\begin{aligned}\delta\xi &= x\delta a_1 + y\delta a_2 + z\delta a_3 + a_1\delta x + a_2\delta y + a_3\delta z\\ \delta\eta &= x\delta b_1 + y\delta b_2 + z\delta b_3 + b_1\delta x + b_2\delta y + b_3\delta z\\ \delta\zeta &= x\delta c_1 + y\delta c_2 + z\delta c_3 + c_1\delta x + c_3\delta y + c_3\delta z\end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

Die neun Grössen abc, zwischen denen die Gleichungen 11) oder die daraus durch Variation sich ergebenden

$$
\begin{array}{ll}
a_1\delta a_1 + b_1\delta b_1 + c_1\delta c_1 = 0 & a_1\delta a_1 + a_2\delta a_2 + a_3\delta a_3 = 0 \\
a_2\delta a_2 + b_2\delta b_2 + c_2\delta c_2 = 0 & b_1\delta b_1 + b_2\delta b_2 + b_3\delta b_3 = 0 \\
a_3\delta a_3 + b_3\delta b_3 + c_3\delta c_3 = 0 & c_1\delta c_1 + c_2\delta c_2 + c_3\delta c_3 = 0
\end{array}
$$

bestehen, ersetzen wir durch die drei Drehungscomponenten pqr, indem wir annehmen

$$
\left.\begin{array}{l}
pdt = \alpha_3\delta a_2 + b_3\delta b_2 + c_3\delta c_2 = -\alpha_2\delta a_3 - b_2\delta b_3 - c_2\delta c_3 \\
qdt = \alpha_1\delta a_3 + b_1\delta b_3 + c_1\delta b_3 = -\alpha_3\delta a_1 - b_3\delta b_1 - c_3\delta c_1 \\
rdt = \alpha_2\delta a_1 + b_2\delta b_1 + c_2\delta c_1 = -\alpha_1\delta a_2 - b_1\delta b_2 - c_1\delta c_2
\end{array}\right\} \quad 13\,a)
$$

woraus auch noch folgt:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\delta\alpha_1 = (\alpha_2 r - \alpha_3 q)dt & \delta b_1 = (b_2 r - b_3 q)dt \\
\delta\alpha_2 = (\alpha_3 p - \alpha_1 r)dt & \delta b_2 = (b_3 p - b_1 r)dt \\
\delta\alpha_3 = (a_1 q - a_2 p)dt & \delta b_3 = (b_1 q - b_2 p)dt \\
\multicolumn{2}{c}{\delta c_1 = (c_2 r - c_3 q)dt} \\
\multicolumn{2}{c}{\delta c_2 = (c_3 p - c_1 r)dt} \\
\multicolumn{2}{c}{\delta c_3 = (c_1 q - c_2 p)dt}
\end{array}\right\} \quad 13\,b)
$$

Multipliciren wir die Gleichungen 12 der Reihe nach mit $a_1\ b_1\ c_1$, ferner $a_2\ b_2\ c_2 \ldots$ und $a_3\ b_3\ c_3 \ldots$ und addiren dieselben jedesmal, substituiren dann für die Variationen der abc ihre eben gefundenen Werthe, so folgt:

$$
\left.\begin{array}{l}
a_1\delta\xi + b_1\delta\eta + c_1\delta\zeta = (zq - yr)dt + \delta x \\
a_2\delta\xi + b_1\delta\eta + c_2\delta\zeta = (xr - zp)dt + \delta y \\
a_3\delta\xi + b_3\delta\eta + c_3\delta\zeta = (yp - xq)dt + \delta z
\end{array}\right\} \quad 14)
$$

Nehmen wir nun schliesslich die Variation δ als mit der Zeit erfolgend an, indem wir setzen

$$
\delta = \frac{d}{dt}\,dt
$$

so stellen die Grössen $\frac{d\xi}{dt}\ \frac{d\eta}{dt}\ \frac{d\zeta}{dt}$ die Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes in Bezug auf das im Raume feste, die Grössen

$$u_1 = a_1 \frac{d\xi}{dt} + b_1 \frac{d\eta}{dt} + c_1 \frac{d\zeta}{dt}$$

$$u_2 = a_2 \frac{d\xi}{dt} + b_2 \frac{d\eta}{dt} + c_2 \frac{d\zeta}{dt}$$

$$u_3 = a_3 \frac{d\xi}{dt} + b_3 \frac{d\eta}{dt} + c_3 \frac{d\zeta}{dt}$$

dagegen die Geschwindigkeitscomponenten in Bezug auf das mit dem Körper rotirende Coordinatensystem vor, und es wird die lebendige Kraft des Körpers:

$$T = \tfrac{1}{2}\int\int\int dm(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$$

zufolge der Gleichungen 14) sein

$$2T = Ap^2+Bq^2+Cr^2-2Dqr-2Erp-2Fpq+2p\alpha+2q\beta+2r\gamma \\ +\int\int\int dm\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \qquad 15)$$

Dieser Ausdruck in $9a$) eingesetzt, gibt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ap-Fq-Er+\alpha)-r(Bq-Dr-Fp+\beta)+q(Cr-Ep-Dq+\gamma)=L \\ \frac{d}{dt}(Bq-Dr-Fp+\beta)-p(Cr-Ep-Dq+\gamma)+r(Ap-Fq-Er+\alpha)=M \\ \frac{d}{dt}(Cr-Ep-Dq+\gamma)-q(Ap-Fq-Er+\alpha)+p(Bq-Dr-Fp+\beta)=N \end{aligned}\right\} 9b$$

als eine neue Form der Differentialgleichungen für die rotirende Bewegung eines Körpers von veränderlicher Gestalt.

In diesen Gleichungen sind die $ABCDEF$ zufolge 8) als bekannte Functionen der Zeit zu betrachten, so dass nur die Berechnung der $\alpha\beta\gamma$ erübrigt. Da nun

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi &&= a(1+S_2)\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi &&= a(1+S_2)\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta &&= a(1+S_2)\cos\theta \end{aligned}$$

ist, worin S_2, sowie θ und φ von t abhängen, so werden die Grössen $\alpha\beta\gamma$ aus zwei Gliedern bestehen, nämlich den Variationen von S_2 und denen von θ und φ. Die ersteren heben sich gegenseitig auf, die zweiten können als kleine Grössen unbedenklich vernachlässigt werden, so dass wir

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

setzen können.

VIII.

Unter der Annahme $\alpha = \beta = \gamma = 0$ nimmt der Ausdruck für T die Form an

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cz^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq$$
$$+ \int\int\int \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} p &= p \\ q &= q \\ r &= r_1 + \nu_1 p + \nu_2 q \end{aligned}$$

geht derselbe über in

$$2T = p^2(A + C\nu_1^2) + q^2(B + C\nu_2^2) + Cr_1^2 - 2qr_1(D - C\nu_2) - 2r_1 p(E - C\nu_1)$$
$$-2pq(F + D\nu_1 + E\nu_2 - C\nu_1\nu_2) + \int\int\int dm \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

und, wenn noch die zwei Grössen $\nu_1\ \nu_2$ so bestimmt werden, dass

$$\begin{aligned} C\nu_2 &= D \quad \text{also} \quad \nu_2 = D/C \\ C\nu_1 &= E \qquad\qquad\ \ \nu_1 = E/C \end{aligned}$$

ist, in

$$2T = p^2 \frac{AC + E^2}{C} + q^2 \frac{BC + E^2}{C} + Cr_1^2 - 2pq \frac{FC + DE}{C}$$
$$+ \int\int\int dm \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Hiedurch nehmen nun die Gleichungen 9 a) die einfachere Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{AC+E^2}{C}p-\frac{FC+DE}{C}q\right)-qr_1\frac{BC-C^2+E^2}{C}+pr_1\frac{FC+DE}{C}=L\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{BC+E^2}{C}q-\frac{FC+DE}{C}p\right)+pr_1\frac{AC-C^2+E^2}{C}-qr_1\frac{FC+DE}{C}=M\\
&\frac{d}{dt}(Cr_1)\qquad +pq(B-A)\qquad -(p^2-q^2)\frac{FC+DE}{C}=N
\end{aligned}\right\}\quad 9c)$$

