

ÜBER SPEZIELLE EIGENSCHAFTEN DER TOPOGRAPHISCHEN SCHWEREWIRKUNG, DEMONSTRIERT AN MODELLKÖRPERN

K. Bretterbauer

TU Wien

KURZFASSUNG

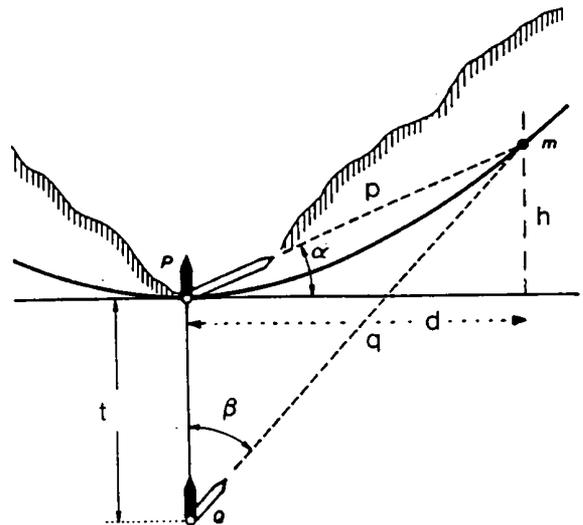
In der Geodäsie werden Schwerewerte im Erdinneren durch einen "remove-restore"-Prozeß berechnet. An Modellkörpern wird gezeigt, daß die Schwerewirkungen bestimmter Geländeformen auf einen Punkt der Oberfläche und einen Punkt in der Lotlinie exakt gleich sein und sich im "remove-restore"-Prozeß demnach exakt aufheben können. Für die Schwerewirkung der Modellkörper werden strenge und zum Teil neue Formeln angegeben.

ABSTRACT

In geodesy gravity values in the Earth's interior are calculated by a "remove-restore"-process. By means of different model solids it is demonstrated that certain topographic configurations can exert equal gravity effects on a point at the surface and a point along the plumb line thus cancelling exactly in the course of the remove-restore-process. For the gravity effect of the model solids rigorous and partly new formulas are given.

EINFÜHRUNG

Soll aus einem an der Oberfläche im Punkte P gemessenen Schwerewert auf die Schwere in einem Punkt Q der inneren Lotlinie geschlossen werden, wird bekanntlich so vorgegangen: Zunächst wird die Topographie abgehoben, somit die Schwere in P vergrößert. Nach Abhebung der Bouguer-Platte bis zum Niveau von Q und Berücksichtigung des Schweregradienten, wird die Platte wieder aufgesetzt und die Topographie wieder hergestellt. Diesmal wirkt sie im allgemeinen verklei-



Figur 1

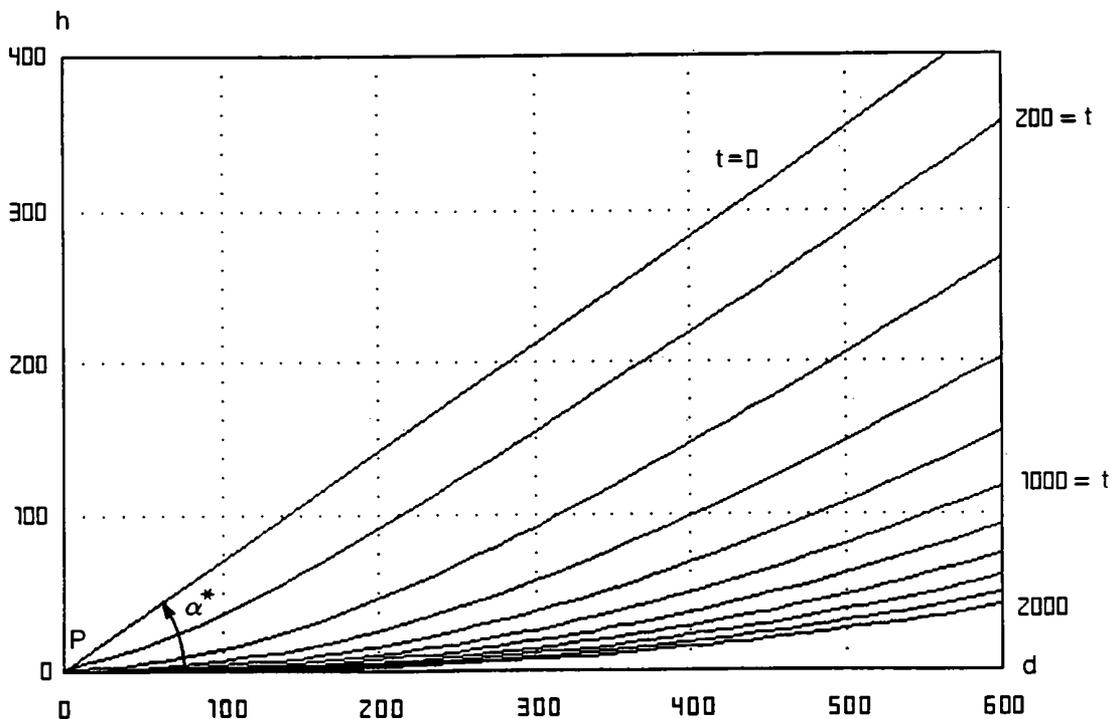
nernd auf die Schwere in Q. Es wird die Frage gestellt, ob sich die Wirkungen der Topographie auf P bzw. Q exakt aufheben können.

