
DIE NEUE SCHWEREKARTE VON ÖSTERREICH (BOUGUER-ISANOMALEN)

G. Kraiger

TU Graz

1 Einleitung

Die Schwerekarte von Österreich, die heute noch im Gebrauch ist, wurde von E. Senftl erarbeitet und 1965 veröffentlicht (Senftl, 1965). Sie ist damals nach den modernsten Erkenntnissen berechnet worden, allerdings ist die ihr zugrunde liegende Vermessung im Hinblick auf geodätische Erfordernisse ausgerichtet, das heißt, daß die Schwerestationen zum weitaus überwiegenden Teil entlang der Nivellementlinien liegen. In der Zwischenzeit hat jedoch die gravimetrische Landesaufnahme gewaltige Fortschritte gemacht, so daß man beinahe schon von einer vollständig flächenhaften Bedeckung Österreichs mit Schweredaten sprechen kann. Es liegen heute eine ganze Reihe von lokalen Schwerekarten vor, z. B. Vorarlberg, Steiermark (Walach, Montanuniversität Leoben) oder Ostalpentaverse, Böhmisches Masse (Steinhauser, Universität Wien), um nur einige zu nennen, jedoch keine einheitliche für ganz Österreich. In dieser Arbeit wird nun versucht, eine neue Schwerekarte für Österreich zu berechnen.

2 Schweredaten in Österreich

Zur Zeit stehen der Abteilung für Physikalische Geodäsie der Technischen Universität Graz etwa 32 400 Schweredaten aus Österreich zur Verfügung. Diese Daten wurden von folgenden Institutionen für wissenschaftliche Untersuchungen bereitgestellt: Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien, Institut für Geophysik der Montanuniversität Leoben, ÖMV-Aktiengesellschaft, Institut für Geophysik der Technischen Universität Clausthal und Österreichisches Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen. Alle Schwerewerte beziehen sich auf das Österreichische Schweregrundnetz (ÖSGN), das mit dem international verwendeten System IGSN71 kompatibel ist (Meurers, pers. Mitteilung).

3 Berechnung der Bouguer–Anomalien

3.1 Definition

Die Bouguer–Anomalie Δg_B wird folgendermaßen definiert:

$$\Delta g_B = g - \gamma - \delta g_M + \delta g_{atm}$$

mit g	gemessene Absolutschwere
γ	Normalschwere in Normalhöhe
δg_M	Anziehung der topographischen Massen zwischen Erdoberfläche und Reduktionsniveau
δg_{atm}	... atmosphärische Korrektur

Die Normalschwere in Normalhöhe γ wird mit folgender Formel berechnet (Heiskanen/Moritz, 1967, S. 293)

$$\gamma = \gamma_0 \left[1 - 2(1 + f + m - 2f \sin^2 \phi) \frac{H^*}{a} + 3 \left(\frac{H^*}{a} \right)^2 \right]$$

mit γ_0	... Normalschwere auf dem Ellipsoid
a	... große Halbachse
f	... Abplattung
m	... Hilfsgröße
H^*	... Normalhöhe
ϕ	... geographische Breite

Die Größen γ_0 , a , f und m beziehen sich auf das Geodätische Referenzsystem 1980 (Moritz, 1980a), für die geographische Breite ϕ wird jene des Bessel–Ellipsoids (MGI–System) und für die Normalhöhe H^* näherungsweise die Höhe des Österreichischen „Gebrauchshöhen–Systems“ verwendet.

Die atmosphärische Korrektur δg_{atm} wird nach folgender Formel berechnet (Wenzel, 1985):

$$\delta g_{atm} [\text{mgal}] = 0.874 - 9.9 \cdot 10^{-5} \cdot h [\text{m}] + 3.56 \cdot 10^{-9} \cdot h^2 [\text{m}]$$

Für die Höhe h wird wieder die Gebrauchshöhe verwendet.

3.2 Berechnung der Massenreduktion δg_M

Die Berechnung der Bouguer–Karte erfolgte in einem Gauß–Krüger–System mit dem Mittelmeridian M31 der österreichischen Landesvermessung. Um eine gleichmäßigere Datenverteilung zu erhalten, wurde der vorhandene Datensatz mit einem $2 \text{ km} \times 2 \text{ km}$ –Raster ausgedünnt, und ein Satz von 14 255 Schwerewerten erhalten, der für die Berechnung verwendet wurde. Die Punktverteilung ist in Fig. 1 dargestellt.

Üblicherweise wird die Massenreduktion δg_M in zwei Terme aufgespalten:

$$\delta g_M = \delta g_{BPI} - \delta g_{top}$$

mit δg_{BPl} ... sphärische Bouguerplatte
 δg_{top} ... topographische Korrektur

Die Berechnung der Massenreduktion setzt die Kenntnis der Topographie und der Dichteverteilung innerhalb der Reduktionsmassen voraus. Hier wurde eine einheitliche Reduktionsdichte von 2.67g/cm^3 verwendet, die Berechnung der Massenreduktion erfolgte bis zu einer Entfernung von 167 km. Zwei Methoden kamen zur Anwendung:

1. Herkömmliche Methode: Die vorhandenen digitalen Höhenmodelle sind für die unmittelbare Umgebung des Meßpunktes meist zu grobmaschig (vor allem im Hochgebirge), so daß eine kreisförmige Zone des Geländes — üblicherweise mit einem Radius von 160 m — tachymetrisch aufgenommen wird. Daraus resultiert jedoch das Problem einer Übergangszone vom punktorientierten tachymetrischen System zum geographischen System des Höhenmodells. Die Berechnung dieser Übergangszonen kann z. B. durch Übergangsraster (Ehrismann/Lettau, 1971) oder durch numerische Integration (Meurers, 1988) erfolgen.

Nach diesen Methoden berechnete Massenreduktionen bis 167 km sind für 9609 Punkte des ausgedünnten Datensatzes vorhanden; sie wurden von Dr. Meurers (Inst. für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien) berechnet. Diese Punkte sind in Fig. 1 mit dem Symbol o gekennzeichnet.