Aber auch diese Gleichungen lassen noch bedeutende Vereinfachungen zu, wenn wir auf die Ordnungen der in ihnen enthaltenen Grössen Rücksicht nehmen. Da die in $AB..F$ vorkommenden Coëfficienten $s_1..s_5$ respective $\alpha_1..\alpha_5$ als Grössen von der Ordnung der Abplattung der Erde zu betrachten sind, deren Producte und Quadrate wir der Annahme nach vernachlässigen wollen, so können wir

$$\frac{AC+E^2}{C}=A\quad \frac{BC+E^2}{C}=B\quad \frac{FC+DE}{C}=F$$

setzen und erhalten

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(Ap-Fq)+qr_1(C-B)+Fpr_1=L\\
&\frac{d}{dt}(Bq-Fp)-pr_1(C-A)-Fqr_1=M\\
&\frac{d}{dt}(Cr_1)-pq(A-B)-F(p^2-q^2)=N
\end{aligned}\right\}\quad 9d$$

wobei noch ist

$$r_1=r-Ep-Dq.$$

Durch die weitere Substitution

$$\begin{aligned}Ap-Fq&=\pi\\ Bq-Fp&=\chi\end{aligned}\qquad 16)$$

aus welcher durch dieselbe Näherung

$$\begin{aligned}p&=\frac{\pi}{A}+\frac{F}{BA}\chi\\ q&=\frac{\chi}{B}+\frac{F}{BA}\pi\end{aligned}\qquad 16a)$$

folgt, erhalten wir ferner

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\pi}{dt}+\chi\frac{C-B}{B}r_1+\pi\frac{FC}{AB}r_1=L\\
&\frac{d\chi}{dt}-\pi\frac{C-A}{A}r_1-\chi\frac{FC}{AB}r_1=M\\
&\frac{d}{dt}(Cr_1)+\frac{B-A}{AB}\pi\chi+\frac{F}{BA}(\pi^2+\chi^2)=N
\end{aligned}\right\} \qquad 17)$$

Zur Integration dieser Differentialgleichungen soll das folgende bekannte Näherungsverfahren eingeschlagen werden. Da die Grössen p und q und damit auch π und χ gegenüber r_1 sehr klein sind, so wollen wir zunächst in der letzten der drei Gleichungen 17) die Glieder

$$\frac{B-A}{AB}\pi\chi+\frac{F}{BA}(\pi^2+\chi^2)$$

vernachlässigen, insbesondere, da in ihnen die Producte von π und χ sowie ihre Quadrate mit den wiederum sehr kleinen Grössen $(B-A)$ und F multiplicirt sind. Die letzte Gleichung 17) kann dann unmittelbar integrirt werden, und liefert einen bestimmten Werth für r_1, welcher in die beiden ersten Gleichungen eingesetzt, nun π und χ zu berechnen gestattet. Mit diesen Werthen von π und χ ergibt sich ein neuer Werth von r_1 u. s. w. Zeigt es sich dann, dass bei irgend einer Substitution die neuen Werthe von π und χ sich von den bei der vorhergegangenen Substitution erlangten nur um kleine Grössen höherer Ordnung, als es π und χ selbst sind, unterscheiden, so kann man die bei dieser Substitution erhaltenen Werthe von π, χ und r_1 als die Integrale der Gleichungen 17) betrachten.

Wie man aber sieht, kommt es schliesslich auf die Integration der beiden ersten Gleichungen 17), d. i. eines Systems zweier simultaner Differentialgleichungen mit periodischen Coëfficienten an.

IX.

Ehe wir an die Integration dieser Differentialgleichungen gehen, haben wir noch die Drehungsmomente LMN zu berechnen.

Es seien zu diesem Zwecke $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Mondes in Bezug auf ein Axensystem, welches mit der Erde fest verbunden ist, M_1 die Masse derselben, Δ seine Distanz vom Schwerpunkte derselben, d. h.

$$\Delta^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

seien ferner xyz die Coordinaten irgend eines Theilchens der Erde, dm seine Masse und r seine Distanz vom Monde, nämlich

$$r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1^2) + (z-z_1)^2$$

dann ist das Potential der Anziehung des Mondes auf dieses Theilchen $M_1 \frac{dm}{r}$ und somit auf die ganze Erde

$$V = M_1 \int \frac{dm}{r}$$

und die Drehungsmomente

$$L = y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y} \quad M = z\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial z} \quad N = x\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial x}$$

Die Entwicklung von V bis auf Glieder zweiter Ordnung liefert bekanntlich

$$V = \frac{MM'}{\Delta} + \frac{3}{2}\frac{M'}{\Delta s}\left[\frac{x_1^2}{3}(B+C-2A) + \frac{y_1^2}{3}(C+A-2B)\right.$$
$$\left. + \frac{z_1^2}{3}(A+B-2C) + 2Dy_1z_1 + 2Ez_1x_1 + 2Fx_1y_1\right]$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned}
L &= \frac{3M'y_1z_1(B-C)}{\Delta^5} + \frac{3M'}{\Delta^5}[y_1(Dy_1+Ex_1) - z_1(Dz_1+Fy_1)\\
M &= \frac{3M'z_1x_1(C-A}{\Delta^5} + \frac{3M'}{\Delta^5}[z_1(Ez_1+Fy_1) - x_1(Ex_1+Dy_1)]\\
N &= \frac{3M'x_1y_1(A-B)}{\Delta^5} + \frac{3M'}{\Delta^5}[x_1(Fx_1+Dz_1) - y_1(Fy_1+Ez_1)]
\end{aligned}\right\} 18)$$

Zur Bestimmung der Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1$ in diesen Ausdrücken machen wieder die Annahme, dass der Mond sich gleichförmig in der Ebene der Ekliptik um die Erde bewege; bezeichnet sohin mit ☾ seine Länge in dieser Bahn, so sind die Coordinaten des Mondes, bezogen auf die feste Ekliptik

$$\Delta \cos ☾ \quad \Delta \sin ☾ \quad 0$$

und daraus zufolge der Transformationsgleichungen 10)

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1\, \Delta \cos ☾ + b_1\, \Delta \sin ☾ \\ y_1 &= a_2\, \Delta \cos ☾ + b_2\, \Delta \sin ☾ \\ z_1 &= a_3\, \Delta \cos ☾ + b_3\, \Delta \sin ☾ \end{aligned}$$

die Coordinaten des Mondes, bezogen auf den beweglichen Äquator. Führt man statt der Coëfficienten $a\,b\,c\,..$ die bekannten drei Winkelgrössen $\Phi\,\Psi$ und ε' ein,[1] nämlich

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\sin\Phi \sin\Psi \cos\varepsilon + \cos\Phi \cos\Psi \\ b_1 &= +\sin\Phi \cos\Psi \cos\varepsilon' + \cos\Phi \sin\Psi \\ c_1 &= -\sin\Phi \sin\varepsilon' \\ a_2 &= -\cos\Phi \sin\Psi \cos\varepsilon' - \sin\Phi \cos\Psi \\ b_2 &= -\cos\Phi \cos\Psi \cos\varepsilon' - \sin\Phi \sin\Psi \\ c_2 &= -\cos\Phi \sin\varepsilon' \\ a_3 &= -\sin\Psi \sin\varepsilon' \\ b_3 &= -\cos\Psi \sin\varepsilon' \\ c_3 &= +\cos\varepsilon' \end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

wobei diese Grössen mit den Drehungscomponenten $p\,q\,r$ in dem Zusammenhange stehen, dass

$$\left.\begin{aligned} -\sin\varepsilon' \frac{d\Psi}{dt} &= p \sin\Phi + q \cos\Phi \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= -p \cos\Phi + q \sin\Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} &= r - \cos\varepsilon' \frac{d\Psi}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad 19a)$$

[1] Oppolzer, Lehrbuch der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen. Bd. I, 2. Aufl. §. 137.

so erhält man,

$$x_1 = \Delta[\sin\Phi\cos\varepsilon'\sin(\mathbb{C}-\Psi)+\cos\Phi\cos(\mathbb{C}-\Psi)]$$
$$y_1 = \Delta[\cos\Phi\cos\varepsilon'\sin(\mathbb{C}-\Psi)-\sin\Phi\cos(\mathbb{C}-\Psi)]$$
$$z_1 = \Delta\sin\varepsilon'\sin(\mathbb{C}-\Psi).$$

