

## 2. Automatisch registrierbare Methode zur mechanischen Bodenanalyse.

Von

Sven Odén.

### Inhalt.

1. *Einleitung.*
2. *Über die Bewegung kleiner Teilchen in Flüssigkeiten. — Der Äquivalentradius.*
3. *Theoretische Schlussfolgerungen für die Sedimentation in ungleichkörnigen Systemen.*
4. *Die experimentelle Anordnung. — Die Fallkurven.*
5. *Die experimentelle Prüfung der theoretischen Schlussfolgerungen.*
6. *Mathematische Analyse der Fallkurve.*
7. *Die Berechnung der Verteilungskurve aus der Fallkurve.*
8. *Ausdehnung der Untersuchungen auf die Sedimentation in zäheren Flüssigkeiten.*

### 1.

#### Einleitung.

Die mechanische Bodenanalyse gehört zu den wenig erfreulichen Arbeitsmethoden der Agrikulturchemie. Die Methoden von NÖBEL, SCHÖNE, HILGARD, KOPECKÝ u. a., welche sich des strömenden Wassers zur Separation der Teilchen bedienen, sind zwar ziemlich vervollkommenet und vollziehen sich von selbst, gestatten aber nur einigermaßen grobe Teilchen etwa bis zu 10  $\mu$  zu trennen. Will man nach der einfacheren Schlamm-

analyse eine sorgfältig durchgeführte Trennung von Teilchen bis zu etwa  $0,5 \mu$  zustande bringen, so erfordert dies nicht nur grosse Pünktlichkeit und Achtsamkeit während der mehrere Wochen dauernden *Arbeitszeit*, sondern auch günstige Temperaturbedingungen im Arbeitszimmer, um bei der Wiederholung der Analyse dasselbe Resultat zu erhalten.

Es sind nämlich sehr ernste Bedenken gegen diese Methode, so wie sie wohl oft ausgeführt wird, vorhanden.

Erstens ist die Geschwindigkeit, womit kleine Teilchen in einer Flüssigkeit sinken, annähernd der inneren Reibung umgekehrt proportional. Nun ändert sich aber die innere Reibung des Wassers von  $25^\circ$  bis  $10^\circ$  um nicht weniger als 46 %, und es müssen Analysen, welche in Ägypten oder Skandinavien, im Winter oder Sommer somit bei wechselnder Laboratoriumstemperatur ausgeführt sind, ganz verschieden ausfallen.

Zweitens muss man, wenn es nicht möglich ist, bei konstanter Temperatur zu arbeiten, besonders auf die *gleichmässige* Erwärmung oder Abkühlung der Schlammzylinder achten, da sonst Konvektionsströmungen die Resultate ganz verrücken. Ist die eine Wand des Zimmers beträchtlich wärmer als die andere, so kann man, wie ich unten ausführlicher besprechen werde, das unfehlbare Auftreten solcher Strömungen wahrnehmen.

Das Ziel, welches die mechanische Bodenanalyse zu erreichen erstrebt, ist ja die Charakterisierung der verschiedenen Bodenablagerungen durch die Grösse der vorhandenen Körner. Indem man dies, wie üblich, dadurch zu realisieren versucht, dass man eine Probe in gewisse Körnergruppen zerlegt und diese Gruppen isoliert und wägt, muss man sich notwendigerweise auf eine kleine Anzahl von Körnergruppen beschränken. Die Charakterisierung wird daher auch im glücklichsten Falle ziemlich unvollständig, sollte aber, wie in der vorigen Arbeit hervorgehoben wurde, lieber graphisch durch eine Kurve als durch abstrakte Zahlenangaben veranschaulicht werden.

Von dem Gedanken ausgehend, dass es eine unnötige Arbeit ist, sämtliche Fraktionen *zu isolieren* und zu wägen, habe ich mich seit Herbst 1913 mit der Ausarbeitung einer neuen Methode zur mechanischen Bodenanalyse beschäftigt. Über die allgemeinen Prinzipien sowie über die anfangs mehr primitive Versuchsanordnung habe ich schon anderswo vorläufige Mitteilungen gemacht.<sup>1</sup> Indessen war der erste Apparat mit mehreren Fehlern und Unzulänglichkeiten behaftet. Da ich seit ungefähr anderthalb Jahren in der Lage gewesen bin, die ganze Anordnung in allen Einzelheiten mehrmals umzuarbeiten und selbsttätig registrierend auszuführen, und besonders da diese Arbeiten jetzt einen gewissen Abschluss gefunden haben, soll hier die erste ausführlichere Besprechung erfolgen.

Ich habe es ferner für notwendig erachtet, nochmals die Richtigkeit der theoretischen Erwägungen an einem anderen Material als früher zu

<sup>1</sup> Schwedische Patentschrift N:o 41184 (vom 27. März 1915). — Intern. Mitt. f. Bodenkunde 5, 257—312 (1915). — Koll.-Zeitschr. 18, 33—48 (1916).

prüfen. Es war mir damals, als ich damit begann, nicht bekannt, dass gewisse meiner Schlussfolgerungen schon früher von TH. SCHLOESING PÈRE<sup>1</sup> sowohl theoretisch als auch experimentell nachgewiesen waren und zwar auf einem ganz anderen Wege als dem von mir eingeschlagenen.

Ich hielt es aber für wichtig, nochmals genau zu untersuchen, innerhalb welcher Grenzen man die Sätze von der Proportionalität zwischen der inversen Fallhöhe und Sedimentationsgeschwindigkeit und der absoluten Teilchenmenge als zulässig betrachten kann, sowie auch die Richtigkeit derselben an noch feinkörnigerem Material als dem früher verwendeten nachzuweisen.

Dagegen waren bei sämtlichen Versuchen die Proben so gewählt, dass eine Zusammenballung (Koagulation) der Teilchen *nicht* stattfand.

Auf die Vorbehandlung der Proben zur mechanischen Bodenanalyse sowie über die Umgehung der bei kalkhaltigen Tonen auftretenden Schwierigkeiten wird eine folgende Abhandlung Näheres bringen. Sämtliche in *vorliegender* Arbeit mitgeteilten Messungen sind mit dem automatisch registrierenden Apparat ausgeführt worden. Ich mache hier darauf aufmerksam, weil kleinere Verschiedenheiten mit früher publizierten Arbeiten vorliegen. Dies betrifft aber nur Details und ist auf Ungenauigkeiten und Störungen bei dem alten Apparat zurückzuführen.

Beim Ausarbeiten dieser Methode wurde ich von mancher Seite, sowohl von Vorgesetzten als auch von jüngeren Fachgenossen, in vielerlei Hinsicht unterstützt. Das Gelingen und das Verdienst, die automatische Zeitregistrierung ausgearbeitet und den ganzen Apparat nach meinen Plänen gebaut zu haben, gebührt in erster Linie dem Universitätsmechaniker Herrn GUSTAF ROSE. Den *Universitätsbehörden*, welche mir gestatteten, die Ausführung der Arbeiten statt Vorlesungen als Stipendiatdienstleistung anzurechnen, sowie der *Königl. Regierung* und der *Geologischen Landesanstalt*, welche mich ökonomisch unterstützten, bin ich gleichfalls zu grossem Dank verpflichtet.

Diesen sowie allen den hier Nichtgenannten möchte ich an dieser Stelle meinen ergebensten Dank aussprechen.

## 2.

### Über die Bewegung kleiner Teilchen in Flüssigkeiten (STOKES' Gesetz) und der Äquivalentradius.

Wenn ein kugelförmiges Teilchen sich in einer Flüssigkeit befindet und infolge des Einflusses der Schwerkraft zu sinken beginnt, so wurde

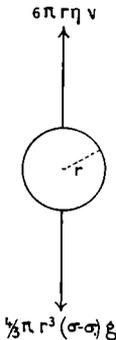
<sup>1</sup> Compt. rend. de l'Acad. des Sciences 136, 1608—1613, 137, 369—374 (1904).  
*Bull. of Geol. Vol. XVI.*

für den Reibungswiderstand seitens der Flüssigkeit von C. G. STOKES<sup>1</sup> (1845) theoretisch folgende Gleichung aufgestellt:

$$w = 6 \pi r \eta v, \quad (1)$$

wo  $v$  die Geschwindigkeit des Teilchens,  
 $w$  den Widerstand der Flüssigkeit,  
 $\eta$  die innere Reibung der Flüssigkeit,  
 $r$  den Teilchenradius bedeutet.

Hat das Teilchen seine konstante Geschwindigkeit erreicht, so muss die Gravitationskraft gleich dem Reibungswiderstand sein, somit:



$$6 \pi r \eta v = \frac{4}{3} \pi r^3 (\sigma - \sigma_1) g, \quad (2)$$

wo  $g$  die Gravitationskonstante,  
 $\sigma$  das spezifische Gewicht des Teilchens,  
 $\sigma_1$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet.

Die Gleichung (2) kann auch geschrieben werden

$$v = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\sigma - \sigma_1}{\eta}. \quad (3)$$

oder

$$v = Cr^2. \quad (3a)$$

Wenn wir nun die Geschwindigkeit  $v$  in irgend einer Weise messen können, so lässt sich hieraus der Teilchenradius berechnen.

Diese rein theoretische Gleichung ist unter der Voraussetzung aufgestellt, dass in der allgemeinen Bewegungsgleichung die Glieder höherer Ordnung unberücksichtigt gelassen werden können.<sup>2</sup>

Die äusseren Bedingungen, die diese Vernachlässigungen erlauben, sind:

1. dass die Teilchen (Moleküle) der Flüssigkeit im Vergleich zu den bewegten Teilchen klein sind;

<sup>1</sup> C. G. STOKES, Cambr. Phil. Trans. 8, 287 (1845); 9, 8 (1851); Math. and Physical Papers 7, 75.

<sup>2</sup> Vgl. H. LAMB, Lehrbuch der Hydrodynamik, Deutsche Ausgabe (Leipzig und Berlin 1907), 682 ff.

2. dass die Flüssigkeit im Verhältnis zu den sedimentierenden Teilchen von unendlicher Ausdehnung ist;
3. dass die Teilchen starr und glatt sind;
4. dass keine Gleitung zwischen Teilchen und Flüssigkeit stattfindet;
5. dass die Geschwindigkeit klein ist oder m. a. W., dass der Teilchenradius nicht allzu gross ist.

Der kritische Radius, oberhalb dessen die Geschwindigkeit grösser ist als entsprechend der Gleichung, wurde von H. S. ALLEN, H. D. ARNOLD<sup>1</sup> und anderen bestimmt. Er liegt z. B. für Quarzkugeln im Wasser bei 85  $\mu$ , und man kann im allgemeinen nur sagen, dass, wenn man Werte erhält, die grösser sind als der kritische Radius, somit der wirkliche Radius nicht grösser ist als der berechnete Wert.

Für zähere Flüssigkeiten liegt dieser kritische Wert entsprechend höher und ist im allgemeinen von der Geschwindigkeit des Sinkens abhängig.

Eine exaktere Ableitung der Widerstandsgleichung wurde von C. W. OSEEN gegeben, welcher auch die Verwendung der Gleichung auf grössere Geschwindigkeiten durch Heranziehung eines neuen Terms erweiterte. Nach ihm ist der Widerstand  $w$

$$w = 6\pi r \eta v \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{\sigma_1 r}{\eta} |v| \right), \quad (4)$$

wo  $|v|$  der absolute Betrag der Geschwindigkeit ist.

Was die übrigen Voraussetzungen anbetrifft, so kann natürlich nicht immer behauptet werden, dass für den Fall einer Menge Bodenteilchen in einer wässerigen Aufschwemmung dieselben erfüllt sind (mit Ausnahme vielleicht des ersten Punktes), aber die Abweichungen vom wirklichen Radius und die nach der STOKES'schen Gleichung berechneten dürften kaum so gross sein, dass sie einen wesentlichen Einfluss auf den Charakter der auf Grundlage der STOKES'schen Gleichung abgeleiteten *Verteilungskurve* ausüben, deren Ermittlung ja das Ziel der vorliegenden Arbeiten ist.

Es ist auch mehrmals von verschiedener Seite darauf hingewiesen worden, dass infolge des Umstandes, dass wir es in einer wässerigen Bodenaufschwemmung mit Teilchen von sehr *verschiedener Form* zu tun haben,

<sup>1</sup> H. S. ALLEN, The Motion of a sphere in a Viscous Fluid. Phil. Magaz. (5) 50, 323—338 (1900). H. D. ARNOLD, Limitations imposed by slip and Inertia Terms upon Stokes' Law for the Motion of a Sphere through Liquids. Philos. Magaz. (6) 22, 755—775 (1911). Siehe auch IVAR NORDLUND: Ueber die Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes usw. Arkiv f. Matematik etc. utg. af K. Svenska Vet.-Akad. i Stockholm 9, Nr. 13 (1913). C. W. OSEEN, Ueber die Stokes'sche Formel usw. Arkiv f. Matematik etc. utg. af K. Svenska Vet.-Akad. i Stockholm 6, Nr. 29 (1910); ferner auch: C. W. OSEEN, Ueber den Gültigkeitsbereich der Stokes'schen Widerstandsformel. Ibidem 9, Nr. 16 (1913).

die Sedimentationsgeschwindigkeit unmöglich zur Berechnung der Teilchendimensionen verwendet werden kann.

Es ist dies alles ganz richtig, wenn es sich um die genaue Bestimmung der Dimensionen der Teilchen handelt; aber man vergisst, dass die Anforderungen in bezug auf die Genauigkeit beim Feststellen der Teilchengröße der Bodenbestandteile ganz andere sind, als wenn wir es mit der strengen Gültigkeit der Gleichung physikalisch genommen zu tun haben.

Ein Fehler in der Größenbestimmung von 5—10 % ist, wenn es sich um die Bestimmung der Dimensionen der Bodenkörner handelt, ziemlich belanglos, da z. B. die Teilchengrößen in den jetzt gebräuchlichen internationalen Gruppen 1000 % weit von einander abliegen (2 mm bis 0,2 mm, 0,2 mm bis 0,02 mm usw.).<sup>1</sup>

Wenn es sich um Körner von sehr verschiedener Gestalt handelt, ist es übrigens schwer festzustellen, was wir unter Dimensionen derselben verstehen wollen, und es empfiehlt sich, den Begriff des *Äquivalentradius* des Teilchens einzuführen.<sup>2</sup> Denken wir uns, dass sich gleichzeitig mit dem betreffenden Teilchen eine Kugel vom selben Material durch die Flüssigkeit bewegt und die Kugel derart beschaffen ist, dass ihre Geschwindigkeit gleich der des Teilchens in der betreffenden Fallage ist, so können wir durch die Angabe des Radius dieser gedachten Kugel eine Vorstellung von der Größe des Teilchens bekommen. Die Relation zwischen den wirklichen Dimensionen des Teilchens und dem Äquivalentradius dürfte nur für den Fall eines Rotationsellipsoids hydrodynamisch abgeleitet sein.<sup>3</sup> Es ist, wenn die Masse der Kugel und die des Ellipsoids gleich sind, je nachdem die Bewegung parallel der *a*- oder der *b*-Achse verläuft:

$$R_a = \frac{a}{b} \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + \left( 3 - 2 \frac{a^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \ln \left( \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \right)$$

$$R_b = 2 \frac{a}{b} \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + 2 \left( 2 \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \ln \left( \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \right),$$

wo  $R_a$  den Äquivalentradius für die Bewegung parallel der *a*-Achse,  $R_b$  für die Bewegung parallel der *b*-Achse und *a* und *b* die Achsen ( $a > b$ ) des Rotationsellipsoids bedeuten.

Wir sehen somit, dass der Äquivalentradius je nach der Fallage verschieden ist, was sich besonders bei scheiben- und stabförmigen Teilchen sehr bemerkbar machen kann.

<sup>1</sup> Intern. Mitt. f. Bodenkunde 4, 1—32 (1914).

<sup>2</sup> »Teilchen vom gleichen Äquivalentradius« entsprechen etwa E. RAMANN'S »Körnern gleichen hydraulischen Wertes«. Vgl. RAMANN'S Bodenkunde (3. Aufl., Berlin 1911), S. 823, sowie Bull. of the geological Inst. Upsala 25, 183 (1916).

<sup>3</sup> Vgl. THE SVEDBERG: Ueber die Gestalt der Moleküle. II. Arkiv f. Kemi etc., utg. af K. Svenska Vet. Akad. i Stockholm 5, Nr. 11 (1914).

Man wäre vielleicht aus diesem Grunde geneigt, jede Verwendung von Schlämmanalysen für unzulänglich zu erklären.<sup>1</sup> Wäre die Bodenprobe so klein, dass sie nur aus wenigen Teilchen bestände, oder wäre die Fallhöhe sehr klein, so wäre dies auch richtig. Hier aber liegt die Sache anders, denn es handelt sich um eine Summation, welche sich über eine grosse Menge von Teilchen einer bestimmten Grössenordnung erstreckt, und man kann nicht den einzelnen Äquivalentradius bestimmen, sondern muss sich damit begnügen, den mittleren Äquivalentradius einer bestimmten Fraktion zu ermitteln.

Es dürfte die Wahrscheinlichkeit für die eine oder andere Fallage gleich gross sein, und da wir nicht jede einzelne Geschwindigkeit der Teilchen messen, sondern die mittlere Geschwindigkeit, so dürfte der berechnete *mittlere Äquivalentradius* der *mittleren Teilchengrösse* ziemlich gut entsprechen.

Hierzu kommt, dass bei den kleinen Teilchen die Fallage keineswegs unverändert bleibt, sondern infolge der Molekularstösse befinden sich die Teilchen in einer unregelmässigen rotatorischen Bewegung, wodurch der Widerstand gegen die Bewegung immerfort wechselt.<sup>2</sup>

Man kann diese rotatorische Bewegung und Drehungen der Teilchen, welche den bald schnelleren, bald langsameren Fall verursachen, ganz gut z. B. beim Biotit-Teilchen mikroskopisch beobachten.

Für andere Fälle, wo sich die Gestalt der Teilchen auf den Typus des Rotationsellipsoids nicht zurückführen lässt, bleibt die Relation zwischen Äquivalentradius und den wirklichen Dimensionen einstweilen unbekannt,<sup>3</sup> aber durch Angabe des Äquivalentradius eines Teilchens oder des mittleren Äquivalentradius einer annähernd gleichkörnigen Fraktion von Bodenteilchen dürfte eine Grösse definiert sein, die, wenigstens was die Grössenordnung betrifft, von den wirklichen Dimensionen der Bodenkörner nicht erheblich abweicht.

<sup>1</sup> Vgl. E. A. MITSCHERLICH: Bodenkunde (2. Aufl., Berlin 1913), S. 49 ff. Nebenbei sei bemerkt, dass die Figuren MITSCHERLICH's auf S. 52 zur Demonstration des Flüssigkeitswiderstandes unrichtig sind, da sie auf den Reibungswiderstand der Vertikalflächen keine Rücksicht nehmen.