2. Das Programm MAC: Bei dieser Methode ist zur Berechnung der Massenreduktion nur die Kenntnis eines digitalen Höhenmodells notwendig und sie stellt daher eine Alternative für solche Gravimeterpunkte dar, bei denen keine tachymetrische Aufnahme durchgeführt wurde. Die Berechnungen wurden mit dem Programm MAC durchgeführt, das aus einer Weiterentwicklung von R. Forsbergs Programm TC (1984) an der Abteilung für Physikalische Geodäsie der TU Graz entstanden ist (Kühtreiber et al., 1989). Das Problem liegt hier darin, daß die Erfassung der Topographie in der unmittelbaren Umgebung des Meßpunktes von der Auflösung des zur Verfügung stehenden Höhenmodells abhängt. (Das von uns verwendete Höhenmodell hat eine Auflösung von $347\text{ m} \times 388\text{ m}$.) Daraus ergibt sich im allgemeinen auch, daß die tatsächliche Höhe der Gravimeterstation vom Höhenmodell mehr oder weniger stark abweicht.

Dieses Problem wird programmtechnisch so gelöst, daß zuerst das Höhenmodell in der unmittelbaren Umgebung des Meßpunktes mit Hilfe einer Splinefläche in kleinere Rasterelemente zerlegt wird und anschließend das so erhaltene Modell durch eine „paraboloidähnliche“ Überhöhung an die tatsächliche Höhe des Meßpunktes angepaßt wird (Kühtreiber et al., 1989). Da der Einfluß der Topographie mit der Entfernung vom Berechnungspunkt stark abnimmt, ist für entferntere Zonen ein „gröberes“ Geländemodell ausreichend. Für die hier durchgeführten Berechnungen wurde das digitale Höhenmodell Österreichs im Raster 1 ($347\text{ m} \times 388\text{ m}$) bis zu einer Entfernung von 6 km und darüber hinaus das Raster 4 ($2780\text{ m} \times 3100\text{ m}$) bis 167 km verwendet.

Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit des Programms MAC wurden Vergleichsrechnungen in jenen 9609 Datenpunkten durchgeführt, in denen die Massenreduktionen nach Methode (1) vorliegen. Ein Vergleich der beiden Methoden ergibt eine mittlere quadratische Abweichung von $\pm 0.72\text{ mgal}$. Die hier erhaltenen Ergebnisse werden

auch durch früher angestellte Untersuchungen bestätigt (Kühtreiber et al., 1989). Zusammenfassend kann gesagt werden, daß diese Methode eine brauchbare Alternative zur Berechnung der Massenreduktion für jene 4646 Gravimeterstationen darstellt, wo keine nach Methode (1) berechnete Massenreduktionen vorhanden sind. Diese Punkte sind in Fig. 1 mit dem Symbol + gekennzeichnet.

3.3 Statistik

Wie bereits in Abschn. 3.2 erwähnt, wurde ein Datensatz mit 14 255 Schwerewerten für die Berechnung der Bouguer-Karte verwendet. Daraus resultiert eine mittlere Datendichte von ca. 1 Punkt/6km². Die Bouguer-Anomalien liegen im Bereich von -183 bis +25 mgal, die Stationshöhen zwischen 110–3050 m. Die Häufigkeitsverteilungen der Bouguer-Anomalien und der dazugehörigen Stationshöhen sind in Fig. 2 und Fig. 3 dargestellt. Wie aus Fig. 3 hervorgeht, liegen 78% der Stationshöhen unter 1000 m, während der Anteil des Rasters 4 des digitalen Höhenmodells für diesen Bereich nur etwa 61% beträgt. Dieses Ergebnis ist natürlich insofern nicht sehr überraschend, als allgemein bekannt ist, daß die Vermessung von Gravimeterpunkten im Hochgebirge wesentlich schwieriger ist als im Flachland oder in Tallagen. Bedeutsam ist dies jedoch insofern, als für eine möglichst genaue gravimetrische Erfassung des Schwerefeldes eine gleichmäßige Punktverteilung nicht nur bezüglich der Lage, sondern auch bezüglich der Höhe anzustreben wäre. Das bedeutet hier, daß die Höhenverteilung der Gravimeterpunkte mit jener der Topographie im Einklang stehen sollte. Aufgrund der topographischen Gegebenheiten Österreichs sind bei der Realisierung einer solchen idealen Punktverteilung natürlich gewisse Grenzen gegeben.

4 Interpolation

Die graphische Darstellung erfolgt in Schichtenlinienform unter Verwendung einer bikubischen Spline-Funktion, die auf einem regelmäßigen Raster von Punktwerten basiert (Sünkel, 1980). Für die Interpolation der Rasterpunkte wird die Methode der Prädiktion nach kleinsten Quadraten angewandt (Moritz, 1980b), wobei die hierfür benötigte Kovarianzfunktion empirisch bestimmt wird (Kraiger, 1987).

4.1 Empirische Kovarianzfunktion

Bouguer-Anomalien beinhalten im allgemeinen einen regionalen Trendanteil, der von der horizontalen Position der Meßdaten abhängt. Dieser wurde durch eine geeignete Trendfunktion berücksichtigt, wobei hierfür eine Polynomfläche 3. Grades herangezogen wurde. Die zwei empirischen Kovarianzparameter, Varianz C_0 und Halbwertsbreite ξ , der unreduzierten und trendreduzierten Bouguer-Anomalien sind in Tab. 1 zusammengestellt. Eine graphische Darstellung der empirischen Kovarianzfunktion der trendreduzierten Bouguer-Anomalien zeigt Fig. 4.

Δg_B	$C_0[\text{mgal}^2]$	$\xi[\text{km}]$
unreduziert	1975	75.5
trendreduziert	197	23.3

TABELLE 1: Empirische Kovarianzparameter

Durch die Trendreduktion sinken Varianz und Halbwertsbreite drastisch ab, wodurch für die Prädiktion nach kleinsten Quadraten günstigere Voraussetzungen geschaffen werden (Kraiger, 1987). Viel wesentlicher ist jedoch die Tatsache, daß die Prädiktion nur auf solche Größen angewandt werden kann, die keine systematischen Anteile beinhalten (z. B. Trendanteil). Solche Größen sind im allgemeinen normalverteilte Zufallsgrößen mit dem statistischen Erwartungswert Null. Betrachtet man die Häufigkeitsverteilung der unreduzierten Bouguer–Anomalien (Fig. 2), so läßt diese keineswegs auf einen Erwartungswert Null schließen, auch nicht bei einer Mittelwert-Reduktion der Daten, während dies bei den trendreduzierten Anomalien (Fig. 5) sehr wohl der Fall ist. Durch eine Trendreduktion werden also für eine Anwendung der Prädiktion nach kleinsten Quadraten optimale Voraussetzungen geschaffen.