Wendet man nun folgende Abkürzungen an

$$\frac{3\varkappa\tau}{4}[(\iota+\cos^2\varepsilon')+\sin^2\varepsilon'\cos 2(\mathbb{C}-\Psi)] = \sigma_0$$

$$\tau\varkappa[\cos\Phi\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'-\cos\Phi\cos 2(\mathbb{C}-\Psi)\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'- \\ -\sin\Phi\sin 2(\mathbb{C}-\Psi)\sin\varepsilon'] = \sigma_2$$
$$\tau\varkappa[\sin\Phi\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'-\sin\Phi\cos(\mathbb{C}-\Psi)\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'+ \\ +\cos\Phi\sin 2(\mathbb{C}-\Psi)\sin\varepsilon'] = \sigma_3$$
$$\tfrac{1}{4}\tau\varkappa[-\sin 2\Phi\sin^2\varepsilon'-\sin 2\Phi\cos 2(\mathbb{C}-\Psi)(\iota+\cos^2\varepsilon')+ \\ +\cos 2\Phi\sin 2(\mathbb{C}-\Psi).2\cos\varepsilon'] = \sigma_4$$
$$\tfrac{1}{4}\tau\varkappa[+\cos 2\Phi\sin^2\varepsilon'+\cos 2\Phi\cos 2(\mathbb{C}-\Psi)(\iota+\cos^2\varepsilon') \\ -\sin 2\Phi\sin(2\mathbb{C}-\Psi).2\cos\varepsilon'] = \sigma_5$$

wobei diese neuen Grössen mit den Coëfficienten s in den Gleichungen in dem Zusammenhang stehen, dass jene in diese übergehen, wenn man

ε' durch
$\mathbb{C}-\Psi$ $\quad$ $\mathbb{C}$
und Φ „ ωt

ersetzt, so werden

$$x_1^2 = \frac{\Delta^2}{3\tau\varkappa}(\sigma_0+3\sigma_5) \qquad y_1 z_1 = \frac{\Delta^2}{\tau\varkappa}\sigma_2$$

$$y_1^2 = \frac{\Delta^2}{3\tau\varkappa}(\sigma_0-3\sigma_5) \qquad z_1 x_1 = \frac{\Delta^2}{2\tau\varkappa}\sigma_3$$

$$z_1^2 = \frac{\Delta^2}{3\tau\varkappa}(3\tau\varkappa-2\sigma_0) \qquad x_1 y_1 = \frac{\Delta^2}{2\tau\varkappa}\sigma_4$$

Berücksichtigt man weiter, dass die σ-Coëfficienten sich von den s nur um kleine Grössen zweiter Ordnung unterscheiden, so kann man directe

$$s = \sigma$$

setzen. In der That ist auch dies richtiger, indem diese Gleichung besagt, dass auch in den Gleichungen 6) die Coordinaten des Mondes sich auf den beweglichen Äquator beziehen, dessen Neigung gegen die Feste der Ekliptik ε' und dessen Knoten auf der Ekliptik jährlich um die Grösse Ψ fortschreitet. Setzen wir nun thatsächlich zur Berechnung der $x_1\, y_1\, z_1 \ldots s = \sigma$, entnehmen die Werthe der Trägheitsmomente ferner den Gleichungen 8) so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} L &= -\frac{K\omega^2\tau\varkappa}{2}\,[\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\cos\Phi + \sin\varepsilon'(1-\cos\varepsilon')\cos(\Phi+2☾-2\Psi) \\ &\qquad -\sin\varepsilon'(1+\cos\varepsilon')\cos(\Phi-2☾+2\Psi)] \\ M &= \frac{K\omega^2\tau\varkappa}{2}\,[\sin\varepsilon'\cos\varepsilon'\sin\Phi + \sin\varepsilon'(1-\cos\varepsilon')\sin(\Phi+2☾-2\Psi) \\ &\qquad -\sin\varepsilon'(1+\cos\varepsilon')\sin(\Phi-2☾+2\Psi)] \\ N &= 0 \end{aligned}\right\} 18a)$$

oder in abgekürzter Form:

$$\left.\begin{aligned} L &= -l_1\cos\Phi - l_2\cos(\Phi+2☾-2\Psi) + l_3\cos(\Phi-2☾+2\Psi) \\ M &= +l_1\sin\Phi + l_2\sin(\Phi+2☾-2\Psi) - l_3\sin(\Phi-2☾+2\Psi) \\ N &= 0 \end{aligned}\right\} 18b)$$

worin ist:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \tfrac{1}{2}K\omega^2\tau\varkappa\sin\varepsilon'\cos\varepsilon' \\ l_2 &= \tfrac{1}{2}K\omega^2\tau\varkappa\sin\varepsilon'(1-\cos\varepsilon') \\ l_3 &= \tfrac{1}{2}K\omega^2\tau\varkappa\sin\varepsilon'(1+\cos\varepsilon') \end{aligned}\right\} \qquad 18c)$$

Die Ausdrücke für L und M werden einigermassen complicirter, wenn wir zur Berechnung derselben, die Werthe der Trägheitsmomente den Gleichungen 8′) entnehmen. Es wird in den oben eingeführten Zeichen, wenn wir an den Unterschied der Coëfficienten s und s' festhalten:

$$\left.\begin{aligned} L &= -(K_1+K_1'')\frac{\omega^2 s_2}{2} + K_1''\tau(s_2-s_2') \\ &+ \frac{K_1''}{\varkappa}[s_2(s_5'-s_0')-s_2'(s_5-s_0)+s_3's_4-s_3s_4'] \\ M &= +(K_1+K_1'')\frac{\omega^2 s_3}{2} + K_1''\tau(s_3-s_3') \\ &+ \frac{K_1''}{\varkappa}[s_3(s_5'-s_0')-s_3'(s_5-s_0)+s_4's_2-s_4s_2'] \end{aligned}\right\} \qquad 18d)$$

Es sollen nun die Glieder, die die Grösse K_1'' als Factor enthalten, erst weiter unten berücksichtigt und zunächst für L und M die oben aufgestellten Werthe, 18 b), beibehalten werden.

Berechnet man ferner in derselben Weise den Ausdruck für N, so findet man, dass derselbe nun nicht mehr verschwindet. Vielmehr ist

$$N = \frac{K_1''}{\varkappa}\left[4(s_4' s_5 - s_4 s_5') + \tfrac{1}{2}(s_2' s_3 - s_3' s_2)\right]$$

woraus folgt, dass derselbe wohl nur aus Gliedern besteht, die als von der Ordnung des Quadrates der Abplattung, eigentlich zu vernachlässigen wären. Da nun bekanntlich insbesondere von N die Rotationsgeschwindigkeit der Erde abhängt, so dürfte dies Resultat ein besonderes Interesse für sich in Anspruch nehmen.

Die vollständige Entwicklung von N zeigt, dass dasselbe aus zwei Theilen besteht, einem constanten Theile

$$N_1 = -\frac{K_1''}{\varkappa}\left[4(a_2\alpha_2 \sin\eta_2 + a_3\alpha_3 \sin\eta_3 + a_4\alpha_4 \sin\eta_4) - \tfrac{1}{2}(a_5\alpha_5 \sin\eta_5 + a_6\alpha_6 \sin\eta_6 - a_7\alpha_7 \sin\eta_7)\right]$$

und einem periodischen, welcher von der Form ist

$$N_2 = \frac{K_1''}{\varkappa}\sum(a_\mu \alpha_\nu \sin\gamma_\mu \cos(\gamma_\nu + \eta_\nu) - a_\nu \alpha_\mu \cos\gamma_\nu \sin(\gamma_\mu + \eta_\mu))$$

worin für γ_μ und γ_ν die Werthe

$$2\omega t \quad 2\omega t + 2☾ \quad 2\omega t - 2☾$$

und ferner

$$\omega t \quad \omega t + 2☾ \quad \omega t - 2☾$$

ferner für μ und ν in dem ersten Falle die Zahlen 2, 3, 4, im zweiten 5, 6, 7 zu setzen sind, jedoch so, dass stets $\mu \gtreqless \nu$ ist.

X.