<sup>2</sup> J. PERRIN: Le mouvement brownien de rotation. Compt. rend. de l'Acad. d. Sciences 149, 549—551 (1909). — THE SVEDBERG: Neuere Untersuchungen über die Brownsche Bewegung. Jahrb. d. Rad. u. Elektronik 10, 467—515 (1913). — Vgl. auch W. MECKLENBURG: Die experimentelle Grundlegung der Atomistik (Jena 1910).

<sup>3</sup> Betreffs der Fallgeschwindigkeit nichtsphärischer Teilchen verweise ich des Näheren auf die folgenden Arbeiten: H. LAMB, Lehrbuch der Hydrodynamik (Deutsche Ausgabe, Leipzig und Berlin, 1907), S. 658—692. — J. BOSELLI, Résistance au mouvement dans un fluide de petits corps non sphériques. Compt. rend. de l'Acad. d. Sciences 152, 133—136 (1911). — R. GANS, Wie fallen Stäbe und Scheiben in einer reibenden Flüssigkeit? Münchener Ber. 1911, S. 192. — K. PRZIBRAM, Ueber die Brown'sche Bewegung nicht kugelförmiger Teilchen, Sitzb. d. Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Klasse, Bd. 121, Abt. II a (1912).

Zur Beleuchtung des oben Gesagten und um die Anwendbarkeit der Gleichung von Stokes sowie der korrigierten Gleichung von OSEEN auf die Sedimentation zu demonstrieren, sollen in folgender Tabelle 1 die aus den Fallzeiten bei 15° von mir berechneten Äquivalentradien und die von A. ATTERBERG<sup>1</sup> bei seiner mechanischen Bodenanalyse mikroskopisch bestimmten Körnergrößen von Sand- und Tonteilchen angeführt werden.<sup>2</sup>

Tabelle 1.

Absatzzeit für 10 cm Fallhöhe nach ATTERBERG	Geschwindigkeit in cm/Sek.	Äquivalentradius berechnet nach STOKES	Äquivalentradius berechnet nach OSEEN	Die abgeschlämmten Teilchen haben nach ATTERBERG einen Radius von
5 Sek.	2	78 · 10 <sup>-4</sup> cm	101 · 10 <sup>-4</sup> cm	100 · 10 <sup>-4</sup> cm
50 »	0,2	24,8 · 10 <sup>-4</sup> »	25 · 10 <sup>-4</sup> »	30 · 10 <sup>-4</sup> »
7' 30''	22,2 · 10 <sup>-3</sup>	8,3 · 10 <sup>-4</sup> »	8,3 · 10 <sup>-4</sup> »	10 · 10 <sup>-4</sup> »
1 Stunde	27,78 · 10 <sup>-4</sup>	2,9 · 10 <sup>-4</sup> »	2,9 · 10 <sup>-4</sup> »	3 · 10 <sup>-4</sup> »
8 Stunden	3,472 · 10 <sup>-4</sup>	1,03 · 10 <sup>-4</sup> »	1,03 · 10 <sup>-4</sup> »	1 · 10 <sup>-4</sup> »
24 »	1,157 · 10 <sup>-4</sup>	597 · 10 <sup>-7</sup> »	597 · 10 <sup>-7</sup> »	—
100 »	27,78 · 10 <sup>-6</sup>	295 · 10 <sup>-7</sup> »	295 · 10 <sup>-7</sup> »	—

Die schwedischen Bodenablagerungen dürften der Hauptsache nach aus wenig veränderten Mineralteilchen aufgebaut sein, und da das spezifische Gewicht der Feldspate 2,56 bis 2,75, des Quarzes 2,65, der Glimmerarten 2,8 bis 3,2 ist, so wurde als mittleres spezifisches Gewicht der Wert 2,7 benutzt.<sup>3</sup> Geben wir der STOKES'schen Gleichung die Form:

$$r = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{v \cdot \eta}{(\sigma - \sigma_1) g}} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{\eta}{(\sigma - \sigma_1) g}} \cdot \sqrt{v} = K \cdot \sqrt{v} \quad (3b)$$

oder

$$v = Cr^2, \quad (3a)$$

$$\text{wo } C = \frac{1}{K^2},$$

<sup>1</sup> A. ATTERBERG, Die mechanische Bodenanalyse und die Klassifikation der Mineralböden Schwedens. Intern. Mitt. f. Bodenkunde 2, 319 (1912).

<sup>2</sup> Eine ähnliche Berechnung hat A. D. HALL gemacht im Journ. of Chem. Soc. Transactions 85, 959 (1904). Vgl. auch G. WIEGNER, Fühling's landwirtschaftl. Ztg. 62, 7 (1913).

<sup>3</sup> E. WEINSCHENK, Die gesteinsbildenden Mineralien, 2. Aufl. (Freiburg 1907). Tabellen.

und setzen wir  $\eta$  bei  $15^\circ \text{C} = 0,0114$  in absolutem Mass:

$$(\sigma - \sigma_1) = 2,7 - 1 = 1,7 \text{ und } g = 981,$$

so erhält die Konstante,  $K$ , den Wert  $5,546 \cdot 10^{-3}$ , und wenn wir  $v$  in cm/Sek. ausdrücken, erhalten wir den mittleren Äquivalentradius in cm.

In Anbetracht der Schwierigkeiten bei der experimentellen Bestimmung der Teilchendurchmesser muss die Übereinstimmung zwischen dem beobachteten und dem nach der STOKES'schen Gleichung berechneten Wert als genügend gut betrachtet werden. Die OSEEN'sche Gleichung gibt, wie zu erwarten, die besten Werte, ist aber zu verwickelt, um bei der folgenden mathematischen Behandlung verwendet zu werden.

In der Konstante ist nur  $\eta$  von der Temperatur stark abhängig, und da sich wie gesagt die innere Reibung von  $25^\circ$  bis  $10^\circ$ , von  $895 \cdot 10^{-5}$  bis  $1307 \cdot 10^{-5}$ , somit um 46 % ändert, so ist es notwendig, bei der Berechnung des Äquivalentradius die Temperatur zu berücksichtigen. Deshalb ist in folgender Tabelle 2 für verschiedene Temperaturen der Wert der Konstante  $K$  (in Gleichung 3 b) sowie der bei etwas veränderter Form ( $v = Cr^2$ ) der Gleichung 3 a verwendeten  $C$ -Konstante berechnet.

Tabelle 2.

Abhängigkeit der Konstanten  $K$  und  $C$  in der Bewegungsgleichung der Bodenteilchen von der Temperatur.

Temperatur in Graden C.	$\eta \cdot 10^5$	$\log . K$	$K \cdot 10^8$	$C = \frac{1}{K^2}$	$\log . C$
10 . . . . .	1307	0,77728 — 3	5,988	27890	4,44544
11 . . . . .	1296*	0,77369 — 3	5,939	28354	4,45262
12 . . . . .	1235*	0,76131 — 3	5,773	30007	4,47722
13 . . . . .	1202*	0,75550 — 3	5,695	30832	4,48900
14 . . . . .	1171*	0,74983 — 3	5,621	31648	4,50034
15 . . . . .	1140	0,74399 — 3	5,546	32510	4,51202
16 . . . . .	1110	0,73821 — 3	5,473	33387	4,52358
17 . . . . .	1082	0,73267 — 3	5,403	34250	4,53466
18 . . . . .	1055	0,72717 — 3	5,335	35127	4,54564
19 . . . . .	1029	0,72176 — 3	5,269	36015	4,55648
20 . . . . .	1004	0,71642 — 3	5,205	36912	4,56716
21 . . . . .	980	0,71117 — 3	5,142	37814	4,57766
22 . . . . .	957	0,70650 — 3	5,087	38637	4,58700
23 . . . . .	936	0,70119 — 3	5,026	39593	4,59762
24 . . . . .	915	0,69626 — 3	4,969	40502	4,60748
25 . . . . .	895	0,69146 — 3	4,914	41407	4,61708

\* Durch graphische Interpolation erhalten.

Die innere Reibung ist in dieser Tabelle der Zusammenstellung von KOHLRAUSCH<sup>1</sup> entnommen.

### 3.

#### **Einige theoretische Schlussfolgerungen für die Sedimentation in ungleichkörnigen Systemen.**

Denken wir uns eine Suspension von kleineren Teilchen in einem zylindrischen Gefäß aufgeschwemmt und gut durchgeschüttelt, so dass alle Teilchen im Anfangsmoment gleichförmig verteilt sind.

Nehmen wir zuerst den einfachsten Fall an, dass alle Teilchen gleich sind. Sie fallen dann alle gleich schnell, und in jeder Sekunde erreicht eine gleiche Zahl den Boden des Gefäßes. Setzen wir die Geschwindigkeit, womit die Teilchen sinken, gleich  $v \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$ , so werden im Laufe einer

Sekunde sämtliche Teilchen den Boden erreichen, welche sich zu Beginn der Sekunde  $v$  cm über dem Boden befanden. Eine solche Flüssigkeitsschicht enthält einen gewissen Bruchteil der gesamten Teilchen und zwar, wenn wir die gesamte Teilchenmenge mit  $A$ , der Einfachheit halber im Wasser gewogen, und die totale Höhe der Flüssigkeit mit  $h$  bezeichnen,  $A \frac{v}{h}$  Gramm.

Wenn  $p$  das Gesamtgewicht der während der Zeit  $t$  niedergefallenen Teilchen ist, erhält man somit

$$p = \frac{A \cdot v}{h} \cdot t \quad (4 \text{ a})$$

oder deriviert

$$\frac{dp}{dt} = \frac{A \cdot v}{h} \quad (4 \text{ b})$$

Die Geschwindigkeit, womit die Akkumulation auf dem Boden erfolgt, ist somit der Gesamtmenge der Teilchen *direkt* und der Höhe der Flüssigkeit *umgekehrt* proportional, dagegen *von der Zeit unabhängig* und zu Anfang ebenso gross wie am Schluss.

Die Teilchen der obersten Schicht haben nach der Zeit  $\frac{h}{v}$  den Boden erreicht, in dieser Zeit ist die Akkumulation beendet und  $p = A$ . Den Wert von  $p$  nach beendigtem Fall bezeichnen wir mit  $p_{\infty}$ , somit  $p_{\infty} = A$ .

<sup>1</sup> Lehrbuch d. praktischen Physik (10. Aufl., Leipzig 1905), S. 629.

Gehen wir nun zu dem generellen Fall über, dass wir es mit einer Menge von Teilchen *verschiedener* Grösse zu tun haben, so können wir uns diese als in eine Menge Teilfraktionen  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots$  von annähernd gleichem Äquivalentradius zerlegt denken, deren Teilchen in jeder Fraktion demnach mit gleicher Geschwindigkeit  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$  fallen. Für jede Fraktion muss nun, vorausgesetzt dass die Bewegungen der einen Teilchen nicht die Bewegungen der andern stören, die obige Gleichung (4) gelten, d. h.

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{F_n v_n}{h} \cdot t \\ \frac{dp_n}{dt} &= \frac{F_n v_n}{h} \end{aligned} \right\}, \text{ wenn } t \leq \frac{h}{v_n} \quad (5)$$

und

$$\left. \begin{aligned} p_n &= F_n \\ \frac{dp_n}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ wenn } t > \frac{h}{v_n}. \quad (6)$$

Obige Voraussetzung ist nicht unbedingt, denn es ist sehr wahrscheinlich, dass bei einer grösseren Anzahl von Teilchen in der Volumeneinheit diese störend auf einander wirken. Es bleibt somit experimentell zu erforschen übrig, inwieweit obige Voraussetzung zulässig ist.

Werden sämtliche Fraktionen summiert, so erhält man:

$$\begin{aligned} A &= F_1 + F_2 + F_3 + \dots & F_n &= \Sigma F \\ P &= p_1 + p_2 + p_3 + \dots & p_n &= \Sigma p \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} + \frac{dp_3}{dt} + \dots & \frac{dp_n}{dt} &= \Sigma \frac{dp}{dt} \end{aligned}$$

Die Werte von  $\frac{dp_1}{dt}, \frac{dp_2}{dt}$  usw. ergeben sich aus den Gleichungen 5 und 6. Wir können im Anschluss an Obiges folgende zwei Sätze formulieren:

*Satz 1.* Auch bei ungleichkörnigen Systemen wird die totale Akkumulationsgeschwindigkeit der Totalmenge  $A$  direkt und der Höhe der Flüssigkeit umgekehrt proportional, dagegen nicht von der Zeit,  $t$ , unabhängig sein. Denn  $\frac{dP}{dt}$  entsteht durch Summation einer Anzahl von Werten, wovon ein jeder gemäss (5) in der erwähnten Re-

lation zu  $A$  und  $h$  steht. Dagegen werden sämtliche Werte der Reihe nach mit der Zeit gemäss (6) den Wert Null erreichen und somit  $\frac{dP}{dt}$  von  $t$  abhängig sein.

Ist  $F_i$  die Fraktion mit den grössten Teilchen, so ist die entsprechende Fallgeschwindigkeit  $v_i$  die grösste, und  $\frac{dp_i}{dt}$  ist diejenige Derivate, welche zuerst Null wird (für den kleinsten  $t$ -Wert). Wir können also sagen, dass

$$\frac{dP}{dt} \text{ konstant bleibt für } 0 \leq t < \frac{h}{v_i}.$$

Nun ist aber eben  $\frac{h}{v_i}$  derjenige Zeitpunkt, wo sämtliche Teilchen der Fraktion  $F_i$  aus der Flüssigkeit verschwinden und auf den Boden gefallen sind. Bezeichnen wir den Äquivalentradius dieser Teilchen mit  $v_i$ , so können wir dies auch auf folgende Weise ausdrücken.

*Satz 2.* Von Teilchen mit einem Äquivalentradius *kleiner* als  $v_i$  sedimentieren in dem Zeitintervall von 0 bis  $\frac{h}{v_i}$  pro Sekunde gleich viel Teilchen, d. h. die Akkumulation jener Teilchen bleibt konstant.

Diesen Satz 2 werden wir unten bei der Deduktion der Verteilungskurve gebrauchen.

Es scheint nun möglich, den Satz 1 experimentell zu prüfen, indem  $P$  graphisch als Funktion von  $t$  ermittelt wird und hieraus durch mathematische Transformationen graphisch die Verteilungskurve des Bodens oder mit anderen Worten die jedem Äquivalentradius  $r$  entsprechenden Gewichtsmengen  $F$  konstruiert werden.

Ehe ich auf diese mathematische Behandlung ausführlich eingehe, scheint es mir zweckmässig, erst die von mir verwendete Methode zur Bestimmung von  $P$  als Funktion von  $t$  zu erörtern. Was die experimentelle Formulierung von Satz 1 betrifft, so sehen wir, dass, je grösser  $h$  ist, desto langsamer die Akkumulation verläuft. Haben wir z. B.  $h$  das eine Mal gleich 10 cm und bei anderen Versuchen gleich  $\gamma \cdot 10$  cm, so müssen, wenn wir die Zeiten mit demselben Faktor  $\gamma$  multiplizieren, die  $P$ -Werte unverändert und die Fallkurve dieselbe bleiben.

Ferner muss, wenn wir alle Teilfraktionen  $F_1, F_2, F_3, F_n \dots$  mit einem konstanten Faktor  $\delta$  multiplizieren, d. h. wenn wir die Gesamtmenge der Teilchen mit  $\delta$  und ebenso die  $P$ -Werte mit demselben Faktor  $\delta$  multiplizieren, die Fallkurve unverändert bleiben. Oder, was dasselbe besagt, wenn wir die Gesamtmenge  $P_\infty = A$  gleich 100 setzen und die  $P$ -Werte stets in Prozenten ausdrücken, so muss die Kurve von der absoluten Menge der fallenden Teilchen unabhängig sein.

Diese experimentelle Prüfung enthält zugleich die Prüfung der Zulässigkeit der oben gemachten Annahme, d. h. ob man praktisch damit rechnen kann, dass die einzelnen Teilchen keinen wesentlichen Einfluss auf die Fallgeschwindigkeit der anderen ausüben.

Ich gehe jetzt zu den experimentellen Anordnungen über.

#### 4.

### Die experimentelle Anordnung zur Registrierung der Fallkurve.

(Hierzu Tafel II und Fig. 1—4.)

Um die Fallkurve zu registrieren, d. h.  $P$  als Funktion von  $t$  zu ermitteln, habe ich einen Apparat konstruiert, wobei der leitende Gedanke war, dass man statt eines festen Bodens des Gefässes, worin die Teilchen sedimentieren, eine bewegliche, dicht über dem wirklichen Boden aufgehängte Platte benutzen kann, auf die man die Teilchen fallen lässt. Es ist hierbei nicht notwendig, dass die Platte gleich gross wie der wirkliche Boden ist, sondern man kann einfach die Platte als den Boden eines Flüssigkeitszylinders betrachten, dessen Höhe,  $h$ , gleich dem Abstand von der Platte bis zur Oberfläche der Flüssigkeit ist, und dessen Bodenarea die Platte ist. Wird diese an einem Wagebalken aufgehängt, so kann man von Zeit zu Zeit das Gewicht ermitteln. Zum Gelingen der Versuche ist es aber notwendig,

- 1) dass die Platte dem wirklichen Boden so nahe wie möglich liegt, damit kein grosser, in bezug auf Teilchen »leerer« Raum unter der Platte entsteht;
- 2) dass die Platte sich in annähernd konstantem Abstand von der Oberfläche befindet;
- 3) dass sich zwischen der Platte, der Wand und dem wirklichen Boden des Gefässes kein Schlamm ansammelt und die freie schwebende Lage der Platte beeinträchtigt;
- 4) dass die Konvektionsströmungen innerhalb der Flüssigkeit des Fallzylinders möglichst vermieden werden.

Die zu überwindenden Schwierigkeiten bestanden darin, den obigen Erfordernissen zu genügen und dennoch eine genaue Ermittlung des Gewichtes der Platte und der darauf niedergefallenen Teilchen zu ermöglichen. Dabei ist es ja nicht notwendig, das absolute Gewicht, in Luft gewogen, zu kennen, sondern es genügt ja, wie schon gesagt, alle Gewichte im Wasser zu wiegen und auf die Totalmenge sämtlicher beim *beendeten* Versuch niedergefallenen Teilchen zu beziehen. Die spezifischen Gewichte der Mineralien von Böden variieren nicht so sehr, dass aus einem willkürlich genommenen mittleren spezifischen Gewicht zu grosse Fehler entstehen könnten. Wie bei der Berechnung des Äquivalentradius wurde als mittleres spez. Gewicht 2,7 angenommen.

