

Berechnung der topographischen Reduktion mit der Fast Fourier Transformation

G. Goltz

FU Berlin

1. Einleitung

Mit der zunehmenden Verbreitung digital vorliegender Höhenfiles ist die Bestimmung der gravimetrischen Geländereduktion wesentlich vereinfacht worden, weil auf die mühselige Schätzung mittlerer Geländehöhen weitgehend verzichtet werden kann. Gleichzeitig wäre es aber wünschenswert, ein Berechnungsverfahren zu verwenden, das den in den Höhenfiles steckenden Informationsgehalt -bei vertretbarem Rechenzeitaufwand- voll ausnutzt. Herkömmliche Verfahren, die Quader als Elementarkörper verwenden, wie das von Ehrismann und Lettau (1971), sind wegen der Vielzahl der durchzuführenden Rechenoperationen, insbesondere wenn die Reduktion für viele Stationen berechnet werden soll, hierzu meist nur bedingt verwendungsfähig.

Ein von Sideris (1984, 1985) entwickeltes Verfahren benutzt die Fast Fourier Transformation und benötigt wesentlich weniger Rechenzeit als konventionelle Verfahren. In umfangreichen Testrechnungen ist untersucht worden, ob es das bislang in der Arbeitsgruppe Gravimetrie (FU Berlin) verwendete Verfahren nach Ehrismann und Lettau ersetzen kann.

2. Beschreibung des Sideris-Verfahrens

Ausgangsbasis für das Sideris-Verfahren ist die aus der Massenlinien-Formel (Bott, 1959)

$$\Delta g(x_s, y_s) = f \cdot \Delta \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (h - h_s)^2}} \right] \quad (1)$$

durch Entwicklung des zweiten Bruchs in eine Taylorreihe gewonnene Näherungslösung

$$\Delta g(x_s, y_s) = \frac{f \cdot \Delta \rho}{2} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \frac{(h - h_s)^2}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}^3}, \quad (2)$$

die eine ausreichende Approximation der Schwerewirkung eines Quaders mit ebener Deckfläche

gewährleistet, wenn die Bedingung

$$\left| \frac{h - h_s}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}} \right| \ll 1 \quad (3)$$

erfüllt ist. Die Taylorreihen-Entwicklung wird hier bereits nach dem linearen Glied abgebrochen.

Es gelten dabei die Bezeichnungen:

- $\Delta g(x_s, y_s)$: Geländereduktion im Punkt (x_s, y_s) ,
- f : Gravitationskonstante,
- $\Delta \rho$: Reduktionsdichte,
- $\Delta x, \Delta y$: Kantenlänge der Quadergrundfläche,
- x_s, y_s : x- und y-Koordinaten des Aufpunkts,
- x, y : x- und y-Koordinaten des Quellpunkts,
- h, h_s : Höhe der Massenlinie und des Aufpunkts.

Liegen mittlere Höhen auf einem regelmäßigen Gitter vor, kann die topographische Reduktion unter Verwendung der grundlegenden Beziehung (2) einfach berechnet werden:

$$\Delta g(x_s, y_s) = \frac{f \cdot \Delta \rho}{2} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{[h(x, y) - h(x_s, y_s)]^2}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}^3}, \quad (4)$$

wobei für die Koordinaten x und y bzw. x_s und y_s des Höhenrasters die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= i \cdot \Delta x \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \\ y &= j \cdot \Delta y \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

gelten. Der Gitterabstand beträgt in x -Richtung Δx und in y -Richtung Δy .