4.2 Prädiktion nach kleinsten Quadraten

Aufgrund der vorgegebenen Datenverteilung wurde für die Interpolation ein Rasterabstand von 4 km gewählt. Als analytisches Kovarianzmodell wurde das verallgemeinerte Modell von Hirvonen verwendet, wobei für den Krümmungsparameter $p = 0.15$ angenommen wurde (Kraiger, 1987). Varianz und Halbwertsbreite ergeben sich aus der empirischen Kovarianzfunktion, und für den mittleren Fehler der Bouguer–Anomalien wurde ± 1 mgal angenommen.

Für die Berechnung wurde die Prädiktion mit lokalen Daten herangezogen. Diese Methode beruht darauf, daß Meßwerte in unmittelbarer Umgebung des Prädiktionspunktes den größten Einfluß auf das Ergebnis haben, während Daten in größerer Entfernung kaum mehr etwas zur Lösung beitragen. Der Algorithmus ist so aufgebaut, daß eine minimale und maximale Datenanzahl pro Prädiktionspunkt vorgegeben werden kann. Aufgrund früherer Untersuchungen wurden die Werte 20 bzw. 30 für die minimale bzw. maximale Datenanzahl verwendet (Kraiger, 1987).

Um eine absolute Aussage über die Interpolationsgenauigkeit machen zu können, wurde folgendes Verfahren angewandt: es wurden sukzessive die Schwerewerte für alle 14 255 Datenpunkte prädiziert, wobei natürlich der Meßwert des jeweils aktuellen Prädiktionspunktes nicht mitverwendet wurde. Aus den Differenzen zwischen gemessenen und prädizierten Werten wurde eine mittlere quadratische Abweichung berechnet, die als absolutes Genauigkeitsmaß für die Prädiktion interpretiert werden kann. In unserem Fall erhält man hierfür einen Wert von ± 1.58 mgal. Eine Häufigkeitsverteilung aller Differenzen zeigt Fig. 6.

4.3 Allgemeine Probleme bei der Interpolation

In diesem Abschnitt sollen Probleme, die speziell bei der Interpolation von Schwereanomalien auftreten können, näher erörtert werden. Als Beispiel wurde ein Gebiet aus den Tiroler Kalkalpen gewählt.

Der Interpolationsraster wurde so gewählt, daß immer ein Datenpunkt möglichst nahe einem Interpolationspunkt zu liegen kommt. Dies ist möglich, da eine rasterförmig ausgedünnte Datenverteilung vorliegt. Ausgedünnt wurde mit einem $2 \text{ km} \times 2 \text{ km}$ -Raster, für die Interpolation wurde ein Rasterabstand von 4 km gewählt. Daraus ergeben sich nun verschiedene Möglichkeiten für die Lage des Interpolationsrasters. Hier soll untersucht werden, wie sich das Isolinienbild ändert, wenn der Interpolationsraster verschoben wird. Der Interpolationsraster in Fig. 8b wurde gegenüber dem in Fig. 8a um 2 km in Ost-West-Richtung verschoben. Die Differenz zwischen diesen beiden Darstellungen zeigt Fig. 8c. Wie man sieht, können hier Differenzen bis zu 4 mgal auftreten. Die Ursache hierfür soll anhand eines kleinen Teilgebietes im Südosten näher erläutert werden. Die Datenverteilung und die beiden Interpolationsraster sind in Fig. 8d dargestellt (die strichlierte Linie symbolisiert den verschobenen Interpolationsraster). Wie man anhand der Datenverteilung sieht, treten sehr große Horizontalgradienten vor allem bei den Punkten $7 \rightarrow 8$ und $9 \rightarrow 10$ auf. Eine mögliche Ursache hierfür könnte sein, daß die Punkte 8 und 10 im Tal liegen, wo mächtige Schichten von Flußsedimenten geringer Dichte zu erwarten sind, wogegen die Punkte 7 und 9 eine Lage an der Talflanke aufweisen. Da die topographische Reduktion mit einer konstanten Dichte von 2.67 g/cm^3 durchgeführt wurde, könnten bei den Punkten 8 und 10 sogenannte Reduktionsanomalien auftreten. Daß sich nun so große Horizontalgradienten auf die Prädiktion auswirken, liegt auf der Hand. In Fig. 8d wurden zwei Prädiktionspunkte des Teilgebietes herausgegriffen, für den Ausgangsraster Punkt A und für den verschobenen Raster Punkt B. Die Prädiktion nach kleinsten Quadraten hat die Eigenschaft, daß der zum Prädiktionspunkt nächstgelegene Datenpunkt maximalen Einfluß hat, in unserem Fall ist dies für den Prädiktionspunkt A der Datenpunkt 8 und für B der Datenpunkt 7. Man sieht also, daß der große Horizontalgradient in den Datenpunkten auch auf die Prädiktionspunkte übertragen wird. Dies ist auch der Grund dafür, daß bei solchen Situationen eine Rasterverschiebung große Auswirkungen auf das Isolinienbild hat.

4.4 Überprüfung der Daten auf grobe Fehler

Um die Daten auf grobe Fehler zu überprüfen, wurden für ganz Österreich zwei Interpolationsraster berechnet, die um 2 km in Ost-West-Richtung gegeneinander verschoben waren. Aus den daraus abgeleiteten Isolinien wurden nach dem in Abschn. 4.3 beschriebenen Verfahren die Differenzen berechnet und graphisch dargestellt. Es wurden nun alle Gebiete näher untersucht, wo Differenzen größer als 2 mgal auftraten, und grobe Fehler eliminiert.

5 Ergebnis

Berechnet wurde die österreichische Schwerekarte im Maßstab 1:500 000, einen Ausschnitt davon (Vorarlberg) zeigt Fig. 9. Um Effekte, wie sie in Abschn. 4.3 beschrieben worden sind, etwas zu mildern, wurden die Isolinien mit einem 8 km-Tiefpassfilter leicht geglättet. Um nun eine Aussage über die Güte der graphischen Darstellung machen zu können, wurden die Abweichungen aller 14 255 Datenpunkte von der Splinefläche berechnet. Die mittlere Abweichung beträgt hier ± 1.34 mgal. Wie die Häufigkeitsverteilung (Fig. 7) zeigt, sind nahezu 90% aller Abweichungen kleiner als 2 mgal, das rechtfertigt auch ein Isolinienintervall der Schwerekarte von 2 mgal. Eine Darstellung der österreichischen Schwerekarte in einem kleineren Maßstab und mit einem Isolinienintervall von 5 mgal zeigt Fig. 10.