Nachdem so die Werthe von L, M und N bestimmt sind, kann nunmehr die letzte der Gleichungen 17) unmittelbar integrirt werden, zunächst mit Vernachlässigung der sehr kleinen Grösse

$$\frac{B-A}{AB}\pi\chi - \frac{F}{AB}(\pi^2 + \chi^2)$$

Ersetzen wir N durch N_1+N_2, so liefert diese Gleichung

$$\frac{d}{dt}(Cr_1) = N_1+N_2$$

$$r_1 = \frac{\text{Const.}}{C} + \frac{N_1 t}{C} + \frac{1}{C}\int N_2 dt \tag{20}$$

Bis auf die sehr kleine Grösse $Ep+Dq$ stellt nun r_1 die Rotationsgeschwindigkeit der Erde um die grösste Trägheitsaxe vor, die also hier, nicht wie bei dem starren Erdkörper constant ist, sondern sich sowohl als periodischen, als auch als säcularen Variationen unterworfen ergibt.

Setzen wir näherungsweise, indem wir auch K_1' und K_1'' als Grössen erster Ordnung gegenüber K' ansehen

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{K'}\left[1 - \frac{\varkappa\omega^2}{3} - \frac{K_1'}{K'} - \frac{K_1''}{K'}\left(-\tfrac{1}{3}\varkappa\omega^2 - 2\alpha_0' - 2\alpha_1 \cos(2☾+\eta_1)\right)\right]$$

bezeichnen das Product der Integrationsconstante, in die Grösse

$$\frac{1}{K'}\left[1 - \frac{\varkappa\omega^2}{2} - \frac{K_1'}{K'} - \frac{K_1''}{K'}\left(-\tfrac{1}{3}\varkappa\omega^2 - 2\alpha_0'\right)\right]$$

mit n_0, ferner in

$$-\frac{2K_1''}{K_1}\alpha_1\cos(2☾+\eta_1) \text{ mit } n_0\nu_2,$$

so wird

$$r_1 = n_0\left(1-\nu_2\cos(2☾+\eta_1)\right] + \frac{N_1 t}{K'} + \frac{1}{K'}\int N_2 dt$$

wenn wir in den schon an sich kleinen Gliedern N_1 und N_2 directe $\frac{1}{C} = \frac{1}{K'}$ setzen.

Schreiben wir noch abkürzend

$$\frac{N_1}{K'} = -n_0\nu_1 \quad \frac{1}{K'}\int N_2 dt = n_0\nu_3$$

so erhalten wir schliesslich

$$r_1 = n_0\left(1-\nu_1 t-\nu_2\cos(2☾+\eta_1)+\nu_3\right)$$

Es ist dann, für N_1 seinen Werth substituirt

$$\nu_1 = \frac{1}{n_0}\frac{K_1''}{K'}\frac{1}{\varkappa}\left[4(a_2\alpha_2\sin\eta_2 + a_3\alpha_3\sin\eta_3 + a_4\alpha_4\sin\eta_4)\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}(a_5\alpha_5\sin\eta_5 + a_6\alpha_6\sin\eta_6 - a_7\alpha_7\sin\eta_7)\right]$$

und ν_3 einer Summe periodischer Glieder gleich, die von derselben Ordnung sind wie ν_1. Da nun ein jeder der Coëfficienten $a\alpha$ zufolge den Gleichungen 5 und 5′, proportional ist $\varkappa\tau$, so wollen wir setzen

$$a_i = \varkappa\tau b_i$$
$$\alpha_i = \varkappa\tau\beta_i$$

und erhalten,

$$\nu_1 = \frac{K_1''}{K'}\frac{\varkappa\tau^2}{n_0}\left[4(b_2\beta_2\sin\eta_2 + b_3\beta_3\sin\eta_3 + b_4\beta_4\sin\eta_4)\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}(b_5\beta_5\sin\eta_5 + b_6\beta_6\sin\eta_6 - b_7\beta_7\sin\eta_7)\right]$$

Setzen wir, um nur einigermassen ein Urtheil über den thatsächlichen Werth dieses Ausdruckes zu gewinnen, einige Zahlenwerthe ein, — nehmen zur Rechnung als Einheit der Zeit ein Jahrhundert an, so ist

$$n_0 = 2\pi . 36525 . f. \qquad \log n_0 = 5\cdot 3619$$

Sei ferner die Abplattung der Erde zu $\dfrac{1}{299\cdot 153}$ angenommen, so dass

$$\tfrac{1}{2}\varkappa\omega^2 = \tfrac{1}{2}\varkappa n_0^2 = \frac{1}{299\cdot 153}, \text{ so wird } \log\varkappa = 7\cdot 1012 - 20$$

Weiters ist $\tau = \dfrac{3}{2}\dfrac{M'}{\Delta^3} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{1+81.44}\left(\dfrac{2\pi}{\text{Monat}}\right)^2$ wenn $81\cdot 44$ das Verhältniss der Erdmasse zur Mondmasse bedeutet und daraus

$$\log\tau = 6\cdot 1085$$

Das Verhältniss $\dfrac{K_1''}{K'}$ können wir näherungsweise dem Verhältnisse der Wassermasse auf der Oberfläche der Erde zu der

[1] Oppolzer, Lehrb der Bahnbest. von Planeten u. Kometen. I. Bd. II. Aufl. pag. 181.

Masse dieser selbst gleichsetzen, dann haben wir nach Hann.[1]

$$\frac{K_1''}{K'} = \frac{1}{4540}$$

und damit schliesslich

$$\nu_1 = \frac{1 \cdot 99057}{10^{10}} (4 b_2 \beta_2 \sin \eta_2 + \dots \quad)$$

Einen Maximalwerth von ν_1 werden wir nun finden, wenn wir $b = \beta$ und $\eta_2 = \eta_3 = \dots \eta_7$ setzen.

Dann wird

$$4(b_2 \beta_2 \sin \eta_2 + \dots \quad) = \tfrac{1}{4}[(1 - \cos^4 \varepsilon) + 2(1 + \cos \varepsilon)^4] = 6 \cdot 8305 \sin \eta$$

so dass schliesslich ist

$$\nu_1 = \frac{13 \cdot 605}{10^{10}} \sin \eta \dots \text{ Zeiteinheit ein Jahrhundert.}$$

Die Rotationsgeschwindigkeit der Erde nimmt daher in einem Jahrhundert im Maximum um

$$\frac{13 \cdot 605}{10^{10}} \sin \eta$$

ihres Werthes ab. Aber einer derartigen Retardation der Erdbewegung entspricht eine scheinbare säculare Beschleunigung des Mondes im Betrage von

$$2''36 \sin \eta \text{ für ein Jahrhundert,}$$

so dass diese Grösse ν_1, so gering sie auch ist, ganz wohl zur Erklärung des Unterschiedes herangezogen werden kann, welcher zwischen der theoretisch berechneten säcularen Mondacceleration und seiner thatsächlichen besteht, zudem auch noch die in ν_3 enthaltenen periodischen Glieder, die von derselben Ordnung sind, wie ν_1 hinzukommen, und dieselben vielleicht gegenwärtig sich mit der Grösse ν_1 summiren.

Ich will jedoch auf diese Frage hier nicht weiter eingehen, sondern begnüge mich, darauf aufmerksam gemacht zu haben, dass nicht blos, wie nach Delaunay eine Verzögerung der Rotationsbewegung der Erde durch die sogenannte Flutreibung,

[1] Hann, Hochstetter u. Pokorny, Allg. Erdkunde. 1881, p. 138.

sondern auch schon durch die Variation der Trägheitsmomente der Erde allein, welche durch die Ebbe- und Flutbewegung auf der Oberfläche derselbe verursacht wird, hervorgerufen werden kann.

Nimmt man aber die Erde als ganz flüssig an, so ist $\nu_1 = \nu_3 = 0$ zusetzen, und es wird

$$r_1 = n_0 [1 - \nu_2 \cos(2☾ + \eta_1)]$$

also auch in diesem Falle die Rotationsgeschwindigkeit der Erde nicht mehr constant.

XI.