Da angenommen wird, daß Stationshöhen und mittlere Geländehöhen an den Gitterpunkten identisch sind, muß ausgeschlossen werden, daß der Nenner in Gleichung (4) gleich Null wird, weshalb jetzt folgende Definition eingeführt wird:

$$r^{-3}(x - x_s, y - y_s) = \begin{cases} [(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2]^{-\frac{3}{2}} & : \text{sonst} \\ 0 & : x = x_s, y = y_s \end{cases} \quad (5)$$

Nach Ausmultiplizieren des Zählers und Zusammenfassen nimmt Gleichung (4) folgende Form an

$$\begin{aligned} \Delta g(x_s, y_s) = & \frac{f \cdot \Delta \rho}{2} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ & \left[\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} r^{-3}(x - x_s, y - y_s) \cdot h^2(x - x_s, y - y_s) \right. \\ & - 2h(x_s, y_s) \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} r^{-3}(x - x_s, y - y_s) \cdot h(x - x_s, y - y_s) \\ & \left. + h^2(x_s, y_s) \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} r^{-3}(x - x_s, y - y_s) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Die ersten beiden Terme in der eckigen Klammer aus Gleichung (6) sind diskrete Faltungen, die auf einfache Weise mit der FFT unter Ausnutzung des Faltungstheorems berechnet werden können. Die dritte Doppelsumme entspricht dem Mittelwert des Abstands aller Gitterpunkte vom Mittelpunkt des Rasters.

Als endgültige Formel für die Geländereduktion erhält man schließlich

$$\Delta g = \frac{f \Delta \rho}{2} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \left[\mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}(r^{-3}) \mathcal{F}(h^2) \right) - 2h \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}(r^{-3}) \mathcal{F}(h) \right) + h^2 \langle r^{-3} \rangle \right]. \quad (7)$$

Hierbei ist \mathcal{F} der Operator der Fourier-Transformation und \mathcal{F}^{-1} der Operator der inversen Fourier-Transformation. Für die Mittelwertbildung wird das Symbol $\langle \rangle$ verwendet.

Das Verfahren liefert die topographische Reduktion gleichzeitig für *alle* Gitterpunkte, wobei die Reduktion im Nahbereich, d. h. innerhalb des Rasterelements mit Kantenlängen Δx und Δy , in dessen Mittelpunkt sich jeweils der Stationspunkt befindet, gesondert berechnet werden muß (z. B. nach Schöler, 1976 oder Klingelé, 1980/81), weil nach der Definition (5) für verschwindenden Abstand r^{-3} dieses Rasterelement keinen Beitrag zur Reduktion liefert.

Wegen FFT-spezifischer Randeffecte nehmen die auftretenden Fehler vom Zentrum des Rasters nach außen hin zu, weshalb die für die randlichen Bereiche berechneten Geländereduktion keine Aussagekraft besitzen. Da aber das Gebiet, für das Reduktionen bestimmt werden sollen, von vorneherein um weitere Punkte –in Abhängigkeit des Reduktionradius– zu ergänzen ist, spielt diese Einschränkung keine wesentliche Rolle.

Die durchgeführten Rechnungen zeigen, daß brauchbare Ergebnisse für ein zentrales Gebiet, das ungefähr 40% × 40% des gesamten Rasters umfaßt, erzielt werden.

Zwei Einschränkungen bei der Anwendung des Verfahrens müssen stets bedacht werden:

- (a) Da die angegebenen Formeln nur für den ebenen Fall gelten, ist das Verfahren bei großräumigen Gebieten, bei denen die Sphärizität der Erde nicht vernachlässigt werden darf (Jung, 1961), nicht mehr uneingeschränkt zu verwenden.
- (b) Liegen die Stationenpunkte nicht auf einem regelmäßigen Gitter vor, muß zusätzlich auf die wahren Stationslagen und Stationshöhen interpoliert werden. Dafür kommen Splinefunktionen oder bilineare Interpolationsformeln in Frage (Forsberg, 1985).

3. Modifikation des Sideris-Verfahrens

Vor Berechnung der topographischen Reduktion mit dem FFT-Verfahren müßte stets geklärt werden, ob die Bedingung (3) für alle Rasterpunkte erfüllt ist, weil sonst unakkzeptabel große Fehler, die sich bis zu einigen *mgal* summieren können, auftreten. Weil diese Überprüfung zeitaufwendig und nicht ganz unkritisch ist, wurde ein anderer Weg eingeschlagen, um das Verfahren trotzdem verwenden zu können.