Dank

Große Teile der in dieser Arbeit verwendeten Schweredaten wurden von der ÖMV-Aktiengesellschaft bereitgestellt, wofür an dieser Stelle der Dank ausgesprochen wird. Herzlicher Dank gilt auch Frau Ruth Hödl für die Durchführung der Schreibaarbeit.

Literatur

- Ehrismann, W. und O. Lettau (1971): Topographische Reduktion von Schweremessungen in der näheren und weiteren Stationsumgebung. Arch. Met. Geoph. Biokl., Ser. A, 20, S. 383–396.
- Forsberg, R. (1984): A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Rep. 355, Dept. of Geod. Sci., Ohio State University, Columbus.
- Heiskanen, W.A. und H. Moritz (1967): Physical Geodesy. W.H. Freeman, San Francisco.
- Kraiger, G. (1987): Untersuchungen zur Prädiktion nach kleinsten Quadraten mittels empirischer Kovarianzfunktionen unter besonderer Beachtung des Krümmungsparameters. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität GRaz, Folge 53.
- Kühtreiber, N., G. Kraiger und B. Meurers (1989): Pilotstudien für eine neue Bouguerkarte von Österreich. 5. Int. Alpengrav. Koll., Österr. Beitr. Met. Geoph., 2, S. 51–71.
- Meurers, B. (1988): Verbesserung der topographischen Korrektur durch numerische Integration und bikubische Spline-Interpolation. 4. Int. Alpengrav. Koll., Zentralanstalt f. Met. u. Geodynamik, Wien, 323, S. 99–110.

- Moritz, H. (1980a): Geodetic Reference System 1980. Bull. Géod., 54, 3, S. 395–405.
- Moritz, H. (1980b): Advanced Physical Geodesy. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Senftl, E. (1965): Schwerekarte von Österreich (Bouguer–Isanomalen). Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien.
- Sünkel, H. (1980): A general surface representation module designed for geodesy. Rep. 292, Dept. of Geod. Sci., Ohio State University, Columbus.
- Wenzel, H.G. (1985): Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde. Wiss. Arb. Univ. Hannover, Nr. 137.