Zunächst sei der geometrische Ort aller Massenelemente bestimmt, die gleiche Schwerewirkung (das ist die vertikale Ableitung des Potentials) auf die Punkte P und Q ausüben. Dazu lasse man ein Massenelement in einer horizontalen Entfernung d von P sich entlang einer Vertikalen bewegen (Fig. 1).

Mit den Bezeichnungen der Figur 1 hat das Massenelement m dann die gleiche Schwerewirkung auf P und Q wenn gilt:

$$\frac{\sin \alpha}{p^2} = \frac{\cos \beta}{q^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{h}{(d^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{t+h}{[d^2 + (t+h)^2]^{3/2}}. \quad (1)$$

Bei gegebenem Abstand d und gegebener Tiefe t läßt sich eine Höhe h über dem Niveau von P finden, wo das Massenelement gleiche Schwerewirkung auf P und Q ausübt. Läßt man bei gegebenem t den Abstand d variieren, erhält man den geometrischen Ort aller Massenelemente mit dieser Eigenschaft. Sie liegen auf einer Drehfläche höherer Ordnung. Figur 2 zeigt die rechte Hälfte des Schnittes dieser Drehflächen mit der Vertikalebene durch P.



Figur 2: Geometrische Örter gleicher Schwerewirkung

Diese Flächenschar wird von zwei Grenzfällen eingeschlossen. Läßt man den Punkt Q sich unbegrenzt von P entfernen, geht der geometrische Ort gleicher Schwerewirkung auf P und Q in die Horizontalebene durch P über. Nähert Q sich unbegrenzt P und fällt schließlich mit P zusammen, entartet die Rotationsfläche zu einem Kreiskegel mit der Spitze in P. Es ist dies der geometrische Ort alle Massenelemente, die maximale Schwerewirkung auf P ausüben. Der Winkel α^* den die Mantellinie dieses Kegels mit der Horizontalen einschließt folgt aus einer Extremwertaufgabe zu:

$$\cos \alpha^* = \sqrt{2/3}, \quad \alpha^* = 35.3^\circ. \quad (2)$$

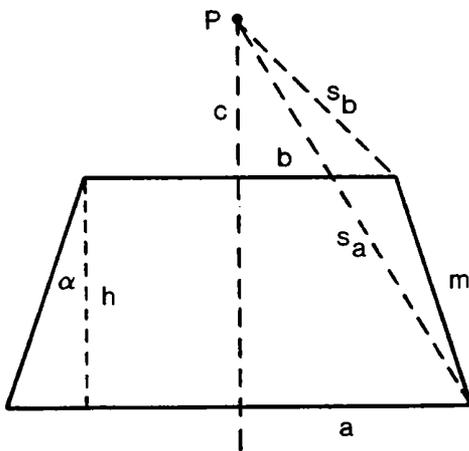
Es ist interessant festzustellen, daß der Wert von α^* etwa der mittleren Hangneigung in den Alpen entspricht (private Mitteilung von Frau Dr. *Lechthaler*, TU Wien).