Zur Verringerung der wegen der verwendeten Näherungsformel auftretenden Fehler sind prinzipiell zwei Verfahrensweisen denkbar

- Berücksichtigung des quadratischen Terms der Taylorreihen-Entwicklung in Gleichung (1) oder
- Modifikation der Filterfunktion r^{-3} in Definition (5).

Im ersten Fall lautet die Berechnungsformel der Geländereduktion

$$\Delta g(x_s, y_s) = f \cdot \Delta \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \left[\frac{1}{2} \frac{(h - h_s)^2}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}^3} - \frac{3}{8} \frac{(h - h_s)^4}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}^5} \right]. \quad (8)$$

Der quadratische Term der Taylorreihen-Entwicklung kann ebenfalls mit Hilfe der FFT bestimmt werden; insgesamt sind statt der ursprünglichen zwei Faltungen zusätzlich weitere vier zu berechnen:

$$\Delta g = f \cdot \Delta \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \left[\frac{1}{2} \left(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(r^{-3})\mathcal{F}(h^2)) - 2h_s \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(r^{-3})\mathcal{F}(h)) + h_s^2 \langle r^{-3} \rangle - \frac{3}{8} \left(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(r^{-5})\mathcal{F}(h^4)) - 4h_s \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(r^{-5})\mathcal{F}(h^3)) + 6h_s^2 \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(r^{-5})\mathcal{F}(h^2)) - 4h_s^3 \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(r^{-5})\mathcal{F}(h)) - h_s^4 \langle r^{-5} \rangle \right) \right) \right]. \quad (9)$$

Die Modifikation der Filterfunktion r^{-3} greift einen schon von Bott (1959) gemachten Vorschlag auf, in dem es heißt

" The errors from all sources are the largest for small values of r , and thus it is desirable for the programme to include a facility for ignoring the squares in the immediate vicinity of the station concerned."

Jeder Rasterpunkt wird "ringförmig" von weiteren Gitterpunkten umgeben, wobei die Einteilung nach der in Abbildung 1 dargestellten vorgenommen wird. Die acht direkten Nachbarpunkte gehören zu Ring 1, die nächsten sechzehn zu Ring 2 usw.

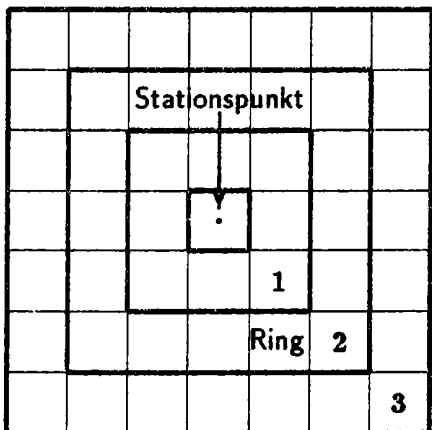


Abbildung 1: *Einteilung des Reduktionsgebiets in verschiedene Ringe um den jeweiligen Stationspunkt.*

In Definition (5) wird jetzt nicht nur für $x_s = x$ und $y_s = y$, sondern auch für diejenigen Punkte, die sich innerhalb der vorzugebenden Ringe befinden, $r^{-3} = 0$ gesetzt. Damit wird eine Ausblendung des Bereichs, durch den die größten Fehler bei der Reduktion entstehen, erreicht. Für die nicht berücksichtigten Punkte muß die Reduktion allerdings mit herkömmlichen Methoden bestimmt werden.

Durch diese mehrstufige Berechnung können einerseits die Vorteile der enorm schnellen Bestimmung der Geländereduktion mit der FFT ausgenutzt und andererseits eine ausreichende Genauigkeit erreicht werden.