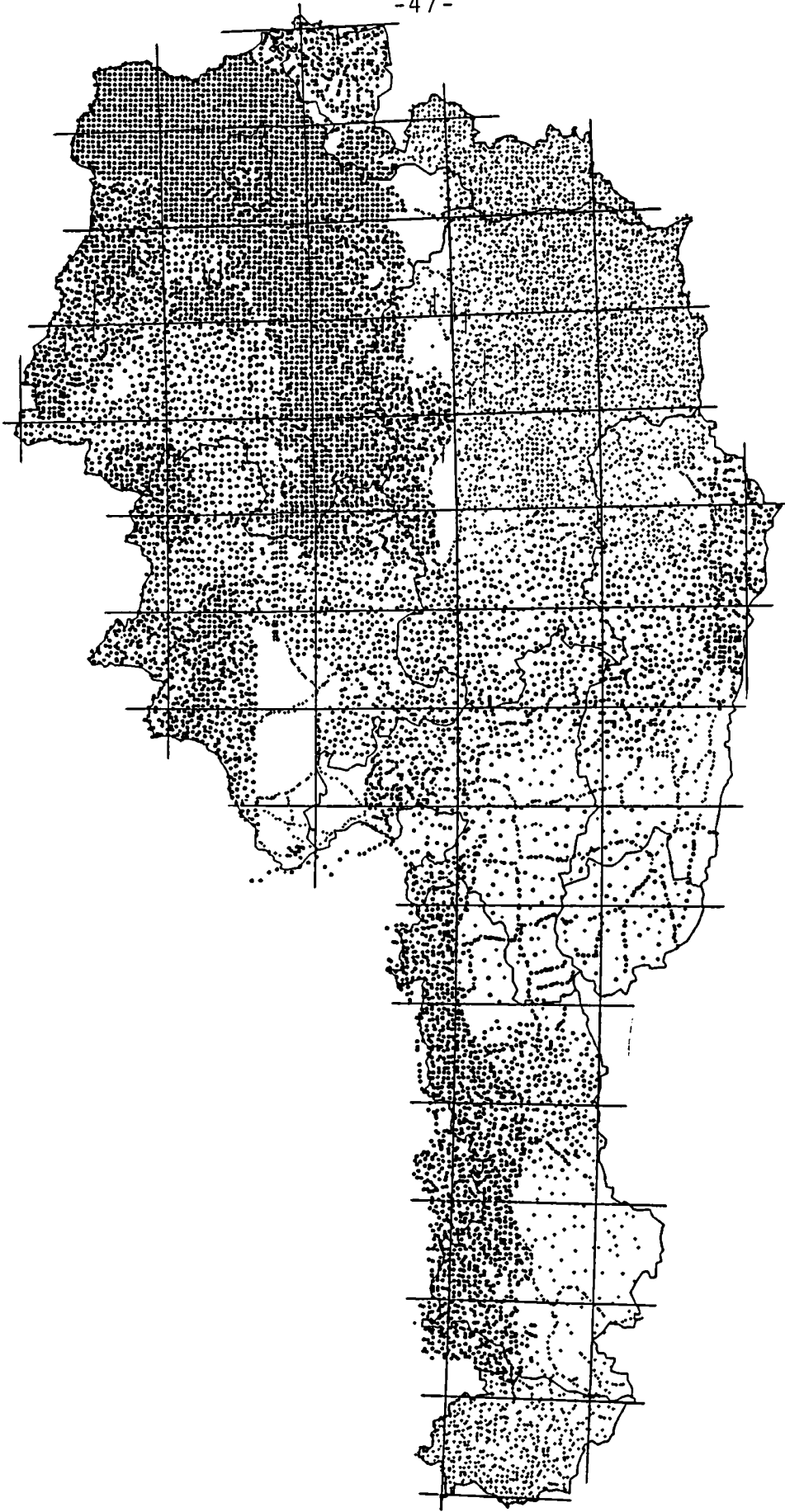


Fig. 1: Punktverteilung der Schwermetalle

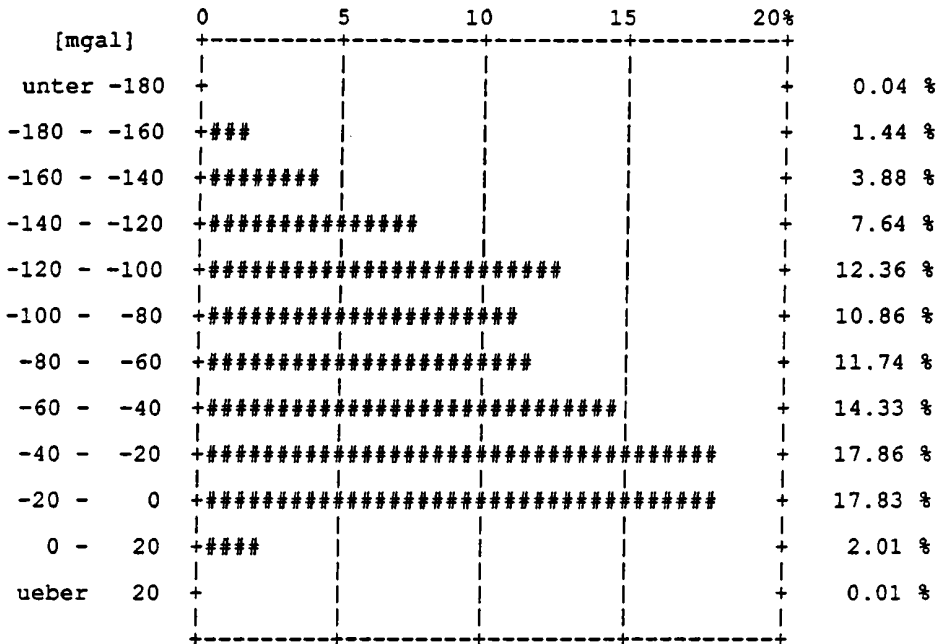


Fig. 2: Häufigkeitsverteilung der Bouguer-Anomalien

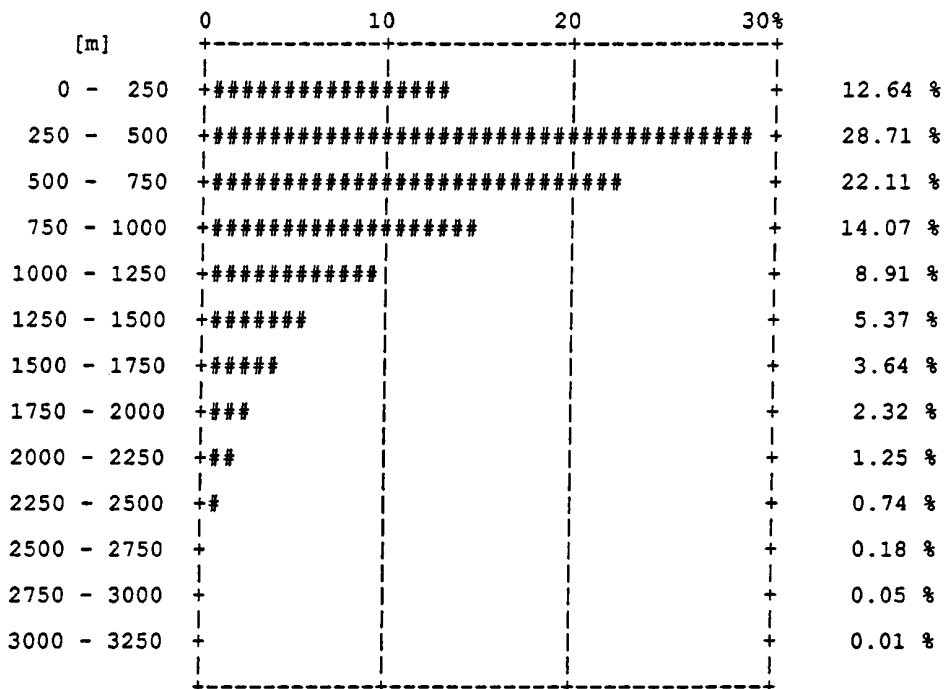


Fig. 3: Häufigkeitsverteilung der Stationshöhen

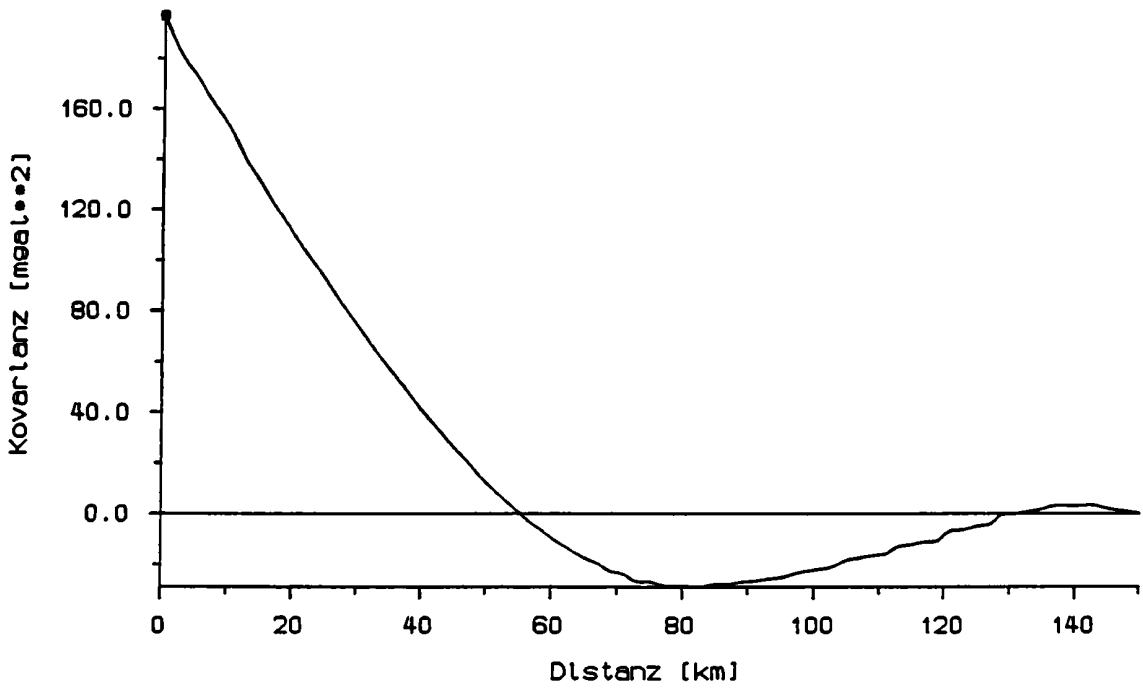


Fig. 4: Empirische Kovarianzfunktion der trendreduzierten Bouguer-Anomalien

