
Programmsystem zur Berechnung des Schwerefeldes von Massen in
in Isolinien-Darstellung

H. Lichtenegger, W. Klostius

TU Graz

1. Einleitung

Die klassischen geodätischen Meßverfahren werden bekanntlich im Schwerefeld der Erde ausgeführt und sind daher von diesem beeinflusst. Aber auch bei den modernen Methoden der operativen Satellitengeodäsie, etwa dem Globalen Positionierungssystem (GPS), welche vom Erdschwerefeld nahezu unabhängig sind, werden Informationen über dieses benötigt. Erst diese Kenntnis ermöglicht nämlich die strenge Verknüpfung von Ergebnissen, welche einerseits über satellitentechnische und andererseits nach klassischen terrestrischen Verfahren gewonnen wurden.

Die Bedeutung der Schwerefeldinformationen wird durch die gesteigerten Genauigkeiten in Zukunft auch für ingenieurgeodätische Anwendungen zunehmen. Dabei spielen vor allem relative Änderungen des Schwerefeldes im Meßgebiet zufolge topographischer Massen oder auch künstlicher Bauwerke eine Rolle.

Die Bestimmung des lokalen Schwerefeldes kann indirekt über astro-geodätische oder gravimetrische Beobachtungen erfolgen. Diese Methodik ist allerdings zeitaufwendig und kostenintensiv, sie scheidet daher aus ökonomischen Gründen für ingenieurgeodätische Projekte aus. Das lokale Schwerefeld kann aber auch direkt aus Informationen über die Höhen- und Dichteverhältnisse der Störmassen berechnet werden. Hiefür sind mehrere Verfahren bekannt. Das in dieser Arbeit vorgestellte Programmsystem basiert auf einem Verfahren von Talwani und Ewing (1960) und erlaubt die Berechnung des Schwerefeldes von schichtweise vorgegebenen Modellkörpern.

Der vorliegende Bericht gibt vorerst - gestützt auf Ausführungen von Sünkel (1988) - einen allgemeinen Überblick über den Einfluß von Schwerefeldparametern auf geodätische Meßgrößen. Anschließend wird das Prinzip der Berechnung des Schwerepotentials und seiner Gradienten für den Fall dargestellt, daß die Störmassen durch

Isolinien modelliert sind. Die praxisnahe Realisierung des Verfahrens wurde in einer Diplomarbeit von Stäuble (1988) unter Betreuung durch die Verfasser versucht. Die Darstellung der Grundzüge des entwickelten Programmsystems bildet den Schwerpunkt der Ausführungen im vierten Abschnitt, wobei auch auf noch bestehende Mängel des Systems hingewiesen wird.

2. Schwerefeld und Ingenieurvermessung

2.1. Parameter des Schwerefeldes

Das Schwerepotential einer lokalen Störmasse bezogen auf einen Aufpunkt im Meßgebiet sei mit U bezeichnet. Die Komponenten des Potentialgradienten \underline{u}

$$\underline{u} = \text{grad}(U) = (U_x, U_y, U_z)^T \quad (1)$$

sind wie üblich entlang der Achsen eines lokalen Horizontsystems definiert. Die zweiten Ableitungen des Potentials seien im Gradiententensor \underline{G} zusammengefaßt:

$$\underline{G} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{xy} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{xz} & U_{yz} & U_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

2.2. Transformation der Schwerefeldparameter

Die "physikalischen" Schwerefeldparameter lassen sich mit dem Schwerewert g als Transformationsparameter in "geometrische" Größen umwandeln.

Das Störpotential U kann gemäß der Bruns'schen Formel in eine Geoidhöhe N transformiert werden:

$$N = \frac{U}{g} \quad (3)$$

Die Horizontalgradienten des Störpotentials führen zu den meridionalen und longitudinalen Lotabweichungskomponenten ξ, η

$$\xi \approx \frac{U_x}{g} \quad ; \quad \eta \approx \frac{U_y}{g} \quad (4.1)$$

welche auch zur totalen Lotabweichung δ im Azimut α zusammengefaßt werden können:

$$\delta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \quad ; \quad \tan(\alpha) = (\eta/\xi) \quad (4.2)$$

Die Elemente des Gradiententensors \underline{G} schließlich lassen Aussagen über die Krümmungsverhältnisse des lokalen Geoides zu und erlauben auch die Interpolation der Elemente von \underline{u} und damit der Lotabweichungen in Beobachtungspunkten, welche zum betrachteten Aufpunkt benachbart sind.

2.3. Schwerefeld und geodätische Meßgrößen

Die "geometrischen" Schwerefeldgrößen N, ξ, η beschreiben die Wirkung lokaler Störmassen und beeinflussen geodätische Messungen oder daraus abgeleitete Größen. Für die in der Ingenieurgeodäsie bedeutsamen Relativgenauigkeiten sind relative Änderungen der genannten Parameter von Bedeutung. Werden diese in den geodätischen Auswertungen nicht beachtet, so äußern sie sich als stochastisches Rauschen, sie können aber auch, vor allem in steilem Gelände, die Ergebnisse signifikant verfälschen.