Ich gehe nun an die Integration der zwei ersten Differentialgleichungen 17). Bei derselben kann man unbedenklich die Grösse r_1 als constant ansehen, da die Variationen von r_1 schon an sich Grössen zweiter Ordnung sind, und r_1 selbst als Factor bei den kleinen Grössen F und $(A-B)$ auftritt. Es wird daher bis auf Grössen dritter Ordnung gesetzt werden können

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} + \frac{CF}{AB} n_0 \pi + \left(\frac{C-B}{B}\right) n_0 \chi &= L \\ \frac{d\chi}{dt} - \frac{CF}{AB} n_0 \chi - \left(\frac{C-A}{A}\right) n_0 \pi &= M \end{aligned}\right\} \qquad 17a)$$

oder, nach Substitution der Werthe für F, $C-B$, und $(C-A)$, wenn abkürzend und näherungsweise bis auf Glieder zweiter Ordnung inclusive

$$\frac{CF}{AB} = -u_2 \sin(2\omega t + \eta_2) - u_3 \sin(2\omega t + 2☾ + \eta_3)$$
$$- u_4 \sin(2t\omega - 2☾ + \eta_4)$$

$$\left(\frac{C-B}{B}\right) = u_0 - u_2 \cos(2\omega t + \eta_2) - u_3 \cos(2\omega t + 2☾ + \eta_3)$$
$$- u_4 \cos(2\omega t - 2☾ + \eta_4) + u_1 \cos(2☾ + \eta_1)$$

$$\left(\frac{C-A}{A}\right) = u_0 + u_2 \cos(2\omega t + \eta_2) + u_3 \cos(2\omega t + 2☾ + \eta_3$$
$$+ u_4 \cos(2\omega t - 2☾ + \eta_4) + u_1 \cos(2☾ + \eta_1$$

geschrieben wird, worin

$$u_0 = [(K' + K_1'')\frac{\varkappa\,\omega^2}{2} - 3\,\alpha_0\,K_1''] : K' \quad u_1 = \frac{3\,\alpha_1\,K_1''}{K'}$$

$$u_2 = \frac{\alpha_2\,K_1''}{K'} \quad u_3 = \frac{\alpha_3\,K_1''}{K'} \quad u_4 = \frac{\alpha_4\,K_1''}{K'}$$

ist,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\pi}{dt} + [u_0 + u_1\cos(2\mathbb{C} + \eta_1) + u_2\cos(2\omega t + \eta_2) + u_3\cos(2\omega t + 2\mathbb{C} + \eta_3 + u_4\cos(2\omega t - 2\mathbb{C} + \eta_4)]\; n_0\chi \\
&\qquad - [u_2\sin(2\omega t + \eta_2) + u_3\sin(2\omega t + 2\mathbb{C} + \eta_3) - u_4\sin(2\omega t - 2\mathbb{C} + \eta_4)]\; n_0\pi = L \\
&\frac{d\chi}{dt} - [u_0 + u_1\cos(2\mathbb{C} + \eta_1) - u_2\cos 2\omega t + \eta_2) - u_3\cos(2\omega t + 2\mathbb{C} + \eta_3) - u_4\cos(2\omega t - 2\mathbb{C} + \eta_4)]\; n_0\pi \\
&\qquad + [u_2\sin(2\omega t + \eta_2) + u_3\sin(2\omega t + 1\mathbb{C} + \eta_3) + u_4\sin(2\omega t - 2\mathbb{C} + \eta_4)]\; n_0\chi = M
\end{aligned}\right\} \quad 17\,b)$$

Die Integrale dieser Differentialgleichungen werden sich bekanntlich aus zwei Theilen zusammensetzen; der erstere ist von den äusseren Kräften, deren Einfluss durch die Grössen L und M dargestellt wird, unabhängig und repräsentirt gewissermassen den Anfangszustand der Rotationsbewegung der Erde. Auf diesen Theil soll jedoch hier aus demselben Grunde, wie in der Theorie der Präcession eines starren Körpers, nicht weiter Rücksicht genommen werden. Der zweite Theil dagegen wird nur von den Grössen L und M abhängen
3* und aus ebenso vielen Theilen bestehen, als periodische Glieder in L und M vorkommen. Setzt man daher

$$\begin{aligned} L &= -l\cos\lambda t \\ M &= l\sin\lambda t \end{aligned}$$

so ist es nur nöthig, die Integration bezüglich eines solchen Gliedes auszuführen und dann für l und λ die ihnen nach $18\,c)$ zukommenden Werthe zu substituiren.

Was nun die Integration der Differentialgleichungen selbst anlangt, so können wir nach Lindstedt[1] dieselbe vollständig ausführen. Wir finden

$$
\left.\begin{aligned}
\pi = \pi_0 \sin\lambda t &+ \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i' \sin[\lambda l + i(2\mathbb{C}+\eta_1)] + \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i'' \sin[\lambda t - i(2\mathbb{C}+\eta_1)] - \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i^2 \sin[\lambda t - i(2\omega t+\eta_2)] \\
&- \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i^3 \sin[\lambda t - i(2\omega t + 2\mathbb{C}+\eta_3)] - \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i^4 \sin[\lambda t - i(2\omega t - 2\mathbb{C}+\eta_4)] \\
\chi = \pi_0 \cos\lambda t &+ \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i' \cos[\lambda t + i(2\mathbb{C}+\eta_1)] + \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i'' \cos[\lambda t - i(2\mathbb{C}+\eta_1)] + \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i^2 \cos[\lambda t - i(2\omega t+\eta_2)] \\
&+ \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i^3 \cos[\lambda t - i(2\omega t + 2\mathbb{C}+\eta_3)] + \sum_1^\infty{}_i\, \pi_i^4 \cos[\lambda t - i(2\omega t - 2\mathbb{C}+\eta_4)]
\end{aligned}\right\} \quad 21)
$$

ferner den Coëfficienten erster Ordnung

$$
\pi_0 = -\frac{l}{\lambda + u_0 n_0} + \text{(Grössen dritter Ordnung)} \qquad 21'
$$

und die Coëfficienten zweiter Ordnung

[1] Lindstedt, Mém. de Pétersbourg, Tome XXXI, Nr. 4 u. Astron. Nachr., Band CV, Nr. 2503.

$$\pi'_1 = \frac{l u_1 n_0}{2(\lambda + u_0 n_0)(\lambda + 2\mathbb{C}' + u_0 n_0)} + \ldots \quad \pi''_1 = \frac{l u_1 n_0}{2(\lambda + u_0 n_0)(\lambda - 2\mathbb{C}' - u_0 n_0)} +$$

$$\pi_1^2 = \frac{l u_2 n_0}{(\lambda + u_0 n_0)(\lambda - 2\omega - u_0 n_0)} + \ldots \quad \pi_1^3 = \frac{l u_3 n_0}{(\lambda + u_0 n_0)(\lambda - 2\omega - 2\mathbb{C}' - u_0 n_0)} + \ldots$$

$$\pi_1^4 = \frac{l u_4 n_0}{(\lambda + u_0 n_0)(\lambda - 2\omega + 2\mathbb{C}' - u_0 n_0)} + \ldots$$

worin die vernachlässigten Glieder schon vierter Ordnung sind und

$$\mathbb{C}' = \frac{d\mathbb{C}}{dt}$$

Begnügen wir uns mit der bis zu den Gliedern zweiter Ordnung durchgeführten Annäherung, so hätten wir jetzt noch durch Substitution dieser Werthe für π und χ in die letzte der Gleichungen 17) einen weiteren Werth für r_1 abzuleiten und mit diesem wieder die Gleichungen 17 *b*) für π und χ nochmals zu integriren. Allein, indem wir schon bei der ersten Integration r_1 als constant angenommen haben, können wir die gefundenen Werthe für π und χ unmittelbar als Integrale der Gleichungen 17) betrachten.

Setzen wir ferner näherungsweise

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{K'}\left[1 + v_0 + v_1 \cos(2\mathbb{C} + \gamma_2) + u_8 \cos(2\omega t + \gamma_2) \right.$$
$$\left. + u_3 \cos(2\omega t + 2\mathbb{C} + \gamma_3) + u_4 \cos(2\omega t - 2\mathbb{C} + \gamma_4)\right]$$

