
DAS SCHWEREFELD IN ÖSTERREICH

H. Sünkel

TU Graz

ZUSAMMENFASSUNG

Auf der Grundlage von Lotabweichungen, Schwereanomalien und aus Doppler-Daten abgeleiteten Höhenanomalien erfolgte 1987 eine neue Erdschwerefeldbestimmung für das gesamte österreichische Bundesgebiet, wobei das bewährte Sandwich-Verfahren "Datenreduktion - Kollokationslösung - Inverse Reduktion" zur Anwendung kam.

Ein detailliertes digitales Höhenmodell (11.25" × 18.75"), ein digitales Dichtemodell sowie das OSU81 Erdmodell wurden auf der Grundlage der Modellvorstellung einer idealen isostatischen Kompensation vom Typ Airy/ Heiskanen eingesetzt.

Repräsentativ für das Schwerefeld liegen nun für unser gesamtes Bundesgebiet das Geoid und das Quasigeoid in Form eines 3' × 5' - Gitters sowohl für das geozentrische Bezugssystem 1980 als auch für das exzentrische Bessel-System der Landesvermessung vor.

Die geschätzte Genauigkeit der Geoidhöhen liegt bei etwa ± 5 cm / 100 km. Die Genauigkeit der prädierten Lotabweichungen beträgt etwa $\pm 0.8''$, die der Schwerewerte etwa ± 1.5 mGal.

1 Einleitung

Die Geodäsie als ein Teil der Geowissenschaften beschäftigt sich mit der Bestimmung der Figur der Erde und mit dem Erdschwerefeld. Letzteres kann auf mannigfache Weise beschrieben werden, zum Beispiel durch die Angabe von Lage und Form seiner Äquipotentialflächen. Unter den unendlich vielen Äquipotentialflächen ist das Geoid insofern eine ausgezeichnete Fläche, als es mit der ruhenden "mittleren" Meeresoberfläche übereinstimmt. Da uns die Weltmeere direkt zugänglich sind, wurde das Geoid auch als natürlichste Bezugsfläche für die physikalische Höhenmessung gewählt.

Geodätische Messungen enthalten sowohl *geometrische* als auch *physikalische* Information. Da die überwiegende Mehrheit geodätischer Anwender an rein geometrischer Information interessiert ist, muß sich die Geodäsie auch mit der Filterung dieser geometrischen Information aus den geodätischen Daten auseinandersetzen. Dies erfordert die Kenntnis der Detailstruktur des Erdschwerefeldes. Seit Beginn der GPS-Ära spielt das lokale Erdschwerefeld auch insofern eine entscheidende Rolle, als eine saubere Verknüpfung von (nahezu) rein geometrischer GPS-Information mit physikalisch kontaminierten klassisch-geodätischen Daten eine exakte Trennung von Geometrie und Physik unerläßlich macht.

Das Schwerepotential ist die grundlegende physikalische Basisentität, andere Schwerefeldgrößen wie etwa der Schwerevektor leiten sich von diesem Potential ab. Daher muß das Primärziel der Erdschwerefeldbestimmung die Geoidbestimmung (oder Quasigeoidbestimmung) sein, und erst sekundär die Bestimmung seiner Ableitungen (Schwerevektor), insbesondere entlang der Erdoberfläche.

Die lokale Geoidbestimmung für Österreich hat eine mehr als drei Jahrzehnte zurückreichende Geschichte:

Im Jahre 1953 unternahm *Litschauer* [9] einen ersten recht erfolgreichen Versuch einer astrogeodätischen Geoidbestimmung für Österreich, basierend auf etwa 100 Lotabweichungsdaten mit einem mittleren Punktabstand von ca. 46 km. Litschauer verwendete Oberflächenlotabweichungen, welche vom Bessel-Ellipsoid der österreichischen Landesvermessung auf das Internationale Ellipsoid transformiert wurden. Sein Berechnungsverfahren kann für die damalige Zeit als recht fortschrittlich bezeichnet werden. Er wählte eine Darstellung des Geoids in Form von finiten Elementen und bestimmte die Knotenparameter über Schleifenbedingungen. Da der hochfrequente Anteil der Topographie aus den Daten nicht eliminiert wurde (Litschauer verwendete unreduzierte Oberflächenlotabweichungen), war die geschätzte Genauigkeit relativer Geoidhöhen nicht recht ermutigend (± 9 cm mittlerer Fehler auf Seitenlängen von 10 km, ± 90 cm über solche

von 46 km).

In den späten Siebzigerjahren und frühen Achtzigerjahren wurden in Österreich Lotabweichungsmessungen in großem Maßstab durchgeführt. Diese Daten ermöglichten eine erste genaue und hochauflösende Geoidbestimmung für etwa 2/3 unseres Bundesgebietes. Ausgehend von der Pilotstudie *“Testnetz Steiermark”*, (Sünkel, 1982, [20]), erfolgte unabhängig voneinander eine astrogeodätische Geoidbestimmung am Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen in Wien (Erker, 1983, [2]) (*“Wiener Lösung”*) und am Institut für Theoretische Geodäsie der Technischen Universität Graz (Sünkel, 1983, [21]) (*“Grazer Lösung”*). In beiden Lösungen wurden mehr als 500 Lotabweichungen verarbeitet. Zur Datenreduktion wurde damals ein vorläufiges digitales Höhenmodell (DHM) verwendet.

Die *Wiener Lösung* beruhte im wesentlichen auf Helmerts klassischer Methode der astrogeodätischen Geoidbestimmung, ergänzt und unterstützt durch das *“Remove-Restore”*-Verfahren in Form der Berücksichtigung der topographischen Massen. Dabei wurde angenommen, daß die Krümmung der Lotlinie ausschließlich durch die Wirkung der topographischen Massen verursacht wird. Die Fortsetzung der topographisch reduzierten Oberflächenlotabweichungen bis ins Nullniveau erfolgte entlang der Normallotlinie. Die so reduzierten Lotabweichungen im Nullniveau zeigen ein sehr ruhiges Verhalten und können daher leicht interpoliert werden, etwa zur Herstellung von Isolinienkarten der reduzierten Lotabweichungskomponenten. Aus solchen Isolinienkarten wurde dann auch ein Gitter von Geoidhöhen ($3' \times 5'$ im gebirgigen Teil, $6' \times 10'$ im flacheren Teil Österreichs) unter der Schleifenschlußbedingung innerhalb jedes Gitterelementes bestimmt, wobei ein lineares Verhalten der Lotabweichungen innerhalb jedes Gitterelementes angenommen wurde. Die geschätzte Genauigkeit einer Geoidhöhendifferenz über eine Distanz von 1 km lag bei etwa 1.5 cm. Das Geoid bezog sich auf das Bessel-Ellipsoid und wurde dann auf das Europäische Datum 1979 (ED 79), das auf dem Internationalen Ellipsoid beruht, transformiert (Erker, 1983, [2]).

Auch die *Grazer Lösung* beruhte auf einer astrogeodätischen Geoidbestimmung und ging im wesentlichen vom selben Datensatz aus wie die Wiener Lösung. Die Methode der Verarbeitung der Lotabweichungen zu Geoidhöhen bediente sich zwar auch des *“Remove-Restore”*-Verfahrens, sie unterschied sich jedoch in mancher Hinsicht von der Wiener Lösung: die Reduktion der Oberflächenlotabweichungen erfolgte topographisch-isostatisch unter Zugrundelegung des isostatischen Kompensationsmodells von Airy/Heiskanen mit einer Ausgleichstiefe von 30 km und konstanten Standarddichten von 2670 kgm^{-3} für die topographischen Massen und 3270 kgm^{-3} für die Dichte unterhalb dieser Modell-Moho. Als Geländemodell diente für den Bereich unseres Bundesgebietes ein vorläufiges $20'' \times 20''$ DHM sowie ein weltweites $1^0 \times 1^0$ DHM. Die so reduzierten Oberflächenlotabweichungen wurden dann auf das in gleicher Weise konsistent topographisch-isostatisch reduzierte Erdmodell OSU81 und auf das Geodätische Bezugssystem 1980, (GRS80), [10], bezogen. Für die Transformation vom Bessel-Ellipsoid auf das System GRS80 wurden die

damals vorhandenen Doppler-Daten herangezogen. Die Datenreduktion bewirkte eine starke Glättung der Lotabweichungen — die Varianz sank von 30 auf 5 Bogensekunden² ab. Die reduzierten Oberflächenlotabweichungen wurden durch Kollokation nach kleinsten Quadraten in einem schrittweisen Verfahren zu Rasterwerten von Resthöhenanomalien und Restgeoidhöhen (Rasterabstand: 3' × 5') verarbeitet. Als Kovarianzfunktion wurde das ATN-Modell ("attenuated white noise") von Jordan/Heller, [8], gewählt. Diese Rasterwerte, kombiniert mit dem Anteil von Topographie, Isostasie und Erdmodell, ergaben schließlich ein digitales Geoid und Quasigeoid mit einer geschätzten Genauigkeit von ± 1 cm über eine Strecke von 1 km. Danach wurde dieses GRS80-Geoid auf das System ED79 transformiert. Bedauerlicherweise verfälschten einige grobe Datenfehler in den verwendeten Lotabweichungen sowie Unzulänglichkeiten sowohl im lokalen als auch im globalen Höhenmodell das Ergebnis in einigen lokal begrenzten Bereichen (Sünkel, 1983, [21]).

Ein Vergleich sowohl der Wiener als auch der Grazer Lösung mit einem dichten Netz das Bundesgebiet überdeckender Dopplerdaten zeigte nach einer 7-parametrischen Helmert-Transformation eine Übereinstimmung beider Lösungen im Bereich weniger Dezimeter (Rinner, 1986, [15]).

In den Jahren von 1983 bis 1986 wurden weitere Lotabweichungsmessungen vor allem im Westen Österreichs getätigt, sodaß nun ein das Bundesgebiet nahezu homogen überdeckendes äußerst dichtes Feld von Lotabweichungsdaten vorliegt. Ebenso erfolgten Schweremessungen in zahlreichen Kampagnen sowie die Erstellung eines stark verbesserten Höhenmodells und die eines digitalen Dichtemodells. Diese Fülle neuer und verbesserter Daten führte zur Entscheidung, eine erneute Erdschwerefeldbestimmung für Österreich vorzunehmen. In der Folge wird diese am Institut für Theoretische Geodäsie der Technischen Universität Graz im Jahre 1987 durchgeführte Erdschwerefeldbestimmung, die "*Grazer Lösung 1987*" (Sünkel, et al., 1987, [23]), im Detail vorgestellt.

2 Die Erdschwerefeldbestimmung 1987

2.1 Die Daten

Der gesamte, für Zwecke der Erdschwerefeldbestimmung vorhandene Datensatz läßt sich in zwei Gruppen gliedern: Quellendaten in Form von digitalen Höhen- und Dichtemodellen, und Wirkungsdaten in Form von eigentlichen Schwerefelddaten wie Lotabweichungen, Schwerewerten, usw.

2.1.1 Das Digitale Höhenmodell für Österreich

Das im Zuge der Geoidbestimmung 1983 verwendete 20" × 20" digitale Höhenmodell (DHM) für Österreich, das vom Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der Technischen Universität Wien durch Digitalisierung der ÖK 1:500000 entwickelt wurde, erwies sich als zu stark generalisiert für die Zecke hochpräziser lokaler Erdschwerefeldbestimmung. Der geschätzte mittlere Fehler der Höhen lag in der Größenordnung von etwa 100 Meter; Diskrepanzen von mehreren hundert Metern, in einem extremen Fall sogar bis über tausend Meter, wurden festgestellt. Daher hat man sich für die Zwecke einer neuen Erdschwerefeldbestimmung zu der Herstellung eines neuen DHM für Österreich entschieden, welches von der ÖK 1:50000, in manchen Gebieten sogar von der ÖK 1:25000 abgeleitet wurde. Mehrere Institutionen beteiligten sich an dieser DHM-Erstellung: das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, das Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien, das Institut für Geophysik der Montanuniversität Leoben und das Institut für Theoretische Geodäsie, Abteilung für Mathematische und Datenverarbeitende Geodäsie, der Technischen Universität Graz. Dieses DHM liegt seit 1987 in Form von mittleren Geländehöhen auf einem 3/16' × 5/16' - Gitter (11.25" × 18.75") vor. Der mittlere Fehler der Höhen wird auf etwa ± 40 Meter geschätzt. Die DHM-Datenbank auf dem VAX-System des Instituts für Theoretische Geodäsie erlaubt direkten Zugriff auf diese Höhendaten.