Besondere Beachtung verdienen neben den Lagekoordinaten die Höhen. Der Zusammenhang zwischen der ellipsoidischen Höhe h und der orthometrischen Höhe H ist bekanntlich über die (absolute) Geoidhöhe N^* gegeben:

$$h = H + N^* \quad . \quad (5)$$

Für Höhenänderungen sind daher Änderungen ΔN^* von Bedeutung, die jedoch bei Unkenntnis eines absoluten Geoides im lokalen Bereich durch die relative Undulationsänderung ΔN ersetzt werden können.

Die gemessenen Raumsehnen s müssen unter Verwendung ellipsoidischer Höhen h auf ein Bezugsellipsoid reduziert werden. Erfolgt die Reduktion fälschlicherweise mit den orthometrischen Höhen H , dann ist am Ergebnis eine Korrektur ds anzubringen:

$$ds = - \frac{\Delta H}{s} \cdot \Delta N - \frac{s}{R_E} \cdot N^* \quad . \quad (6)$$

Der erste Term der rechten Seite von Gl. (6) beschreibt den Einfluß der Undulationsänderung ΔN bei der Reduktion der schräg gemessenen Raumsehnen in die Horizontale mittels des orthometrischen Höhenunterschiedes ΔH . Eine einfache Abschätzung zeigt, daß der Term im steilen oder stark gegliederten Gelände beachtliche Werte annehmen kann. Durch das zweite Glied der rechten Seite von Gl. (6) wird der Einfluß der absoluten Undulation bei der Reduktion der horizontalen Raumsehne in das Nullniveau beschrieben. Wegen des Erdradius R_E im Nenner ist der Betrag dieses Terms üblicherweise klein, er ist überdies im lokalen Bereich nahezu konstant und kann daher auch durch einen Maßstabsfaktor berücksichtigt werden.

Die Lotabweichung δ nach Gl. (4.2) wirkt sich auf Richtungs- und Zenitdistanzbeobachtungen wie ein Stehachsenfehler bezüglich des ellipsoidischen Lotes aus. Bei der Reduktion auf das Bezugsellipsoid sind daher die aus der Theorie der Instrumentalfehler folgenden Korrekturen an die beobachteten Richtungen R und Zenitdistanzen z anzubringen:

$$dR = -\delta \cdot \sin(\alpha_b - \alpha) \cdot \cot z = (-\xi \cdot \sin \alpha_b + \eta \cdot \cos \alpha_b) \cdot \cot z \quad (7.1)$$

$$dz = \delta \cdot \cos(\alpha_b - \alpha) = (\xi \cdot \cos \alpha_b + \eta \cdot \sin \alpha_b) \quad , \quad (7.2)$$

wobei α_b das Azimut des jeweiligen Beobachtungsvertikals bezeichnet.

Aus den Gln. (7) folgt, daß Lotabweichungen die Richtungsbeobachtungen maximal quer zur Störmasse und die Zenitdistanzen maximal in Richtung zur Störmasse beeinflussen. Wegen der Richtungs- und Zenitdistanzabhängigkeit der Korrekturen, wirken sich - auch im Meßgebiet konstante - Lotabweichungen verschieden auf die einzelnen Meßgrößen aus.

Zur Abschätzung der Korrekturwerte sei noch die Faustregel vermerkt, daß Horizontalbeschleunigungen von 5 mgal zu Lotabweichungen von 1" führen und damit die beobachteten Richtungen und Zenitdistanzen erheblich verfälscht sein können. Eindrucksvolle Zahlenwerte sind in Sünkel (1988) für das Netz des in Bau befindlichen Karawankentunnels und des geplanten Semmering-Basis-tunnels angegeben.

3. Modellrechnung

3.1. Allgemeines

Die Berechnung des Potentials und dessen Gradienten von topographischen Massen erfolgt üblicherweise mit Hilfe von digitalen Höhen- und Dichtemodellen, wobei zur Einsparung von Rechenzeiten auch spektrale Methoden zur Anwendung kommen. Für ingenieurgeodätische Anwendungen ist allerdings zu beachten, daß solche Modelle oft entweder nicht verfügbar oder - vor allem bei sehr rauher Topographie - nicht genügend genau sind. Andererseits sind bei Ingenieurprojekten immer Karten- oder Planunterlagen vorhanden, in denen topographische oder auch künstliche Massen (Staumauern, Stauseen) durch Schichtenlinien dargestellt werden. Die Schichtenlinien lassen sich verhältnismäßig einfach mittels Digitalisierer in geschlossene Schichtenpolygone überführen. Die Modellrechnung für solche kann computergerecht nach dem Verfahren von Talwani und Ewing (1960) erfolgen, welches in modifizierter Form vor allem für zweidimensionale Massen mit polygonalen Querschnitten bekannt geworden ist.