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{K'}\left[1 + v_0 + v_1 \cos(2\mathbb{C} + \gamma_1) - u_2 \cos(2\omega t + \gamma_2) \right.$$
$$\left. - u_3 \cos(2\omega t + 2\mathbb{C} + \gamma_3) - u_4 \cos(2\omega t - 2\mathbb{C} + \gamma_4)\right]$$

worin

$$v_0 = \frac{\varkappa\omega^2}{6} - \frac{K'_1}{K'} - \frac{K''_1}{K'}\left(-\frac{\varkappa\omega^2}{6} + \alpha_0\right) \qquad v_1 = \frac{K''_1}{K'}\alpha_1 = \tfrac{1}{3} u_1$$

so wird, wegen

$$p = \frac{\pi}{A} + \frac{F\chi}{AB} \quad q = \frac{\chi}{B} + \frac{F\pi}{AB}$$

schliesslich

$$\left.\begin{aligned} p = {} & \frac{\pi_0\,(1+v_0)}{K'}\sin\lambda t + \frac{\pi_0\,v_1+2\pi_1'}{K'}\sin(\lambda t+2\mathbb{C}+\eta_1) + \frac{\pi_0\,v_1+2\pi_1''}{K'}\sin(\lambda t-2\mathbb{C}-\eta_1) \\ & + \frac{\pi_0 u_2-\pi_1^2}{K'}\sin(\lambda t-2\omega t-\eta_2 + \frac{\pi_0 u_3-\pi_1^3}{K'}\sin(\lambda t-2\omega t-2\mathbb{C}-\eta_3) + \frac{\pi_0 u_4-\pi_1^4}{K'}\sin(\lambda t-2\omega t+2\mathbb{C}-\eta_4) \\ q = {} & \frac{\pi_0(1+v_0)}{K'}\cos\lambda t + \frac{\pi_0 v_1+2\pi_1'}{K'}\cos(\lambda t+2\mathbb{C}+\eta_1 +) \frac{\pi_0 v_1+2\pi_1''}{K'}\cos(\lambda t-2\mathbb{C}-\eta_1) \\ & - \frac{\pi_0 u_3+\pi_1^3}{K'}\cos(\lambda t-2\omega t-\eta_2) - \frac{\pi_0 u_3-\pi_1^3}{K'}\cos(\lambda t-2\omega t-2\mathbb{C}-\eta_3) - \frac{\pi_0 u_4-\pi_1^4}{K'}\cos(\lambda t-2\omega t+2\mathbb{C}-\eta_4) \end{aligned}\right\} 21a)$$

XII.

Es ist nun bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varepsilon'}{dt} &= -p\cos\Phi+q\sin\Phi \\ \sin\varepsilon'\frac{d\psi}{dt} &= -p\sin\Phi-q\cos\Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} &= r-\cos\varepsilon'\frac{d\Psi}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Aus der letzten Gleichung folgt mit Vernachlässigung der sehr kleinen Grösse $\cos\varepsilon'\dfrac{d\Psi}{dt}$

$$\Phi = rt = n_0 t = \omega t$$

so dass also

$$\left.\begin{aligned} L &= -l_1 \cos n_0 t - l_2 \cos(n_0 t + 2\mathbb{C} - 2\Psi) + l_3 \cos(n_0 t - 2\mathbb{C} + 2\Psi) \\ M &= l_1 \sin n_0 t + l_2 \sin(n_0 t + 2\mathbb{C} - 2\Psi) - l_3 \sin(n_0 t - 2\mathbb{C} + 2\Psi) \end{aligned}\right\} \qquad 18c)$$

und der Reihe nach in den obigen Ausdrücken für p und q

für

$$\begin{array}{cccc} l & l_1 & l_2 & -l_3 \\ \lambda t & n_0 t & n_0 t + 2\mathbb{C} & n_0 t - 2\mathbb{C} \end{array}$$

in den letzteren Fällen wieder mit Vernachlässigung von Ψ zu substituiren ist.

Wir berechnen jedoch vorerst aus 21 a) und 22),

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{\pi_0(1+v_0)}{K'} \sin(\lambda t - n_0 t) + \frac{\pi_0 v_1 + 2\pi'_1}{K'} \sin(\lambda t - n_0 t + 2\mathbb{C} + \eta_1) + \frac{\pi_0 v_1 + 2\pi''_1}{K'} \sin(\lambda t - n_0 t - 2\mathbb{C} - \eta_1) \\ &\quad + \frac{\pi_0 u_2 - \pi_1^2}{K'} \sin(\lambda t - n_0 t - \eta_2) + \frac{\pi_0 u_3 - \pi_1^3}{K'} \sin(\lambda t - n_0 t - 2\mathbb{C} - \eta_3) + \frac{\pi_0 u_4 - \pi_1^4}{K'} \sin(\lambda t - n_0 t + 2\mathbb{C} - \eta_4 \\ \sin\varepsilon' \frac{d\Psi}{dt} &= -\frac{\pi_0(1+v_0)}{K'} \cos(\lambda t - n_0 t) - \frac{\pi_0 v_1 + 2\pi'_1}{K'} \cos(at - n_0 t + 2\mathbb{C} + \eta_1) - \frac{\pi_0 v_1 + 2\pi''_1}{K'} \cos(\lambda t - n_0 t + 2\mathbb{C} - \eta_4) \\ &\quad + \frac{\pi_0 u_2 - \pi_1^2}{K'} \cos(\lambda t - n_0 t - \eta_2) + \frac{\pi_0 u_3 - \pi_1^3}{K'} \cos(at - n_0 t - 2\mathbb{C} - \eta_3) + \frac{\pi_0 u_4 - \pi_1^4}{K'} \cos(\lambda t - n_0 t + 2\mathbb{C} - \eta_4) \end{aligned}\right\} 23)$$

und wollen zunächst das erste und auch grösste Glied bezüglich seines Einflusses auf die Präcession und Variation der Schiefe der Ekliptik untersuchen.

Dasselbe gibt

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varepsilon'}{dt} &= -\frac{\pi_0(1+v_0)}{K'}\sin(\lambda t - n_0 t)\\ \sin\varepsilon'\frac{d\Psi}{dt} &= -\frac{\pi_0(1+v_0)}{K'}\cos(\lambda t - n_0 t)\end{aligned}\right\} \qquad 23\,a)$$

und für π_0 seinen Werth aus 21′, sowie für l und λ der Reihe nach ihre Werthe substituirt, schliesslich:

$$\left.\begin{aligned}\sin\varepsilon'\frac{d\Psi}{dt} &= \frac{l_1(1+v_0)}{K'n_0(1+u_0)} + \left[\frac{l_2(1+v_0)}{K'n_0\left(1+u_0+2\frac{\mathbb{C}'}{n_0}\right)} - \frac{l_3(1+v_0)}{K'n_0\left(1+u_0-2\frac{\mathbb{C}'}{n_0}\right)}\right]\cos 2\mathbb{C}\\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= \left[\frac{l_2(1+v_0)}{K'n_0\left(1+u_0+2\frac{\mathbb{C}'}{n_0}\right)} + \frac{l_3(1+v_0)}{K'n_0\left(1+u_0-2\frac{\mathbb{C}'}{n_0}\right)}\right]\sin 2\mathbb{C}\end{aligned}\right\} \qquad 24)$$

Um nun einigermassen einen Einblick in die Grösse dieser für die Präcession und die Variation der Schiefe gefundenen Ausdrücke zu gewinnen, sollen dieselben directe mit den Werthen verglichen werden, die sich unter gleichen Annahmen für sie für den Fall des starren Erdkörpers ergeben. Die Differentialgleichungen lauten für diesen Fall bekanntlich

$$A\frac{dp}{dt} + (C-A)n_0 q = L$$

$$A\frac{dq}{dt} - (C-A)n_0 p = M$$

und haben hierin L und M dieselben Werthe wie oben; ferner ist $A = K'\left(1+\frac{\varkappa n_0^2}{6}\right)$ $C = K'\left(1+\frac{\varkappa n_0^2}{3}\right)$ zu setzen.

Die Integrale dieser Differentialgleichungen sind

$$p = -p_0 \sin\lambda t \qquad q = -p_0 \sin\lambda t$$

worin $p_0 = \frac{l}{K'(\lambda+\eta n_0)}$, wenn $\eta = \frac{1}{3}\varkappa n_0^2$ ist.