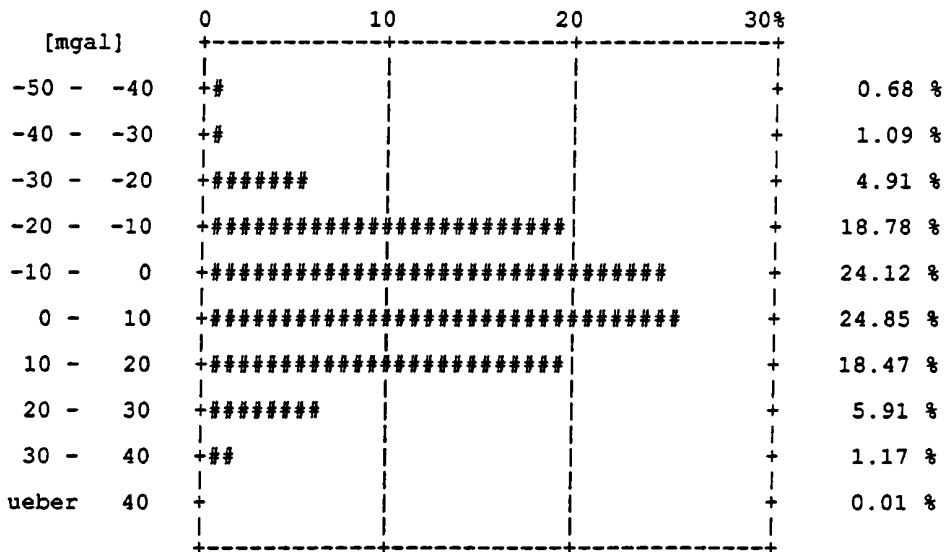


Fig. 5: Häufigkeitsverteilung der trendreduzierten Bouguer-Anomalien

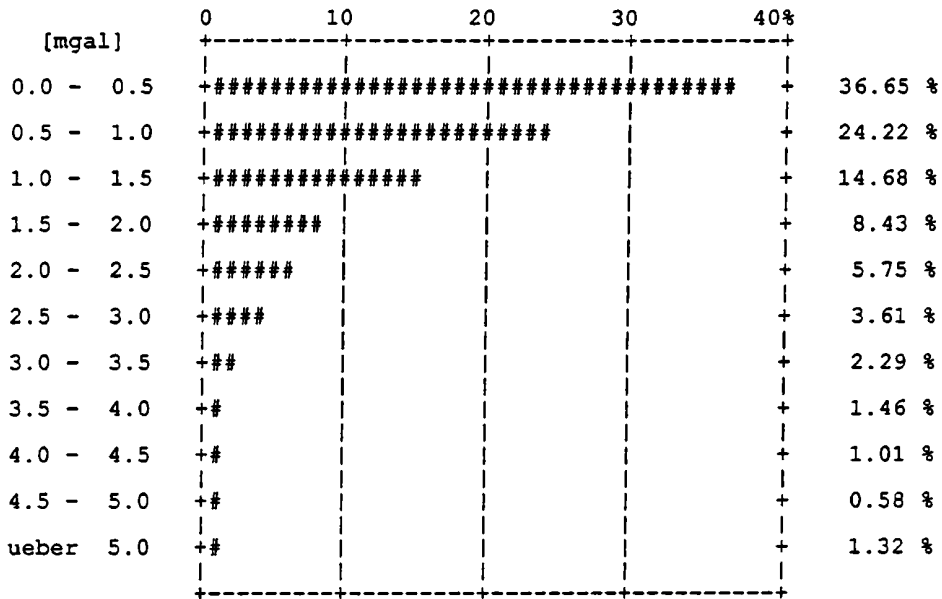


Fig. 6: Häufigkeitsverteilung der Abweichungen Meßwert – Prädiktionwert

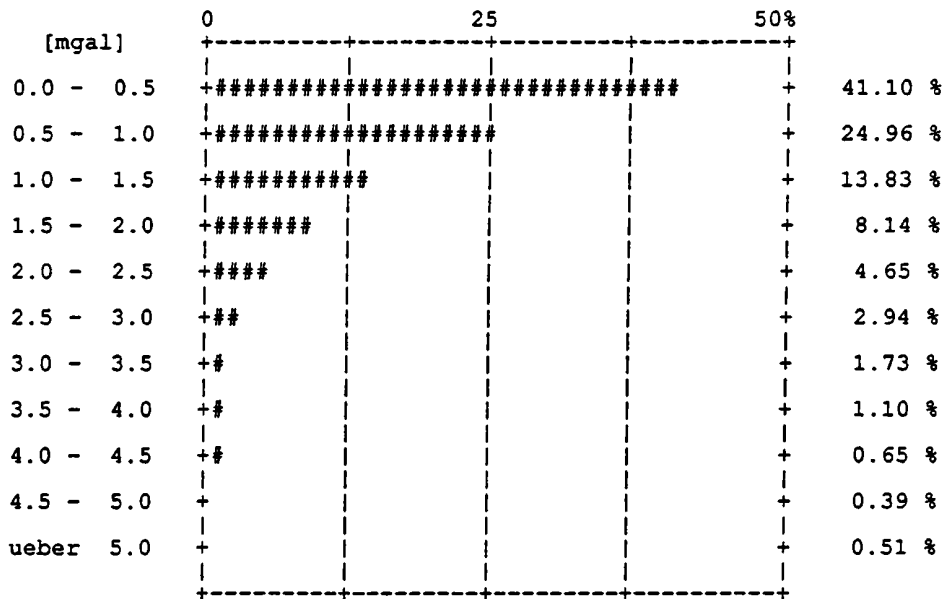
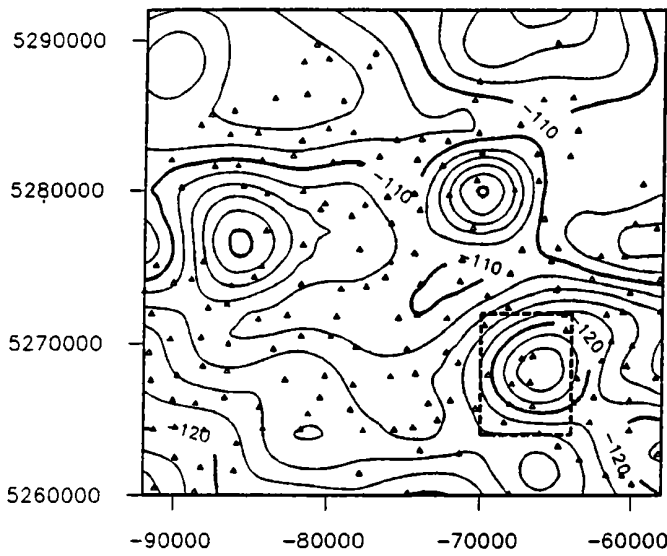
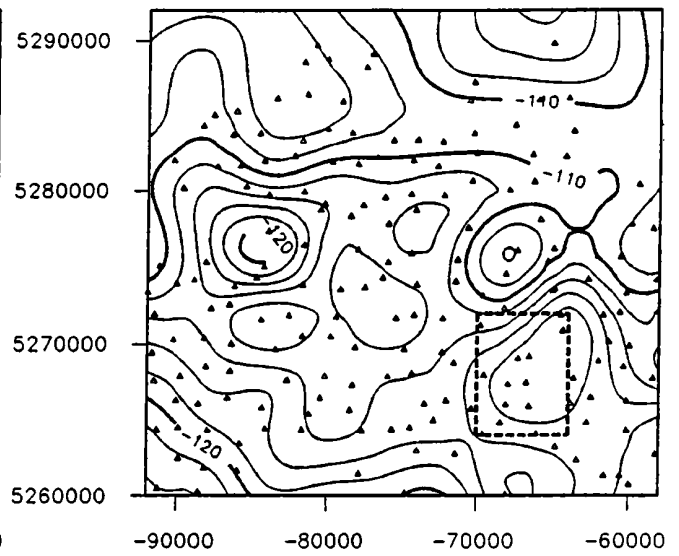