Die beschriebene Tatsache legt den Schluß nahe, daß es ganze topographische Formationen gibt, die auf einen Oberflächenpunkt und auf einen Punkt darunter die gleiche Schwerewirkung ausüben. Dies soll an Modellkörpern gezeigt werden.

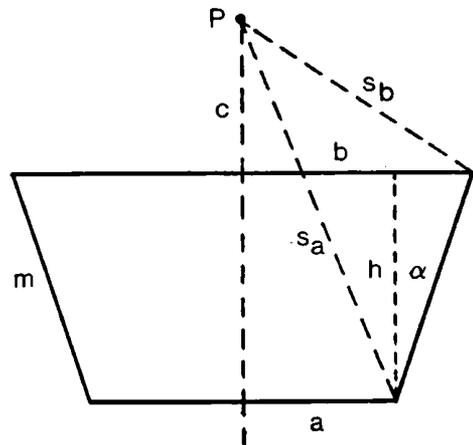
DIE SCHWEREWIRKUNG VON MODELLKÖRPERN

Zur Simulation von Geländeformen durch einfache geometrische Körper werden strenge Formeln für deren Schwerewirkung hergeleitet.

GERADER KREISKEGELSTUMPF. Gesucht ist die vertikale Ableitung des Potentials V eines Kreiskegelstumpfes in Punkten seiner Achse. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, die in den Figuren 3a und 3b durch Schnitte durch die Achsen dargestellt sind.



Figur 3a



Figur 3b

Die Herleitung kann von der bekannten Formel für die vertikale Ableitung V_z des Potentials einer dünnen Kreisscheibe in einem Punkt ihrer Achse ausgehen. Diese Formel ist über den Kreiskegelstumpf zu integrieren, also:

$$\frac{V_z}{2\pi G\rho} = \int_c^{c+h} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}} - 1 \right) \cdot dz. \quad \rho = \text{Dichte.} \quad (3)$$

Im Falle von Figur 3a gilt:

$$\alpha = \arctan \left[\left(\frac{a-b}{h} \right) \right], \quad r = b + (z-c) \cdot \tan \alpha.$$

Das erste Integral in (3) ist demnach von der allgemeinen Form:

$$I = \int \frac{z \cdot dz}{\sqrt{A+Bz+Cz^2}}, \quad \text{warin}$$

$$A = (b+c \cdot \tan \alpha)^2; \quad B = 2 \tan \alpha \cdot (b-c \cdot \tan \alpha); \quad C = 1 + \tan^2 \alpha.$$

Die Lösung des Integrals gelingt mit einer auf *Euler* zurückgehenden Substitution:

$$t = \frac{1}{\sqrt{C}}(Cz+B/2), \quad z = \frac{1}{C}(t\sqrt{C}-B/2), \quad dz = \frac{dt}{\sqrt{C}}.$$

Nach Einsetzen der Grenzen erhält man die Lösung in den Größen a , b , h und α . Etwas übersichtlicher wird die Formel durch Einführung von Hilfsgrößen (siehe Figur 3a):

$$s_a = \sqrt{a^2 + (c+h)^2}, \quad s_b = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad m = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}. \quad (4)$$

Damit lautet die Endformel für die Schwerewirkung eines geraden Kreiskegelstumpfes auf einen Punkt seiner Achse:

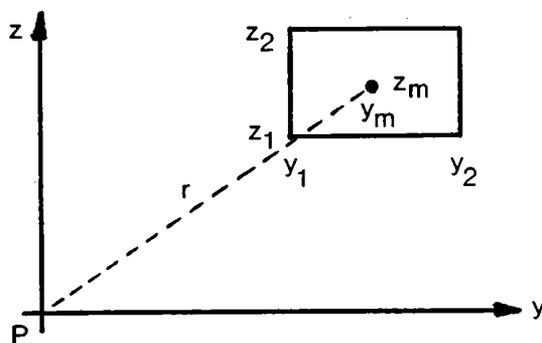
$$\frac{V_z}{2\pi G\rho} = (s_a - s_b) \cos^2 \alpha - h - \sin \alpha \cos \alpha \cdot (b \cos \alpha - c \sin \alpha) \cdot \ln \left(\frac{s_a + b \sin \alpha + c \cos \alpha + m}{s_b + b \sin \alpha + c \cos \alpha} \right). \quad (5)$$

Diese Formel ist auch für den in Figur 3b dargestellten Fall gültig, wenn man unter der Größe a grundsätzlich den Radius der vom Aufpunkt P entfernten Deckfläche, unter b den Radius der P näher gelegenen Deckfläche versteht. Unter dieser Voraussetzung erhält der Winkel α im Falle 3b ein negatives Vorzeichen.