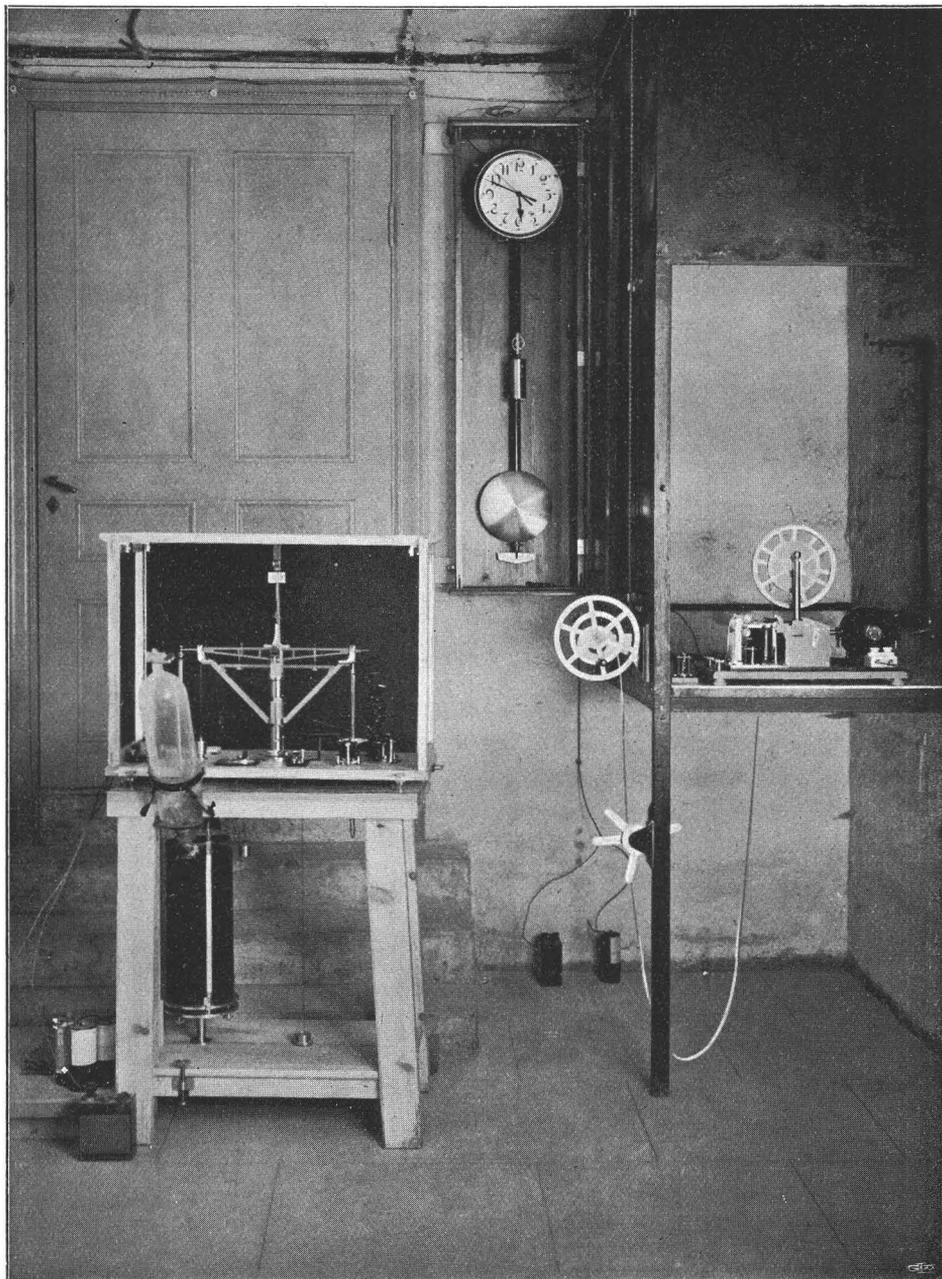


Fig. 1. Automatische mechanische Bodenanalyse.

Der Apparat besteht aus folgenden drei Hauptteilen (vgl. Tafel II):  
*Fallzylinder* (Fig. 2),  
*Wage* (Fig. 3) und  
*Registrierapparat* (Fig. 4).

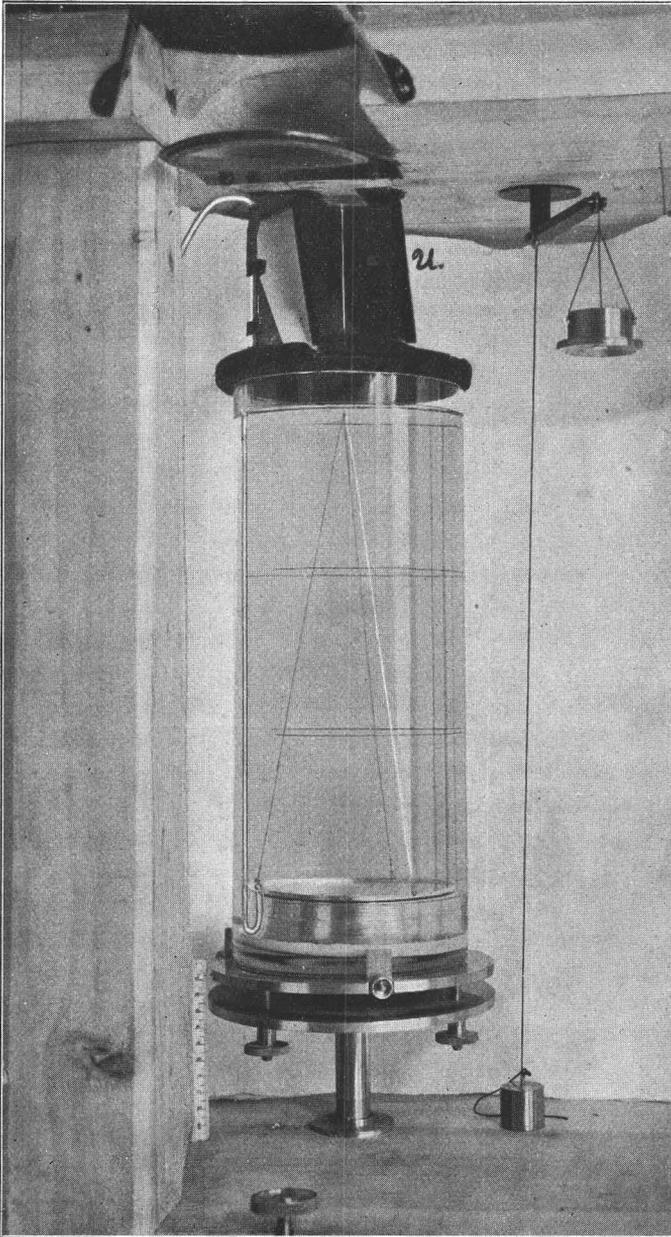


Fig. 2. Der Fallzylinder.

dienen die Schrauben  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  und  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , welche an der Messingplatte, worauf der Fallzylinder ruht, befestigt sind.

Ferner kann man durch die Schraube  $J$  die Messingplatte mit dem ganzen Fallzylinder in vertikaler Richtung bewegen und dadurch den Abstand der Fallplatte,  $A$ , vom Bodensockel,  $F$ , genau regulieren.

Der Fallzylinder besteht aus einem 35 cm hohen Glaszylinder, **L**, von 138 mm innerer Weite. Da der Boden der Zylinders nicht ganz plan ist, wurde ein Boden, **F**, aus stark vergoldetem Messing eingekittet. Dieser füllt nicht die ganze Bodenarea des Zylinders aus, sondern ist von sockelartigem Bau und lässt nahe der Glaswand ringsherum eine kreisförmige Vertiefung frei. Dies geschieht, damit die niedergefallenen Teilchen, wenn man mit grösseren Bodenmengen arbeitet, sich nicht zwischen der frei schwebenden Fallplatte, **A**, und der Wand zusammenpacken und die Bewegungen der Platte hindern. Alle nicht auf die Platte fallenden Teilchen legen sich jetzt in den kleinen kreisförmigen Raum rings um den Sockel. Der Durchmesser der kreisförmigen Area des Sockels ist 98,6 mm und der der darüber schwebenden Platte 100 mm, letztere somit ein klein wenig grösser, damit, wenn die Einstellung nicht völlig zentriert ist, sich dennoch keine Teilchen auf dem Sockel anhäufen und die Bewegungen der Platte hindern.

Die Fallplatte **A** wurde aus Neusilber von 0,38 mm Dicke ausgehämmert und stark vergoldet. Um bei dieser Dünne noch die Form beizubehalten, war es notwendig, ringsherum einen etwa 0,5 mm hohen Falz anzubringen und der Platte eine nach oben etwas konkave Form zu geben. Die Platte wurde an drei biegsamen Goldfäden in der aus Tafel II ersichtlichen Weise am Wagebalken aufgehängt.

Der Grund, weshalb die Platte so dünn wie möglich zu nehmen ist, ist der, dass die Veränderung des spezifischen Gewichts bei fortschreitender Sedimentation und somit der variierende Auftrieb auf die Platte so klein wie möglich bleiben soll (vgl. unten).

Zwar wurden alle Versuche in einem »Zimmer für Arbeiten bei konstanter Temperatur« ausgeführt, aber um den Fallzylinder vor kleinen Temperaturschwankungen zu schützen, wurde derselbe noch mit einem zentimeterdicken Schutzmantel aus Filz **M** umgeben und mit einem gleichfalls filzbekleideten Bleideckel **D** bedeckt. Dieser Deckel ist mit kleinen Ausbohrungen für die Aufhängefäden und einem Heber aus Glas, **H**, versehen. Der letztere dient dazu, nach Beendigung des Versuchs die Flüssigkeit mit den kleinsten, nicht sedimentierten Teilchen zu entfernen. Das Ende des Heberrohres ist nach oben umgebogen, so dass sich das Knie in der rinnenförmigen Vertiefung befindet. Beim Einsetzen des Hebers wird das Rohr so tief eingetaucht, dass sich das Knie auf den Boden der Vertiefung stützt. Die nach oben gehende Öffnung des Heberrohres befindet sich dann in gleichem Niveau mit der Scheibe, und die Flüssigkeit kann bis dahin entleert werden.

Über den Einfluss von kleinen Temperaturschwankungen auf die Störungen bei der Sedimentation kleiner Teilchen wird im Abschnitt 5 Weiteres mitgeteilt.

Zur Einstellung des Fallzylinders in horizontale und vertikale Lage

Da es, wenn der Wärmeisulationsmantel übergezogen ist, schwer ist, die gegenseitige Lage zu beurteilen, dient ein Zeiger, welcher sich in konstanter Höhe zum Sockelplan befindet, und eine Skala, N, dazu, die jeweilige Lage des Bodensockels abzulesen.

Es ist ferner ein Spiegel, U (vgl. Fig. 2), in Verbindung mit einer in der Figur nicht sichtbaren Glühlampe angebracht, um das Innere des Fallzylinders beim Einstellen zu erhellen, damit der Experimentator die gegenseitige Lage der Fallplatte und des Bodensockels in horizontaler Richtung beurteilen kann.

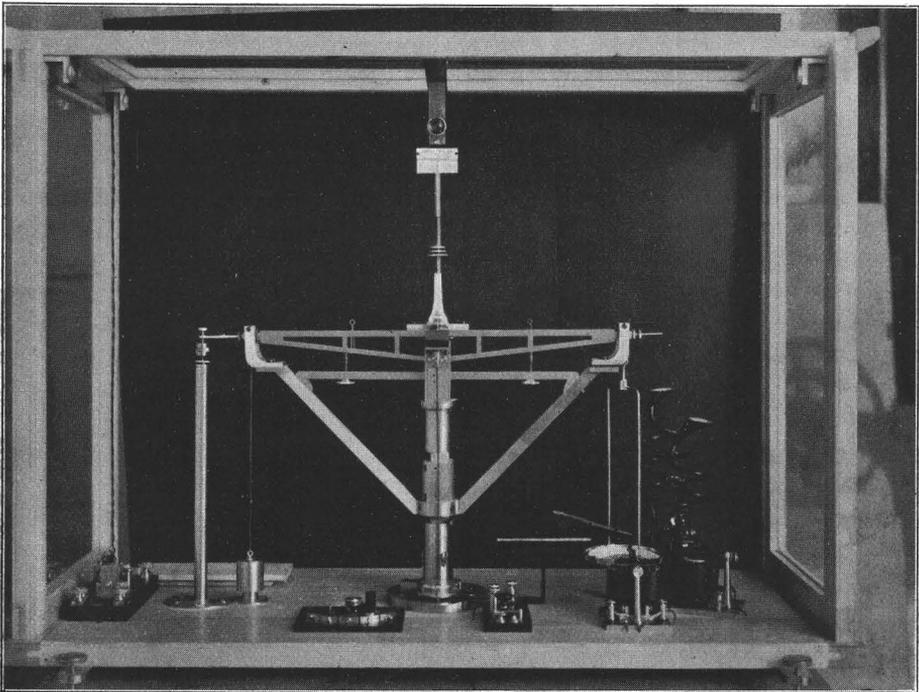


Fig. 3. Automatische Wägevorrichtung.

Eine Libelle, W, welche über einem kleinen Block mit einem Gegengewicht in Verbindung steht und in dem Zylinder heruntergelassen werden kann, erlaubt die Einstellung bequem zu kontrollieren, da das Bild der Libelle im Spiegel sichtbar ist. (Einzelheiten über Einstellen und Füllen des Zylinders s. weiter unten S. 35 ff.)

Die automatische *Wägevorrichtung* besteht aus einer gewöhnlichen zweiarmigen Wage mit Arretierung, an deren einem Arm, B<sub>1</sub>, die Fallplatte und an dem anderen, B<sub>2</sub>, eine gewöhnliche konkave Wagschale aus Neusilber, G, aufgehängt ist.

Der Wagebalken, dessen Stahlschneide nach Auslösung der Arretierung auf einer Achatplatte ruht, trägt an der Bewegungsachse eine kleine Stahlnadel, deren Spitze in das von der Wage isolierte Quecksilbergefäß,

**Q**, taucht. Da der Wagebalken bei Gleichgewicht nur mit der isolierenden Achatplatte und vermittelt der Nadel mit dem Quecksilbergefass in Berührung steht, kann man ihn als Teil eines offenen Stromkreises **CRQBE** betrachten. Dieser Kreis wird beim Überschreiten der Gleichgewichtslage bei **E** geschlossen. Denn eine feine Platinspitze, **I**, ist auf dem Wagebalken eingesetzt und kann den Quecksilbermeniskus des kleinen eisernen Gefässes, **E**, berühren, wodurch der Strom geschlossen wird. In diesen Stromkreis ist ein Trockenelement, **C**, sowie das Relais, **R**, eingeschaltet. Ferner ist, um die Funkenbildung beim Kontaktschluss so weit wie möglich herabzusetzen, eine Kapazität, **Y**, parallel mit dem Kontakt **E** geschaltet. Beim Kontaktschluss bei **E** schliesst nun der Elektromagnet des Relais einen sekundären Stromkreis, **XOVmn**, worin teils eine Akkumulatorbatterie **X**, teils eine kleine Glühlampe **O** und teils die Speisevorrichtung **V** eingeschaltet ist, welche die Abladung eines kleinen Gewichtes **g** auf die Wagschale **G** bewirkt.

Die letztere besteht aus einem Spiralrohr aus Messing, **b**, in dem sich die aus kleinen Stahlkugeln bestehenden Gewichte befinden. Rechtwinklig zum unteren Teil dieses Spiralrohrs läuft ein zweites Rohr, **d**, in welchem sich ein kleiner Stempel, **p**, bewegt. Durch eine Feder liegt dieser gewöhnlich rechts im Rohr, beim Stromschluss des Akkumulatorkreises wird er aber vom Elektromagnet, **m**, derart attrahiert, dass er der Kugel einen Stoss gibt, wodurch diese aus dem Ansatzrohr ausgeschleudert wird und auf die Wagschale, **G**, fällt. Um ein Abprallen zu verhüten, ist diese mit Sämschleder überzogen. Gleichzeitig wird der Stempel vor die Öffnung des Spiralrohrs geschoben und verhindert dadurch, dass weitere Kugeln in das Ansatzrohr, **d**, gelangen. Durch Unterbrechung des Stromkreises wird die Wirkung des Elektromagneten aufgehoben, die Feder schnellt den Stempel in die Primärlage zurück, und eine zweite Kugel fällt ins Ansatzrohr hinab. Um zu verhindern, dass zwei Kugeln in das Ansatzrohr kommen, hat der Boden derselben bei **e** eine leichte Vertiefung, welche die Lage der ersten Kugel fixiert, und diese verhindert durch ihr Volumen das Niederfallen einer zweiten Kugel.

Zur Justierung der Speisevorrichtung dient die Schraube **k**.

Als Gewichte wurden kleine Stahlkugeln, wie sie zu sog. Kugellagern Verwendung finden, benutzt. Diese haben schon von vornherein ein sehr gleichmässiges Gewicht. Aus einigen tausend solcher Kugeln gelang es, von jeder Sorte 100 von gleichem Gewicht auszusuchen, und durch Wägen von je 3 und 3 aufs Geratewohl zusammengesuchten Kugeln konnte ich mich überzeugen, dass die Abweichungen für jede Kugel äusserst gering und kleiner als 0,1 mg waren.

Folgende vier Gewichte wurden benutzt:

- a) 0,4366 g, b) 0,1276 g, c) 0,0544 g, d) 0,0153 g.

Für die drei ersten wurden automatische Speisevorrichtungen ganz ähnlicher Art wie die beschriebene benutzt, für die kleinsten Kugeln zeigte

es sich vorteilhaft, das Spiralrohr mit einer Rinne von verstellbarer Neigung zu vertauschen, weil sonst leicht Verstopfungen eintraten.

Um die Bewegungen möglichst gering zu halten, wurde die Arretierung so hoch geschoben, dass das Ende des Wagebalkens von der einen Gleichgewichtslage bis zur anderen sich nur ein bis zwei Millimeter bewegt. Diese Amplitude konnte übrigens variiert werden. Schliesslich dienen die zwei Reiter  $i_1$  und  $i_2$  dazu, die Gleichgewichtslage herzustellen.

Bei der Sedimentation von Teilchen auf die Fallplatte spielt sich nun folgender Vorgang ab.

Nehmen wir an, dass bei der Auslösung der Arretierung im Zeitpunkt Null Gleichgewicht herrscht; die Platte schwebt dann dicht über dem Sockel, die Wage ist im Gleichgewicht und der Wagebalken ist elektrisch isoliert. Sedimentieren aber Teilchen auf die Platte, so wird das Gleichgewicht gestört, und die Platte beginnt zu sinken. Gleichzeitig wird aber der Kontakt bei  $\mathfrak{E}$  geschlossen, die Glühlampe  $O$  leuchtet auf, das Relais  $R$  und der Sekundärstrom wird geschlossen, und die automatische Speisevorrichtung wirft ein kleines Gewichtstück auf die Wageschale  $G$  ab, wodurch die Wage nach der anderen Seite ausschlägt und der Kontakt bei  $\mathfrak{E}$  unterbrochen wird. Nach einer gewissen Zeit,  $t$ , hat sich wieder so viel Sediment auf der Fallplatte angesammelt, dass die Wage nach links ausschlägt, der Kontakt  $\mathfrak{E}$  wird aufs neue geschlossen, ein zweites Gewichtstück wird automatisch abgeladen u. s. w.