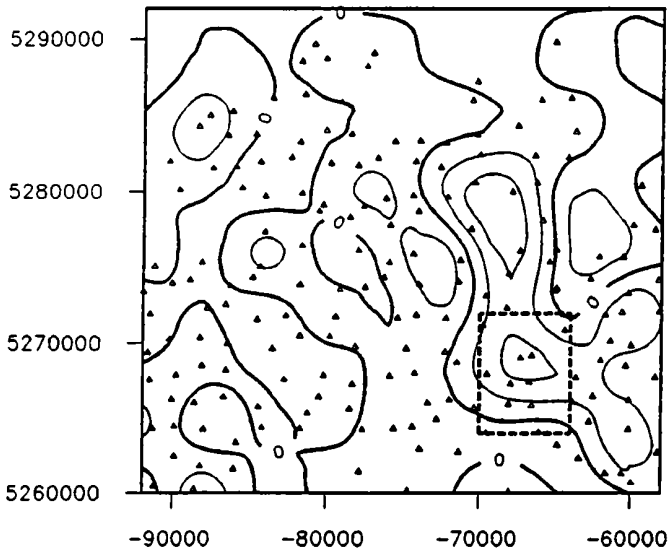
Fig. 7: Häufigkeitsverteilung der Abweichungen der Meßwerte von der Splinefläche



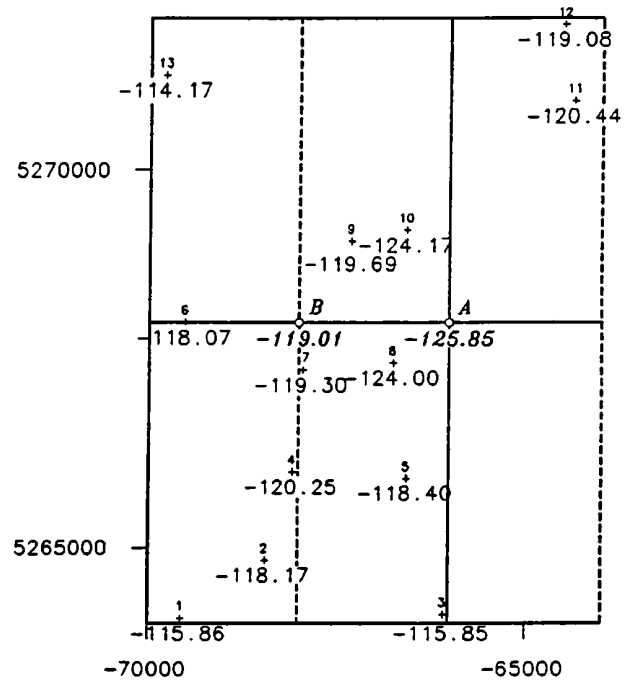
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 8: Testgebiet Tiroler Kalkalpen

a: Ausgangssituation

b: Interpolationsraster um 2 km verschoben

c: Differenz (a) - (b)