2.1.2 Das Globale Digitale Höhenmodell

Für die Berechnung des Effektes von Topographie und ihrer isostatischen Kompensation auf Erdschwerefelddaten ist lokale, auf das Bundesgebiet beschränkte Höheninformation nicht ausreichend und würde zu unangenehmen Randeffekten, die als "Gibb's Phänomen" bekannt sind, führen. Unerwünschte Effekte dieser Art können vermieden werden, indem bei der Berechnung des Einflusses der topographisch-isostatischen Massen ein DHM herangezogen wird, das weit über das Bundesgebiet hinausreicht. Numerische Studien ergaben, daß sich ein solches DHM zumindest 1° über die Grenze hinweg erstrecken muß. Das heißt, wir benötigen ein DHM für

ein sehr viel größeres Gebiet als Österreich. Aufgrund des Fernzoneneffektes wäre ein $6' \times 10'$ DHM ausreichend. Da an der Abteilung für Mathematische Geodäsie der TU Graz ohnehin ein globales $5' \times 5'$ -Modell, das aus ETOPO5-Daten abgeleitet wurde, vorhanden ist (Wieser, 1987, [31]), wurde dieses DHM-Modell für das Gebiet außerhalb Österreichs für den Bereich $45^\circ \leq \phi \leq 50^\circ$, $7^\circ \leq \lambda \leq 20^\circ$ verwendet.

2.1.3 Das Digitale Dichtemodell

Eine optimale Reduktion von Erdschwerefelddaten zufolge des Einflusses der topographisch-isostatischen Massen erfordert natürlich die Verfügbarkeit eines realistischen dreidimensionalen Dichtemodells zumindest für die Erdkruste. Da Daten dieser Art (noch) nicht vorhanden sind, wird allgemein die Krustendichte als konstant angenommen und standardmäßig ein Wert von 2670 kgm^{-3} verwendet. Geologische Karten und andere Daten liefern zumindest Oberflächendichteinformation, die durch Digitalisierung in ein digitales Modell von Oberflächendichten transformiert werden kann. Die Entwicklung eines derartigen digitalen Dichtemodells (DDM) wurde von Steinhauser [17] begonnen, von Walach (Walach, 1987, [29]) verbessert und in Form eines $1.5' \times 2.5'$ Modells von Mittelwerten der Oberflächendichte fertiggestellt. Der mittlere relative Fehler der Dichtewerte wird mit $\pm 4\%$ angegeben. Oberflächendichten geben aber an sich keine Auskunft über die Art der räumlichen Fortsetzung dieser Randwerte nach unten. Unter allen unendlich vielen Möglichkeiten haben wir daher die einfachste Art der Fortsetzung gewählt, nämlich jene der Massensäulen mit jeweils konstanter Dichte zwischen Nullniveau und Erdoberfläche.

2.1.4 Das Isostatische Modell

Die isostatische Kompensation als ein Modell für den Massenausgleich wurde in der Vergangenheit zur Glättung von Erdschwerefelddaten vielfach verwendet. Heutzutage wird aus Gründen der Einfachheit fast ausschließlich das Airy/Heiskanen-Modell verwendet, obwohl ein Modell vom Typ Vening Meinesz sehr viel realistischer ist (Sünkel, 1986, [22], Rummel et al., 1988, [16]). Für die Erdschwerefeldbestimmung 1987 wurde dennoch das einfache Airy/Heiskanen-Modell mit einer Kompensationstiefe von 30 km und einer konstanten Dichte des oberen Mantels von 3070 kgm^{-3} verwendet. (Dieser Wert scheint für den Bereich der Ostalpen realitätsnah zu sein, Steinhauser und Pustizek, 1987, [17].) Das Fenster des isostatischen Modells wurde gleich gewählt wie jenes des DHM und DDM ($45^\circ \leq \phi \leq 50^\circ$, $7^\circ \leq \lambda \leq 20^\circ$).

2.1.5 Das Globale Erdmodell

Derzeit sind mehrere hochauflösende globale Erdschwerefeldmodelle in Verwendung: OSU81 (Rapp, 1981, [13]), GPM2 (Wenzel, 1985, [30]), OSU86 (Rapp and Cruz, 1986, [14]). Diese

Erdmodelle basieren auf der Darstellung des Gravitationsfeldes durch harmonische Funktionen, und bestehen jeweils aus einem Satz von Kugelfunktionskoeffizienten, vollständig bis Grad und Ordnung 180, 200 bzw. 360.

Wir haben alle diese drei Modelle getestet und fanden, daß die hochauflösenderen Modelle GPM2 oder OSU86 zumindest für unser Bundesgebiet keine signifikant besseren Ergebnisse (im Sinne bestmöglicher Approximation des lokalen Schwerefeldes) brachten als das bereits 1983 verwendete Modell OSU81 (OSU86 lieferte bessere Werte für Lotabweichungen, GPM2 für Schwereanomalien.) Daher entschieden wir uns auch aus ökonomischen Gründen zur einheitlichen Verwendung von OSU81.

2.1.6 Lotabweichungsdaten

Wie bereits eingangs erwähnt, standen für die Geoidbestimmung 1983 etwa 500 Lotabweichungen (sowohl NS als auch OW-Komponenten) zur Verfügung. Die räumliche Verteilung dieser Daten war auf den östlichen Teil unseres Bundesgebietes ($\lambda \geq 12^{\circ} 20'$) beschränkt. Nach 1983 wurden vor allem im westlichen Teil Österreichs weitere 150 Lotabweichungen bestimmt, sodaß derzeit insgesamt 683 Lotabweichungen (jeweils beide Komponenten) für Österreich vorliegen.

Die Dichte der Datenverteilung ist nahezu homogen, der mittlere Punktabstand liegt bei etwa 12 km, (siehe Abb. 1). Alle verfügbaren Lotabweichungsdaten beziehen sich auf das Bessel-Ellipsoid und das Datum der österreichischen Landesvermessung (MGI), (Erker, 1983, [2]; Erker, 1987, [3]). Die geschätzte äußere Genauigkeit beider Lotabweichungskomponenten liegt bei etwa $\pm 0.4''$. Die Datenstatistik ist in Tab. 1 enthalten. Die Lotabweichungsdatenbank auf dem VAX-System des Instituts für Theoretische Geodäsie erlaubt einen direkten Zugriff auf diese Daten.

2.1.7 Schweredaten

Die Verteilung von Schweredaten in Österreich war bis vor wenigen Jahren ein Schwachpunkt. Bis vor etwa zehn Jahren standen uns lediglich Schweredaten entlang der Hauptnivellementlinien durch das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen sowie einige hundert flächenhaft verteilte Daten der Österreichischen Mineralölverwertung und des Instituts für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien zur Verfügung. Insgesamt war damals die Bedeckung des Bundesgebietes mit Schweredaten äußerst unbefriedigend.

Seither wurde der flächenhaften Schweremessung viel Aufmerksamkeit geschenkt und große Anstrengungen in Richtung einer Verdichtung der Schweredatenverteilung unternommen. Dieses Vorhaben kann derzeit noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden, obwohl derzeit bereits

etwa 85% des Bundesgebietes für Zwecke der lokalen hochauflösenden Erdschwerefeldbestimmung hinreichend gut mit etwa 26000 Schweredaten abgedeckt sind. (Statistisch entspricht dies etwa 1 Punkt pro km^2 , jedoch ist die Datendichte grob inhomogen.) Die angegebenen Lagekoordinaten der Meßpunkte (ϕ, λ) beziehen sich auf das MGI-System, die angegebenen Höhen sind Gebrauchshöhen. Der geschätzte mittlere Fehler aller Schwerewerte liegt unter ± 0.1 mGal. Die Schweredatenbank auf dem VAX-System des Instituts für Theoretische Geodäsie erlaubt einen direkten Zugriff auf diese Daten. Abb. 2 zeigt einen Auszug von 20% der österreichischen Schweredaten. Die Datenstatistik ist in Tab. 1 enthalten.

2.1.8 Dopplerdaten

Seit 1980 wurden in Österreich im Rahmen von 7 Kampagnen 41 Dopplerpunkte mit einem mittleren Abstand von etwa 50 km bestimmt (Rinner, 1986, [15]). Transformiert auf ein geozentrisches System liefern Dopplerdaten in Verbindung mit orthometrischen Höhen Geoidhöhen, in Verbindung mit Normalhöhen Höhenanomalien. Da das derzeit noch im Gebrauch befindliche österreichische System der Gebrauchshöhen auf sphäroidischen Höhen aufbaut, welche den Normalhöhen eher verwandt sind als den orthometrischen Höhen, liefern Dopplerdaten verknüpft mit Gebrauchshöhen eher Höhenanomalieinformation.

Trotz des nicht unerheblichen mittleren Fehlers der Doppler-abgeleiteten Höhenanomalien von einigen Dezimetern (präzise Ephemeriden, Multistationslösung), stellen diese Daten in ihrer Gesamtheit doch wertvolle Stützstelleninformation für die Geoid- oder Quasigeoidbestimmung dar. Abb. 3 zeigt die Verteilung der Dopplerpunkte in Österreich sowie jene, welche für die Geoidbestimmung 1987 Verwendung fanden.

2.2 Die Lösung

Aufgrund des Newton'schen Gravitationsgesetzes ist die Ursache des Gravitationsfeldes die Dichteverteilung innerhalb der Erdoberfläche (wenn man von der Gravitationswirkung der Atmosphäre, des Mondes, der Sonne und der Planeten absieht). Wäre daher die Massenverteilung innerhalb der Erde hinlänglich gut bekannt, so wäre das Schwerfeld innerhalb, auf und außerhalb der Erde ebenso bekannt. Da wir leider keinen direkten Zugang zu dieser Quelleninformation haben, sind wir auf die Beobachtung der Wirkung, also etwa Potentialdifferenzen, die drei Komponenten des Schwerevektors, etc. angewiesen. Andererseits wissen wir aus der Potentialtheorie, daß das äußere Schwerfeld auch ohne jegliche Dichteinformation, also nur aus Oberflächendaten (zumindest theoretisch) bestimmt werden kann (Heiskanen and Moritz, 1967, [5], Moritz, 1980, [11]). Diese beiden Konzepte stellen insofern Extremfälle dar, als in jedem der beiden Fälle entweder jegliche Quelleninformation (Molodensky) oder jegliche Wirkungsinformation (Newton) unberücksichtigt bleibt. Da wir aber weder die eine noch die andere Information

mit hinreichender Dichte zur Verfügung haben, sind wir gut beraten, auf keine Information dieser Art zu verzichten, wenn wir an einer optimalen Lösung (optimal im Sinne der bestmöglichen Nutzung aller vorhandenen Daten) interessiert sind. Ein Datenkombinationsverfahren, das sowohl Quellen- als auch Wirkungsinformation bestmöglich und ökonomisch verwertet und sich bereits in zahlreichen Anwendungen als allen anderen, Selbstisolierung übenden Methoden deutlich überlegen gezeigt hat, beruht auf dem "Remove - Restore" - Prinzip, das bereits in der Einleitung beschrieben wurde (Sünkel, 1983, [21], Forsberg, 1984, [4], Tscherning, 1985, [27], Tscherning and Forsberg, 1986, [28]).