Wenn nun wie hier die Arretierung so angebracht ist, dass die beiden Lagen rechts und links sehr nahe an einander und an der Nullage liegen, so können wir den Kontaktschluss bei  $\mathfrak{E}$  und das Aufleuchten der Lampe mit dem Gleichgewicht identifizieren. Solange die Kugeln schwerer sind als das Sediment auf der Platte, liegt die Wage nach rechts, und der Kontakt  $\mathfrak{E}$  ist offen; wenn Gleichgewicht zwischen Sediment und Kugeln herrscht (oder streng genommen ein kleines Übergewicht vorhanden ist), wird der Kontakt geschlossen, und die Lampe leuchtet auf. Durch Bestimmung dieser Zeiten  $t_1$ ,  $t_2$  u. s. w. hat man eine Möglichkeit, die Geschwindigkeit der Akkumulation messend zu verfolgen. Infolge der grossen Dämpfung des Systems durch die in Wasser niedergesenkte Platte läuft man keine Gefahr, dass die Wage irgendwelche merklichen Schwingungen ausführt, wodurch ein doppelter Kontaktschluss zustande käme.

Ist die Flüssigkeit durch Zusätze sehr viskös, kann es von Vorteil sein, das Überschlagen nach rechts zu beschleunigen. Hierzu dient der kleine Elektromagnet dicht unter der Wageschale, welcher parallel zum Registriermagnet eingeschaltet ist.

\* \* \*

Zur Fixierung der Zeitmomente, wo zwischen Sediment und einer gewissen Anzahl von Kugelgewichten Gleichgewicht herrscht, dient die in Tafel II und Fig. 4 abgebildete *Registrier Vorrichtung*. Mit dem Elektro-

magneten  $m$  des Sekundärkreises  $XOVmn$  ist nämlich ein zweiter Elektromagnet,  $n$ , verbunden, welcher beim Stromschluss einen Hebel,  $l$ , attrahiert, an dessen anderem Ende sich ein kleines Farbrädchen,  $q$ , befindet, welches auf einem beweglichen Papierstreifen,  $y$ , einen Punkt zeichnet. Dieser Papierstreifen («Telegraphen-Rollenpapier») wird von einem Elektromotor mit verschiedenen Auswechslungen  $w$  vermittelt zweier sich bewegenden Walzen an dem Farbrädchen mit gleichmässiger Geschwindigkeit vorbeigeschoben. Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Farbpunkten bedeutet daher die Zeit zwischen zwei Kontaktschliessungen. Um diese

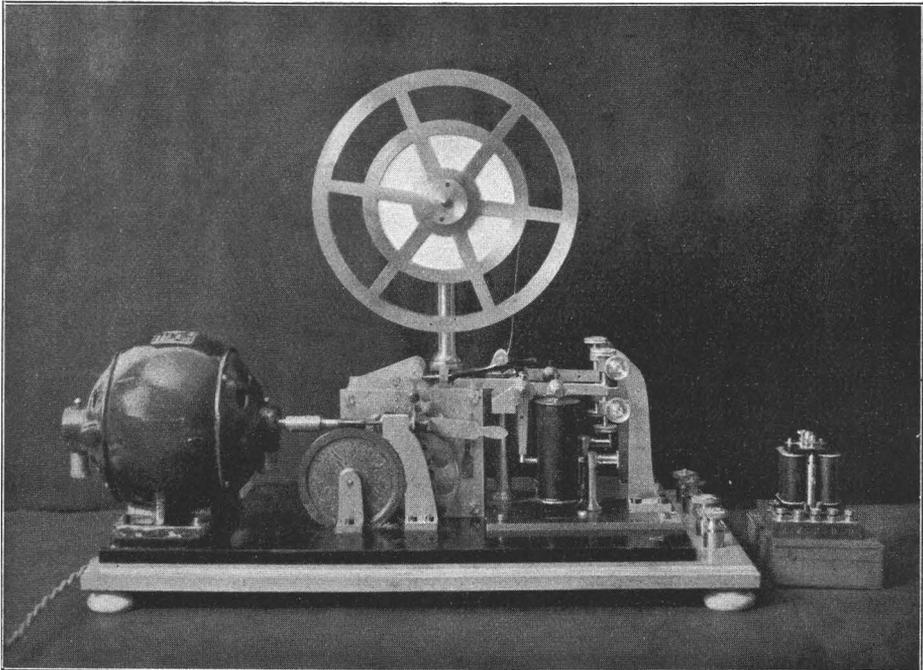


Fig. 4. Der Registrierapparat.

in Sekunden oder Minuten bequem ablesen zu können, und um Ungleichmässigkeiten im Gang des Elektromotors zu vermeiden, werden von einem dritten Elektromagneten  $O$  mit gleichartig eingerichteten Hebel und Farbrädchen die Sekunden oder Minuten eines Chronographen ebenfalls auf dem sich bewegenden Papierstreifen aufgezeichnet.

Dies geschieht folgendermassen: An dem Sekundenpendel befinden sich zwei Platinkontakte,  $Pt_1$  und  $Pt_2$ , in der auf Tafel II angedeuteten Weise, so dass jedesmal, wenn der Pendel ausschlägt, ein Stromkreis,  $Pt r x$ , geschlossen und sofort wieder unterbrochen wird.  $r$  ist hier ein sehr empfindliches Relais,  $x$  ein Trockenelement. Das Relais schliesst einen sekundären Stromkreis  $ru t$ , mit einem Akkumulator  $u$ , welcher auf den Elektromagneten,  $t$ , einwirkt, wobei ein Sekundenpunkt auf den Papierstreifen gezeichnet wird.

Jedesmal, wenn der Sekundenzeiger die Zwölflage passiert, wird ein dritter Kontakt,  $\nu$ , geschlossen und vermittelt der in der Figur angegebenen Kuppelung dasselbe Relais  $r$  bewegt und ein Farbpunkt auf den Papierstreifen gezeichnet. Durch die Lage der Kontaktpunkte der automatischen Speisevorrichtung rechts auf dem Streifen im Verhältnis zu den Sekunden- oder Minutenpunkten links auf demselben kann man die Zeiten für jeden Gleichgewichtskontakt der Wage bequem feststellen. Um bei längeren Registrierungen keine allzu langen Papierstreifen zu bekommen, kann man vermittelt der Auswechslung  $w$  die Geschwindigkeit, mit der der Papierstreifen bewegt wird, auf  $1/60$  herabsetzen.

Der Stromwechsler,  $\alpha$ , dient dazu, die Sekunden- oder Minutenkontaktregistrierung einzuschalten, die Stromwechsler  $\beta_{1-4}$ , die verschiedenen Kugeln (a—d) zu benutzen, je nachdem gröbere oder feinere Sedimente untersucht werden sollen oder man sich am Anfang oder Ende einer Messung befindet.

\* \* \*

Es erübrigt noch, über die Einfüllung der Bodensuspension sowie über die Einstellung und die Ausführung des Versuchs einige Angaben zu machen. Dagegen wird erst eine folgende Abhandlung *über die Vorbehandlung der Bodenprobe zur Analyse* Näheres bringen.

Es ist natürlich von Wichtigkeit, teils dass die Einfüllung so schnell wie möglich vor sich geht, teils dass die Flüssigkeit, sobald sie einmal hineingegossen ist, zur Ruhe kommt. Dieser letztere Punkt ist die grösste Fehlerquelle und verursacht, dass, besonders bei gröberen Böden, wo es gilt, die Registriervorrichtung so schnell wie möglich in Gang zu setzen, die einzelnen Versuche mit demselben Boden Abweichungen zeigen. Das Einhalten von bestimmten Versuchsbedingungen ist hier notwendig, und ich habe nach Versuchen in verschiedener Richtung folgende Anordnung als die zweckmässigste gefunden (vgl. Tafel II, T rechts oben).

Die Suspension wird in einen grossen,  $3\frac{1}{2}$  l fassenden sog. Separiertrichter, T, gebracht, in dessen Öffnung ein dicker Gummischlauch von  $2\frac{1}{2}$  cm Durchmesser befestigt ist. Um zu verhindern, dass der Gummischlauch geknickt wird, ist derselbe mit einer Metallspirale, c, umwickelt. Der ganze Trichter mit dem Schlauch wird in eine bestimmte Stellung gebracht, so dass derselbe im Verhältnis zum Fallzylinder stets die richtige Lage einnimmt (vgl. Fig. 1). Durch die Federklemme K wird zuerst der Schlauch geschlossen, dann die aus der Schüttelmaschine entnommene Suspension durch das Einfüllrohr, f, eingegossen, wonach der Hahn geschlossen wird. Man schüttelt jetzt die Flüssigkeit nochmals kräftig durch, befestigt den Trichter so, dass der Schlauch in den Fallzylinder mündet, öffnet die Klemme K und gleichzeitig den Hahn, wodurch der Luftdruck im Innern des Trichters während der Entleerung ausgeglichen und gleich dem äusseren Luftdruck bleibt. Die Flüssigkeit strömt jetzt sehr schnell und ohne Wirbelbewegungen in den Fallzylinder hinein. Die erforderliche Zeit für 3 Liter Suspension beträgt etwa 15 Sekunden. Man bewahrt zweck-

mässig die Suspension vor jedem Versuch einige Stunden in dem Zimmer auf, damit sie die Temperatur desselben annimmt.

Bei der Ausführung einer Registrierung verfährt man zweckmässig folgendermassen.

Vermittelst der Schraube J wird der Fallzylinder erst so weit in die Höhe gebracht, dass die Fallplatte sich 1 mm über dem Bodensockel befindet. Man beleuchtet den Zylinder im Innern und kann durch die Schrauben  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  den Zylinder zentrieren, so dass der Sockel im Spiegel von der Fallplatte völlig bedeckt erscheint.

Man schraubt nun den Zylinder weiter in die Höhe, bis die Platte auf dem Sockel ruht, und führt die Libelle vorsichtig ein, so dass diese auf die Fallplatte (welche ja jetzt plan auf dem Sockel ruht) zu liegen kommt. Durch die Schrauben  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  stellt man nun den Zylinder so ein, dass der Sockel horizontal liegt, senkt dann den Zylinder vorsichtig, so dass die Platte frei schwebt, und überzeugt sich davon, dass nunmehr fortwährend die Libelle eben liegt, da ja sonst die Platte auf irgendeine Weise in eine schiefe Lage gekommen ist. Nachdem diese Einstellungen gemacht sind, nimmt man die Libelle weg und füllt ein vorher abgemessenes Volumen Wasser hinein, das so bemessen ist, dass die Platte eben genässt wird. Durch vorsichtiges Bewegen der Platte kann man etwa zwischen Sockel und Platte haftende Luftblasen entfernen.<sup>1</sup>

Man überzeugt sich durch Auflegen eines bekannten Tarastückes, dass das Gewicht richtig ist und Luftblasen keinen Auftrieb verursachen.

Hierauf wird der Zylinder wiederum höher geschraubt, damit die Platte während der Einfüllung der Suspension auf dem Sockel ruht und keine Teilchen auf den Sockel fallen oder die Platte durch die Heftigkeit des Einfüllens in Unordnung gebracht wird.

Man legt dann mit einer Pinzette das erste Gewichtstück auf die Wagschale, G, der vorher für die zu erwartende Flüssigkeitshöhe auf Gleichgewicht eingestellten Wage.

Der Apparat ist jetzt zur Einfüllung der Flüssigkeit in Ordnung. Nun setzt man erst den Elektromotor in Gang, damit sich der Papierstreifen bewegt, jedoch anfangs ohne die Zeitregistrierung einzuschalten, und lässt in eben beschriebener Weise die Suspension niederströmen. Sobald dies beendet ist, schaltet man durch den Stromwechsler  $\alpha$  die Zeitregistrierung ein, wodurch der erste Sekundenstrich auf den Papierstreifen gezeichnet wird (Zeit Null). Hierauf entfernt man den Einfülltrichter, senkt den Zylinder bis zu demjenigen Strich der Skala, welcher bei der Auslösung der Wagearretierung 1 mm Abstand zwischen Sockelplan und Fallplatte angibt, und löst vorsichtig die Arretierung aus. Diese Operationen lassen sich nach einiger Übung in 20—30 Sekunden ausführen.

Falls sich während dieser Zeit so viel Teilchen auf der Platte angesammelt haben, als dem ersten Gewichtstück entspricht, erhält man sofort

<sup>1</sup> Wenn dies schwierig ist, wäscht man die Unterseite der Platte im voraus mit Alkohol ab und senkt die noch nasse Platte in das Wasser hinein.

Kontakt bei **E**, und ein zweites Gewichtstück wird auf die Wagschale **G** abgeworfen. Während der ersten und oft zweiten Minute jedes Versuchs ist die Flüssigkeit noch in Bewegung, und man kann im allgemeinen den ersten zwei Registrierpunkten wenig Wert beimessen. Während dieser Zeit ist es daher zweckmässig, die Registriervorrichtung von der Wage her nicht einzuschalten, sondern einfach diejenige Anzahl von Kugeln, welche beim Einschalten derselben — nach 2—3 Minuten — auf der Wagschale **G** liegen, für die spätere Berechnung zu notieren.

Der Apparat besorgt nun alles von selbst. Man hat nur, wenn die Zeiten zwischen jeder Kugel länger werden, zur Einschaltung der Speisevorrichtung mit kleineren Kugeln zu schreiten, sowie eventuell die Geschwindigkeit des Papierstreifens herabzusetzen und die Sekundenregistrierung mit Minutenregistrierung zu vertauschen. Die Zeit, in der diese Veränderungen vorgenommen werden, sowie die Temperatur ausserhalb des Fallzylinders werden notiert, um bei der Berechnung berücksichtigt zu werden.

Auf diese Weise ist es mir gelungen, Registrierungen bis zu 150 Stunden ohne Störungen durchzuführen, aber es ist selbstverständlich notwendig, dass Kontakte, Farbrädchen, Akkumulatoren u. s. w. vor jedem Versuche stets genau untersucht werden, wenn alles gut fungieren soll.

Zur Erleichterung der Arbeiten hat man zweckmässig im voraus Messkolben gefertigt, welche den verschiedenen Flüssigkeitshöhen entsprechen und sich die Taragewichte verschafft, welche eben bei diesen Flüssigkeitshöhen dem Gleichgewicht der Wage entsprechen.

Es ist nicht notwendig, aber aus mehreren Gründen vorteilhaft, die Bodenmengen auf etwa 1—5 Gramm pro Liter Flüssigkeit zu beschränken, damit das spezifische Gewicht der Suspension nicht allzugrosse Abweichungen von dem des Wassers aufweist.

Mit der Registrierung fährt man zweckmässig so lange fort, bis 2—3 Kugeln pro Tag abgeladen werden. Länger als 150 Stunden fortzufahren, lohnt sich im allgemeinen nicht, weil die Teilchen (kleiner als  $0,3 \mu$ ), welche jetzt sedimentieren, so ausserordentlich langsam fallen, dass man durch weitere 100 Stunden auf der Verteilungskurve (vgl. unten) sehr wenig weiter nach links kommt.

Man entleert nach beendigtem Versuch die Flüssigkeit mittelst des Hebers, **H**, bis zum Niveau der Platte und bestimmt eventuell im Ultramikroskop nach der ZSIGMONDY-SIEDENTOPF'schen Methode durch Auszählen der Teilchenzahl in einem bekannten Volumen die Zahl der Teilchen, woraus sich der mittlere Äquivalentradius annähernd berechnen lässt.<sup>1</sup>

Wenn es sich um einen in bezug auf seine Zusammensetzung völlig unbekanntem Boden handelt, ist es vorteilhaft, zuerst zur Orientierung einen Vorversuch anzustellen, um zu erforschen, wie schnell im Anfang die Akkumulation verläuft und zu welchen Zeiten man zweckmässig den Wechsel von Kugelgewichten und Geschwindigkeit des Papierstreifens vornimmt.

<sup>1</sup> Vgl. des Näheren »Studien über Tone. 4 u. 7» (erscheint später).

Durch die eben geschilderte Anordnung wird es möglich, die Menge der auf die Fallplatte sedimentierenden Teilchen als eine Funktion der Zeit zu ermitteln. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass man, wenn verschiedene Fallhöhen verwendet werden, dieselben auf eine Normalhöhe von 10 cm umrechnen kann. Werden ferner alle Angaben der gesamten niedergefallenen Teilchenmenge in Prozenten angegeben, erhält man eine für jede Bodenablagerung charakteristische Kurve: *die Fallkurve*.

## 5.

### Experimentelle Prüfung der theoretischen Schlussfolgerungen.

Aus der Annahme der Homogenität der Suspension beim Beginn der Sedimentation wurde oben gefolgert, dass die Akkumulationsgeschwindigkeit bei variierender Fallhöhe dieser Fallhöhe umgekehrt proportional sein müsse. Ferner wurde aus dem unabhängigen Fall der Teilchen geschlossen, dass die Akkumulationsgeschwindigkeit der totalen Teilchenmenge direkt proportional sei.

Diese beiden Sätze sind 1903 von TH. SCHLOESING PÈRE<sup>1</sup> experimentell bewiesen worden, indem er Abschlämmungen von Böden bei verschiedenen Probegrößen und verschiedenen Fallhöhen ausführte. Die Gewichte der abgeschlammten Teilchen bei konstanter Höhe verhielten sich nun wie die absoluten Gewichtsmengen, und wenn die Schlammzeit proportional den Fallhöhen gewählt wurde, waren die abgeschlammten Teilchenmengen gleich. Dies kann nur dann der Fall sein, wenn nach SCHLOESING's Formulierung existiert:

»liberté parfaite d'un élément quelconque a l'égard de tous les autres; égale dispersion de tous les éléments au début des phénomènes; repos absolu du liquide; uniformité des mouvements de descente.»

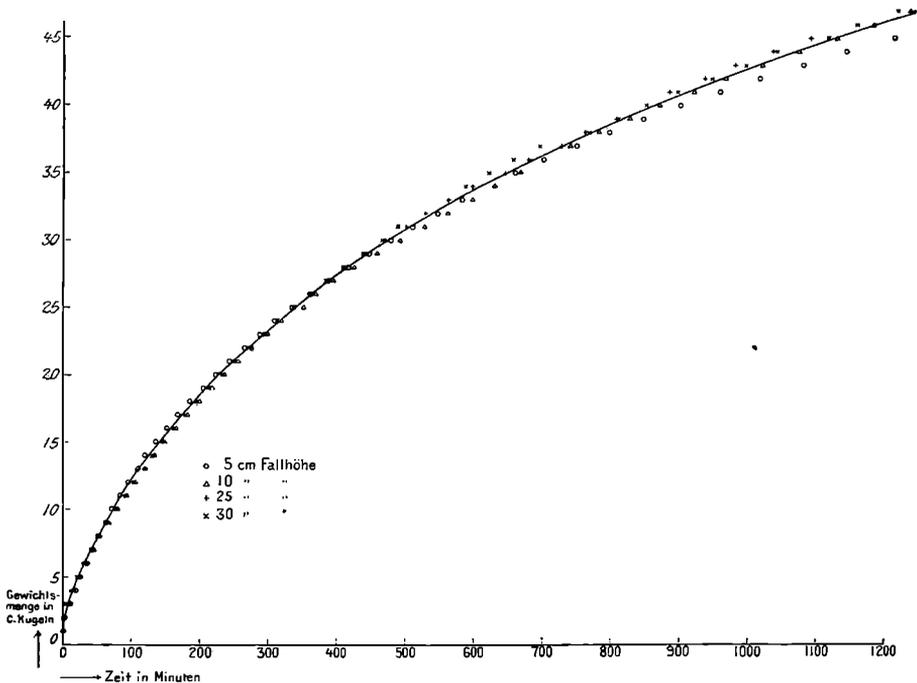
SCHLOESING gibt dann eine Methode an, die Sedimente kontinuierlich zu isolieren und eine Berechnungsmethode zur Bestimmung der Grösse jedes Sediments. Er hat sich somit eine ähnliche Aufgabe wie der Verfasser gestellt, die Methode SCHLOESING's scheint mir jedoch viel mühsamer und weniger generell als die meine. Die Einfachheit der Apparatur wie auch die elegante Berechnung sei jedoch rückhaltlos anerkannt.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sur l'analyse mécanique des sols. — Compt. rend. de l'Acad. des Sciences 136, 1608—1613 (1903) 137, 369—374 (1903).