Formel (5) enthält auch einige Sonderfälle, wie: gerader Kreiskegel, Aufpunkt in der Spitze ($b = c = s_b = 0, s_a = m$); gerader Kreiszyylinder, Aufpunkt im Zentrum einer Deckfläche ($c = 0, a = b, m = h, \alpha = \pi/2$). Einsetzen der entsprechenden Werte in (5) führt zu den aus der Literatur bekannten Formeln (z. B. *Helmert*, 1884).

DER IN HORIZONTALER RICHTUNG UNENDLICH AUSGEDEHNTEN QUADER.

Legt man den Ursprung eines Koordinatensystems in den Aufpunkt, die z-Achse in die Vertikale und die x-Achse parallel zur Längsausdehnung des Quaders, so zeigt Figur 4 einen Querschnitt mit der y,z-Ebene. Die Formel für die Schwerkraft dieses Quaders auf einen Punkt im Koordinatenursprung kann unmittelbar einer bekannten Arbeit (*Mader*, 1951) entnommen werden.



Figur 4

Mit den Bezeichnungen der Figur 4 lautet diese Formel:

$$\frac{V_z}{G\rho} = y_1 \ln\left(\frac{y_1^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_1^2}\right) - y_2 \ln\left(\frac{y_2^2 + z_2^2}{y_2^2 + z_1^2}\right) + \quad (6)$$

$$+ 2z_2 \cdot \left[\arctan\left(\frac{y_1}{z_2}\right) - \arctan\left(\frac{y_2}{z_2}\right) \right] - 2z_1 \cdot \left[\arctan\left(\frac{y_1}{z_1}\right) - \arctan\left(\frac{y_2}{z_1}\right) \right].$$

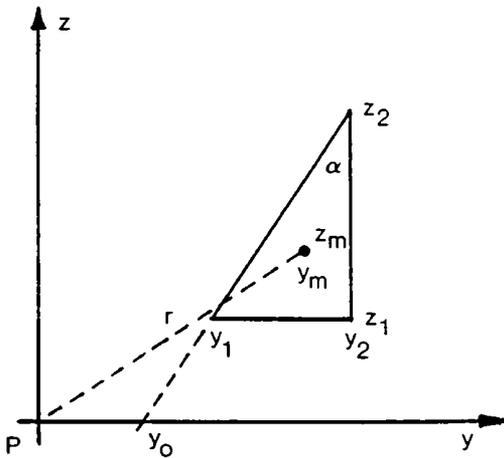
Für einen, dem Aufpunkt nicht zu nahen, horizontal unendlich ausgedehnten Quader läßt sich aus Betrachtungen über das Potential einer Massenlinie (eines "Drahtes") eine einfache, aber recht gute Näherungsformel finden. Sie sei hier ohne Herleitung mitgeteilt. Führt man den Normalabstand der Mittellinie des Quaders vom Aufpunkt (= Ursprung) r ein, so lautet die Näherungsformel:

$$\frac{V_z}{G\rho} = \frac{(y_2 - y_1)}{r^2} \cdot (z_2^2 - z_1^2), \quad \text{worin} \quad (6a)$$

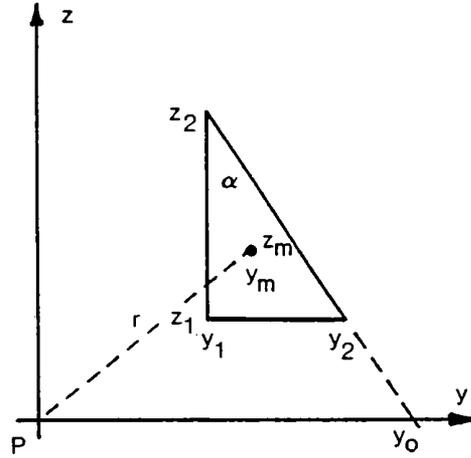
$$y_m = \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2), \quad z_m = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2), \quad r^2 = y_m^2 + z_m^2.$$

DAS UNENDLICH AUSGEDEHNTES DREISEITIGES PRISMA.