Bezeichnen wir nun das Schwerepotential auf einem Punkt an der Erdoberfläche P mit W_P und das Normalpotential des Bezugssystems GRS80 am zugehörigen Punkt Q mit U_Q ; dann kann das Telluroid durch die Bedingung verschwindender Potentialanomalie definiert werden,

$$W_P = U_Q. \quad (1)$$

Der Vertikalabstand zwischen den beiden Punkten P (Erdoberfläche) und Q (Telluroid) wird als "Höhenanomalie" ζ_{QP} bezeichnet (Heiskanen and Moritz, 1967, [5], S. 292),

$$\zeta_{QP} = \overline{QP}. \quad (2)$$

Zufolge der Gleichung von Bruns stehen die Höhenanomalie ζ und das Störpotential T ,

$$T_P = W_P - U_Q \quad (3)$$

in folgender Beziehung:

$$\zeta_{QP} = \frac{T_P}{\gamma_Q}. \quad (4)$$

Wenn der Oberflächenpunkt P durch den zugehörigen Punkt P_0 am Geoid und der Telluroidpunkt Q durch den zugehörigen Punkt Q_0 am Ellipsoid ersetzt wird, so wird aus der Höhenanomalie ζ_{QP} die Geoidhöhe $N_{Q_0P_0}$,

$$N_{Q_0P_0} = \overline{Q_0P_0}, \quad (5)$$

die wiederum über die Gleichung von Bruns mit dem Störpotential wie folgt in Beziehung steht:

$$N_{Q_0 P_0} = \frac{T_{P_0}}{\gamma_{Q_0}} \quad (6)$$

In diesem Zusammenhang nennt man die Abbildung von ζ "Quasigeoidbestimmung", jene von N "Geoidbestimmung"

Unter der Voraussetzung gleicher Rotationsgeschwindigkeit der Erde und des Bezugsellipsoides (GRS80) ist das Störpotential T außerhalb der Erdoberfläche eine harmonische Funktion. Über kontinentalen Bereichen wie Österreich ist direkte Information über T nur an den Dopplerpunkten vorhanden (durch Doppler-abgeleitete geodätische Höhen, verknüpft mit Normalhöhen oder orthometrischen Höhen, welche aus Nivellement und Schweremessung bestimmt werden). Diese wenigen Daten sind natürlich für eine hochauflösende Erdschwerefeldbestimmung weder hinreichend dicht noch ausreichend genau. Zusätzliche Erdschwerefeldinformation ist daher erforderlich und steht auch durch Messungen von Betrag und Richtung des Schwerevektors in Form von Schweredaten und Lotabweichungsdaten zur Verfügung.

Bezeichnen wir die im Punkt der Erdoberfläche P gemessene Absolutschwere mit g_P , die astronomische Breite mit Φ_P und die astronomische Länge mit Λ_P , und beziehen wir wie bereits zuvor diese Größen auf zugehörige Größen des Bezugsellipsoides im zugehörigen Telluroidpunkt Q (γ_Q Normalschwere, ϕ_Q ellipsoidische Breite, λ_Q ellipsoidische Länge), so erhalten wir durch Differenzbildung zwischen gemessenen Oberflächendaten und diesen modellbezogenen Normalellipsoiddaten die bekannten Erdschwerefeldgrößen "Freiluftanomalie" Δg_P und die beiden Komponenten der "Oberflächenlotabweichung" ξ_P und η_P ,

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q, \quad (7)$$

$$\xi_P = \Phi_P - \phi_Q, \quad (8)$$

$$\eta_P = \Lambda_P - \lambda_Q. \quad (9)$$

Dieser Satz von Schwerefelddaten

$$(T, \Delta g, \xi, \eta)_P$$

wird im allgemeinen zur Erdschwerefeldbestimmung herangezogen.

Die oben angeführten Erdschwerefeldgrößen stehen mit der Basisentität, dem Störpotential T , in sehr elementarer Weise über Differentialoperatoren in Beziehung (Moritz, 1980, [11], S. 108):

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{r}, \quad (10)$$

$$\xi = -\frac{1}{\gamma r} \frac{\partial T}{\partial \phi}, \quad (11)$$

$$\eta = -\frac{1}{\gamma r \cos \phi} \frac{\partial T}{\partial \lambda}. \quad (12)$$

(Hier wurde von der sphärischen Approximation Gebrauch gemacht.) Messungen von $T, \Delta g, \xi, \eta$ sind daher lineare Funktionale von T . Bezeichnen wir den Vektor aller linearen Funktionale, die zu unserem Datensatz der Messungen gehören, mit L (L ist somit ein linearen Operator) und die zugehörigen Meßwerte mit l (l ist ein Vektor reeller Zahlen), so läßt sich die Beziehung zwischen den Erdschwerefelddaten l und dem Störpotential T sehr einfach darstellen:

$$l = L T. \quad (13)$$

Das Problem der Bestimmung des Störpotentials T kann damit formal sehr einfach als Inversion von Gl. (13) dargestellt werden:

$$\hat{T} = L^{-1} l. \quad (14)$$

Betrachten wir T als ein Element aus einem Hilbert-Raum harmonischer Funktionen \mathcal{H} mit reproduzierendem Kern K , so wird die beste Schätzung von \hat{T} im Sinne minimaler Norm durch eine Orthogonalprojektion von T auf jenen Teilraum von \mathcal{H} , welcher von den Funktionen $L K$ aufgespannt wird, geliefert,

$$\hat{T} = \Pi_L T, \quad (15)$$

wobei Π der Projektionsoperator ist,

$$\Pi_L = L^T K (L L^T K)^{-1} L. \quad (16)$$

Gl. (15) verknüpft mit (16) ergibt die Fundamentalgleichung der reinen Kollokation mit Kernfunktion (Moritz, 1980, [11], S. 211):

$$\hat{T} = L^T K (L L^T K)^{-1} l. \quad (17)$$

Wenn die Daten mit Meßfehlern behaftet sind und die Kovarianzmatrix der Meßfehler mit D bezeichnet wird (die Meßfehler sind meist unkorreliert, somit hat D meist Diagonalstruktur), so können die Meßfehler optimal gefiltert werden, indem in Gl. (16) $L L^T K$ durch $L L^T K + D$ ersetzt wird.

Nun können wir aber auch jeden beliebigen linearen Operator S auf \hat{T} anwenden und erhalten eine beste Schätzung für den zu diesem Operator gehörigen Signalvektor s ,

$$\hat{s} = S \hat{T} = S L^T K (L L^T K + D)^{-1} l \quad (18)$$

mit der zugehörigen Kovarianzmatrix der Schätzfehler

$$\Sigma(\hat{s}) = S S^T K - S L^T K (L L^T K + D)^{-1} L S^T K. \quad (19)$$

Wenn wir als reproduzierenden Kern K die Kovarianzfunktion von T wählen, so ist die Signalschätzung (18) best im Sinne minimaler Schätzfehler.

Wie wir bereits wissen, ist das Erdschwerefeld ein Abbild der Dichteverteilung innerhalb der Erdoberfläche. Wegen der zum Teil beträchtlichen Unregelmäßigkeiten der Dichteverteilung — man denke nur an die so abwechslungsreiche und daher wunderschöne Topographie Österreichs — ist auch das Schwerefeld in unserem Bundesgebiet entsprechend rau. Besonders rau ist es natürlich im gebirgigen Teil Österreichs. Aus dem Abtasttheorem folgt, daß diese Rauheit streng genommen nur durch unendlich viele Daten erfaßt werden kann. Da aber unser Erdschwerefeld-Datensatz naturgemäß endlich ist, können wir das Schwerefeld nur approximativ bestimmen.

Das Abtasttheorem (oder bloß der bisweilen schon abhanden gekommene natürliche Hausverstand) sagt uns auch, daß zur Approximation einer glatten Funktion wenige, zur Approximation einer rauhen Funktion viele Daten erforderlich sind. Wir stehen vor dem Problem, eine über weite Bereiche recht rauhe Funktion mit relativ wenigen Daten approximieren zu müssen. Wir lösen dieses Problem, indem wir versuchen, die Unregelmäßigkeiten in geeigneter Weise herauszufiltern. Da wir wissen, daß die Rauheit der Topographie hauptsächlich für die Rauheit des Schwerefeldes verantwortlich ist, drängt sich natürlich eine topographische Reduktion auf. Und um die reduktionsbedingten indirekten Effekte nicht übermäßig groß werden zu lassen, verbinden wir diese topographische mit einer isostatischen Reduktion. Diese Idee führt auf das bereits mehrmals genannte "Remove-Restore"-Sandwich-Verfahren. Statistisch gesehen wirkt die topographische Reduktion bezüglich aller Erdschwerefelddaten hauptsächlich *varianzsenkend*, die

mehrmals genannte "Remove-Restore"-Sandwich-Verfahren. Statistisch gesehen wirkt die topographische Reduktion bezüglich aller Erdschwerefelddaten hauptsächlich *varianzsenkend*, die isostatische Reduktion vor allem *dekorrelierend*. Beide Eigenschaften vereint tragen zu einer erheblichen Steigerung der Prädiktionsgenauigkeit und zu einer Stabilisierung der Lösung bei.

Nehmen wir an, daß sich der überwiegende Teil der Unregelmäßigkeiten des Erdschwerefeldes auf ein bekanntes Ursachen- oder Wirkungsmodell (oder eine Kombination der beiden) zurückführen läßt und bezeichnen wir das zu diesem Modell gehörende Modell-Gravitationspotential mit δT . Dann kann der *Remove* - Prozeß, angewandt auf unsere Erdschwerefelddaten $l = L T$, durch

$$l' := l - \delta l = L (T - \delta T) \quad (20)$$

dargestellt werden. Diese Schwerefeldresiduen repräsentieren ein Restpotential, das durch eine Residual-Kovarianzfunktion K' statistisch beschrieben wird. Die aus den Datenresiduen (20) mittels Gl. (18) geschätzten Signalresiduen \hat{s}'

$$\hat{s}' = S \hat{T}' = S L^T K' (L L^T K' + D)^{-1} l' \quad (21)$$

ergeben, verknüpft mit dem Signal-Modellanteil $S \delta T$ die beste Schätzung für das Signal \hat{s} ,

$$\hat{s} = \hat{s}' + S \delta T. \quad (22)$$

Letzteren Additionsprozeß bezeichnet man als *Restore* - Prozeß.

Für die hier verwendeten Erdschwerefeldgrößen $(T, \Delta g, \xi, \eta)$ ist der *Remove* - Prozeß einfach:

$$T' = T - \delta T, \quad (23)$$

$$\Delta g' = \Delta g - \delta \Delta g, \quad (24)$$

$$\xi' = \xi - \delta \xi, \quad (25)$$

$$\eta' = \eta - \delta \eta. \quad (26)$$

mit

$$\delta \Delta g = -\frac{\partial \delta T}{\partial r} - \frac{2 \delta T}{r}, \quad (27)$$

$$\delta \xi = -\frac{1}{\gamma r} \frac{\partial \delta T}{\partial \phi}, \quad (28)$$

$$\delta \eta = -\frac{1}{\gamma r \cos \phi} \frac{\partial \delta T}{\partial \lambda}. \quad (29)$$

2.2.1 Der Remove - Prozeß

Wie oben erwähnt ist δT das Potential einer Modell-Quelle oder ein bekanntes Modellpotential oder eine Kombination der beiden. Wenn die Masse der Topographie und ihrer isostatischen Reduktion Ursachenmodell ist, dann bezeichnet man die Größen $\delta T, \delta \Delta g, \delta \xi, \delta \eta$ als "topographisch-isostatische" Schwerefeldgrößen (Potential, Schwereanomalie, Lotabweichungskomponenten). Wenn ein Erdmodell (wie z.B. OSU81) Wirkungsmodell ist, dann bezeichnen wir die Größen $\delta T, \delta \Delta g, \delta \xi, \delta \eta$ als "Erdmodell" - Größen (Potential, Schwereanomalie, Lotabweichungskomponenten). Im Fall der Kombination der beiden (Ursachenmodell verknüpft mit Wirkungsmodell) sprechen wir von "topographisch-isostatischen - Erdmodell" - Größen. Eine derartige Kombination der beiden Modelle wurde dem Remove - Restore -Prozeß im Rahmen unserer Erdschwerefeldbestimmung für Österreich zugrundegelegt.

Als Ursachenmodell diente das Massenmodell, das durch unser DHM und DDM in Verbindung mit dem isostatischen Kompensationsmodell nach Airy/Heiskanen (Ausgleichstiefe 30 km, Moho-Dichtekontrast 400 kgm^{-3}) gegeben und auf das Fenster $45^\circ \leq \phi \leq 50^\circ, 7^\circ \leq \lambda \leq 20^\circ$ beschränkt ist. Als Wirkungsmodell diente das Erdmodell OSU81, das wegen des Effektes dieser topographisch-isostatischen Massen innerhalb des o.g. Fensters reduziert wurde. Diese Reduktion ist notwendig, da jedes Erdmodell als Wirkungsmodell implizit den Einfluß der topographischen Massen und ihrer (meist partiellen) isostatischen Kompensation enthält

Zur Berechnung des Einflusses der topographisch-isostatischen Massen auf die hier verwendeten Erdschwerefeldgrößen $\delta T, \delta \Delta g, \delta \xi, \delta \eta$ wurde das, bezüglich der Verarbeitung lateral variabler Dichte, modifizierte Programm "TC" von Forsberg [4] benutzt. Die Berechnung des Effektes der topographisch-isostatischen Massen auf die Kugelfunktionskoeffizienten des durch das Erdmodell OSU81 implizierten Modell-Schwerefeldes erfolgte wegen der geringen Ausdehnung des Datengebietes durch einfache Integration im Funktionsbereich. Für die Berechnung der Erdmodell-Größen (nach dieser Reduktion) wurde der sehr effiziente Algorithmus zur harmonischen Synthese von Tscherning et al., 1983, [26] angewandt.