<sup>2</sup> Bei der Entwerfung und Ausarbeitung meiner Methode waren mir diese Arbeiten SCHLOESING's nicht bekannt. Erst im Herbst 1915 wurde ich durch Herrn Prof. RINDELL auf dieselben aufmerksam gemacht. Nach Mitteilung RINDELL's an den Verf. treten jedoch bei der Handhabung der SCHLOESING'schen Apparatur Schwierigkeiten auf, indem ein beträchtlicher Teil des Tons sich an der Trichterwand sammelt und sich infolgedessen in unkontrollierbarer Weise der Beobachtung entzieht.

Ohne Kenntnis dieser Arbeiten SCHLOESING's wurde von mir 1914 die Richtigkeit dieser Schlussfolgerungen experimentell an dem ersten Wagemodell geprüft. Allerdings geschah dies mit ziemlich grobem Material, ausserdem war auch diese erste experimentelle Anordnung ziemlich mangelhaft.

Ich hielt es deshalb für richtig, mit der neuen automatischen Anordnung bei einigen feinkörnigeren Bodenablagerungen den Einfluss von Fallhöhe und absoluter Konzentration auf die Akkumulationsgeschwindigkeit nochmals zu untersuchen.



5. Fallversuche bei wechselnder Fallhöhe.

Zu den ersten Versuchen wurde ein Schlammprodukt benutzt, aus dem die gröberen Teilchen entfernt waren, und dessen Hauptmenge aus Teilchen von  $1 \mu$  Äquivalentradius bestand. Die Fallhöhe war 5, 10, 25, 30 cm, und vor jedem Versuch wurde die Aufschwemmung über Nacht auf der Schüttelmaschine behandelt, um zu »Primärteilchen« zu gelangen, und mit ein wenig Ammoniak versetzt.

Die Ergebnisse sind in der Tab. 3 zusammengestellt sowie graphisch in Fig. 5, worin die Umrechnungen auf  $h = 10$  cm vorgenommen sind und die  $P$ -Änderungen in Gewichtskugeln (C) als Einheit angeführt sind. Wenn man bedenkt, welche Schwierigkeiten die Einhaltung absolut konstanter Temperaturbedingungen bei aufeinanderfolgenden Versuchen verursacht, und in Betracht zieht, dass die Einfüllungsverschiedenheiten leicht eine

Tabelle 3.

Fallversuche mit konstanter Tonmenge, aber wechselnder Fallhöhe.  
C-Kugel = 0,0544 g.

Gewichts- angaben in C-Kugel als Einheit gerechnet	Zeitangaben in Minuten						
	Fallhöhe 5 cm		Fallhöhe 10cm	Fallhöhe 25 cm		Fallhöhe 30 cm	
	Beob- achtet	auf h = 10cm um- gerechnet	Beobachtet	Beob- achtet	auf h = 10cm um- gerechnet	Beob- achtet	auf h = 10cm um- gerechnet
1 . . . . .	1	2	0,75	1	0,4	1	0,4
2 . . . . .	1,5	3	2	2	0,8	2	0,6
3 . . . . .	6	12	8	11	4	13	4
4 . . . . .	10	20	17	35	14	37	12
5 . . . . .	13	26	26	58	24	63	11
6 . . . . .	16	32	35,5	82	32	93	31
7 . . . . .	22	44	45	107	42	124	42
8 . . . . .	26	52	56	134	54	158	52
9 . . . . .	32	64	67,5	161	64	194	64
10 . . . . .	36	72	79,5	191	76	225	75
11 . . . . .	42	84	92,5	223	90	276	92
12 . . . . .	48	96	106	257	102	—	—
13 . . . . .	55	110	121	294	118	368	122
14 . . . . .	60	120	135	329	132	394	132
15 . . . . .	68	136	146	366	146	443	148
16 . . . . .	76	152	166	404	162	488	162
17 . . . . .	84	168	182	445	178	—	—
18 . . . . .	93	186	199	489	196	590	196
19 . . . . .	103	206	218	534	214	644	214
20 . . . . .	112	224	237	581	232	700	234
21 . . . . .	122	244	257	629	252	758	252
22 . . . . .	133	266	277	683	274	816	272
23 . . . . .	144	288	299	733	294	887	296
24 . . . . .	155	310	321	786	314	941	314
25 . . . . .	168	336	345	847	338	1013	338
26 . . . . .	181	362	370	911	364	1089	364
27 . . . . .	194	388	397	976	390	1157	386
28 . . . . .	209	418	426	1035	414	1234	412

Störung und eine Verschiebung der ganzen Kurve längs der Abszissenachse herbeiführen, so ist die Übereinstimmung erstaunlich gut.

Gegen Ende der Versuche, wo die grösste Teilchenmenge niedergefallen ist und es einige Hundert Minuten bis zur Abladung einer Kugel dauert, werden selbstverständlich die Abweichungen grösser.

Tabelle 3.  
(Fortsetzung.)

Gewichts- angaben in C-Kugel als Einheit gerechnet	Zeitangaben in Minuten						
	Fallhöhe 5 cm		Fallhöhe 10 cm	Fallhöhe 25 cm		Fallhöhe 30 cm	
	Beob- achtet	auf h = 10 cm um- gerechnet	Beobachtet	Beob- achtet	auf h = 10 cm um- gerechnet	Beob- achtet	auf h = 10 cm um- gerechnet
29 . . . . .	224	448	461	1109	444	1317	440
30 . . . . .	240	480	494	1182	472	1402	468
31 . . . . .	256	512	531	1253	502	1470	490
32 . . . . .	274	548	565	1325	530	1585	528
33 . . . . .	292	584	600	1409	564	1677	560
34 . . . . .	—	—	633	1502	600	1772	590
35 . . . . .	331	662	669	1621	648	1871	624
36 . . . . .	352	704	707	1707	682	1980	660
37 . . . . .	376	752	743	1826	730	2094	698
38 . . . . .	400	800	784	1910	764	2311	770
39 . . . . .	425	850	829	2024	810	2434	812
40 . . . . .	452	904	874	—	—	2563	854
41 . . . . .	481	962	924	2219	888	2699	900
42 . . . . .	510	1020	971	2351	940	2850	950
43 . . . . .	542	1084	1025	2462	984	2998	1000
44 . . . . .	574	1148	1078	2598	1040	3140	1046
45 . . . . .	609	1218	1135	2740	1096	3308	1122
46 . . . . .	644	1288	1188	—	—	3484	1164
47 . . . . .	684	1368	1242	3122	1248	3669	1224
48 . . . . .	726	1452	—	—	—	3861	1288
49 . . . . .	768	1536	—	—	—	4064	1354
50 . . . . .	817	1634	—	3597	1438	4266	1422

Die Striche bedeuten, dass die Registrivorrichtung bzw. der Farbstrich versagt, indessen die Gewichtskugel abgelenkt wurde.

Zu den Versuchen über den Einfluss der Konzentration wurde natürlicher Ancylostom, dessen Teilchen grösstenteils kleiner als  $0,5 \mu$  sind, benutzt. Der Ton wurde, um zu Primärteilchen zu gelangen, vorher nach der modifizierten BEAM-ATTERBERG'schen Methode unter abwechselnder Zentrifugierung mit dem Pinsel bearbeitet, mit einigen Tropfen Ammoniak versetzt und über Nacht auf die Schüttelmaschine gebracht.<sup>1</sup>

Die Konzentrationen entsprachen 73, 37, 19 und 9 Gewichtskugeln sedimentierter Teilchen pro 22 Stunden, und die Ergebnisse sind in Tab. 4 wiedergegeben sowie graphisch in Fig. 6, worin sämtliche Werte in Prozente von  $P_{\infty}$  umgerechnet sind. Die Fallhöhe war konstant 10 cm.

<sup>1</sup> Die nähere Beschreibung dieser von mir benutzten »Normalmethode« erfolgt in »Studien über Tone. 3«.

Der Einfluss der Konzentration macht sich bei der speziellen Versuchsanordnung ein wenig bemerkbar, weil die Fallplatte nicht unendlich dünn gemacht werden kann. Infolgedessen erleidet sie einen Auftrieb seitens der umgebenden Flüssigkeit, und dieser Auftrieb wächst mit der Konzentration. Zwar sucht man vermittelst der Reiter diese Wirkung

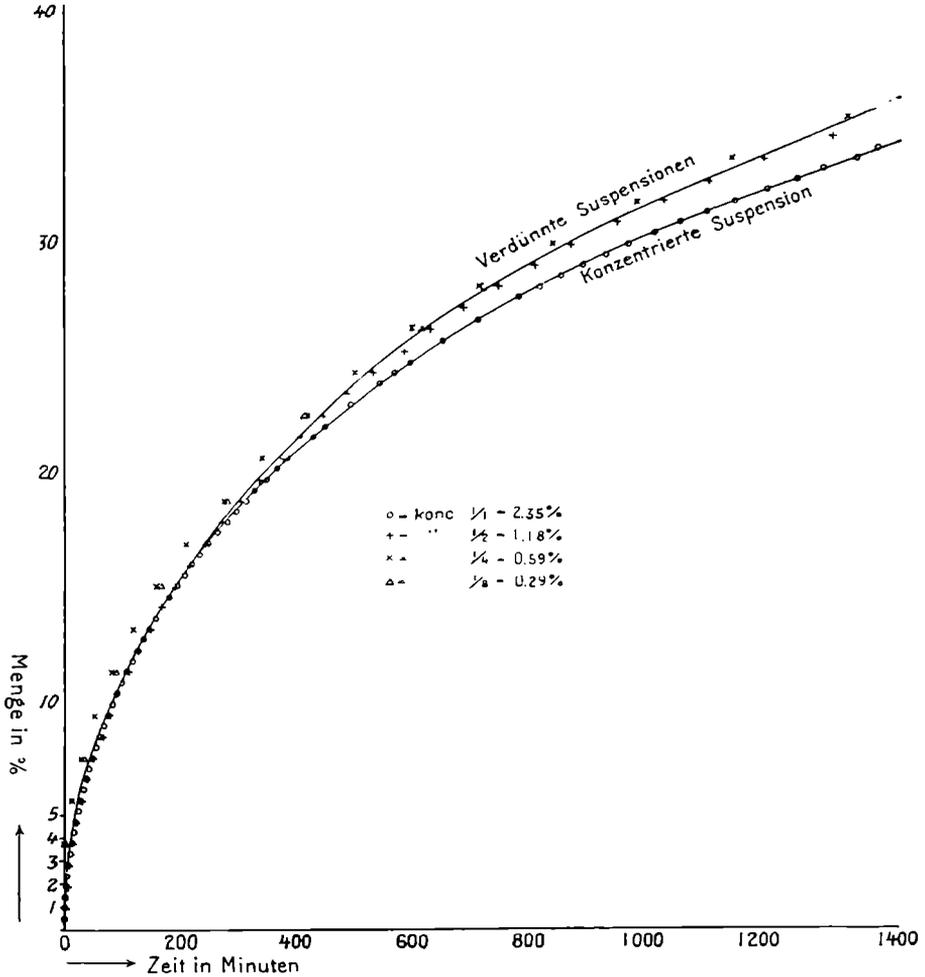


Fig. 6. Fallversuche bei wechselnder Tonkonzentration.

aufzuheben und Gleichgewicht im Zeitmoment Null herzustellen, da aber die Teilchen sedimentieren, vermindert sich der Auftrieb allmählich. Bei grösserer Konzentration ( $> 1\%$ ) kann man übrigens einen verlangsamenden Einfluss auf die Fallgeschwindigkeit wahrnehmen, wahrscheinlich infolge der nicht genügend freien Fallbahn, wodurch die Partikeln einander in ihren Bewegungen hindern. Dies macht sich bei Konzentration  $1/1$  (in Tab. 4 und Fig. 6) geltend, welche augenscheinlich zu gross gewählt ist.

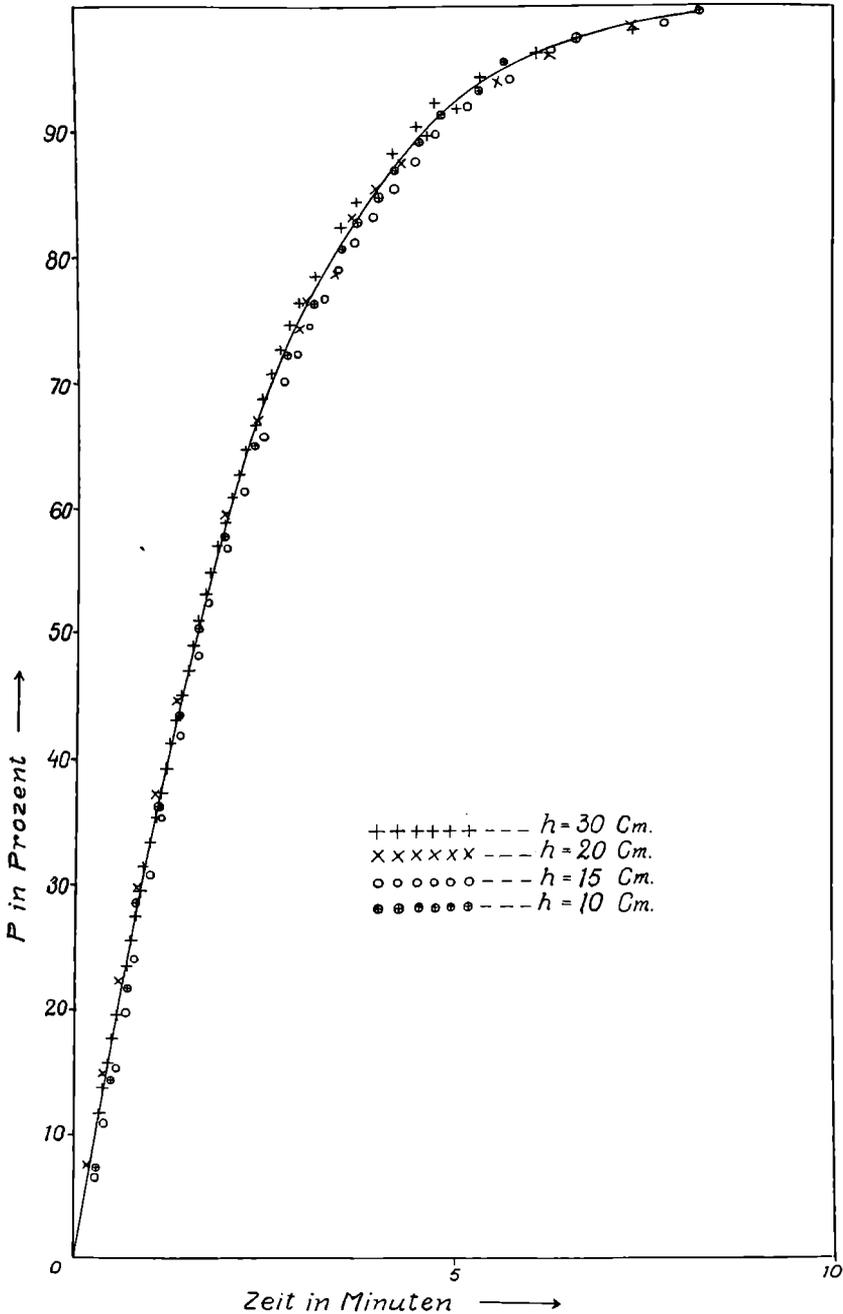


Fig. 7. Fallversuche bei größerer Suspension und wechselnder Fallhöhe.

Sonst rühren die Abweichungen von der Verschiedenartigkeit der Einfüllung sowie von den Strömungen während der ersten Minuten her und zeigen keinen »Gang« an.

Tabelle 4.

Fallversuche bei konstanter Fallhöhe, aber wechselnder  
Ton-Konzentration.

Konzentration  $\frac{1}{1} = 2,35$  g/100 ccm;  $h = 10$  cm; C-Kugel = 0,0544 g.

Zahl der C-Kugeln	Konzentration $\frac{1}{1}$		Konzentration $\frac{1}{2}$		Konzentration $\frac{1}{4}$		Konzentration $\frac{1}{8}$	
	Zeit in Minuten	Gewicht in %						
1 . . . . .	1	0,47	1,5	0,94	1	1,87	2	3,74
2 . . . . .	1,5	0,94	6	1,87	—	3,74	34	7,49
3 . . . . .	3	1,40	9	2,81	13	5,62	90	11,24
4 . . . . .	5	1,87	14	3,74	30	7,49	167	14,98
5 . . . . .	7,5	2,34	21	4,68	53	9,36	281	18,72
6 . . . . .	10	2,81	30	5,62	83	11,24	417	22,47
7 . . . . .	13	3,28	40	6,55	120	13,11	616	26,21
8 . . . . .	16	3,74	51	7,49	160	14,98	877	29,96
9 . . . . .	19	4,21	69	8,42	210	16,85	—	—
10 . . . . .	22	4,68	78	9,36	275	18,72		
11 . . . . .	27	5,15	93	10,30	341	20,60		
12 . . . . .	31	5,62	110	11,24	417	22,47		
13 . . . . .	36	6,09	128	12,17	500	24,34		
14 . . . . .	41	6,55	148	13,11	600	26,21		
15 . . . . .	46	7,02	169	14,04	715	28,09		
16 . . . . .	—	7,49	192	14,98	842	29,96		
17 . . . . .	58	7,96	217	15,91	989	31,83		
18 . . . . .	64	8,42	245	16,85	1151	33,70		
19 . . . . .	71	8,89	273	17,79	1347	35,58		
20 . . . . .	78	9,36	304	18,72				
21 . . . . .	86	9,83	336	19,66				
22 . . . . .	94	10,30	378	20,60				
23 . . . . .	102	10,77	408	21,53				
24 . . . . .	110	11,24	447	22,47				
25 . . . . .	120	11,70	489	23,40				
26 . . . . .	129	12,17	533	24,34				
27 . . . . .	139	12,64	586	25,28				
28 . . . . .	150	13,11	632	26,21				
29 . . . . .	161	13,58	688	27,15				
30 . . . . .	—	14,04	748	28,09				
31 . . . . .	184	14,51	810	29,02				
32 . . . . .	197	14,98	872	29,96				
33 . . . . .	209	15,45	953	30,90				
34 . . . . .	222	15,91	1032	31,83				
35 . . . . .	236	16,38	1110	32,77				
36 . . . . .	251	16,85	1205	33,70				
37 . . . . .	266	17,32	1323	34,64				

Tabelle 4.  
(Fortsetzung.)