Testrechnungen haben ergeben, daß die FFT-Methode schon bei kleinen (32×32) Rastern erhebliche Rechenzeiteinsparung gegenüber der Quader-Methode bietet (ungefähr Faktor 50). Der Zeitvorteil vergrößert sich bei sehr umfangreichen Höhenfiles (1000×1000) um ein Vielfaches, so daß es z. B. ohne weiteres möglich wäre, Daten des Raster 1 des digitalen Geländemodells Österreichs auch zur Berechnung der Fernreduktion zu verwenden.

4. Testrechnungen

Zum Test des Verfahrens wird ein 90×60 Punkte umfassendes Gebiet verwendet, das von den Koordinaten

$$\begin{array}{r} 12^\circ \quad 5' \quad 37.5'' \leq \lambda \leq 13^\circ \quad 19' \quad 22.5'' \quad \text{Östliche Länge} \\ 46^\circ \quad 46' \quad 7.5'' \leq \phi \leq 47^\circ \quad 52' \quad 52.5'' \quad \text{Nördliche Breite} \end{array}$$

umschlossen wird. Der Punktabstand beträgt in x -Richtung 1392 m ($11.25''$) und in y -Richtung 1552 m ($18.75''$) (Raster 3 des digitalen Geländemodells Österreichs).

Die Geländereduktion wird für einen 30×20 Punkte umfassenden Ausschnitt im Zentrum des Gesamttrasters berechnet. Hier betragen die Geländehöhen zwischen 724 m und 3085 m . Die Höhenunterschiede zwischen den einzelnen Punkten sind wegen des hochalpinen Geländes recht beträchtlich und betragen teilweise über 1000 m . Als Reduktionsdichte wird einheitlich 2.67 g cm^{-3} verwendet.

Bleibt bei der Berechnung jeweils das Rasterelement ausgespart, in dessen Mittelpunkt sich der Stationspunkt befindet, betragen die Unterschiede zwischen FFT-Verfahren und der Quader-Methode zwischen -0.2 und 1.6 mgal (Tabelle 2, 2. Spalte). Die größten Abweichungen treten an den Punkten auf, an denen die Höhenunterschiede zu den umliegenden Punkten sehr groß, teilweise in der Größenordnung der Rasterabstände, sind. Dort gilt die für Gleichung (2) angenommene Voraussetzung nicht mehr, wodurch die Abweichungen zu erklären sind.

Bei Vernachlässigung der den Stationspunkts umgebenden acht Nachbarpunkte ergibt sich eine erhebliche Verringerung der Abweichung beider Methoden voneinander, so daß für fast 100% aller Punkte die Abweichungen kleiner als 0.5 mgal bleiben. Werden nicht nur die direkten Nachbarpunkte (1. Ring) bei der Rechnung nicht mitherangezogen, sondern auch die Punkte des 2., 3. und 4. Rings, verbessert sich das Resultat kontinuierlich (Tabelle 2, 3. - 6. Spalte). Schließlich differieren beide Methoden nur noch um maximal 0.3 mgal . Natürlich nimmt gleichzeitig der Gesamtbetrag der Reduktion ab (Tabelle 1).

Die Resultate sollten noch besser werden, wenn, wie weiter oben beschrieben, auch der quadratische Term der Reihenentwicklung in Gleichung (1) berücksichtigt wird. Erstaunlicherweise ist genau das Gegenteil der Fall! Die maximale Abweichung beträgt fast 3.4 mgal (Tabelle 3, 2. Spalte) im Gegensatz zu 1.6 mgal beim nicht modifizierten Sideris-Verfahren. Diese Tendenz schwächt sich ab, wenn der "Nahreduktionsradius" nach außen verlagert wird (Tabelle 3, 3. - 6. Spalte).

Dieses Ergebnis kann nur so gedeutet werden, daß in diesem Beispiel die Näherungsformel (2) die Schwerewirkung des Quaders besser approximiert als Gleichung (1) bzw. die daraus abgeleiteten

Formeln, die auch Glieder höherer Ordnung der Reihenentwicklung dieser Gleichung enthalten.