Statistische Information über die von uns verwendete 20% - Stichprobe der Schwereanomalien (ca. 5800 Daten) und über alle Lotabweichungen vor der Reduktion (beobachtet), nach der topographisch-isostatischen Reduktion sowie nach der vollständigen topographisch-isostatischen-Erdmodell - Reduktion ist in Tab. 1 gegeben. Die Lotabweichungsresiduen nach vollständiger Reduktion sind in Abb. 4 dargestellt.

Datenstatistik					
<i>Schwerefeldgr.</i>	<i>Dimension</i>	<i>Min.</i>	<i>Max.</i>	<i>Mittel</i>	<i>Std.abw.</i>
Δg	mGal	-114.9	168.0	5.7	42.4
$\Delta g - \delta \Delta g_{TI}$	mGal	-39.9	62.5	11.4	19.8
$\Delta g - \delta \Delta g$	mGal	-49.0	51.9	5.3	13.3
ξ	"	-14.2	24.7	3.7	6.4
$\xi - \delta \xi_{TI}$	"	-5.4	10.8	1.6	2.8
$\xi - \delta \xi$	"	-3.4	10.0	2.6	2.7
η	"	-14.4	18.8	4.0	5.6
$\eta - \delta \eta_{TI}$	"	-5.4	10.8	2.0	3.1
$\eta - \delta \eta$	"	-4.0	7.9	2.4	2.1

Tabelle 1: Statistik der beobachteten, der topographisch-isostatischen sowie der topographisch-isostatisch-Erdmodell - reduzierten Schwereanomalien und Lotabweichungen für Österreich (Bezugssystem: GRS80)

2.2.2 Die Datentransformation

Das österreichische System der Landesvermessung beruht auf dem Datum des ehemaligen Militärgeographischen Instituts (MGI) mit dem Bessel-Ellipsoid als Bezugsfläche. Daher beziehen sich alle Punktkoordinaten und auch die Schwere- sowie Lotabweichungsdaten auf dieses System. Da wir die Kollokationslösung in einem geozentrischen System mit dem GRS80 sowohl als geometrische Bezugsfläche als auch als physikalisches Modell-Schwerefeld durchzuführen haben, müssen wir einen Weg finden, um unsere Erdschwerfelddaten vom MGI-System in das geozentrische GRS80-System zu transformieren. Hiezu bieten sich zwei Möglichkeiten an, a) eine Trennung und b) eine Kombination von Transformation und Kollokation:

a) Im Falle der Trennung von Transformation und Kollokation werden zunächst die Transformationsparameter einer 7-parametrischen Helmert-Transformation (3 Verschiebungen, 3 Drehungen, 1 Maßstab) durch einfache Ausgleichung aus einem Vergleich der sowohl im MGI-System als auch im geozentrischen GRS80-System vorliegenden Koordinaten von (möglichst zahlreichen

und regelmäßig über das Bundesgebiet verteilten) Punkten ermittelt. Mit Hilfe dieser Parameter werden sämtliche Erdschwerefelddaten vom MGI-System in das GRS80-System transformiert. Nach dieser Transformation erfolgt eine Kollokationslösung (ohne Parameter).

b) Im Falle der Kombination von Transformation und Kollokation wird das Kollokationsmodell um ein Parametermodell mit diesen 7 Parametern erweitert und so zum integrierten Modell der "Kollokation mit Parametern".

In beiden Fällen ist die Lösung nur durch eine Iteration möglich, zumal die Berechnung der empirischen Kovarianzfunktion, die wir später noch behandeln werden, trendfreie Signale (also bereits transformierte Erdschwerefelddaten) voraussetzt. Die bestmögliche Schätzung des Trends (der 7 Transformationsparameter) setzt jedoch bereits die Kenntnis der trendreduzierten Signal-Kovarianzfunktion voraus. Dieser scheinbare "Teufelskreis der Kollokation" (Sünkel und Malits, 1981, [19]) stellt sich jedoch als recht harmlose, rasch konvergierende Spirale dar (2 Iterationen sind praktisch immer ausreichend).

Im Rahmen der Erdschwerefeldbestimmung 1987 wurde aus ökonomischen Gründen, mangels Speicherplatzes und beschränkter Rechenzeit (es konnten nicht alle Erdschwerefelddaten in einem Guß verarbeitet werden) der erste Weg (a) gewählt. Zur Transformation wurden 24 Doppelpunkte (siehe Abb. 3), deren Koordinaten auch im MGI-System gegeben sind, herangezogen. Die ellipsoidischen Höhen im MGI-System ergaben sich zunächst aus den bekannten Gebrauchshöhen (sphäroidische Höhen, die als Normalhöhen interpretiert wurden) und aus den aus der Geoidbestimmung 1983 bekannten Geoidhöhen. Die Transformation vom MGI-System (Bessel) in das Doppler-System erfolgt durch

$$X_D = \Delta X_{BD} + (1 + \mu_{BD}) R_{BD} X_B, \quad (30)$$

wobei von folgender Notation Gebrauch gemacht wurde (B ... Bessel, D ... Doppler):

X_B	Ortsvektor, (B) ,
X_D	Ortsvektor, (D) ,
ΔX_{BD}	Verschiebungsvektor, (B)-(D) ,
μ_{BD}	Maßstabsfaktor (B)-(D),
R_{BD}	Drehmatrix (B)-(D).

Die Drehmatrix R_{BD} setzt sich wie üblich aus einer Einheitsmatrix und einer schiefsymmetrischen Matrix zusammen, deren Elemente durch die drei (kleinen) Eulerschen Drehwinkel $\epsilon_{BD}^{(1)}$, $\epsilon_{BD}^{(2)}$, $\epsilon_{BD}^{(3)}$ gegeben sind:

$$R_{BD} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon_{BD}^{(3)} & \epsilon_{BD}^{(2)} \\ \epsilon_{BD}^{(3)} & 1 & -\epsilon_{BD}^{(1)} \\ -\epsilon_{BD}^{(2)} & \epsilon_{BD}^{(1)} & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Da auch das Doppler-System nicht streng geozentrisch ist und insbesondere um die 3. Achse (z-Achse) eine beachtliche Drehung aufweist, müssen wir den Ortsvektor im Doppler-System erneut einer Transformation unterziehen, um ihn endgültig in das geozentrische System zu bringen:

$$X_G = \Delta X_{DG} + (1 + \mu_{DG}) R_{DG} X_D. \quad (32)$$

Die derzeit am besten bekannten Transformationsparameter wurden einer Arbeit von Boucher und Altamimi, 1985, [1] entnommen:

$$\Delta X_{DG} = \begin{bmatrix} -0.106 \\ 0.697 \\ 4.901 \end{bmatrix} m$$

$$\mu_{DG} = -0.604 \cdot 10^{-6}, \quad (33)$$

$$\epsilon_{DG} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.005 \\ -0.814 \end{bmatrix} ''.$$

Verknüpfen wir Gl.(30) mit Gl.(32), so erhalten wir die direkte Transformation vom exzentrischen Bessel-System in das geozentrische GRS80-System

$$X_G = \Delta X_{BG} + (1 + \mu_{BG}) R_{BG} X_B. \quad (34)$$

mit den besten Schätzungen für die 7 Parameter der Helmert-Transformation:

$$\Delta X_{BG} = \begin{bmatrix} 563.88 \pm 6.8 \\ 82.30 \pm 4.6 \\ 463.41 \pm 6.8 \end{bmatrix} m$$

$$\mu_{BG} = (4.47 \pm 0.5) \cdot 10^{-6}, \quad (35)$$

$$\varepsilon_{BG} = \begin{bmatrix} 4.85 \pm 0.15 \\ 1.88 \pm 0.29 \\ 4.46 \pm 0.12 \end{bmatrix} ''.$$

Der Übergang von geodätischen Koordinaten im exzentrischen MGI-System (Bessel) auf jene im geozentrischen GRS80-System kann entweder direkt durch Anwendung der erweiterten Differentialformeln von Vening Meinesz (Heiskanen and Moritz, 1967, [5])

$$(\phi, \lambda, h)_B \rightarrow (\phi, \lambda, h)_G$$

oder indirekt über den Umweg kartesischer Koordinaten erfolgen:

$$(\phi, \lambda, h)_B \rightarrow X_B \rightarrow X_G \rightarrow (\phi, \lambda, h)_G$$

Wir haben uns für diese letzte Variante entschieden, da sie in jedem Fall exakt und nicht weniger ökonomisch ist als die Anwendung der erweiterten Differentialformeln. (Die in Heiskanen and Moritz, 1967, [5], S. 207, angegebenen Differentialformeln sind für unseren Fall nicht ausreichend genau, da sich Form und Lage der beiden Ellipsoide zu stark voneinander unterscheiden, sodaß Glieder höherer als erster Ordnung berücksichtigt werden müßten. Darüberhinaus müßten die Formeln wegen Rotation und Maßstab erweitert werden.) Mit den geodätischen Koordinaten in beiden Systemen ist aber nun auch der Bezug zwischen den in unserer Lösung verwendeten Schwerefeldgrößen (ζ, N, ξ, η) gegeben:

$$\zeta_G = \zeta_B + (h_G - h_B), \quad (36)$$

$$N_G = N_B + (h_G - h_B), \quad (37)$$

$$\xi_G = \xi_B - (\phi_G - \phi_B), \quad (38)$$

$$\eta_G = \eta_B - (\lambda_G - \lambda_B) \cos \phi. \quad (39)$$

Der Unterschied der Geoidhöhen und Lotabweichungen zwischen beiden Systemen ist durchaus beachtlich und liegt im Bereich von etwa 50 Metern bzw. mehreren Bogensekunden.

2.2.3 Die Kollokationslösung

Das Primärziel der Schwerefeldbestimmung für Österreich ist die Abbildung der Detailstruktur des Geoids bzw. des Quasigeoids. Aufgrund der damals sehr stark eingeschränkten Computer-Ressourcen mußte eine Erdschwerefeldbestimmung in einem Guß von vornherein ausgeschlossen werden. Wir entschieden uns daher, dem Dänischen Beispiel zu folgen und unterteilten das Österreich überdeckende Gebiet in 5 Teilgebiete, die sich an den Rändern jeweils in einem Bereich von etwa 1° überlappten.

Für jedes dieser 5 Teilgebiete wurde die empirische Kovarianzfunktion der vollkommen reduzierten Schwereanomalien $\Delta g'$ bestimmt und das Tscherning/Rapp-Modell, 1974, [24] optimal angepaßt. Die aus diesen Modell-Kovarianzfunktionen abgeleiteten Kovarianzfunktionen der longitudinalen und transversalen Lotabweichungskomponenten, die nur von der sphärischen Distanz, nicht aber vom Azimut abhängen (Sünkel, 1983, [21]), wurden mit den entsprechenden, aus den vollständig reduzierten Lotabweichungen ermittelten, empirischen Kovarianzfunktionen für jedes der 5 Teilgebiete verglichen und zeigten eine bemerkenswerte Übereinstimmung sowie nur geringe Unterschiede zwischen den 5 Teilgebieten untereinander. Dies bedeutet, daß im statistischen Verhalten der vollständig reduzierten Schwerefeldgrößen kaum mehr zwischen Flachland und Hochgebirge unterschieden werden kann, woraus wir wiederum schließen können, daß der Reduktionsprozeß (Remove) von einem realitätsnahen Modell (Topographie/Isostasie, Erdmodell) ausging.