3.2. Prinzip der Talwani-Methode

An dieser Stelle wird am Beispiel des Potentials U nur das Prinzip der Methode erläutert, hinsichtlich Details wird auf die oben angegebene Originalliteratur verwiesen. In Stäuble (1988), Seite 32 ff., sind außerdem sämtliche Formelsysteme für die Berechnung der Schwerefeldparameter inklusive U_{xxx} tabellarisch zusammengestellt.

Bekanntlich gilt für das Potential einer dreidimensionalen Masse in kartesischen Koordinaten bezogen auf den Aufpunkt

$$U = k \cdot \sigma \cdot \iiint \frac{1}{r} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int U(z) \cdot dz \quad , \quad (8)$$

wobei k die Attraktionskonstante und σ die Dichte bedeuten. Mit r ist wie üblich der Abstand des Aufpunktes vom betrachteten Volumenelement $dV=dx \cdot dy \cdot dz$ bezeichnet. Der Potentialanteil $U(z)$ einer Schichtfläche $z=\text{const.}$ ist durch

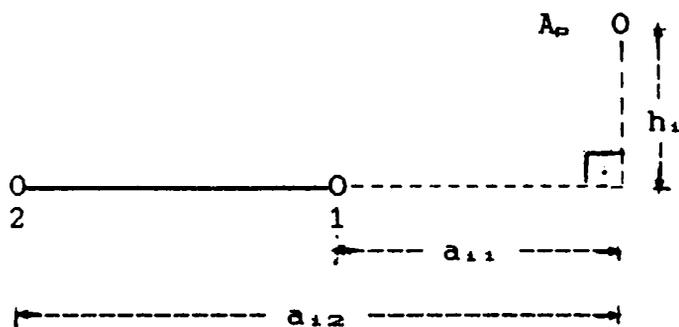
$$U(z) = k \cdot \sigma \cdot \iint \frac{1}{r} \cdot dx \cdot dy \quad (9)$$

definiert und die Gesamtwirkung ergibt sich gemäß Gl. (8) durch Summation über sämtliche Schichtflächen. Zur analytischen Auswertung des geschlossenen Flächenintegrals in Gl. (9) wird dieses noch in ein Randintegral transformiert und damit $U(z)$ selbst wieder als eine Summe von Anteilen der einzelnen Schichtpolygonseiten dargestellt.

Nach analytischer Integration lautet das Ergebnis für den Potentialanteil einer Schichtfläche schließlich:

$$U(z) = k \cdot \sigma \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (-1)^j \cdot [h_i \cdot \ln(r_{i,j} + a_{i,j}) + z \cdot \arctan\left(\frac{a_{i,j} \cdot z}{r_{i,j} \cdot h_i}\right)] \dots \dots \dots (10)$$

wobei noch zu unterscheiden ist, ob die Projektion A_p des Aufpunktes entlang der z -Achse innerhalb oder außerhalb des aus n Seiten gebildeten, geschlossenen Schichtpolygons liegt. Im ersten Fall ist von Gl. (10) noch der Wert $2\pi \cdot |z|$ in Abzug zu bringen. Die in Gl. (10) auftretenden Größen $a_{i,j}$ und h_i lassen sich laut nachstehender Figur geometrisch deuten und sind aus den vorliegenden Koordinaten des Aufpunktes und der Punkte 1 und 2 berechenbar, welche die i -te Seite des Schichtenpolygons für die Höhe z begrenzen. Mit $r_{i,j} = (a_{i,j}^2 + h_i^2 + z^2)^{1/2}$ ist wiederum der Abstand des Aufpunktes von den Polygonpunkten bezeichnet.



Figur: Geometrische Deutung von Hilfsgrößen

4. Programmsystem

4.1. Leistungsumfang

Das entwickelte Programmsystem trägt den Namen "Talwani" und besteht aus zwei Hauptteilen.

Der erste Teil dient der Erfassung der geometrischen Daten von Modellkörpern durch Digitalisierung der Schichtenlinien. Dies kann wahlweise durch händische Eingabe oder mittels Digitizer erfolgen. Einzelne Funktions-Module des ersten Hauptteiles ermöglichen die Initialisierung des Digitizers und weiters die Überprüfung, Darstellung und Editierung sowie die Verwaltung und Archivierung aller geometrischen Daten.

Im zweiten Teil des Programmsystems wird die eigentliche numerische Berechnung des Potentials und seiner Ableitungen für wählbare Aufpunkte sowie die Anzeige und Abspeicherung diverser Zwischenergebnisse durchgeführt.