Sich daran anschließende Untersuchungen, bei denen auch die von Jung (1961) angegebene Formel

$$\Delta g(x_s, y_s) = f \cdot \Delta \rho \cdot (\Delta x)^2 \left[\frac{1}{2} \frac{(h - h_s)^2}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}^3} - \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{(h - h_s)^2}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}^5} \right],$$

mit der FFT ausgewertet wurde, haben gezeigt, daß die mit Formel (2) berechneten Reduktionen in Gebieten mit großen Höhenunterschieden die geringsten Unterschiede zur Quader-Methode aufweisen, während bei ruhiger Topographie die Formel von Jung die genauesten Ergebnisse liefert. Letztere Formel gilt jedoch nur, wenn die Gitterabstände in x - und y -Richtung gleich groß sind.

5. Zusammenfassung

Das Sideris-Verfahren ist eine elegante Methode zur Berechnung der gravimetrischen Geländereduktion, die besonders für die Verarbeitung umfangreicher Höhenfiles geeignet ist. Da allerdings als Ausgangsformel die Massenlinien-Formel verwendet wird, ist die Anwendung nur zur Berechnung der Fernreduktion empfehlenswert, wobei wegen der Nichtberücksichtigung der Sphärizität der Erde, der Reduktionsradius nicht beliebig groß gewählt werden darf. Generell sind umso bessere Ergebnisse zu erwarten, je geringer die Höhenunterschiede zwischen den einzelnen Rasterpunkten sind.

Insgesamt kann mit dem Sideris-Verfahren ein schneller Überblick über die zu erwartende Größenordnung der Geländereduktion erhalten werden. Bestehende Verfahren kann es zwar ergänzen, aber nicht in ihrer ganzen Anwendungsbreite ersetzen.

Anmerkung

Ganz herzlich danken möchte ich Herrn Dr. Bruno Meurers (Universität Wien) für die Bereitstellung der verwendeten Höhendaten und die anregende Diskussion über die hier behandelte Thematik sowie Herrn Prof. Dr. H.-J. Götze (FU Berlin), der der Initiator dieser Arbeit war.

Literatur:

Bott, M.P.H., 1959: The Use of Electronic Digital Computers for the Evaluation of Gravimetric Terrain Corrections. *Geophysical Prospecting* 7, 45-54

Ehrismann, W., Lettau, O., 1971: Topographische Reduktion von Schweremessungen in der näheren und weiteren Stations-Umgebung mit Digitalrechnern. *Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie, Serie A*, 20, 383-396

Forsberg, René, 1985: Gravity Field Terrain Effect Computations by FFT. *Bulletin Géodésique* 59, 342-360

Jung, Karl, 1961: *Schwerkraftverfahren in der angewandten Geophysik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig

Klingelé, E., 1980/81: A New Method for Near-Topographic Corrections in Gravity Surveys. *Pure and Applied Geophysics, Vol. 119*, 273 - 279

Lettau, Olaf, 1970: *Ein ALGOL-Programm-System zur Reduktion gravimetrischer Messungen*. Diplomarbeit (unveröffentlicht), TU Clausthal

Schöler, Werner, 1976: Die Beeinflussung der Schwere und des Vertikalgradienten durch das Gelände in Stationsnähe. *Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie, Serie A*, 25, 79-88

Sideris, M.G., 1984: *Computation of Gravimetric Terrain Corrections Using Fast Fourier Transform Techniques*. Department of Surveying Engineering, UCSE Reports 20007, University of Calgary, Canada

Sideris, M.G., 1985: A fast Fourier Transform method for computing terrain corrections. *Manuscripta Geodaetica* 10, 66-73

Tabellenanhang:

Geländereduktion [mGal]	Aussparung bis Ring				
	0	1	2	3	4
Minimum	2.5	2.2	1.6	1.3	1.0
Maximum	33.9	28.3	19.3	12.9	10.3

Tabelle 1: *Geländereduktion bei Variation des "Nahreduktionsradius" (Sideris-Verfahren).*

Abweichung [mGal]	Anteil von 600 Punkten				
	0	1	2	3	4
-1.0 - -0.9	.	1	.	.	.
-0.9 - -0.8
-0.8 - -0.7
-0.7 - -0.6
-0.6 - -0.5
-0.5 - -0.4	.	.	2	.	.
-0.4 - -0.3	.	.	2	1	1
-0.3 - -0.2	1	.	9	11	11
-0.2 - -0.1	.	5	30	37	35
-0.1 - 0.0	.	11	308	477	517
0.0 - 0.1	5	97	249	74	36
0.1 - 0.2	16	184	.	.	.
0.2 - 0.3	29	191	.	.	.
0.3 - 0.4	45	93	.	.	.
0.4 - 0.5	45	16	.	.	.
0.5 - 0.6	60
0.6 - 0.7	73
0.7 - 0.8	65
0.8 - 0.9	63
0.9 - 1.0	56
1.0 - 1.1	45
1.1 - 1.2	42
1.2 - 1.3	28
1.3 - 1.4	15
1.4 - 1.5	9
1.5 - 1.6	2
1.6 - 1.7	1
Mittelwert [mGal]	0.75	0.20	-0.02	-0.04	-0.04

Tabelle 2: *Verteilung der Abweichung der Geländereduktion berechnet mit dem FFT-Verfahren vom Quader-Verfahren für unterschiedliche "Radien" des Nahreduktionsbereichs.*

Geländerreduktion [mGal]	Aussparung bis Ring				
	0	1	2	3	4
Minimum	2.5	2.2	1.6	1.3	1.0
Maximum	30.7	26.0	18.7	12.7	10.2

Tabelle 3: Geländerreduktion bei Variation des "Nahreduktionsradius" (modifiziertes Sideris-Verfahren).

Abweichung [mGal]	Anteil von 600 Punkten				
	0	1	2	3	4
-0.3 - -0.2	-	-	-	5	5
-0.2 - -0.1	-	-	13	24	29
-0.1 - 0.0	-	-	85	334	447
0.0 - 0.1	2	248	401	237	119
0.1 - 0.2	14	168	58	-	-
0.2 - 0.3	13	77	2	-	-
0.3 - 0.4	32	31	1	-	-
0.4 - 0.5	34	22	-	-	-
0.5 - 0.6	34	15	-	-	-
0.6 - 0.7	49	13	-	-	-
0.7 - 0.8	49	10	-	-	-
0.8 - 0.9	53	6	-	-	-
0.9 - 1.0	39	-	-	-	-
1.0 - 1.1	37	3	-	-	-
1.1 - 1.2	31	-	-	-	-
1.2 - 1.3	27	5	-	-	-
1.3 - 1.4	29	-	-	-	-
1.4 - 1.5	22	-	-	-	-
1.5 - 1.6	19	1	-	-	-
1.6 - 1.7	18	-	-	-	-
1.7 - 1.8	21	-	-	-	-
1.8 - 1.9	9	-	-	-	-
1.9 - 2.0	16	-	-	-	-
2.0 - 2.1	13	-	-	-	-
2.1 - 2.2	7	-	-	-	-
2.2 - 2.3	11	-	-	-	-
2.3 - 2.4	3	-	-	-	-
2.4 - 2.5	5	1	-	-	-
> 2.6	13	-	-	-	-
Mittelwert [mGal]	1.08	0.20	0.04	-0.01	-0.03

Tabelle 4: Verteilung der Abweichung der Geländerreduktion berechnet mit dem modifizierten FFT-Verfahren vom Quader-Verfahren für unterschiedliche "Radien" des Nahreduktionsbereichs.