Zur Simulation eines langgestreckten Gebirgsrückens wird die Schwerkraftwirkung eines dreiseitigen Prismas benötigt. Will man nicht einen gleichschenkeligen Querschnitt voraussetzen, muß das Modell aus zwei Teilprismen zusammengesetzt werden. Auch hier weist die erwähnte Arbeit von *Mader* den Weg. Seine Ergebnisse wurden aber nicht direkt übernommen, weil seine untersuchten Prismen andere Lagen zum Koordinatensystem haben. Es wurde deshalb eine völlige Neuherleitung vorgenommen (Figuren 5a und 5b).



Figur 5a



Figur 5b

Die Figuren 5a und 5b zeigen die Prismen in den beiden behandelten Lagen. Das Koordinatensystem wird wie im Falle des Quaders angenommen, der Aufpunkt liegt im Ursprung.

Man geht aus von der vertikalen Ableitung des Potentials eines Massenelementes auf den Koordinatenursprung:

$$\frac{V_z}{G\rho} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{(y-y_0)/t} \frac{z \cdot dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(3/2)}}, \quad \text{worin} \quad (7)$$

$$t = \tan \alpha = (y_2 - y_1)/(z_2 - z_1), \quad y_0 = y_2 - z_2 \cdot t.$$

Das Ergebnis der Integration lautet:

$$\frac{V_z}{G\rho} = -y_2 \cdot \ln \left(\frac{y_2^2 + z_2^2}{y_2^2 + z_1^2} \right) + 2z_1 \cdot \left[\arctan \left(\frac{y_2}{z_1} \right) - \arctan \left(\frac{y_1}{z_1} \right) \right] + \quad (8)$$

(..... fortgesetzt)

$$+\frac{y_0}{1+t^2} \cdot \ln\left(\frac{y_2^2+z_2^2}{y_1^2+z_1^2}\right) - \frac{2t \cdot y_0}{1+t^2} \cdot \left[\arctan\left(\frac{z_2+t \cdot y_2}{y_0}\right) - \arctan\left(\frac{z_1+t \cdot y_1}{y_0}\right) \right]$$

Die Formel (8) ist für beide Lagen des Prismas gültig, wenn man für die Lage Figur 5b die Werte von y_1 und y_2 vertauscht. Die Art der Annahme des Koordinatensystems bedingt, daß die Werte der Schwerewirkung aus (8) immer negativ resultieren. Die Formel ist auch für Sonderfälle geeignet, z. B. wenn der Aufpunkt in einer Kante liegt. Auf die Angabe spezieller Formeln für die Sonderfälle wird verzichtet. Beim Programmieren der Formel (8) ist nur darauf zu achten, daß Division durch Null vermieden wird.

Auch das Prisma läßt sich bei nicht zu großer Nähe zum Aufpunkt in guter Näherung durch einen Draht ersetzen. Mit den Bezeichnungen:

$$y_m = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2), \quad z_m = \frac{1}{3}(2z_1 + z_2), \quad r^2 = y_m^2 + z_m^2,$$

ist die Schwerewirkung des unendlich ausgedehnten Drahtes (ohne Herleitung):

$$\frac{V_z}{G\rho} = \frac{z_m}{r^2} \cdot (y_2 - y_1) \cdot (z_2 - z_1). \quad (8a)$$

In der Anwendung auf die zweite Prismenlage ist auch hier y_1 und y_2 zu vertauschen.