Die gemittelte, für das gesamte Bundesgebiet gültige Kovarianzfunktion der Höhenanomalieresiduen hat eine Varianz von 0.067 m^2 und eine Halbwertsbreite von 33 km. (Verglichen mit der aus dem Datenmaterial der Geoidbestimmung 1983 abgeleiteten Kovarianzfunktion bedeutet dies eine ein wenig größere Varianz und eine etwas kürzere Halbwertsbreite; die Werte der Grazer Lösung 1983: 0.05 m^2 , 35 km (Sünkel, 1983, [21].) Das ist insofern leicht zu erklären, als der in der Lösung 1987 neu hinzu gekommene Datensatz nahezu ausschließlich in Tirol und Vorarlberg und damit im topographisch anspruchsvollsten Gebiet Österreichs liegt, und das uns zur Verfügung stehende lokale Höhenmodell für Hochgebirgsregionen eine doch zu geringe Auflösung besitzt, sodaß die reduzierten Daten noch Restenergie aus dem nicht erfaßten Spektralbereich der hohen Frequenzen der Topographie enthalten.

Das von uns gewählte Kovarianzmodell enthält keine Frequenzanteile unter Grad 180. Die Bjerhammar-Kugel, die den Harmonizitätsbereich und damit auch den Operationsbereich für die Kollokationslösung festlegt, liegt in einer Tiefe von 3 km. Die Modell-Kovarianzfunktion der Höhenanomalie- und Schwereanomalieresiduen sind in Abb. 5 und Abb. 6 dargestellt.

Die Berechnung der Kovarianzmatrizen (Daten-Autokovarianzmatrix, Signal-Daten-Kreuzkovarianzmatrix, Signal-Autokovarianzmatrix) stellt einen äußerst aufwendigen Prozeß bezüglich

CPU-Zeit dar, insbesondere dann, wenn lokale Kovarianzfunktionen wie hier verwendet werden, welche viele (niedere) Harmonische nicht enthalten. Um dieses Problem zu umgehen, machten wir von einem Kovarianz-Approximations-Verfahren Gebrauch (Sünkel, 1979, [18]), das eine komfortable und sehr schnelle Berechnung der Kovarianzen ermöglicht, wobei ausgehend von einem einmal vorausberechneten Kovarianznetz alle erforderlichen Kovarianzen durch einfache Interpolation und Differentiation berechnet werden. Da der maximale topographische Höhenbereich in Österreich zwischen 0 und 4000 m liegt und der maximale Durchmesser Österreichs und damit auch der maximale Abstand zwischen den Datenpunkten etwa 600 km beträgt, mußte das Kovarianznetz nur diesen Maximalbereich abdecken. Im Vergleich zu exakt bestimmten, mit Hilfe von Tschernings COVAX-Algorithmus (Tscherning, 1976, [25]) berechneten Kovarianzen bringt diese Kovarianzapproximation eine Geschwindigkeitssteigerung um einen Faktor 30 !

Die geringe Varianz und die Glätte der vollständig reduzierten Lotabweichungen und Schwereanomalien demonstrierte nicht nur die hohe Qualität des verwendeten Reduktionsmodells (und der verwendeten Computerprogramme), sondern gab uns auch zu verstehen, daß für die Zwecke einer lokalen Geoidbestimmung in Österreich die vorhandenen Lotabweichungen allein einen hinreichend guten Datensatz darstellen. Um den Genauigkeitsgewinn, der sich durch die Hinzunahme von Schweredaten ergibt, zu untersuchen, wurde das topographisch recht anspruchsvolle, mit Schweredaten bestens bedeckte Vorarlberg als Testgebiet ausgewählt. Die beiden Kollokationslösungen (mit und ohne Verwendung von Schweredaten) ergaben nahezu idente Geoidhöhenresiduen. Dieses Ergebnis, der große ökonomische Vorteil bei der Verwendung von kleineren, nur aus Lotabweichungen bestehenden Datensätzen, die starke Inhomogenität der Verteilung der Schweredaten in unserem Bundesgebiet sowie das Fehlen solcher Daten aus unseren Nachbarländern im Norden, Osten und Süden führten zur Entscheidung, auf die Verwendung der Schwereanomalien bei der Kollokationslösung zu verzichten.

So wurden auf der Grundlage der topographisch-isostatisch-Erdmodell - reduzierter Lotabweichungsdaten für jedes der 5 Teilgebiete mit Hilfe der Kollokation nach kleinsten Quadraten Geoidhöhen- und Höhenanomalieresiduen auf einem $3' \times 5'$ - Gitter berechnet. Von einer Horizontverschiebung abgesehen (Integrationskonstante der Kollokationslösung) stimmten die Geoidhöhen im jeweiligen zentralen Überlappungsbereich auf etwa 1 - 2 cm überein, was höchst bemerkenswert ist. Diese 5 Teillösungen wurden anschließend numerisch "verklebt" und ergaben so das ganz Österreich überdeckende $3' \times 5'$ - Raster der Restgeoidhöhen und Resthöhenanomalien.

Die geschätzte innere Genauigkeit der relativen Geoidhöhen und Höhenanomalien wird ebenfalls durch die Kollokationslösung geliefert und liegt bei etwa ± 0.5 cm über 1 km. Dies entspricht einem Fehler der relativen Geoidhöhen von ± 5 cm über 100 km. Diese Genauigkeitsschätzung erfuhr zumindest für einen Bereich in Kärnten jüngst eine schöne Bestätigung: Die im Rahmen der WM 101 GPS-Kampagne 1987 im Raum Villach durchgeführten GPS-Messungen ergaben

für alle GPS-Punkte mit bekannter orthometrischer Höhe eine Übereinstimmung der Geoidhöhen im Bereich der aus der Erdschwerefeldbestimmung 1987 geschätzten Genauigkeit (Höggerl et al., 1987, [6]). Ein Vergleich mit den aus der AGEDEN GPS-Kampagne abgeleiteten Höhen lieferte ähnliche Ergebnisse für lokale Bereiche. Für den Bereich des gesamten Bundesgebietes ergab sich nach Ausschaltung einiger als grob fehlerhaft erkannter Punkte eine mittlere Restklaffung der Höhe von etwa ± 11 cm, was sehr für die Qualität unserer Erdschwerefeldbestimmung 1987 und der Realitätsnähe der zugehörigen Fehlerschätzung spricht (Hofmann und Sünkel, 1989, [7]).

Neben der Bestimmung des Geoids und des Quasigeoids war auch die Schätzung von Schwerewerten und Lotabweichungen Ziel der jüngsten Erdschwerefeldbestimmung. In Gebieten mit guter Datenverteilung sind wir nun in der Lage, Punktschwerewerte mit einer für das gesamte Bundesgebiet repräsentativen Genauigkeit von ± 1.5 mGal aus dem vorliegenden Datenmaterial zu präzisieren. Im gebirgigeren Teil Österreichs muß dieser Wert etwa mit dem Faktor 2 multipliziert werden (vor allem bedingt durch die Unzulänglichkeiten des digitalen Höhenmodells), im Flachland dagegen liegen die Prädiktionsfehler im Durchschnitt deutlich unter ± 1 mGal. Diese aus der Kollokationslösung stammenden Fehlerschätzungen decken sich weitgehend mit externen, durch Vergleich prädizierter mit gemessenen Schwerewerten resultierenden Fehlerschätzungen.

Die Lotabweichungskomponenten können mit einer für das gesamte Bundesgebiet repräsentativen Genauigkeit von $\pm 0.8''$ aus dem vorliegenden Datenmaterial präzisiert werden. Bei rauher Topographie erhöht sich dieser Wert etwa um den Faktor 1.5, im Flachland liegt er bei durchschnittlich $\pm 0.5''$ und damit praktisch im Bereich der Meßgenauigkeit! Auch diese aus der Kollokationslösung stammenden Fehlerschätzungen decken sich weitgehend mit externen, durch Vergleich prädizierter mit gemessenen Lotabweichungen resultierenden Fehlerschätzungen.

2.2.4 Der Restore-Prozeß

Der Restore-Prozeß ist zum Remove-Prozeß invers und besteht in der Überlagerung der Modelleffekte auf die prädizierten Erdschwerefeldgrößen. So erhalten wir zum Beispiel endgültige Geoidhöhen, indem wir den Anteil von Topographie/Isostasie + Erdmodell zu der mittels Kollokation prädizierten Restgeoidhöhe addieren. Das so erhaltene endgültige GRS80-Geoid ist in Abb. 7 dargestellt. Der Unterschied zwischen Höhenanomalie und Geoidhöhe liegt im Bereich zwischen -2 und +56 cm und stimmt mit der Näherung (Heiskanen and Moritz, 1967, [5], S. 328)

$$\zeta - N [m] \doteq -\Delta g_{Bouguer} [Gal] \cdot H [km] \quad (40)$$

ausgezeichnet überein. Diese sehr gute Übereinstimmung wurde auch bereits bei der Grazer Lösung der Geoidbestimmung 1983 beobachtet (Sünkel, 1983, [21]).

Da das System der österreichischen Landesvermessung auf dem exzentrischen MGI-System mit dem Bessel-Ellipsoid als Bezugsfläche beruht und für Zwecke der geodätischen Praxis (Geometrisierung geodätischer Messungen) Erdschwerefeldgrößen in diesem System vorliegen müssen, wurde die gesamte Lösung mit Hilfe der Gl. (34) - (35) auch auf dieses MGI-System transformiert. (Das vertikale Datum des MGI-Systems ordnet im übrigen dem Punkt $\phi = 48^{\circ} 48'$, $\lambda = 16^{\circ} 00'$ eine Geoidhöhe von + 1.00 m zu. Dieses MGI (Bessel) Geoid ist in Abb. 8 dargestellt. Man beachte, daß die MGI-Geoidhöhen einige Meter um Null schwanken (aufgrund der *lokalen Bestanpassung* des Bessel-Ellipsoids an das Geoid), während die auf das geozentrische GRS80-System bezogenen Geoidhöhen zwischen etwa 45 und 54 m liegen. Eine 3-D - Darstellung des Geoids für Österreich ist in Abb. 9 gegeben.

Auf der Basis dieser Erdschwerefeldbestimmung 1987 entstand an der Abteilung für Mathematische Geodäsie der TU Graz auch ein sehr leistungsfähiges und äußerst komfortables Softwarepaket, das es auf IBM-AT kompatiblen Rechnern erlaubt, bei Vorgabe entweder der Gauß-Krüger-Koordinaten oder geographischer Koordinaten von Punkten innerhalb unseres Bundesgebietes nicht nur Geoidhöhe, Höhenanomalie und Lotabweichungskomponenten zu präzisieren und auf Wunsch die zugehörige Fehlerschätzung durchzuführen, sondern auch noch alle Korrekturgrößen zu berechnen, welche additiv an die geodätischen Meßwerte angebracht werden müssen, um diese vom Einfluß des Erdschwerefeldes zu befreien (Geometrisierungskorrekturen). Das Programmsystem wurde ursprünglich am VAX-System der Abteilung für Mathematische Geodäsie entwickelt und wurde im Rahmen einer Diplomarbeit auf PC-Ebene portiert sowie mit einer Benutzerschale versehen (Rapatz, 1988, [12]). Diese PC-AT-Version ist an o.g. Abteilung erhältlich.

3 Schlußfolgerungen

Die Erdschwerefeldbestimmung 1987 wurde auf der Grundlage von Lotabweichungen und aus Doppler-Daten und Gebrauchshöhen abgeleiteten Höhenanomalien als eigentliche Schwerefeldgrößen durchgeführt. Schweredaten wurden lediglich zur Schätzung der statistischen Eigenschaften des Schwerefeldes (und zu Kontrollzwecken) herangezogen, sie wurden jedoch in der Kollokationslösung als Daten nicht verwendet. Die geschätzte Genauigkeit der innerhalb unseres Bundesgebietes prädzierbaren Erdschwerefeldgrößen von ± 5 cm / 100 km für Geoidhöhen, ± 1.5 mGal für Punktschwerewerte und $\pm 0.8''$ für die beiden Lotabweichungskomponenten ist in Anbetracht der topographischen Verhältnisse innerhalb Österreichs sehr bemerkenswert.