d: Datenverteilung im Teilgebiet

Isolinienintervall: 2 mgal

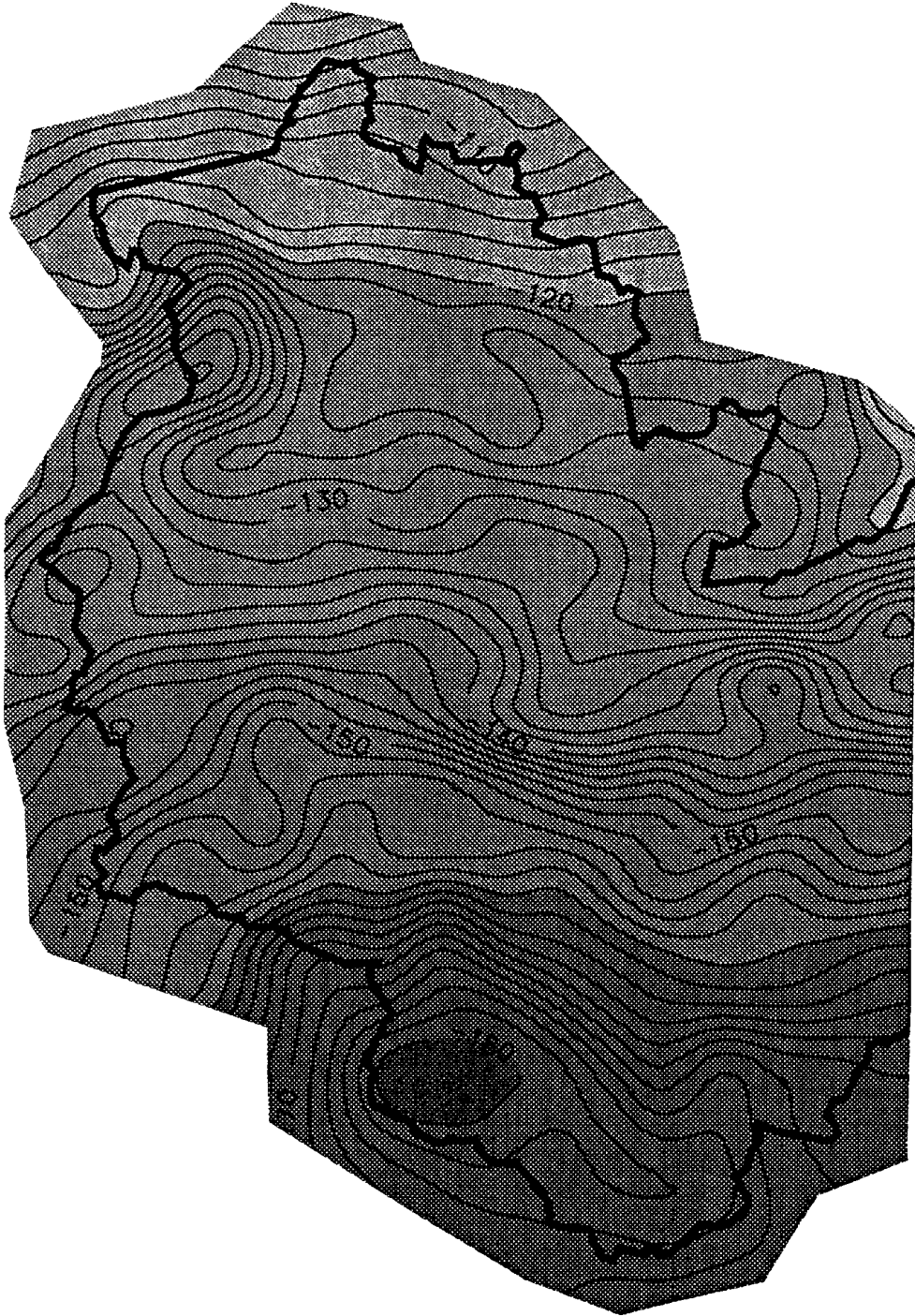


Fig. 9: Ausschnitt aus der österreichischen Schwerekarte 1:500 000 (Vorarlberg)
Isolinienintervall: 2 mgal

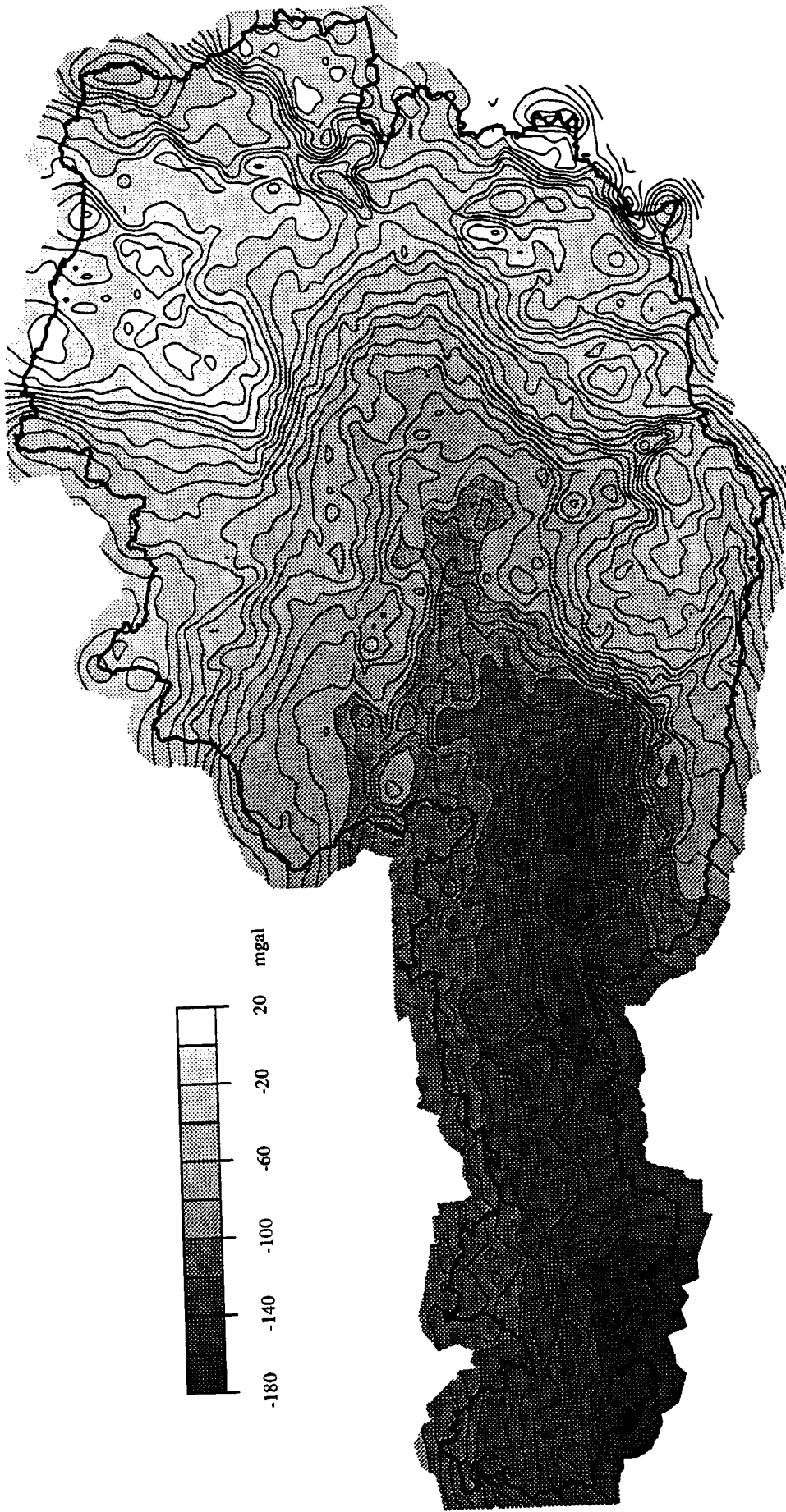


Fig. 10: Schwerekarte von Österreich (Bouguer-Isanomalien)
Isolinienintervall: 5 mgal