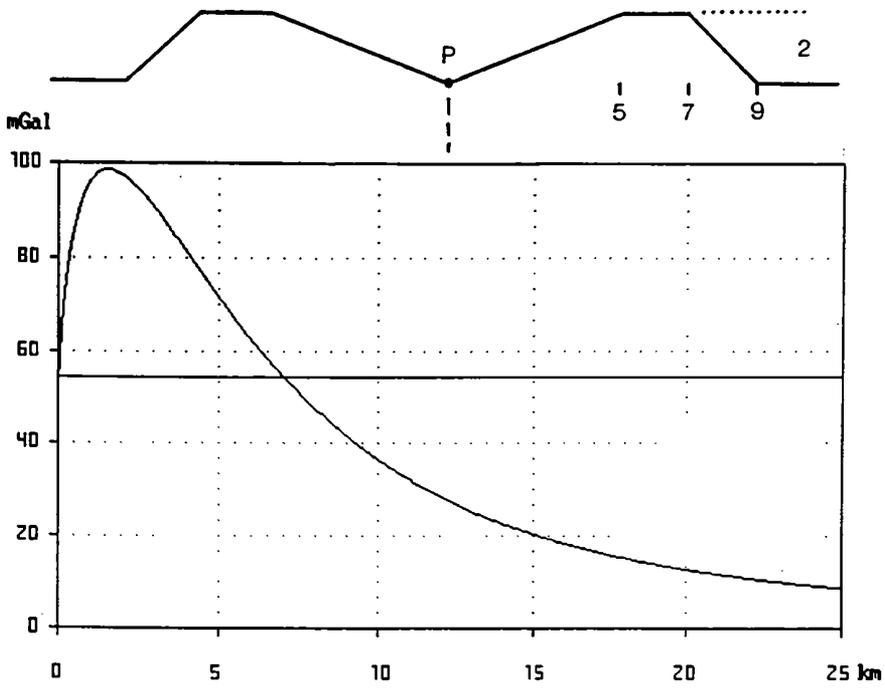
NUMERISCHE BEISPIELE

Nun soll an einigen durch Modellkörper simulierten Geländeformationen demonstriert werden, in welcher Tiefe jener Punkt liegen müßte, sodaß die Schwerewirkung der Topographie gleich jener auf den Oberflächenpunkt ist. Dabei wird, ausgehend vom Punkt P an der Oberfläche, der Punkt Q nach unten verschoben, die Schwerewirkung der Topographie für jede seiner Lagen berechnet und in einem Diagramm graphisch dargestellt. Die Angaben betreffend die Maße der vertikalen Querschnitte der Modellkörper sind in Kilometern zu verstehen (Figuren 6, 7, 8, 9 und 10).

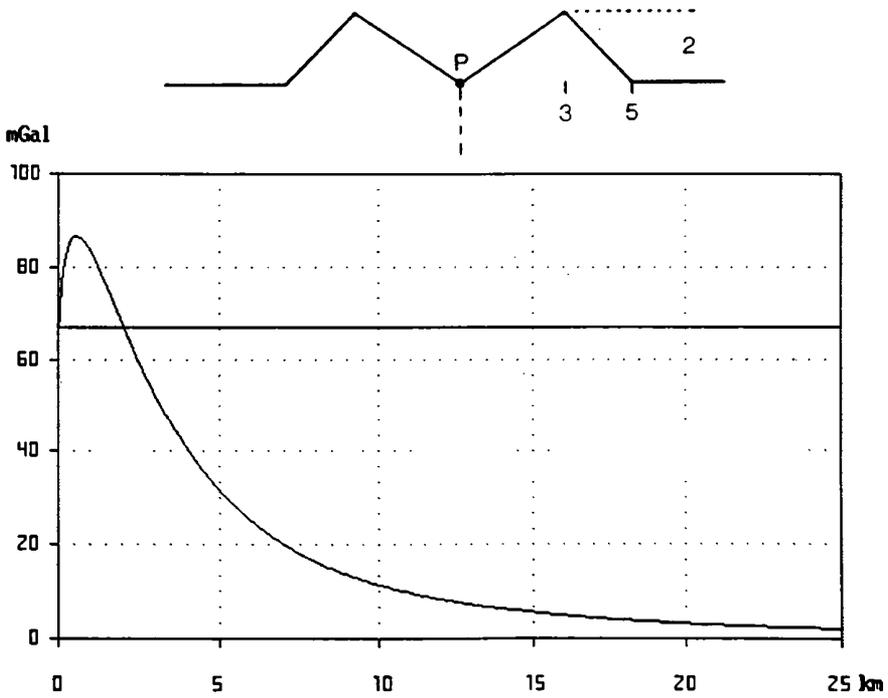
SCHLUSSFOLGERUNGEN

In den gezeigten fiktiven Beispielen der Figuren 6 10 liegt der gesuchte Punkt, in dem gleiche Schwerewirkung wie für den Oberflächenpunkt eintritt, für geodätische Fragestellungen in unrealistisch großer Tiefe. Dennoch erscheint es nicht ausgeschlossen, daß es natürliche Geländeformen gibt, bei denen dies in geringerer Tiefe eintritt. Mein Mitarbeiter, Dr. R. Weber, hat mich darauf hingewiesen, daß solche Gegebenheiten u.a. im Gebiet von Reutte (Tirol) zu finden sind (Wenger, 1992).