Zahl der C-Kugeln	Konzentration 1/1		Konzentration 1/2		Konzentration 1/4		Konzentration 1/8	
	Zeit in Minuten	Gewicht in %						
38 . . . . .	282	17,79						
39 . . . . .	298	18,26						
40 . . . . .	315	18,72						
41 . . . . .	328	19,19						
42 . . . . .	349	19,66						
43 . . . . .	368	20,13						
44 . . . . .	387	20,60						
45 . . . . .	—	21,06						
46 . . . . .	429	21,53						
47 . . . . .	450	22,00						
48 . . . . .	—	22,47						
49 . . . . .	495	22,93						
50 . . . . .	—	23,40						
51 . . . . .	545	23,87						
52 . . . . .	570	24,34						
53 . . . . .	598	24,81						
54 . . . . .	—	25,28						
55 . . . . .	654	25,74						
56 . . . . .	—	26,21						
57 . . . . .	716	26,68						
58 . . . . .	—	27,15						
59 . . . . .	784	27,62						
60 . . . . .	820	28,09						
61 . . . . .	857	28,56						
62 . . . . .	895	29,02						
63 . . . . .	935	29,49						
64 . . . . .	974	29,96						
65 . . . . .	1018	30,43						
66 . . . . .	1062	30,90						
67 . . . . .	1108	31,37						
68 . . . . .	1157	31,83						
69 . . . . .	1212	32,30						
70 . . . . .	1264	32,77						
71 . . . . .	1307	33,24						
72 . . . . .	1365	33,70						
73 . . . . .	1402	34,16						

Die Striche bedeuten, dass die Registriervorrichtung versagt, während indessen die Gewichtskugel abgeladen wurde.

Bei 1/1 Konzentration entspricht 1 C-Kugel =  $\frac{0,9344 \cdot 100}{11,62} = 0,4661\%$

» 1/2 » » » = 0,936 %

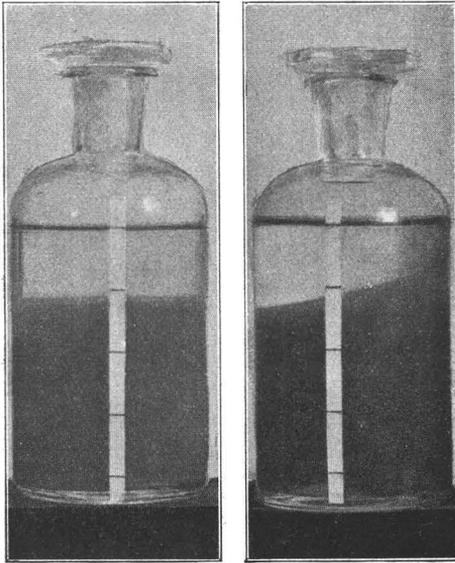
» 1/4 » » » = 1,872 %

» 1/8 » » » = 3,745 %

Zum Vergleich füge ich ausserdem in Fig. 7 die Versuche mit einer grösseren Schluffaufschwemmung hinzu, ohne hier die Ziffern zu reproduzieren.<sup>1</sup>

Wenn wir daher — vorausgesetzt, die Konzentration sei nicht allzugross — bei gewissen Versuchen mit grösseren,  $h_1$ , bei anderen mit kleineren,  $h_2$ , Fallhöhen arbeiten, so können wir bei dem ersten Versuch nach Multiplikation aller Zeitobservationen mit  $h_1/h_2$  die beiden Fallkurven mit einander direkt vergleichen.

Wenn man ferner sämtliche Angaben in Prozenten angibt, braucht man sich weder um die absolute Teilchenmenge, noch um das Gewicht zu kümmern. Allzugross oder allzu-



I II  
Fig. 8. Fallversuche  
mit und ohne  
Schutzmantel.

klein darf man die Tonprobe jedoch nicht nehmen, weil es im ersten Fall schwierig ist, die Einzelkornstruktur (Primärteilchen) aufrechtzuerhalten, im zweiten bekommt man allzuwenig Punkte für die Konstruktion der Kurve. Die Grenzen, bis zu welchen man praktisch damit rechnen kann, dass die Teilchen unabhängig von einander fallen, wurde annähernd bis zu 10 Gr. pro Liter Flüssigkeit gefunden, wenn das Material ziemlich gleichkörnig ist. Hat man aber eine Einmischung von größerem Material, welches schnell sinkt und daher aus der Flüssigkeit verschwindet, braucht man dies nicht mitzurechnen.

Es ist hier vielleicht am Platze, mit einigen Worten den Einfluss der Temperaturänderungen auf die Sedimentation zu erwähnen.

Zu Untersuchungen hierüber eignen sich Bodensuspensionen nicht so gut, weil diese ja immer ungleichkörnig sind. Mit Wasserstoffsperoxyd herausreduzierte kolloide Goldsuspensionen sind nach den Untersuchungen A. WESTGREN's<sup>2</sup> dagegen sehr gleichkörnig und ein für derartige Untersuchungen sehr geeignetes Material. Ist bei der Sedimentation die Temperatur völlig konstant,<sup>3</sup> so sinkt der gefärbte Rand der kleinen Gold-

<sup>1</sup> Siehe Intern. Mitt. f. Bodenkunde 5, 275 (1915).

<sup>2</sup> Zeitschr. anorg. Chem. 94 193 (1916).

<sup>3</sup> Folgendes ist mit Erlaubnis Dr. WESTGREN's seinen noch nicht publizierten Untersuchungen entnommen, welche im selben »Zimmer für Arbeiten bei konstanter Temperatur« wie die des Verfassers ausgeführt worden sind. (Vgl. Zeitschr. f. physikal. Chem. 1918.)

teilchen völlig eben und gleichmässig. Dies trifft auch zu, wenn sich die Temperatur des Sedimentiergefässes langsam, aber gleichförmig um ein bis zwei Zehntelgrad pro Tag ändert.

War aber die Temperaturvariation grösser, so traten Konvektionsströmungen auf. Von Interesse ist es, dass, wenn die Temperatur nicht gleichmässig, sondern von der einen Seite her langsam verändert wird, und man keinen Schutzmantel benutzt, die Sedimentierebenen nicht horizontal, sondern schief verlaufen (vgl. Fig. 8, I und II).<sup>1</sup>

Diese Versuche sind deshalb für die Schlämmanalysen von Interesse, weil sie zeigen, dass bei Verwendung eines Isolationsmantels, welcher alle *plötzlichen* Temperaturveränderungen ausschliesst, man auch bei nicht völlig konstanter Temperatur des Zimmers ein Misslingen des Versuches durch Konvektionsströmungen nicht zu befürchten braucht. Grössere Temperaturschwankungen als 0,2 Grad pro Tag sind indessen unbequem.

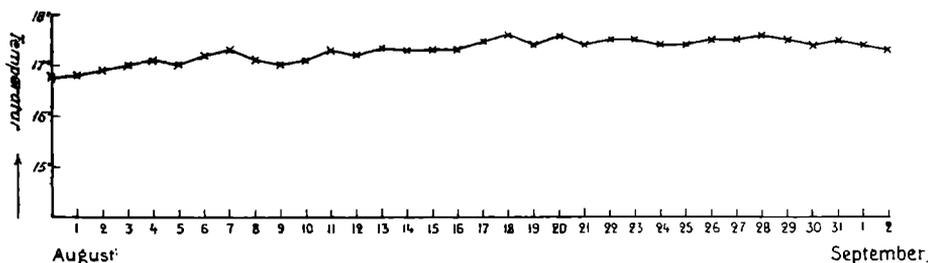


Fig. 9. Temperaturdiagramm des Arbeitszimmers.

Die Temperaturveränderlichkeit des »Zimmers für Arbeiten bei konstanter Temperatur« ist für einige Zeit in das Diagramm Fig. 9 eingezeichnet.

## 6.

### Mathematische Analyse der Fallkurve.

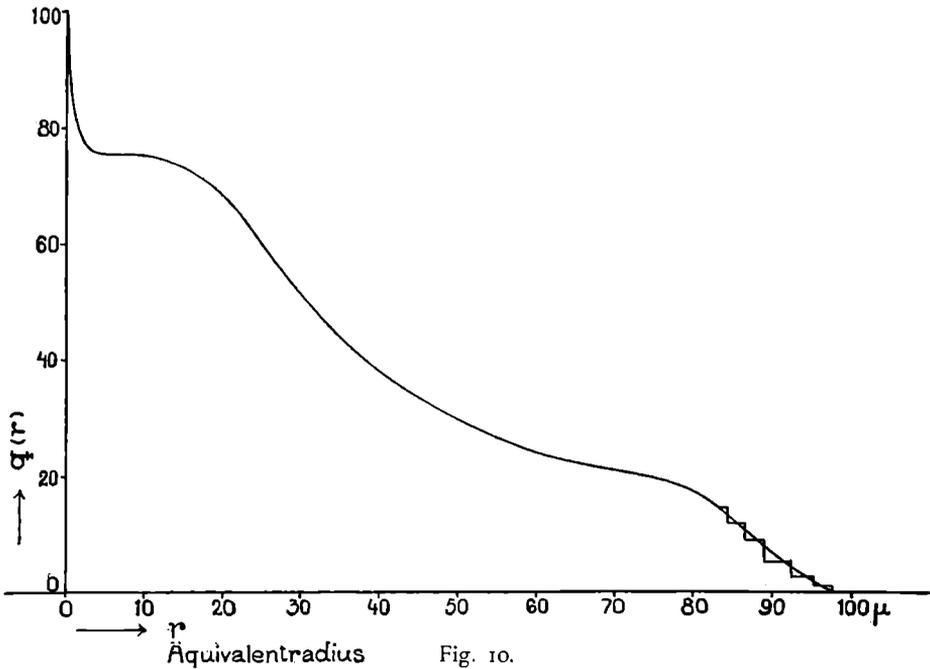
Das in den vorigen Abschnitten beschriebene Verfahren hat uns eine Methode gegeben, um für verschiedene Bodenablagerungen eine charakteristische Kurve, die Fallkurve  $P(t)$ , zu konstruieren; wir haben auch die Unabhängigkeit dieser Kurve von der Fallhöhe  $h$  und der absoluten Menge der aufgeschwemmten Substanzmenge nachgewiesen, vorausgesetzt, dass wir  $P$  in Bruchteilen von  $P_\infty$  ausdrücken. Hierbei wird  $P_\infty$  der Einfachheit halber gleich 100 gesetzt, und wir erhalten daher die  $P$ -Werte in Prozenten ausgedrückt.

<sup>1</sup> Auf der Photographie lässt sich dies nur schwer reproduzieren, weil die beim Exponieren notwendige Belichtung Konvektionsströmungen verursacht und die Schichtenbildung stört.

Wir wollen nun zur genaueren Analyse der Fallkurve übergehen. Bezeichnen wir diejenige Teilchenmenge, deren Äquivalentradien grösser als  $r$  sind, mit  $q(r)$ , wobei wir am zweckmässigsten die  $q$ -Werte in Prozenten ausdrücken. Zwischen  $r$  und  $r + \Delta r$  liegen dann  $\Delta q$  Prozent, wenn  $\Delta q$  die Veränderung der Funktion  $q$  ist, die dem Intervall  $\Delta r$  entspricht.

Die Funktion  $q(r)$  nimmt somit stets ab von 100 für den kleinsten Äquivalentradius bis 0 für den grössten. Ist  $q$  für irgendein  $r$ -Intervall konstant, so bedeutet dies, dass in diesem Intervall keine Teilchen vorhanden sind ( $\Delta q = 0$ ).

Streng genommen ist die  $q$ -Funktion keine kontinuierliche Funktion von  $r$ , sondern sollte einen treppenartigen Charakter wie rechts in Fig. 10



haben; aber in Wirklichkeit können wir derartig kleine Veränderungen von tausendstel Prozent nicht experimentell verfolgen und betrachten die Funktion als eine kontinuierliche, wobei jede Radiusgrösse repräsentiert ist.

Es ist nun zweckmässig, eine andere Funktion  $F(r)$  zu bilden, die uns die mathematische Behandlung erleichtert und die Teilchenmenge als eine *Fläche* graphisch veranschaulicht.

Machen wir  $\Delta r$  sehr klein, so geht

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta r} \text{ in } -\frac{dq}{dr} \text{ über.}$$

(Das Minuszeichen erhalten wir, weil  $q$  mit steigendem  $r$  abnimmt.)

Setzen wir nun  $-\frac{dq}{dr} = F(r)$ , so können wir durch Integration der Funktion  $F(r)$  zwischen zwei  $r$ -Werten  $r_1$  und  $r_2$  die Prozentmenge der Teilchen zwischen diesen zwei Äquivalentradien erhalten:

$$q(r_1) - q(r_2) = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dq}{dr} dr = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr,$$

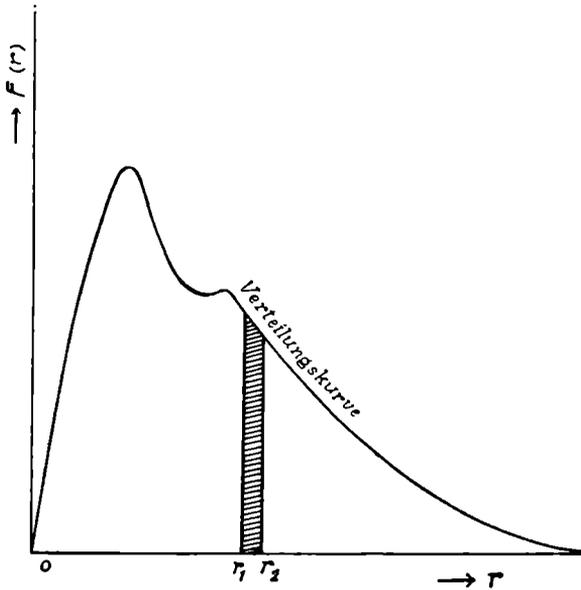


Fig. 11.

und die schraffierte Fläche in Fig. 11 stellt die Teilchenmenge dar. Diese Funktion  $F(r)$  wollen wir als die Verteilungskurve der Bodenablagerung bezeichnen und werden jetzt zeigen, wie es möglich ist, aus der Fallkurve  $P(t)$  die Funktion  $q(r)$  sowie die Verteilungskurve  $F(r)$  zu berechnen.<sup>1</sup>

In Fig. 12 wird schematisch ein Stück der Fallkurve  $P(t)$  dargestellt. Der Einfachheit halber lassen wir die Kurve bei U enden; dem Stück OV entspricht somit 100 Prozent oder dem Niederfall der totalen Menge  $P_\infty$ . Betrachten wir ein bestimmtes Zeitintervall  $t$ , so haben sämtliche Teilchen, deren Geschwindigkeiten  $v$  grösser sind, als durch die Gleichung

$$v = \frac{h}{t}$$

<sup>1</sup> Die folgende Deduktion weicht in *formaler* Hinsicht ein wenig von der ersten mathematischen Behandlung ab. Bei der Bearbeitung dieses Kapitels war mir Herr Mag. phil. H. FAXÉN behilflich, wofür ich ihm auch hier bestens danke.

ausgedrückt wird, den Boden erreicht und sind aus der Flüssigkeit verschwunden (vgl. S. 26). Dieser Zeit  $t$  entspricht der Punkt A auf der Fallkurve. Legen wir durch diesen Punkt eine Tangente zur Fallkurve, so schneidet diese die Ordinatenachse in B. Die Teilchenmenge, welche dem Punkt A entspricht, können wir uns aus zwei Teilchenmengen zusammengesetzt denken, einem Teil noch im Fallen befindlicher  $R$ , und einem Teil schon niedergefallener,  $S$ .

Nehmen wir nun ein ganz kleines Zeitintervall in der Nähe von  $t$ , so können wir, wenn wir die Zunahme von  $P$  betrachten, für dieses kleine Zeitintervall von allen Teilchen mit grösserer Geschwindigkeit als  $v = \frac{h}{t}$  absehen und den Satz 2 auf S. 26 anwenden.

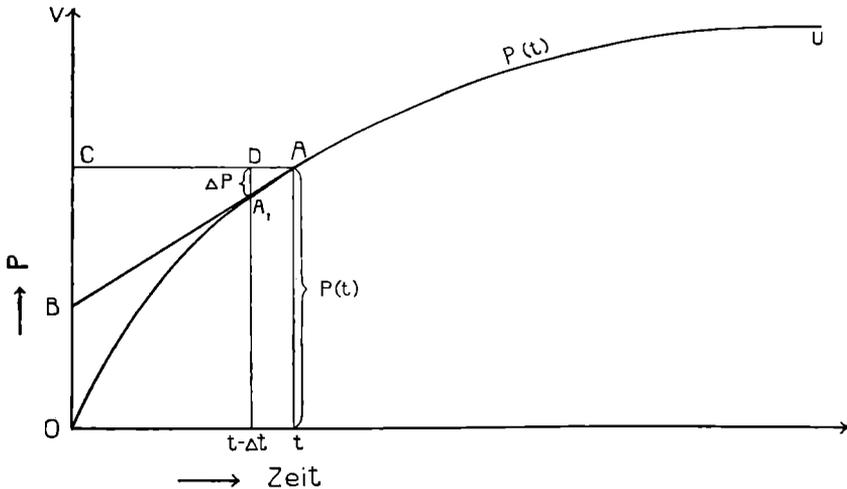


Fig. 12.

Während der Zeit  $\Delta t$  fallen nieder:

$$P(t) - P(t - \Delta t) = \Delta P \% \text{ (vgl. die Figur).}$$

Pro Sekunde somit:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \%.$$

Von *diesen* sämtlichen kleinen Teilchen (deren Geschwindigkeiten  $v < \frac{h}{t}$  betragen) ist während der ganzen Fallzeit bis  $t$  somit eine gewisse Menge

$$R = t \cdot \frac{\Delta P}{\Delta t} \% \text{ ausgefallen.} \quad (7)$$

Aus der Figur ist ersichtlich, dass

$$\frac{BC}{CA} = \frac{A_1 D}{DA} \text{ oder } \frac{BC}{t} = \frac{\Delta P}{\Delta t},$$

somit

$$BC = t \cdot \frac{\Delta P}{\Delta t} = R.$$

Nun ist aber  $BC = OC - OB$ .  $BC$  repräsentiert die kleineren, nur teilweise niedergefallenen Teilchen ( $R$ ) und  $OC$  die Gesamtmenge sowohl der größeren, im Zeitmoment  $t$  schon niedergefallenen ( $S$ ) als der kleineren, nur teilweise niedergefallenen Teilchen ( $R$ ).