Als nächstes realistisches Ziel streben wir eine Genauigkeitssteigerung etwa um den Faktor 2 an, was mit einem stark verbesserten und umfangreicheren Datensatz (DHM: 50×50 m; DDM: 3-D; dichtes, homogenes Schweredatenmaterial nicht nur innerhalb, sondern auch außerhalb Österreichs; Lotabweichungen außerhalb Österreichs; Verfügbarkeit orthometrischer Höhen für sämtliche GPS-Punkte; GPS-Daten) bis zur XX. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik durchaus im Bereich der Möglichkeit wäre. Als Fernziel sehen wir das "Zentimetergeoid" (± 1 cm / 100 km), das nicht nur erlauben würde, uns vom äußerst aufwendigen Nivellieren endgültig zu verabschieden, zumal es in Verbindung mit GPS-Höhen orthometrische Höhen höchster Präzision liefern würde, sondern wegen der sehr viel höheren Auflösung auch sehr wesentliche Randinformation für geophysikalische Fragestellungen im Zusammenhang mit der Plattentektonik und anderen geodynamischen Vorgängen bereitstellen würde.

Literatur

- [1] BOUCHER, C. and Z. ALTAMIMI: Towards an Improved Realization of the BIH Terrestrial Frame. Proceedings, *International Conference on Earth Rotation and the Terrestrial Reference Frame*, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1985, S. 551 – 564.
- [2] ERKER, E.: Das Geoid in Österreich, Berechnungen des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen. In: *Das Geoid in Österreich*. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band III, 1983, S. 89 – 115.
- [3] ERKER, E.: The Austrian Geoid – Local Geoid Determination Using Modified Conservative Algorithms. In: *The Gravity Field in Austria*. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band IV, 1987, S. 19 – 46.
- [4] FORSBERG, R.: *A Study of Terrain Reductions, Density Anomalies and Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Modelling*. Report 355, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1984.
- [5] HEISKANEN, W.A. and H. MORITZ: *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco, 1967.
- [6] HÖGGERL, N., H. KAHMEN, J. SCHWARZ, G. STANGL, H. SÜNKEL und J. ZEGER: Die WM 101 GPS-Kampagne in Österreich. *ÖZfV*, 4, 1987, S. 167 – 201.
- [7] HOFMANN-WELLENHOF, B. und H. SÜNKEL: Interpretation der Ergebnisse. In: *Österreichische Beiträge zum WEGENER-MEDLAS-Projekt*. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 65, 1989, S. 81 – 98.
- [8] JORDAN, S.K. and W.G. HELLER: Upward Continuation of Gravity Disturbance Covariance Functions. *Journal of Geophysical Research*, 83, B7, 1978, S. 3382 – 3388.
- [9] LITSCHAUER, J.: Zur Frage der Geoidgestalt in Österreich. *ÖZfV*, 6, 1953, S. 161 – 172.
- [10] MORITZ, H.: Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Géodésique*, 54, 1980. S. 395 – 405.
- [11] MORITZ, H.: *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann- Verlag, Karlsruhe, 1980.
- [12] RAPATZ, E.: *Entwicklung eines Software-Paketes zur Ingenieurtechnischen Verwendung von Erdschwerefelddaten*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz, 1988.
- [13] RAPP, R.H.: *The Earth's Gravity Field to Degree and Order 180 Using SEASAT Altimeter Data, Terrestrial Gravity Data, and Other Data*. Report No. 322, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1981.

- [14] RAPP, R.H. and J.Y. CRUZ: *The Representation of the Earth's Gravitational Potential in a Spherical Harmonic Expansion to Degree 250*. Report No. 372, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1986.
- [15] RINNER, K.: *Über den Österreichischen Anteil zum Alpine Geoid Doppler Project "ALGEDOP"*. Abschlußbericht für das Projekt P 4885 des Fonds zur Förderung der Wissenschaftlichen Forschung, Institut für Weltraumforschung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Graz, 1986.
- [16] RUMMEL, R., R.H. RAPP, H. SÜNKEL, and C.C. TSCHERNING: *Comparisons of Global Topographic/Isostatic Models to the Earth's Observed Gravity Field*. Report 388, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1988.
- [17] STEINHAUSER, P. and A. PUSTIZEK: Estimation of the Mass Deficit of the Eastern Alps. In: *The Gravity Field in Austria*. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band IV, 1987, S. 111 - 125.
- [18] SÜNKEL, H.: *A Covariance Approximation Procedure*. Report 286, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1979.
- [19] SÜNKEL, H. und R. MALITS: Höhenkorrelation, Kovarianzfunktion und Prädiktion von Schwereanomalien in Lokal Begrenzten Gebieten Österreichs. *ÖZfV*, 1, 1981, S. 17 - 31.
- [20] SÜNKEL, H.: Das Geoid im Testnetz Steiermark. In: *Geodaesia Universalis, Festschrift Karl Rinner zum 70. Geburtstag*. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 40, 1982, S. 331 - 345.
- [21] SÜNKEL, H.: Geoidbestimmung, Berechnungen an der TU Graz, 2. Teil. In: *Das Geoid in Österreich*. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, III, 1983, S. 125 - 143.
- [22] SÜNKEL, H.: Global Topographic-Isostatic Models. In: *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy (Ed.: H. Sünkel)*. Lecture Notes in Earth Sciences, 7, 1986, S. 417 - 462.
- [23] SÜNKEL, H., N. BARTELME, H. FUCHS, M. HANAFY, W.-D. SCHUH und M. WIESER: The Gravity Field in Austria. In: *The Gravity Field in Austria*. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, IV, 1987, S. 47 - 75.
- [24] TSCHERNING, C.C. and R.H. RAPP: *Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree-Variance Models*. Report 208, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1974.

- [25] TSCHERNING, C.C. *Covariance Expressions for Second and Lower Order Derivatives of the Anomalous Potential*. Report 225, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1976.
- [26] TSCHERNING, C.C., R.H. RAPP, and C. GOAD: A Comparison of Methods for Computing Gravimetric Quantities from High Degree Spherical Harmonic Expansions. *Manuscripta Geodaetica*, 8, 3, 1983, S. 249 - 272.
- [27] TSCHERNING, C.C.: Local Approximations of the Gravity Potential by Least Squares Collocation. In: *Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation*, Beijing, China PR, Aug. 21 - Sep. 4, 1984, Publ. 60003, University of Calgary, Calgary, Canada, 1985, S. 277 - 362.
- [28] TSCHERNING, C.C. and R. FORSBERG: Geoid Determination in the Nordic Countries from Gravity and Height Data. *Proceedings of the International Symposium on the Definition of the Geoid, 1*, Florence, 1986, S. 325 - 352.
- [29] WALACH, G.: A Digital Model of Surface Rock Densities of Austria and the Alpine Realm. In: *The Gravity Field in Austria*. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band IV, 1987, S. 3 - 9.
- [30] WENZEL, H.G.: *Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde*. Wissenschaftliche Arbeiten, Fachbereich Vermessungswesen der Universität Hannover, 1985.
- [31] WIESER, M.: *Das Globale Digitale Höhenmodell TUG87*. Interner Bericht der Abteilung für Mathematische und Datenverarbeitende Geodäsie, Technische Universität Graz, 1987.

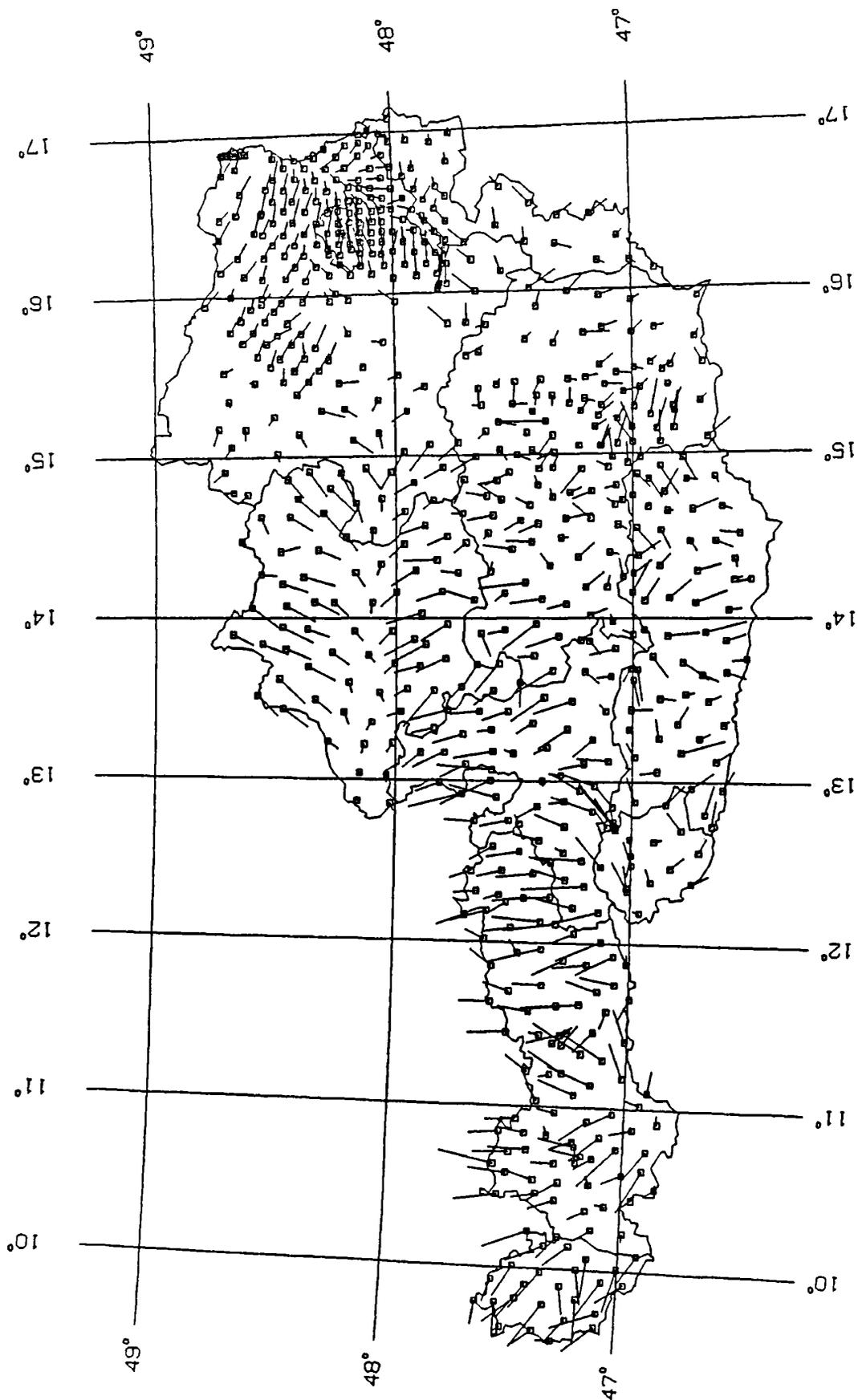


Abbildung 1: Lotabweichungen in Österreich, beobachtet, unreduziert, Bezugssystem: MGI (Bessel), — ... 10''