1. BEISPIEL: DURCH KEGELSTÜMPFE SIMULIERTE KRATER (Figuren 6 und 7)

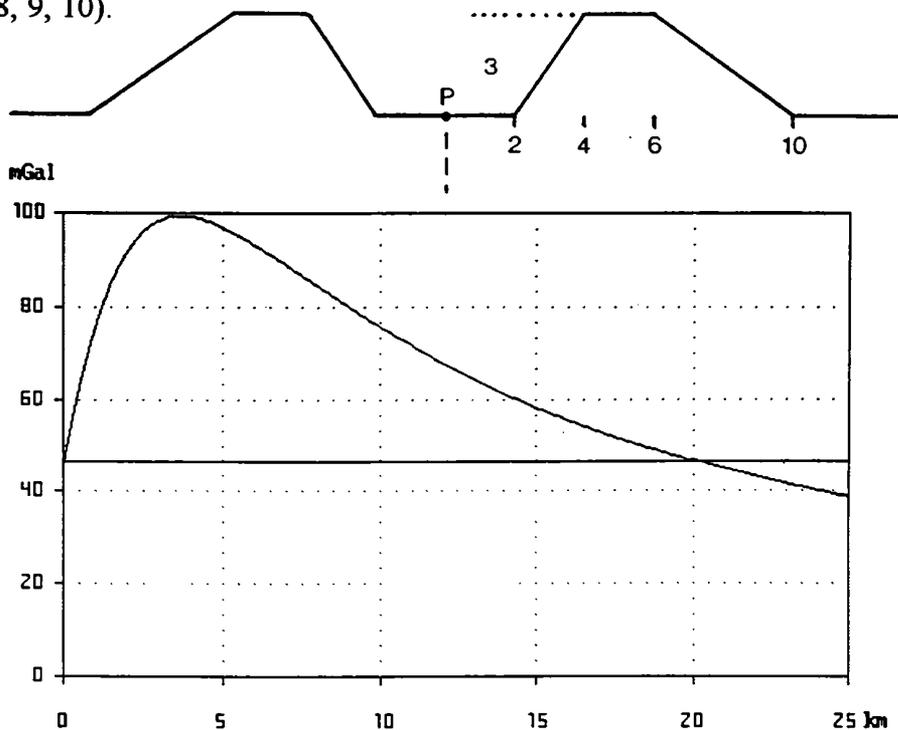


Figur 6: Kraterförmiger Berg

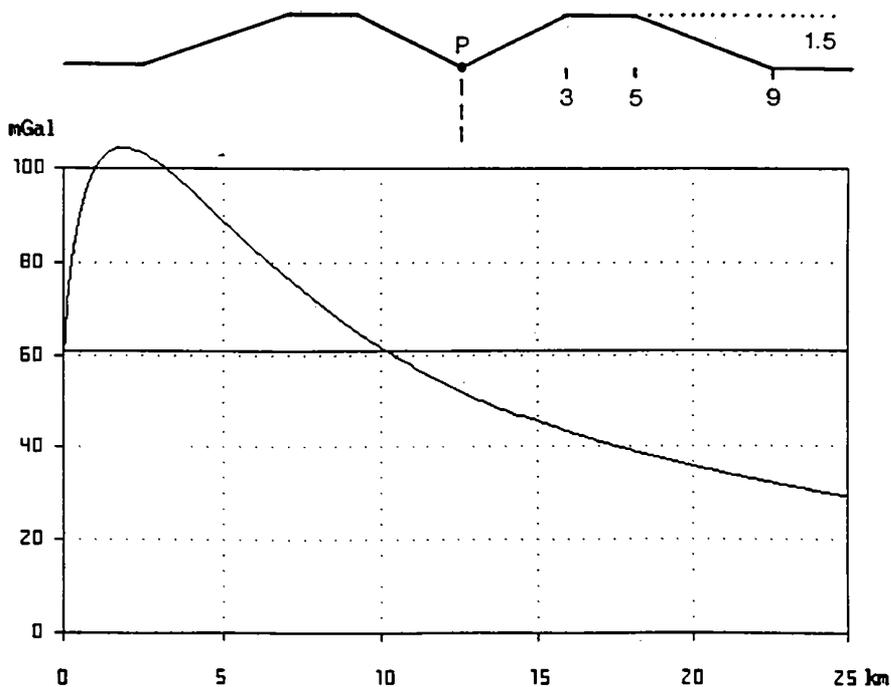


Figur 7: Kraterförmiger Berg

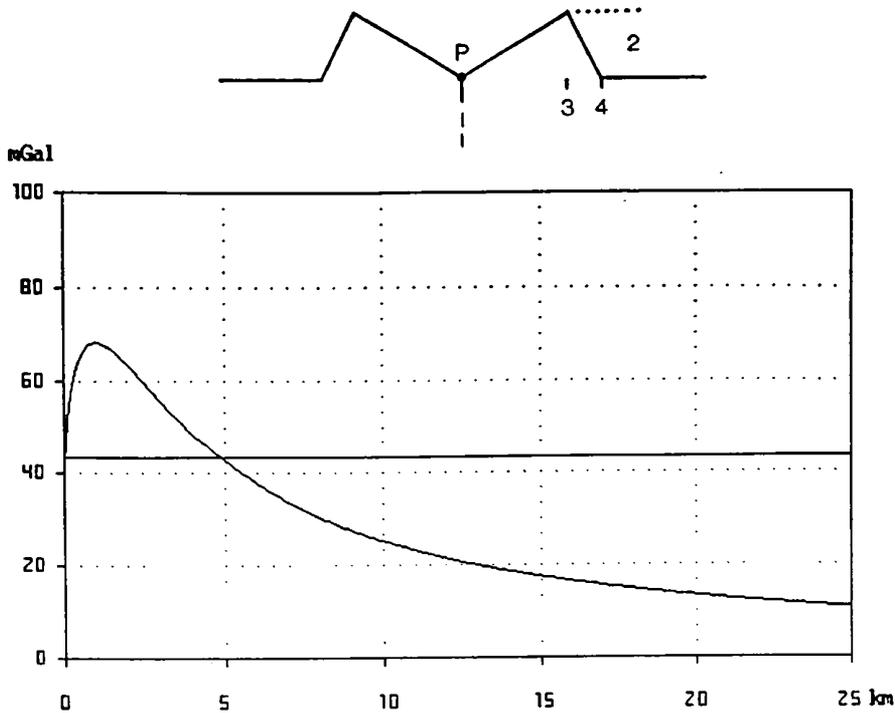
2. BEISPIEL: UNENDLICH AUSGEDEHNTTE PRISMENFÖRMIGE GEBIRGE.
(Figuren 8, 9, 10).



Figur 8: Unendlich ausgedehnte Gebirgskämme



Figur 9: Unendlich ausgedehnte Gebirgskämme



Figur 10: Unendlich ausgedehnte Gebirgsrücken

Bei der Berechnung orthometrischer Höhen wird genügend genau die geopotentielle Kote durch den Schwerewert in halber Höhe dividiert. Ab einer bestimmten Höhe der Oberflächenpunkte und wenn sie in Tälern gelegen sind, was bei Nivellementpunkten meist der Fall ist, heben sich die Schwerewirkungen auf den Oberflächenpunkt und jenen in halber Höhe praktisch auf. Es ist nun die Frage, ob man bei der bekannten Unsicherheit der orthometrischen Korrektur die Topographie überhaupt berücksichtigen soll, oder ob nicht die Anwendung einer Näherungsformel ausreichend ist (Bretterbauer, 1986, 1987).

LITERATUR:

Bretterbauer, Kurt: Das Höhenproblem der Geodäsie. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie 74, 1986, S. 205-215.

Bretterbauer, Kurt: Approximative Meereshöhen. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie 75, 1987, S. 10-13.

Bretterbauer, Kurt: Höhe, Schwere und Dichte. Festschrift Rudolf Sigl. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft 287, S. 16 - 22, München 1988.

Helmert, F. R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie. Leipzig, 1884, S. 141 -143.

Mader, Karl: Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Sonderheft 11 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien, 1951.

Wenger, Hannes: Der Einfluß von Schwere auf die Höhen in Österreich. Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 1992.