Daraus ergibt sich

$$\sin\varepsilon' \frac{d\Psi'}{dt} = \frac{l_1}{K' n_0 (1+\eta)} + \left[\frac{l_2}{K' n_0\left(1+\eta+\frac{2\mathbb{C}'}{n_0}\right)} - \frac{l_3}{K' n_0\left(1+\eta-\frac{2\mathbb{C}'}{n_0}\right)}\right]\cos 2\mathbb{C}$$

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \left[\frac{l_2}{K' n_0\left(1+\eta+2\frac{\mathbb{C}'}{n_0}\right)} + \frac{l_3}{K' n_0\left(1+\eta-2\frac{\mathbb{C}'}{n_0}\right)}\right]\sin 2\mathbb{C}$$

und die Vergleichung beider zeigt, dass die Präcessionsconstanten des flüssigen Sphäroids in dem Verhältnisse von

$$\frac{1+u_0}{(1+\eta)(1+v_0)}$$

zu vergrössern sind, um diejenigen eines starren zu erhalten. Es ist aber

$$u_0 = \eta + \frac{K_1''}{K'}(\eta - 3\alpha_0) \qquad v_0 = \frac{1}{3}\eta - \frac{K_1'}{K'} + \frac{K_1''}{K'}\left(\frac{1}{3}\eta - \alpha_0\right)$$

und daher mit den schon oben benutzten Werthen für $\varkappa$, τ u. s. w. zu denen wir noch als näherungsweise richtig

$$\frac{K_1'}{K} = \frac{K_1''}{K'} = \frac{1}{4540}$$

hinzufügen,

$$u_0 = \frac{1}{299 \cdot 97}$$

also von

$$\eta = \frac{1}{299 \cdot 15}$$

nur wenig verschieden, so dass $\frac{1+u_0}{1+\eta} = 1$ angenommen werden kann, ferner

$$v_0 = \frac{1}{1118 \cdot 21}$$

mithin

$$\frac{1}{1+v_0} = 1 - \frac{1}{1118 \cdot 21}$$

d. h. die Präcessionsconstanten eines flüssigen Erdsphäroids würden sich von denen eines vollkommen starren um den $\frac{1}{1118 \cdot 21}$ Betrag der letzteren unterscheiden.

Dies stimmt mit einem Satze von Thomson[1] überein, welcher findet, dass die Präcession sowohl, wie die Variation der Schiefe der Ekliptik kleiner ausfallen, wenn Deformationen auf der Erde vorkommen, als wenn dieselbe absolut starr ist.

XIII.

Zur Entwicklung der Glieder zweiter Ordnung in den Ausdrücken für $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ und $\sin\varepsilon' \frac{d\Psi}{dt}$ sollen die Coëfficienten zunächst Kürze halber mit

$$h_1 \quad h_{\mathrm{I}} \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4$$

bezeichnet werden, so dass

---

[1] Thomson Tait. Theor. Phys.

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{d\varepsilon'}{dt} = {} & h_1 \sin(\lambda t - n_1 t + 2\mathbb{C} + \eta_1) + h_I \sin(\lambda l - n_0 t - 2\mathbb{C} - \eta_1) \\
& + h_2 \sin(\lambda t - n_0 t - \eta_2) + h_3 \sin(\lambda t - n_0 t - 2\mathbb{C} - \eta_3) \\
& + h_4 \sin(\lambda t - n_0 t + 2\mathbb{C} - \eta_4) \\
\sin\varepsilon' \frac{d\Psi}{dt} = {} & - h_1 \cos(\lambda t - n_0 t + 2\mathbb{C} + \eta_1) - h_I \cos(\lambda t - n_0 t - 2\mathbb{C} - \eta_1) \\
& + h_2 \cos(\lambda t - n_0 t - \eta_2) + h_3 \cos(\lambda t - n_0 t - 2\mathbb{C} - \eta_3) \\
& + h_4 \cos(\lambda t - n_0 t + 2\mathbb{C} - \eta_4)
\end{aligned}\right\} \quad 23b)$$

Jeder der Coëfficienten h enthält die Grösse l als Factor. Substituiren wir daher

für l der Reihe nach die Werthe	l_1	l_2	$-l_3$
sowie für λt	$n_0 t$	$n_0 t + 2\mathbb{C}$	$n_0 t - 2\mathbb{C}$

so sollen die diesen einzelnen Substitutionen entsprechenden Werthe von h mit

$$h' \quad h'' \quad h'''$$

bezeichnet werden und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{d\varepsilon'}{dt} = {} & (h_1' - h_I')\sin(2\mathbb{C} + \eta_1) - h_3' \sin(2\mathbb{C} + \eta_3) \\
& + h_4' \sin(2\mathbb{C} - \eta_4) + h_2'' \sin(2\mathbb{C} - \eta_2) - h_2''' \sin(2\mathbb{C} + \eta_2) \\
& + (h_1'' - h_I'')\sin(4\mathbb{C} + \eta_1) + h_4'' \sin(4\mathbb{C} + \eta_4) + h_3''' \sin 2\mathbb{C} + \eta_3) \\
& - h_2' \sin\eta_2 - h_I'' \sin\eta_1 - h_3'' \sin\eta_3 + h_1''' \sin\eta_1 - h_4''' \sin\eta_4 \\
\sin\varepsilon' \frac{d\Psi}{dt} = {} & -(h_1' + h_I') \cos(2\mathbb{C} + \eta_1) + h_3' \cos 2\mathbb{C} + \eta_3) \\
& + h_4' \cos(2\mathbb{C} - \eta_4) - h_2'' \cos(2\mathbb{C} - \eta_2) - h_2''' \cos(2\mathbb{C} + \eta_2) \\
& - (h_1'' + h_I'')\cos(4\mathbb{C} + \eta_1) + h_4'' \cos(4\mathbb{C} + \eta_4) + h_3''' \cos(4\mathbb{C} + \eta_3) \\
& - h_2' \cos\eta_2 - h_I'' \cos\eta_1 + h_3'' \cos\eta_3 - h_1''' \sin\eta_1 + h_4''' \cos\eta_4
\end{aligned}\right\} \quad 23a)$$

Hier mag uns der Umstand nur interessiren, dass auch in $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ constante Glieder vorkommen, die ausdrücken, dass in dem allgemeinen Falle, wie wir ihn behandeln, auch eine säculare Variation der Schiefe der Ecliptik vorhanden ist. Dieselbe ist, wie wir sehen, von den Winkelgrössen η abhängig und daher gleich Null, wenn die $\eta = 0$ sind.

Was nun die Grösse dieser säcularen Variation der Schiefe anlangt, so finden wir zunächst für die Coëfficienten h die Werthe

$$h_2' = -\frac{l_1 u_2 u_0}{n_0 K'(1+u_0)^2} \qquad h_1'' = \frac{l_2(u_1 - v_1 - u_0 v_1}{n_0 K'(1+u_0)(1+u_0+\frac{2\mathbb{C}'}{n_0})}$$

$$h_3'' = -\frac{l_2 u_3 u_0}{n_0 K'(1+u_0)(1+u_0+\frac{2\mathbb{C}'}{n_0})} \quad h_1''' = -\frac{l_3(u_1 - v_1 - u_0 v_1)}{n_0 K'(1+u_0)(1+u^0 - \frac{2\mathbb{C}'}{n_0})}$$

$$h_4''' = \frac{l_3 u_4 u_0}{n_0 K'(1+u_0)(1+u_0 - \frac{2\mathbb{C}'}{n_0})}$$

und damit die Summe dieser constanten Glieder, wenn wir wieder aus demselben Grunde wie oben pag. 33 $\eta_1 = \eta_2 = \ldots \eta_4$ nehmen,

$$S = \frac{u_0}{n_0 K'(1+u_0)} \left[\frac{l_1 u_2}{1+u_0} + \frac{l_2(v_1+u_3)}{1+u_0+\frac{2\mathbb{C}'}{n_0})} - \frac{l_3(u_4 - v_1)}{1+u_0 - \frac{2\mathbb{C}'}{n_0})}\right]$$

$$- \frac{u_1 - v_1}{n_0 K'(1+u_0)} \left[\frac{l_2}{1+u_0+\frac{2\mathbb{C}'}{n_0}} + \frac{l_3}{1+u_0 - \frac{2\mathbb{C}'}{n_0}}\right]$$

oder, für die einzelnen Grössen ihre Werthe substituirt

$$S = {}^1/_4 n_0 \tau^2 \varkappa^2 \frac{K_1''}{K'} \frac{u_0 \sin\varepsilon'}{1+u_0} \left[\frac{\sin^2\varepsilon' \cos\varepsilon'}{1+u_0} + \frac{2(1-\cos\varepsilon')_3}{1+u_0+\frac{2\mathbb{C}'}{n_0}} - \frac{2(1+\cos\varepsilon')^3}{1+u_0 - \frac{2\mathbb{C}'}{n_0}}\right.$$

$$- n_0 \tau^2 \varkappa^2 \frac{K''}{K'} \frac{\sin^3\varepsilon'}{1+u_0} \left[\frac{1-\cos\varepsilon'}{1+u_0+2\frac{\mathbb{C}'}{n_0}} + \frac{1+\cos\varepsilon'}{1+u_0 - \frac{2\mathbb{C}'}{n_0}}\right]$$

woraus mit den obigen Zahlenwerthen

$$S = -\frac{0''106}{10^7} \text{ in einem Jahrhundert,}$$

also
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = + \frac{0''106}{10^7} \sin\eta$$

folgt.