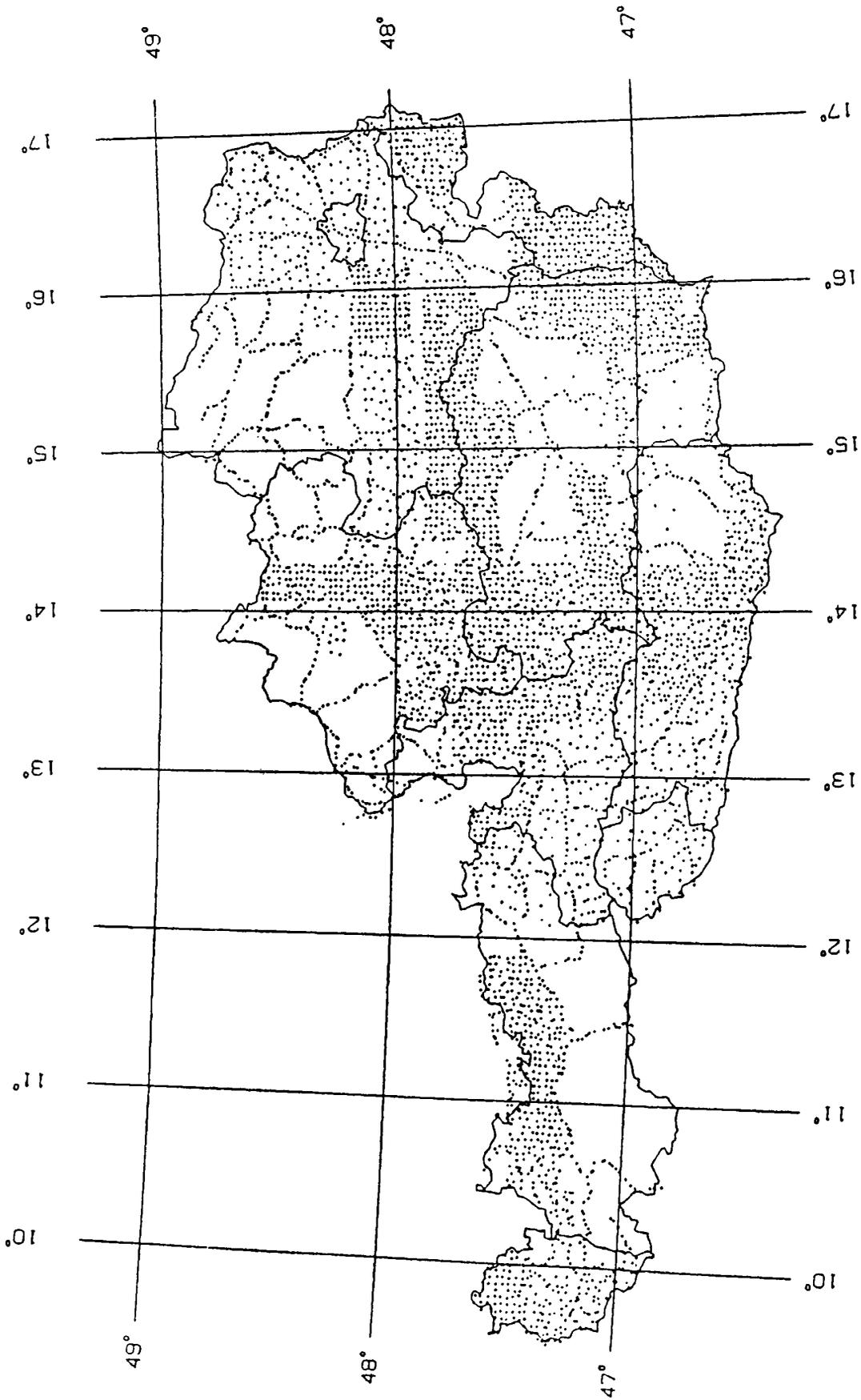


Abbildung 2: Schweredaten in Österreich (20% - Stichprobe)

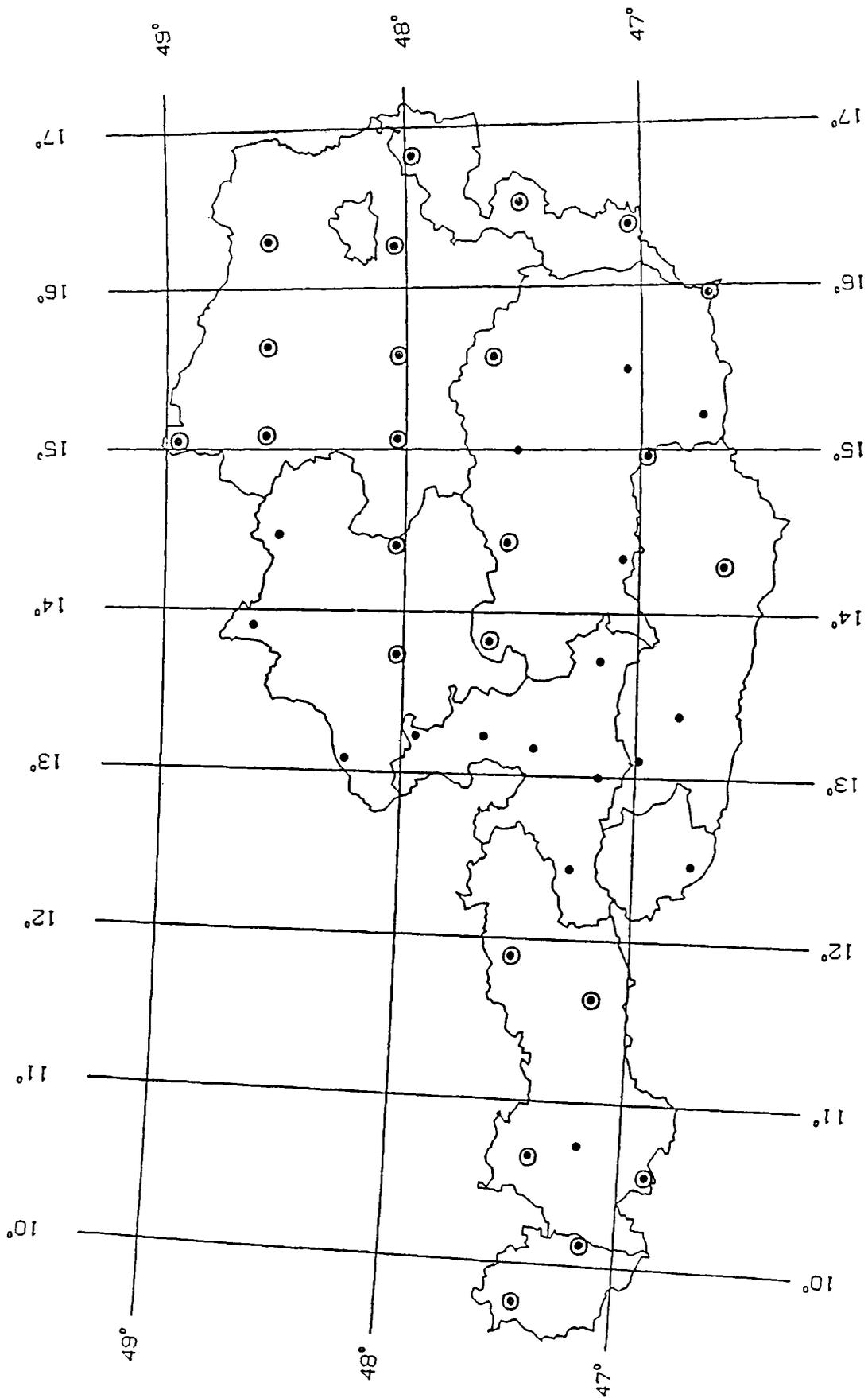


Abbildung 3: Dopplerdaten in Österreich, (● ... zur Transformation MGI - GRS80 verwendet)

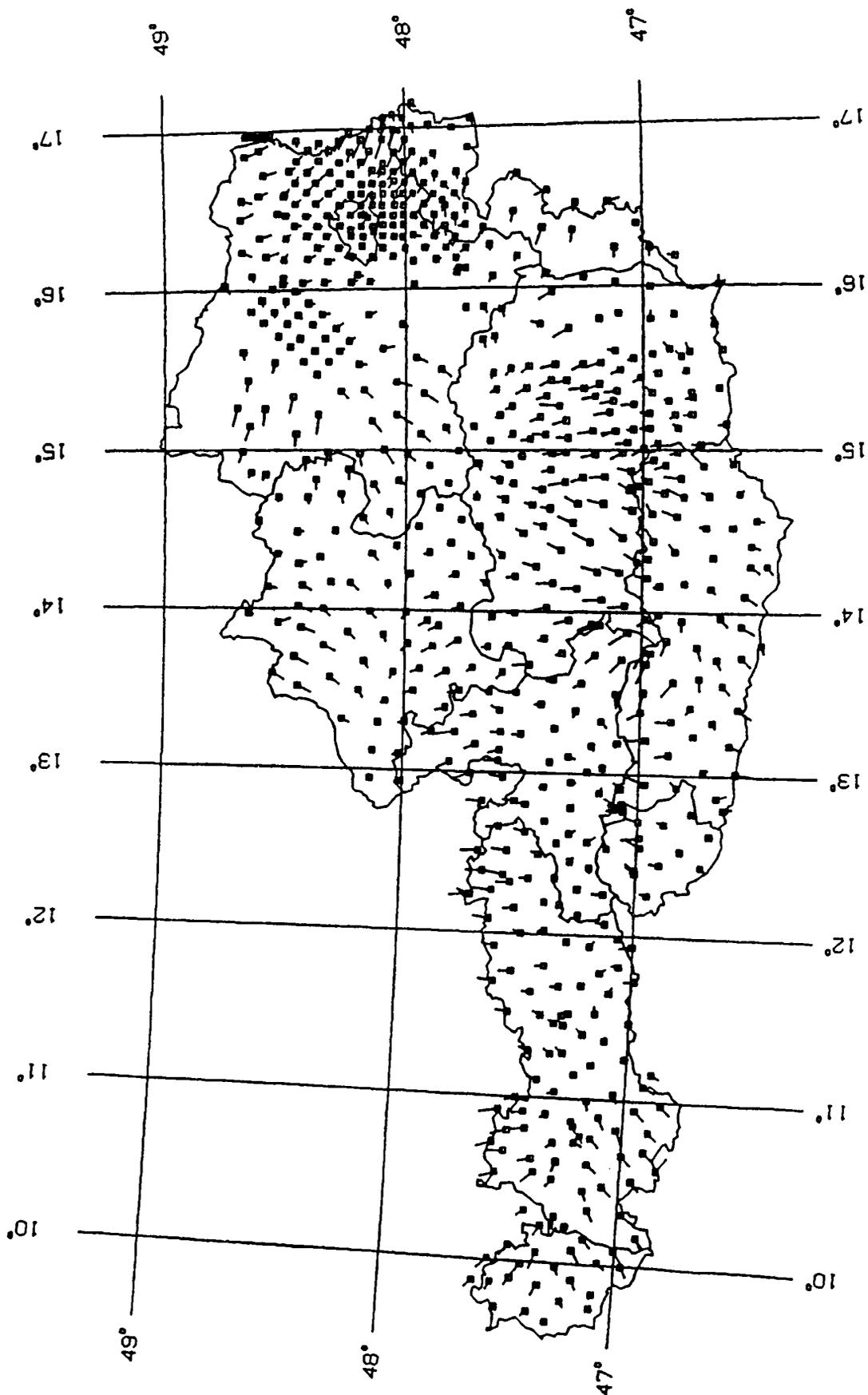


Abbildung 4: Lotabweichungen in Österreich, vollständig reduziert, Bezugssystem: MGI (Bessel), — ... 10^m