Hieraus

$$OB = OC - t \cdot \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

oder, da ja nach (7)

$$t \frac{\Delta P}{\Delta t} = R$$

ist,  $OB = S$ . Wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

Legt man durch einen Punkt der Fallkurve eine Tangente, so entspricht der Abstand zwischen Origo und dem Schnittpunkt dieser Tangente mit der Ordinatenachse derjenigen Fraktion der Teilchen, deren Geschwindigkeiten so gross sind, dass sie zu der Zeit, welche dem Tangierungspunkt entspricht, sämtlich niedergefallen sind.

Angenommen, der Äquivalentradius dieser Teilchen sei  $> r$ , so ist augenscheinlich nach unserer obigen Definition dieses Stück  $OB$  gleich unserer Funktion  $q(r)$ .

Wir können, weil  $OB = q(r)$ ;  $OC = P(t)$  und  $BC = t \cdot \frac{\Delta P}{\Delta t}$ , die obige Gleichung  $BC = OC - OB$  schreiben:

$$q(r) = P(t) - t \frac{dP}{dt}, \quad (8)$$

indem wir

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} \text{ setzen.}$$

Nach der Definition ist

$$F(r) = -\frac{dq}{dr},$$

somit

$$\begin{aligned} F(r) &= -\frac{dt}{dr} \cdot \frac{dq}{dt} \\ &= -\frac{dt}{dr} \cdot \frac{d}{dt} \left( P(t) - t \frac{dP}{dt} \right) \\ F(r) &= t \frac{d^2 P}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dr}. \end{aligned} \quad (9)$$

Setzen wir jetzt die Gültigkeit des STOKE'schen Gesetzes voraus so ist nach 3 a

$$t = \frac{h}{v} = \frac{h}{Cr^2} \quad (10 a)$$

und

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{2h}{Cr^3} = -\frac{2t}{r}. \quad (10 b)$$

Durch Substitution in (9)

$$F(r) = -\frac{2t^2}{r} \cdot \frac{d^2 P}{dt^2}. \quad (11)$$

Diese Gleichung (11) erlaubt uns für ein bestimmtes  $r$  den entsprechenden Wert der Funktion  $F(r)$  zu berechnen. Man wählt beliebige Werte von  $r$  (0,5  $\mu$ , 1  $\mu$ , 2  $\mu$ , u. s. w.) und berechnet gemäss (10 a) die entsprechenden  $t$ -Werte. Dann bestimmt man die zweite Ableitung der experimentell ermittelten Fallkurve, welche eben diesem  $t$ -Wert entspricht. Wie dies praktisch am besten geschieht, wird weiter unten (Abschn. 7) näher erläutert.

\* \* \*

Wir können aus der Form der Fundamentalgleichung (11) zur Berechnung von  $F(r)$  einige Schlüsse ziehen.  $F(r)$  bedeutet ja die Teilchenmenge mit dem Äquivalentradius  $r$  oder strenger

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\text{Teilchenmenge}}{\text{Radiusintervall}}$$

und kann selbstverständlich nicht negativ werden, sondern muss entweder positiv oder Null sein.

Hieraus folgt, dass der Faktor  $\frac{d^2 P}{dt^2}$  niemals positiv, sondern stets negativ oder Null ist, und dies bedeutet, dass die Fallkurve stets nach oben konvex bleibt.

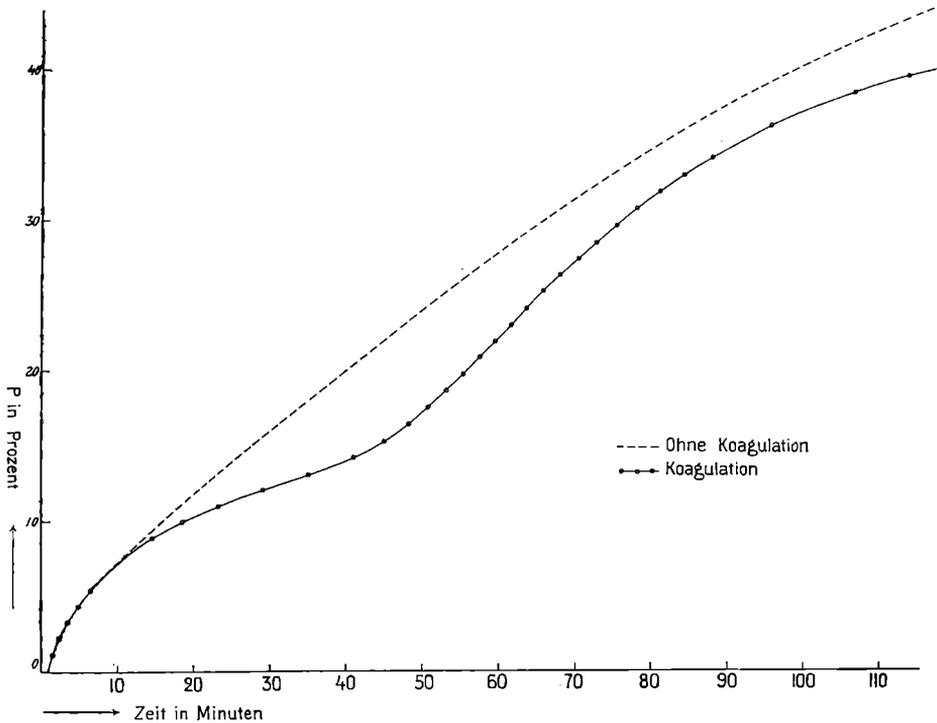


Fig. 13. Fallkurve mit und ohne Koagulation.

Es kommen experimentell Fälle vor, wo diese Forderung nicht erfüllt ist, wie z. B. bei der in Fig. 13 reproduzierten Fallkurve. Dies ist eine »Koagulationskurve« und zeigt an, dass die Forderung der Unabhängigkeit der Fallgeschwindigkeit der Teilchen von einander nicht erfüllt ist, sondern dass Koagulation oder andere Störungen während des Versuchs eingetreten sind. Solche Fälle kann man vorläufig nicht rechnerisch behandeln, weil die zweite Ableitung negativ ist, und es ergibt sich von selbst, dass der Versuch in irgendeiner Weise fehlerhaft war.

Auf einige andere Fälle sei ebenfalls hingewiesen. Legen wir zwei Tangenten zur Fallkurve durch die Punkte A und A', so schneiden diese die Ordinatenachse in B resp. B' (Fig. 14):

$$B'B = OB' - OB.$$

Unter Hinweis auf S. 51 folgt daraus, dass

$$B'B = q(r') - q(r),$$

also die Teilchenmenge ist, welche zwischen denjenigen Äquivalentradien liegt, welche den Zeiten  $t$  und  $t'$  entspricht.

Verläuft die Kurve für irgend eine Strecke  $A'$  und  $F$  geradlinig (linear), so bedeutet dies, dass in dem betreffenden Intervall keine Teilchen vorhanden sind, weil ja die Tangenten von  $A'$  und  $F$  die Achse in demselben Punkt  $B'$  schneiden.

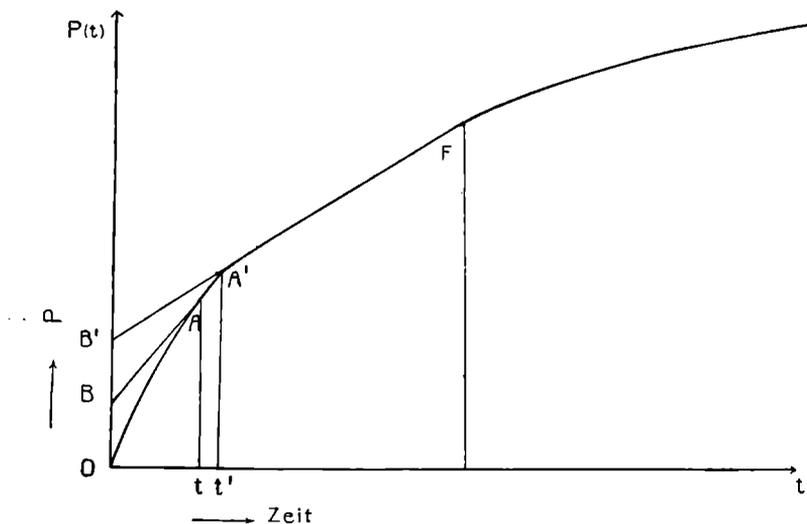


Fig. 14.

Ein Knie wie bei  $A'$  bedeutet dagegen, dass eine grosse Teilchenmenge zwischen den entsprechenden Äquivalentradien vorhanden ist. Die Verteilungskurve besitzt hier ein Maximum.

Es verdient vielleicht zum Schluss nochmals hervorgehoben zu werden, dass  $r$  diejenigen Teilchen sind, die eben zum Zeitpunkt  $t$  aus der Flüssigkeit völlig sedimentiert sind und daher daraus verschwinden. Die Beziehung zwischen diesen beiden Grössen reguliert den Verlauf der Sedimentation, und wenn wir uns hierbei auf die STOKES'sche Gleichung stützen, wird

$$r = \sqrt{\frac{h}{Ct}}, \quad (3c)$$

während bei komplexeren Sedimentationsgleichungen entsprechend verwickeltere und für vorliegende Berechnungen unnötig komplizierte Gleichungen entstehen würden.

\* \* \*

In manchen Fällen dürfte es anschaulicher sein, die Verteilungskurve statt auf die Gewichtsmengen  $F(r)$  auf die Teilchenzahl  $N$  zu beziehen. Es gilt für ein kleines Intervall  $dr$ , wo wir  $r$  als konstant betrachten:

$$F(r) dr = N \cdot dr \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \sigma,$$

$$N = \frac{F(r)}{\frac{4}{3} \pi r^3 \sigma}, \quad (12)$$

wo  $\sigma$  das spezifische Gewicht der Teilchen ist.

Wir brauchen somit einfach nur die  $F(r)$ -Werte durch  $\frac{4}{3} \pi r^3 \sigma$  zu dividieren, um die Teilchenzahl  $N$  im betreffenden Intervall zu erhalten. Die Teilchen sind hierbei als sphärisch gedacht, und selbstverständlich kann die wirkliche Teilchenzahl Abweichungen von der berechneten aufweisen.

Das Berechnungsverfahren ist analog dem bei der Berechnung der Teilchengrösse bei kolloiden Lösungen verwendeten. Da es keine anderen Methoden gibt, dürften diese Zahlen wenigstens der Grössenordnung nach richtig sein. Die Teilchenzahl  $N$  als Funktion von  $r$  können wir zweckmässig als die *Häufigkeitsfunktion*,  $N(r)$  bezeichnen, während  $F(r)$  die *Verteilungsfunktion* ist.

## 7.

### Die Berechnung der Verteilungskurve aus der Fallkurve.

Gehen wir nun auf die rechnerische Behandlung etwas näher ein.

Um  $F(r)$  zu bestimmen, müssen wir die Krümmung oder  $\frac{d^2 P}{dt^2}$  der Fallkurve kennen. Da es schwer ist, die Krümmung mit einiger Genauigkeit aus der Kurve direkt zu bestimmen, muss man hier den folgenden Weg einschlagen.

Man zeichnet eine Hilfskurve, die  $\frac{dP}{dt}$  oder den Winkelkoeffizienten der Tangente der Fallkurve graphisch als Funktion der Zeit  $t$  darstellt. Dieselbe erhält man folgendermassen:

Sind  $P_1$  und  $P_2$  die niedergefallenen Mengen, welche den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  entsprechen, so ist, wenn wir in dem Intervalle  $\frac{dP}{dt}$  als konstant

betrachten,  $\frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1}$  gleich  $\frac{dP}{dt}$ .

Aus dem Observationsmaterial erhält man so eine diskontinuierliche Kurve  $\left(t, \frac{dP}{dt}\right)$ , welche aus horizontalen Stückchen besteht.

Statt dieser diskontinuierlichen Kurve zieht man mit freier Hand eine kontinuierlich gezogene Kurve, welche daher  $\frac{dP}{dt}$  als Funktion von der Zeit angibt, und kann hieraus mit ziemlich grosser Genauigkeit den Winkel-

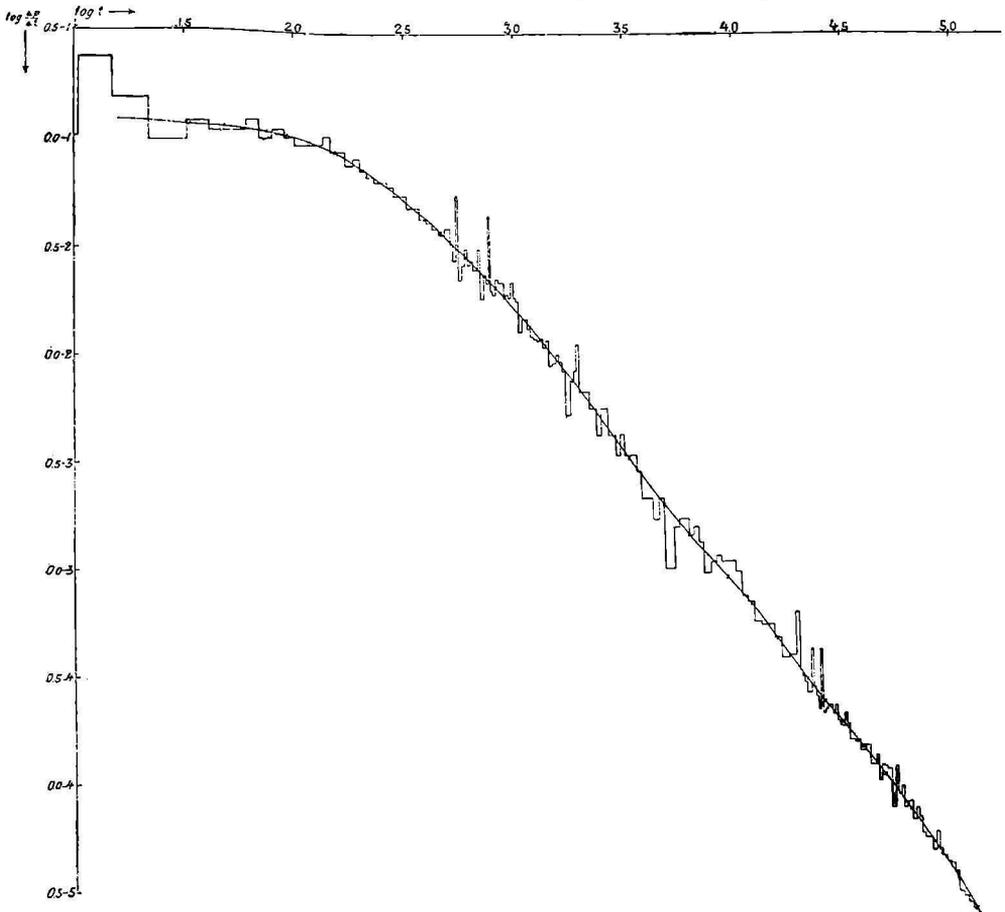


Fig. 15.

koeffizienten der Tangente zu dieser sog. Hilfskurve graphisch ermitteln, wodurch  $F(r)$  sich nach Gleichung (11) berechnen lässt. Zweckmässig ist es, um bei der graphischen Darstellung nicht allzu unförmliche und in der Länge ausgezogene Kurven zu bekommen,  $F(r)$  mit  $r$  zu multiplizieren und als Abszisse  $\ln r$  abzutragen. Die von zwei Ordinaten begrenzte Fläche gibt auch in diesem Falle die Bodenmenge in Prozent an, weil

$$d(\ln r) \cdot r \cdot F(r) = \frac{1}{r} dr \cdot r \cdot F(r) = dr F(r).$$

In gewissen, aber nicht allen, Fällen ist es aus praktischen Gründen zweckmässig, auch beim Aufzeichnen der Hilfskurve eine variable (logarithmische) Skala zu verwenden, um nicht allzu grosse Figuren zu bekommen. Fig. 15 zeigt eine solche Hilfskurve. Hier setzt man

$$\text{als Abszisse } x = {}^{10}\text{Log } t = {}^e \ln t \cdot {}^{10}\text{Log } e,$$

$$\text{als Ordinate } z = {}^{10}\text{Log } y = {}^{10}\text{Log } \frac{dP}{dt} = {}^e \ln \frac{dP}{dt} \cdot {}^{10}\text{Log } e.$$

Man hat dann einige einfache Transformationen zu machen:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\frac{d^2 P}{dt^2}}{\frac{dP}{dt}} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot {}^{10}\text{Log } e \\ &= \frac{\frac{d^2 P}{dt^2}}{\frac{dP}{dt}} \cdot t; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\text{da } \frac{dt}{dx} = \frac{t}{{}^{10}\text{Log } e} \text{ ist.}$$

Man kann die Gleichung (11) auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{2}{r} \cdot t^2 \frac{d^2 P}{dt^2} \\ &= \frac{2t}{r} \cdot \frac{\frac{d^2 P}{dt^2}}{\frac{dP}{dt}} \cdot t \cdot \frac{dP}{dt} \end{aligned}$$

oder nach (13):

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{2t}{r} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dP}{dt} \\ F(r) &= \frac{2t}{r} \cdot y \cdot \frac{dz}{dx}. \end{aligned} \tag{14}$$

Tabelle 5.

Die Konstruktion der Hilfskurve Fig. 15 für den dänischen Ton  
»Rhæt ler». (Vellensberg, Bornholm.)

$t_n$ in Sekunden	$t_n$ auf 10 cm Fallhöhe umgerechnet in Sekunden	$t_n - t_{n-1}$ in Sekunden	$\log \frac{P_n - P_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$	$\log t_n$
<b>B</b>				
21	10,5	4,5	0,378 - 1	1,021
30	15	7	0,188 - 1	1,176
44	22	11	0,090 - 2	1,342
66	33	9	0,077 - 1	1,519
84	42	10	0,031 - 1	1,623
104	52	10	0,031 - 1	1,716
124	62	9	0,077 - 1	1,792
142	71	11	0,990 - 2	1,851
164	82	10	0,031 - 1	1,914
184	92	11	0,990 - 2	1,964
206	103	12	0,952 - 2	2,013
230	115	12	0,952 - 2	2,061
254	127	12	0,952 - 2	2,104
278	139	11	0,990 - 2	2,143
300	150	13	0,918 - 2	2,176
326	163	13	0,918 - 2	2,212
352	176	15	0,855 - 2	2,245
382	191	14	0,885 - 2	2,281
410	205	16	0,827 - 2	2,312
442	221	17	0,800 - 2	2,344
476	238	18	0,776 - 2	2,377
512	256	18	0,776 - 2	2,408
548	274	19	0,752 - 2	2,438
586	293	21	0,709 - 2	2,467
628	314	21	0,709 - 2	2,497
670	335	24	0,651 - 2	2,525
718	359	24	0,651 - 2	2,555
766	383	27	0,600 - 2	2,583
820	410	28	0,584 - 2	2,613
876	438	30	0,554 - 2	2,641
936	468	32	0,526 - 2	2,670
1000	500	30	0,554 - 2	2,699
<b>C</b>				
1060	530	15	0,484 - 2	2,724
1090	545	18	0,405 - 2	2,736
1126	563	9	0,707 - 2	2,750
1148	574	22	0,318 - 2	2,759
1192	596			2,775

Temp. = 15°, r. Fallhöhe 20 cm.