4.2. Hardware

Für die Installation des Programmsystems müssen mehrere Hardware-Voraussetzungen erfüllt sein. Es wird ein IBM-kompatibler PC mit einer CPU i80XXX und dem Betriebssystem MSDOS 3.XX vorausgesetzt. Wegen der intensiven Nutzung des Heap-Bereichs müssen zumindest 512 kByte RAM installiert sein. Eine Festplatte beliebiger Kapazität wird zwar als vorhanden angenommen, ist jedoch nicht unbedingt erforderlich. Für die Kommunikation mit dem Digitizer muß eine serielle Schnittstelle (COM1:) vorhanden sein, der Drucker wird wie üblich über die parallele Schnittstelle angesprochen. Weiters muß für die graphischen Darstellungen eine CGA-Karte oder eine höherwertige Graphikkarte (EGA, VGA, etc.) mit einer entsprechenden Emulation installiert sein. Zur besseren Performance wird ein mathematischer Coprozessor i80X87 empfohlen, ist aber nicht unbedingt erforderlich.

Bei der Entwicklung von "Talwani" wurde ein NUMONICS (Modell 2200) Digitizer im A3-Format verwendet. Daraus resultiert ein vorgegebenes Datenformat für die Übernahme der digitalisierten Daten. Ansonsten steht der Verwendung eines Digitizers anderen Fabrikates nichts im Wege.

4.3. Software

Das Programmsystem "Talwani" wurde zur Gänze unter TURBO-PASCAL 3.0 entwickelt, kompiliert und getestet. Eine Compilierung unter TURBO-PASCAL 5.0 ist nach Anpassung an das Unit-Konzept, sowie nach Hinzufügung eines eigenen Units für die Kommunikation mit der seriellen Schnittstelle - in TURBO-PASCAL 3.0 als Device AUX: realisiert - jederzeit möglich. Als Resultat ergäbe sich ein noch kompakterer EXE-Code. Der Zuwachs an Performance hingegen wäre unwesentlich.

Der Source-Code umfaßt ca. 270 kByte und verteilt sich auf insgesamt 22 Include-Files. Der EXE-Code verteilt sich auf insgesamt 3 Files mit einer Gesamtgröße von ca. 80 kByte, wobei 2 Files alle Overlays enthalten.

Erwähnenswert ist noch, daß zur Unterstützung der Bedienungsführung mit Hilfe einer externen Library auch Funktionen implementiert wurden, welche in TURBO-PASCAL 3.0 nicht enthalten sind.

4.4. Sonstiges

Da die Benutzeroberfläche von "Talwani" durch Menü- und Window-Techniken bedienerfreundlich gestaltet wurde, wird auf eine detaillierte Programmbeschreibung verzichtet und auf die diesbezüglichen Ausführungen in Stäuble (1988) verwiesen. Angefügt soll noch werden, daß zwar Bedienungsfehler weitgehend abgefangen werden, die Art und Weise der Datensicherung hingegen dem Benutzer überlassen wird.

5. Abschließende Bemerkungen

Das vorgestellte Programmsystem wurde an einigen praktischen Anwendungsbeispielen, wenn auch nicht durchgreifend getestet. Insbesondere sind noch Untersuchungen über die erforderliche Digitalisierungsdichte und die Anzahl notwendiger Schichtenlinien anzustellen. Weiters sind noch Schwachstellen der Methode, zum Beispiel bei Aufpunktlage in der Nähe einer Schichtenlinie und anderes mehr zu überprüfen.

Aus den bisher vorliegenden Ergebnissen kann trotzdem auf die Eignung des Verfahrens für ingenieurgeodätische aber auch geophysikalische Anwendungen geschlossen werden. Es ist überall dort vorteilhaft anzuwenden, wo digitale Höhenmodelle oder sonstige Informationen über das lokale Schwerfeld nicht verfügbar sind. Das Verfahren soll aber auch als eine wertvolle Ergänzung in solchen Fällen verstanden werden, wo Schwerfeldparameter bereits in Rasterform vorliegen, vgl. Sünkel (1989).

6. Literatur

Stäuble, C. (1988): Interaktive Berechnung des Schwerepotentials und dessen Gradienten für beliebig geformte Massen. Diplomarbeit an der Abteilung für Landesvermessung der TU Graz, 60 Seiten plus Programmlisting.

Sünkel, H. (1988): Das Schwerfeld als Bindeglied bei Ingenieurvermessungen. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie, 76. Jg., Heft 3, Seiten 343-355.

Sünkel, H. (1989): Das Schwerfeld in Österreich. Beitrag für das 5. Internationale Alpengravimetrie-Kolloquium, Graz.

Talwani, M.; M. Ewing (1960): Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape. *Geophysics*, Vol. XXV, No. 1, Seiten 203-225.