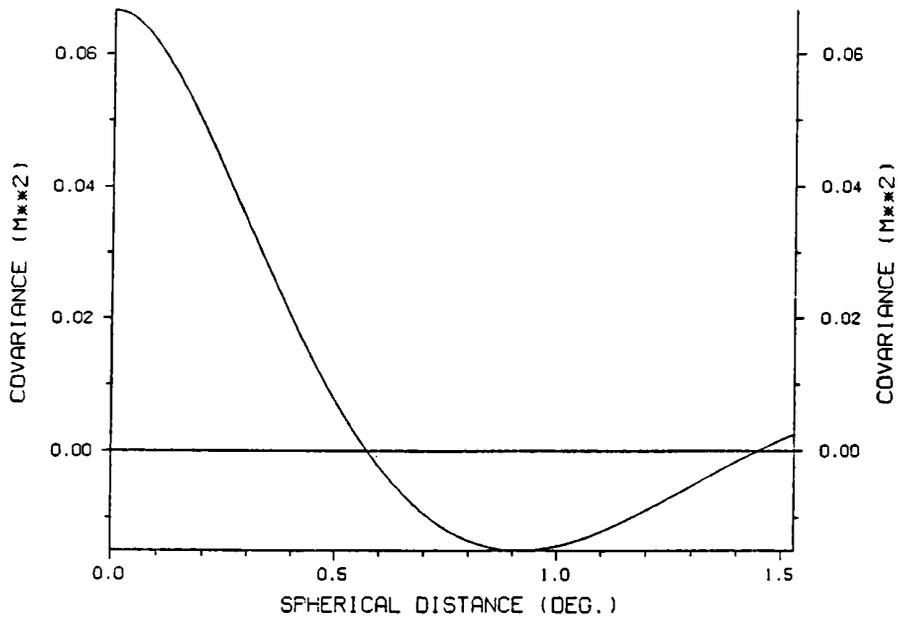


Abbildung 5: Höhenanomalie – Kovarianzfunktion

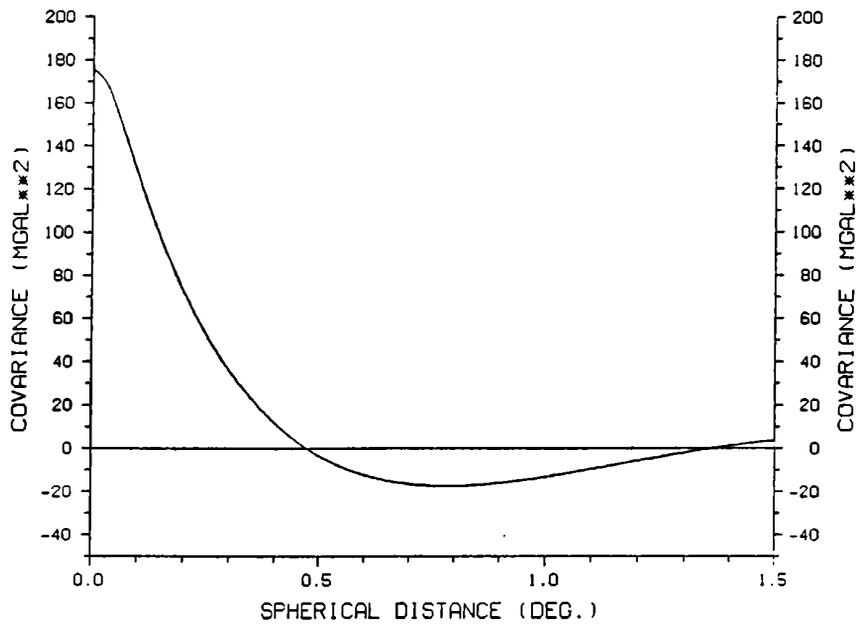


Abbildung 6: Schwereanomalie – Kovarianzfunktion

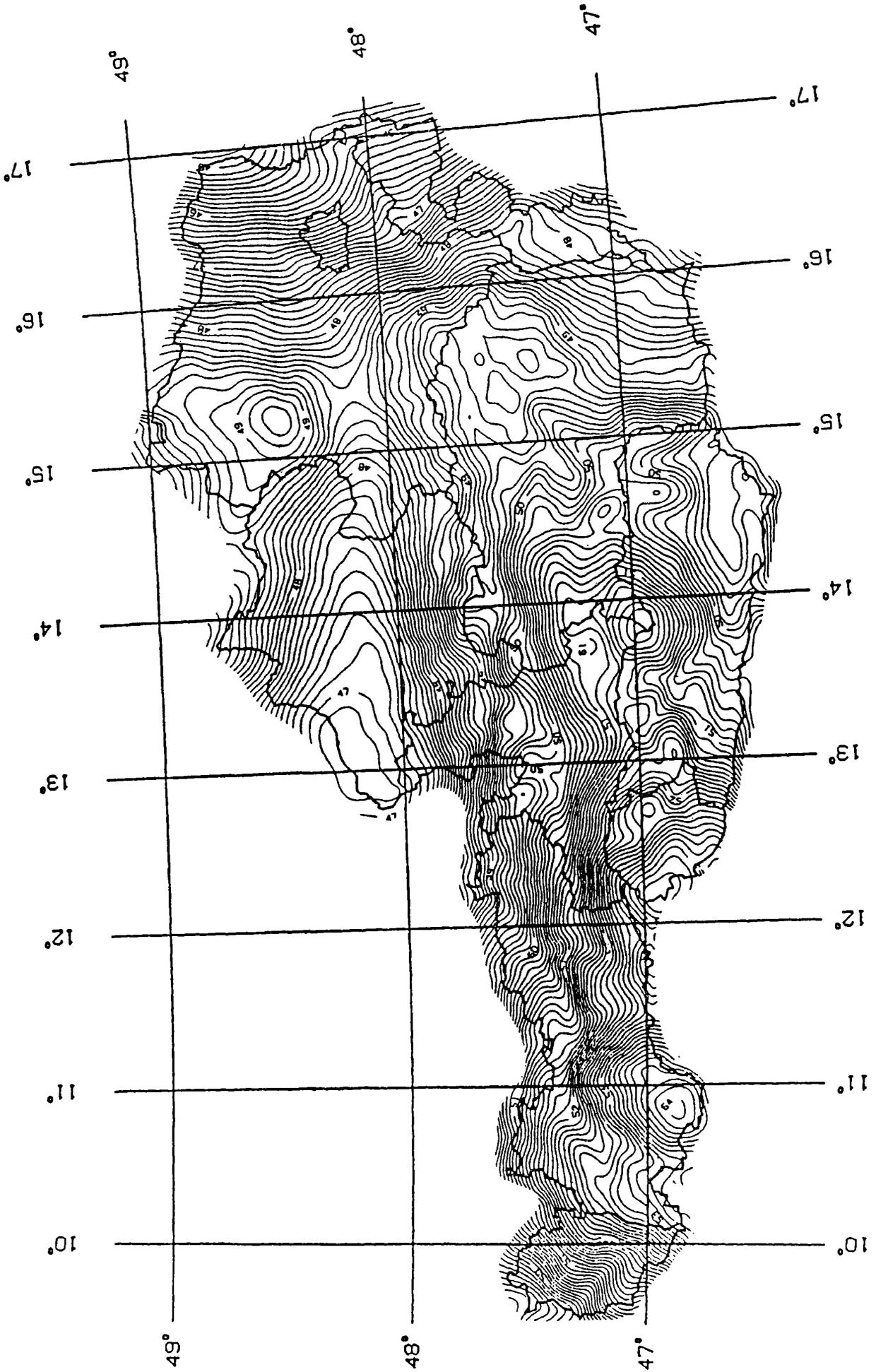


Abbildung 7: GRS80-Geoid, Schichtenlinienabstand: 10 cm

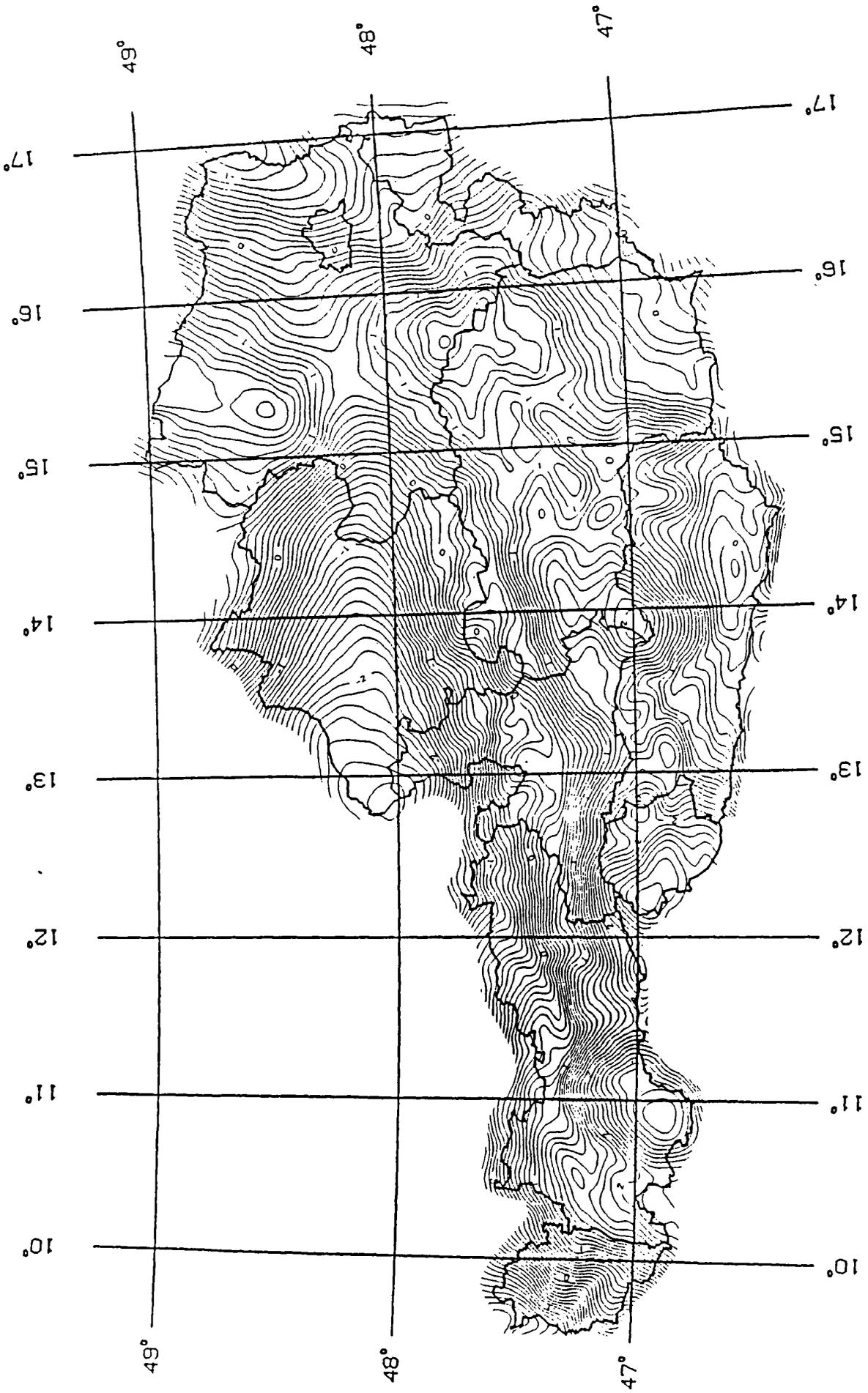


Abbildung 8: MGI (Bessel) – Geoid, Schichtenlinienabstand: 10 cm

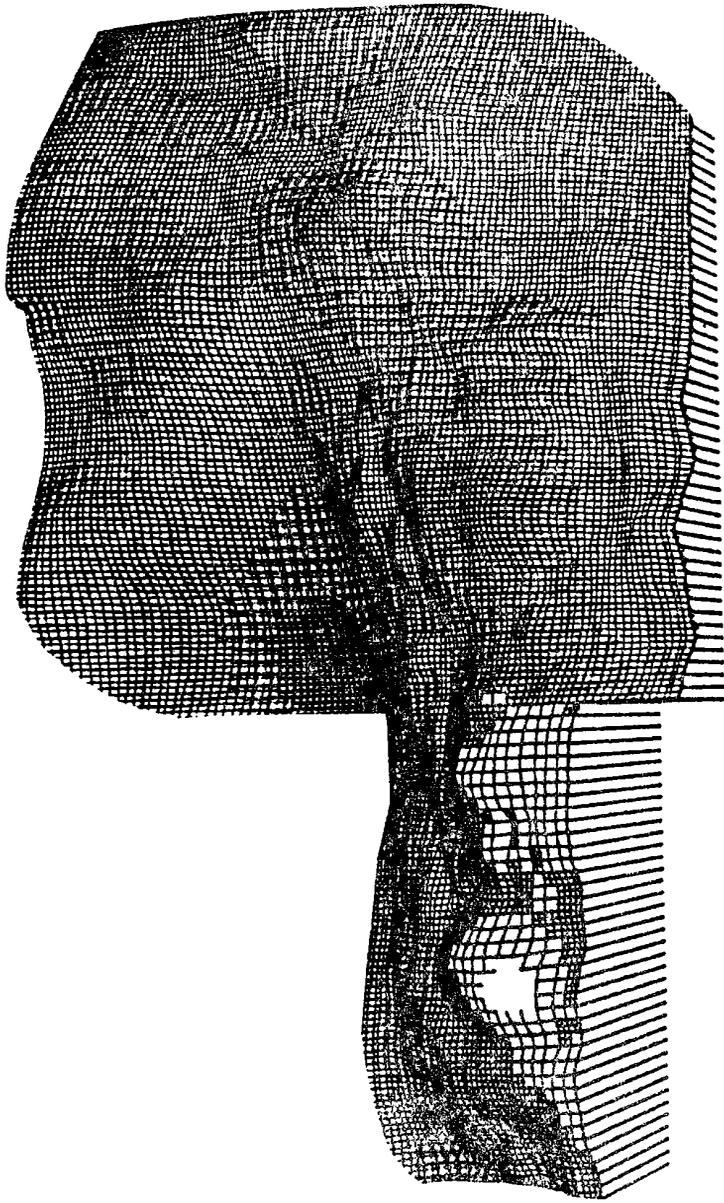


Abbildung 9: Das Geoid in Österreich