Die ganze Teilchenmenge = 11,8812 g, und somit,  $(P_n - P_{n-1})$  für 1 B-Kugel (0,1276 g) = 1,074 %, für 1 C-Kugel (0,0544 g) = 0,458 %, für 1 D-Kugel (0,0153 g) = 0,129 %.

Im Anfang der Tabelle bedeutet jede Zeitangabe, dass 1 B-Kugel gefallen ist, dann kommt bei 1090 Sek. statt B. eine C-Kugel (von der Zeit an, wo C angeführt ist). Schliesslich nach 50 Minuten fallen D-Kugeln (hier nicht abgedruckt, um die Tabelle nicht allzugross zu machen).

Es bedeuten in der Tabelle:

$t_n$  die Zeitablesungen in Sekunden,

$t_n - t_{n-1}$  das Zeitintervall zwischen zwei Zeitablesungen,

$P_n$  das Gewicht in Prozenten der auf die Platte niedergefallenen Teilchen zur Zeit  $t_n$ ,

$P_n - P_{n-1}$  die Gewichtsveränderung für das Zeitintervall  $t_n - t_{n-1}$  in Prozenten,

$\log \frac{P_n - P_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$  die Ordinate  $z$  in Fig. 15,  $\log t_n$  die Abszisse  $x$  in Fig. 15.

Tabelle 6.

Die Berechnung von  $F(r)$  und  $N(r)$  für dänischen Ton »Rhæt ler».  
(Vellensberg, Bornholm.)

$r$ in $\mu$	$\log t$	$z = \log y$	$\frac{dz}{dx}$	$r F(r)$	$\ln r$	$N(r)$	$\log N(r)$
30	1,533	0,062 - 1	0,08	0,63	3,401	$6,55 \cdot 10^2$	2,81
25	1,691	0,050 - 1	0,11	1,2	3,219	$2,83 \cdot 10^3$	3,45
20	1,855	0,022 - 1	0,19	3,1	2,996	$1,70 \cdot 10^4$	4,23
18	1,976	0,000 - 1	0,29	5,5	2,890	$4,65 \cdot 10^4$	4,67
16	2,079	0,967 - 2	0,36	8,0	2,773	$1,08 \cdot 10^5$	5,03
14	2,195	0,918 - 2	0,52	13,5	2,639	$3,11 \cdot 10^5$	5,49
12	2,329	0,835 - 2	0,67	19,7	2,485	$8,39 \cdot 10^5$	5,92
10	2,487	0,715 - 2	0,82	26,1	2,303	$2,31 \cdot 10^6$	6,36
8	2,681	0,539 - 2	0,98	32,5	2,079	$7,01 \cdot 10^6$	6,85
7	2,797	0,422 - 2	1,04	34,6	1,946	$1,27 \cdot 10^7$	7,10
6	2,931	0,279 - 2	1,12	36,3	1,792	$2,48 \cdot 10^7$	7,39
5	3,089	0,093 - 2	1,24	37,8	1,609	$5,35 \cdot 10^7$	7,73
4	3,283	0,837 - 3	1,36	35,9	1,386	$1,24 \cdot 10^8$	8,09
3	3,533	0,474 - 3	1,43	29,0	1,099	$3,17 \cdot 10^8$	8,50
2,5	3,691	0,254 - 3	1,33	23,4	0,916	$5,30 \cdot 10^8$	8,72
2,2	3,802	0,109 - 3	1,22	20,0	0,788	$7,56 \cdot 10^8$	8,88
2,0	3,885	0,014 - 3	1,16	18,4	0,693	$1,02 \cdot 10^9$	9,01
1,8	3,976	0,906 - 4	1,21	18,5	0,588	$1,55 \cdot 10^9$	9,19
1,6	4,079	0,777 - 4	1,31	18,8	0,470	$2,54 \cdot 10^9$	9,40
1,4	4,195	0,614 - 4	1,47	19,1	0,336	$4,10 \cdot 10^9$	9,64
1,2	4,329	0,419 - 4	1,41	15,8	0,182	$6,74 \cdot 10^9$	9,83
1,1	4,404	0,315 - 4	1,29	13,5	0,095	$8,15 \cdot 10^9$	9,91
1,0	4,487	0,214 - 4	1,24	12,5	0	$1,11 \cdot 10^{10}$	10,05
0,9	4,579	0,097 - 4	1,25	11,9	-0,105	$1,60 \cdot 10^{10}$	10,20
0,8	4,681	0,964 - 5	1,33	11,7	-0,223	$2,53 \cdot 10^{10}$	10,40
0,7	4,797	0,804 - 5	1,43	11,4	-0,358	$4,20 \cdot 10^{10}$	10,62
0,6	4,931	0,601 - 5	1,58	10,8	-0,511	$7,37 \cdot 10^{10}$	10,87
0,5	5,089	0,335 - 5	1,80	9,5	-0,693	$1,34 \cdot 10^{11}$	11,13

Die Menge mit Radius  $> 30 \mu$  = die registrierte Menge bis  $t_{30} - t_{30} \cdot y = 4,4 - 4,0 = 0,4$  %.

Die Menge mit Radius  $< 0,5 \mu$  = die registrierte Menge nach  $t_{0,5}$  (das Koagulierte mitgerechnet) +  $t_{0,5} \cdot y_{0,5} = 16,5 + 2,7 = 19,2$  %.

Die Menge mit Radius zwischen  $30 \mu$  und  $0,5 \mu$ , gefunden aus der Verteilungskurve (Fig. 16) =  $80,2$  %.

Das Ganze =  $80,2 + 19,2 + 0,4 = 99,8$  %.

Aus der Hilfskurve  $(x, z)$  liest man teils  $\frac{dz}{dx}$  ab, d. h. den Winkelkoeffizienten der Tangente, teils  $y$ , vermittelt der Gleichung  $z = \log y$ , und man bestimmt  $F(r)$  vermittelt obiger Gleichung (14).

Es muss vielleicht darauf aufmerksam gemacht werden, dass  $y$  eine bestimmte Bedeutung hat. Aus  $y = \frac{dP}{dt}$  ersieht man, dass  $y dt = dP$ , d. h. gleich der in der Zeiteinheit ausfallenden Teilchenmenge ist.

Zur Veranschaulichung und zum besseren Verständnis des oben Erläuterten sowie der Berechnungsmethode dient am besten ein Beispiel, und es sind daher in einem Bruchstück der Tabelle 5, die zur Konstruktion der Hilfskurve für die Bestimmung der Verteilungskurve dient, die nötigen Beobachtungen und Daten zusammengestellt.

In Tab. 6 sind dann die zur Konstruktion der Verteilungskurve nötigen Daten zusammengestellt.

Die erste Kolumne enthält den in  $\mu$  gemessenen Radius  $r$ , für den man den Wert der Funktion  $F(r)$  bestimmen will.  $t$  ist die gemäss der Gleichung

$$r = \sqrt{\frac{h}{Ct}} \quad (3c)$$

daraus bestimmte Zeit in Sekunden.

$z = \log y$  ist die graphisch aus der Hilfskurve Fig. 15 bestimmte Ordinate, die der Abszisse  $x = \log t$  entspricht.

$\frac{dz}{dx}$  ist der ebenfalls graphisch aus Fig. 15 bestimmte Winkelkoeffizient der Tangente für die Abszisse  $x = \log t$ , und schliesslich enthält die fünfte Kolumne den gesuchten Wert von  $rF(r)$ , berechnet gemäss der Gleichung (14).

In Fig. 16 ist schliesslich die auf Grund der Tab. 6 gezeichnete Kurve wiedergegeben.

Um die zwischen zwei Äquivalentradien  $r_n$  und  $r_{n+1}$  liegende Menge in Prozenten zu berechnen, hat man an der Kurve die entsprechenden Ordinaten zu ziehen und die Fläche durch Zählen der Quadrate auf dem Millimeterpapier zu bestimmen.

Man kann auch mit weniger Mühe ein annähernd richtiges Bild der Verteilung bekommen. Dies kann im Anschluss an die Darstellung auf S. 50 dadurch bewerkstelligt werden, dass man durch die verschiedenen Punkte der Fallkurve Tangenten zieht.

In Fig. 17 sind schliesslich die Häufigkeitsfunktion für denselben Ton nach den Angaben auf S. 55 berechnet, wiedergegeben.

Unter Hinweis auf das in meiner Einleitung: Studien über Tone I über die Verteilungskurven Gesagte sei hier noch auf folgendes aufmerksam gemacht.

Es kommt ja in manchen oder richtiger den meisten Fällen vor, dass ein mehr oder weniger grosser Teil der Bodenprobe aus so ganz kleinen Teilchen besteht, dass dieselben nicht in absehbarer Zeit sedimentieren. Für diese kleinsten Teilchen kann man die hier geschilderte Methode zur Ermittlung der Verteilung nicht verwenden. Dies trifft für Teilchen mit einem Äquivalentradius unter  $0,3 \mu$  zu. Um aber diese Teilchen mit zu bekommen, hebert man z. B. nach 100 Stunden zweckmässigerweise die Flüssigkeit mittelst des Siphons ab, wobei darauf geachtet wird, dass die Öffnung des Siphons sich in gleicher Höhe mit der Platte befindet. Man reinigt und justiert dann den Apparat aufs neue und setzt soviel von einer Elektrolytlösung zur abgeheberten Flüssigkeit hinzu, dass sämtliche Teilchen koagulieren, und füllt die Flüssigkeit aufs neue hinein, wobei die Teilchen auf die Platte niederfallen. Das Gewicht dieses Koagulums zusammen mit der früher auf die Platte niedergefallenen Menge ist die Totalmenge sämtlicher Teilchen ( $P_{\infty} = A$ ). Links in der Figur sind nach Schluss der Verteilungskurve jene kleinsten Teilchen graphisch durch ein Quadrat veranschaulicht, dessen Area der prozentischen Menge entspricht. Man kann die *mittlere* Teilchengrösse derselben durch Auszählen von sämtlichen in einem optisch abgegrenzten Volumen einer Suspension bekannter Konzentration vorhandenen Teilchen bestimmen. Um die Verteilung innerhalb dieses Gebietes zu erforschen, müsste man zu komplizierten Methoden des Studiums der BROWN'schen Bewegung greifen.<sup>1</sup>

Ferner ist es bei gröberen Bodenablagerungen unmöglich, die Registrierung der Fallgeschwindigkeit genügend schnell auszuführen, um die Verteilung für die grössten Teilchen be-

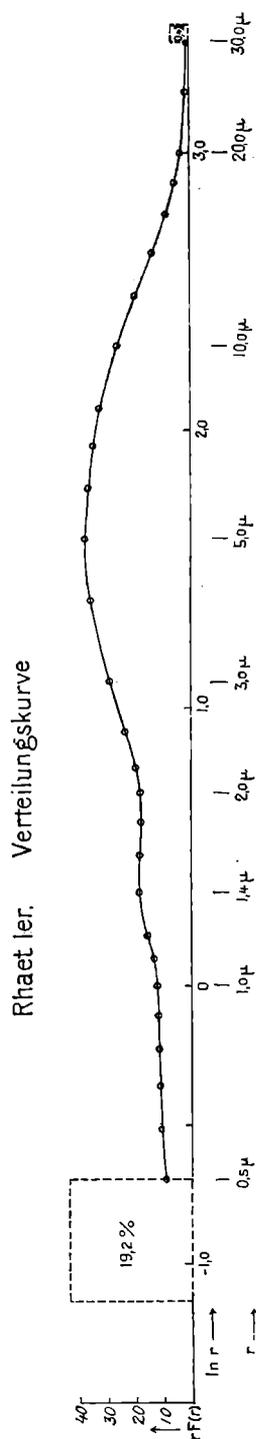


Fig. 16. Verteilungskurve von Rhaet ler.

<sup>1</sup> Vgl. THE SVEDBERG: Koll. Zeitschr. 9, 159—161 (1911). — IVAR NORDLUND: Zeitschr. f. physikal. Chem. 87 30, (1914).

rechnen zu können. Auch hier werden dieselben rechts durch ein Quadrat graphisch veranschaulicht. Die Brauchbarkeit der Methode ist somit bei Verwendung von Wasser als Versuchsflüssigkeit einerseits bei etwa  $0,3 \mu$  durch die grosse Langsamkeit, andererseits bei Teilchen von etwa  $15 \mu$  durch die grosse Schnelligkeit der Fallgeschwindigkeit begrenzt.

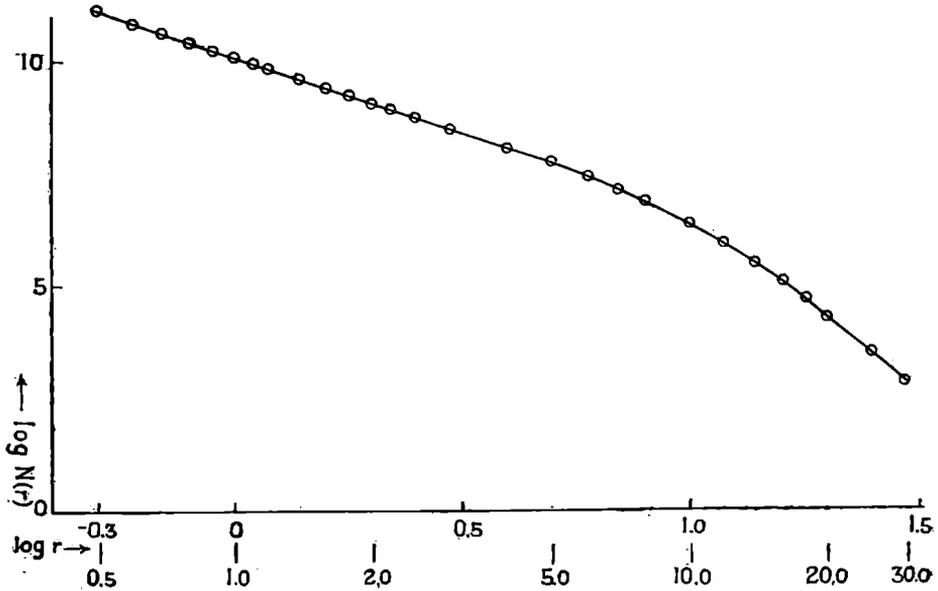


Fig. 17. Rhaetler, Häufigkeitskurve.

## 8.

### Ausdehnung der Untersuchungen auf die Sedimentation in zäheren Flüssigkeiten.

Die Verwendung von Sedimentationsflüssigkeiten mit kleinerem spezifischen Gewicht und kleinerer innerer Reibung, wodurch die Sedimentation schneller verläuft und man eine Ausdehnung des registrierten Gebietes ohne allzugrossen Zeitaufwand nach links erreichen konnte, lässt sich praktisch nicht durchführen. Denn bei sämtlichen in Betracht kommenden Flüssigkeiten kommen infolge der grösseren Flüchtigkeit und der daraus herrührenden Abkühlung der Oberfläche so erhebliche Konvektionsströmungen vor, dass die Sedimentation gestört wird.

Dagegen lässt sich durch Zusatz von Glycerin (mit dem spez. Gew. 1,3 und einer inneren Reibung von ca. 13 bei  $15^\circ$ ) zur wässrigen Suspension die Sedimentation von Schluff und Sandteilchen wesentlich verlangsamen, so dass man Teilchen bis zu  $r = 50 \mu$  registrieren kann (somit von einem Diameter bis zu  $0,1 \text{ mm}$ ).

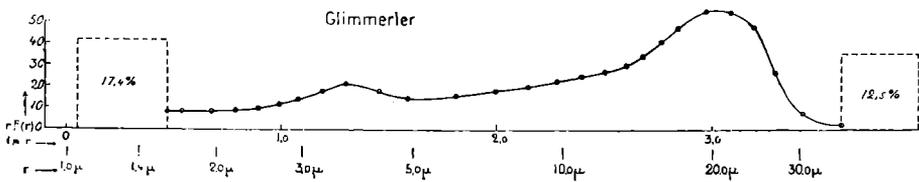


Fig. 18. Verteilungskurve von Glimmertone aus Vemb.

Eine solche Registrierung eines ziemlich groben dänischen Glimmertons aus dem oberen Miocän bei Vemb (nahe Lemvig) wurde bei  $15^\circ$  in einer Glycerin-Wasser-Mischung von  $d = 1,115$  und  $\eta = 0,04925$  bei einer Fallhöhe von 30 cm ausgeführt. Ich sehe von einer tabellarischen Wiedergabe der Beobachtungen ab und gebe nur in Fig. 18 die daraus berechnete Verteilungskurve wieder.

Von  $30 \mu$  ab dürfte die Verteilungskurve ziemlich zuverlässig sein, die größeren Sandkörner, welche fast momentan sinken, sind rechts zusammengeführt.

Über die Verteilungskurven einer Reihe mit der automatischen Apparatur registrierter Bodenablagerungen wird eine spätere Arbeit Näheres bringen.

Uppsala, Chemisches Universitätslaboratorium, November 1917.

## TAFEL II.

## Zeichenerklärungen.

A = Fallplatte	X = Akkumulator der Wage
B = Wagebalken	Y = Kapazität
C = Trockenelement	b = Spiralrohr
D = Bleideckel	c = Trichterschlauch
E = Wagekontakt	d = Ansatzrohr $\perp$ Spiralrohr
F = Sockelboden	e = Vertiefung des Ansatzrohres
G = Wagschale für die Kugeln.	f = Einfüllrohr des Trichters
H = Heber	$i_1$ } = Reiter
I = Platinspitze	$i_2$ }
J = grosse Heberschraube	k = Einstellschrauben der Speisevorrichtung
K = Federklemme zum Trichter	l = Hebel der Kontaktregistrierung
L = Fallzylinder	m = Elektromagnet der Speisevorrichtung
M = Schutzmantel	n = Elektromagnet der Kontaktregistrierung
N = Skala	p = Stempel der Speisevorrichtung
O = Glühlampe	q = Farbrädchen
Pt <sub>1</sub> Pt <sub>2</sub> = Uhrkontakte	r = Uhrrelais
Q = Quecksilbergefäß an der Schneide	s = Vertikalschrauben
R = Hauptrelais	t = Elektromagnet der Uhr
S = Horizontalschrauben	u = Akkumulatorbatterie der Zeitregistrierung
T = Trichter zur Einfüllung	v = Minutenkontakt
U = Spiegel	w = Auswechslung
V <sub>1</sub> V <sub>2</sub> V <sub>3</sub> V <sub>4</sub> = Speisevorrichtungen	x = Trockenelement der Uhr
W = Libelle	y = Papierstreifen
	$\alpha$ = Stromwechsler der Uhrregistrierung
	$\beta$ = Kugelwechsler

Gedruckt 26/2 1918.