Diese Grösse ist, wie man sieht, verschwindend und daher können auch alle jene Glieder, welche wie diese aus den bei der Integration der Differentialgleichungen für π und χ erhaltenen Grössen zweiter Ordnung entstehen, d. i. jene, die mit den mit h bezeichneten Coëfficienten multiplicirt erscheinen, vernachlässigt werden.

XIV.

Dennoch sind hiemit noch nicht alle Glieder angeführt, die irgendwie auf die Präcession und Variation der Schiefe Einfluss nehmen können; speciell sind noch in den in 18 d) für die Grössen L und M aufgestellten Ausdrücken bisher einige Glieder, nämlich

$$L' = K_1''\tau(s_2 - s_2') + \frac{K_1''}{k}[s_2(s_5' - s_0') - s_2'(s_5 - s_0) + s_3's_4 - s_3s_4']$$

$$M' = -K_1''\tau(s_3 - s_3') + \frac{K_1''}{k}[s_3(s_5' - s_0') - s_3'(s_5 - s_0) + s_4's_2 - s_2 s$$

unberücksichtigt geblieben. Substituiren wir in dieselben für die Coëfficienten s und s' ihre Werthe aus s und s', so werden wir finden, dass sich diese beiden Ausdrücke in folgender Form darstellen lassen,

$$L' = K_1''\tau . A_i \cos(n_0 t + \mu_i) + \frac{K_1''}{\varkappa} A_i' \cos(\tfrac{1}{2}n_0 t + \mu_i')$$

$$M' = -K_1''\tau A_i \sin(n_0 t + \mu_i) - \frac{K_1''}{\varkappa} A_i' \sin(\tfrac{1}{2}n_0 t + \mu_i')$$

worin die A_i blos Functionen von ε' sind, die Grössen μ_i aber der Reihe nach einen der Werthe

$$\mu + 2☾ + \eta \text{ und } -2☾ + \eta$$

bezeichnen. Da diese Grössen schon an sich klein sind, so wollen wir bei der Integration der Differentialgleichungen für π und χ blos die ersten Glieder mitnehmen, welche dort

$$\pi_0 \sin\lambda t \quad \pi_0 \cos\lambda t$$

lauteten, und finden

$$\pi = -\frac{K''_1 \tau A_i \sin(n_0 t + \mu_i)}{n_0(1 + \mu_0 + \frac{1}{n_0}\frac{d\mu_i}{dt})} - \frac{K''_1 A'_i \sin(\frac{1}{2} n_0 t + \mu'_i)}{\varkappa n_0(\frac{1}{2} + \mu_0 + \frac{1}{n_0}\frac{d\mu'_i}{dt})}$$

$$\chi = -\frac{K''_1 \tau A_i \cos(n_0 t + \mu_i)}{n_0(1 + u_0 + \frac{1}{n_0}\frac{d\mu_i}{dt})} - \frac{K''_1 A'_i \sin(\frac{1}{2} n_0 t + \mu'_i)}{\varkappa n_0(\frac{1}{2} + u_0 + \frac{1}{n_0}\frac{d\mu'_i}{dt})}$$

Hieraus folgt, da wir näherungsweise $p = \frac{\pi}{K'}$ $q = \frac{\chi}{K'}$ setzen können, directe

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{K''_1 \tau A_i \sin\mu_i}{K' n_0(1 + u_0 + \frac{1}{u_0}\frac{d\mu_i}{dt})} - \frac{K''_1 A'_i \sin(\frac{1}{2} n_0 t - \mu'_i)}{K' \varkappa n_0(\frac{1}{2} + u_0 + \frac{1}{n_0}\frac{d\mu'_i}{dt})}$$

$$\sin\varepsilon' \frac{d\psi}{dt} = \frac{K''_1 \tau A_i \cos\mu_i}{K' n_0(1 + u_0 + \frac{1}{n_0}\frac{d\mu_i}{dt})} + \frac{K''_1 A_i \cos(\frac{1}{2} n_0 t - \mu'_i)}{K' \varkappa n_0(\frac{1}{2} + u_0 + \frac{1}{n_0}\frac{d\mu'_i}{dt})}.$$

Constante Glieder in $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ können nur aus dem ersten Ausdrucke entstehen; wir entwickeln daher denselben vollständig und erhalten:

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{K''_1 \tau}{K' n_0} \frac{\sqrt{a_5^2 + \alpha_5^2 - 2a_5 \alpha_5 \cos\eta_5} \,.\, \sin\eta_5}{1 + u_0} + \frac{\sqrt{a_6^2 + \alpha_6^2 - 2a_6 \alpha_6 \cos\eta_6} \,.\, \sin\eta_6}{1 + u_0 + 2ℭ'} - \frac{\sqrt{a_7^2 + \alpha_7^2 - 2a_7 \alpha_7 \cos\eta_7} \,.\, \sin\eta_7}{1 + u_0 - 2ℭ'} \Big)$$

oder wenn wir, um einen Nährungswerth zu rechnen

$$a_5 = \alpha_5 \quad a_6 = \alpha_6 \quad a_7 = \alpha_7 \quad \eta_5 = \eta_6 = \eta_7$$

annehmen, und für die a ihre Werthe substituiren:

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{2K''_1 \varkappa \tau^2}{K' n_0} \sin\varepsilon' \left[\frac{\cos\varepsilon'}{1 + u_0} + \frac{1 - \cos\varepsilon}{1 + u_0 + 2ℭ'} - \frac{1 + \cos\varepsilon}{1 + u_0 - 2ℭ'}\right] \cos\tfrac{1}{2}\eta \sin\eta.$$

Mit den oben angesetzten Zahlen ergibt sich hieraus

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = -0''000644 \cos\tfrac{1}{2}\eta \sin\eta$$

für ein Jahrhundert.

Aus allen diesen Resultaten ergibt sich nun in Kürze:

1. Die Präcessionsconstanten eines flüssigen Sphäroids unterscheiden sich von denjenigen eines starren, nur um fast unmerkliche Grössen; insbesondere ist auch bei jenem die Schiefe der Ekliptik constant, d. h. blos periodisch veränderlich; und nur die Rotationsgeschwindigkeit ist nicht mehr wie bei dem starren Körper constant, sondern ergibt sich als einer periodischen Variation unterworfen, deren Periode von dem Umlauf des störenden Körpers abhängt.
2. Grössere Unterschiede ergeben sich erst, wenn man annimmt, dass die auf dem flüssigen Sphäroid stattfindenden periodischen Bewegungen den theoretisch für sie abgeleiteten Gesetzen nicht gehorchen, sondern jene Anomalien zeigen, wie solche beispielsweise die Ebbe- und Flutbewegungen auf der Erde aufweisen. Es ist dann die Rotationsgeschwindigkeit eines derartigen Sphäroids auch noch einer säcularen Variation unterworfen und nicht blos einer periodischen, und ebenso auch die Schiefe der Ekliptik.

Erwägt man, dass die letztere Annahme den auf der Erdoberfläche bestehenden Verhältnissen mehr entspricht als die erstere, die die Erde als absolut flüssig voraussetzt, so kann man hieraus schliessen, dass diese zwei säcularen Variationen in der Rotationsgeschwindigkeit und der Schiefe der Ekliptik — auch bei der Erde thatsächlich vorhanden sind und dass die erstere speciell sogar einen merklichen Einfluss hat, indem sie eine scheinbare säculare Acceleration des Mondes in seiner Bahn im Maximalbetrage von $2''36$ in einem Jahrhunderte verursacht. Wird aber dies als richtig anerkannt, dann ist hiemit gleichzeitig ausgesprochen, dass eine vollständige Theorie der Rotations- und Präcessionsbewegung der Erde, die allen auf der Erde gegebenen Verhältnissen Rechnung tragen will, im innigsten Zusammenhange steht mit der Theorie der Ebbe- und Fluterscheinungen, derart dass eine Erklärung der Unregelmässigkeiten in diesem Erscheinungsgebiete auch einen Fortschritt in unserer Kenntniss von den Störungen der Rotationsbewegung der Erde bedingt.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.