# Leistungsfähige Numerische Algorithmen für Geodätisch-Geophysikalische Anwendungen

W.-D. Schuh TU Graz

**Zusammenfassung**

Weiterentwicklungen in der numerischen Mathematik und leistungsfähige Rechenwerkzeuge eröffnen neue Möglichkeiten der Analyse von Daten und Modellen. Somit können komplizierte und rechenintensive Modellansätze für Untersuchungen herangezogen werden. Aber auch die Verarbeitung von großen Datenmengen in einem Guß ist in immer komfortablerer Form möglich. Hier soll ein Überblick von Arbeiten auf diesem Gebiet gegeben werden.

## 1. Einführung

Immer schwierigere und umfangreichere Problemstellungen werden der automationsgestützten Berechnung übertragen, wobei nicht nur eine Berechnung der Lösung, sondern gleichzeitig eine Analyse der Eingangsdaten, die Überprüfung von Modellen und eine möglichst leicht erfaßbare Ausgabe gefordert werden. Händische Überprüfungen sind bei den vorliegenden Datenmengen ein unmögliches Unterfangen. Wenn man zum Beispiel die 60.000 Schweremessungen, die für das österreichische Bundesgebiet vorliegen und zur Geoidberechnung 1987 herangezogen wurden, betrachtet (*H. Sünkel u.a. (1987)*) und überlegt, daß dies einem Ausdruck von 6000 m (40 Zeichen (≈10cm) pro Messung) entspricht, so erkennt man die Hoffungslosigkeit einer händischen Überprüfung. Man kann zwei Wege einschlagen, um diese Datenmengen zu bewältigen. Ein Weg stellt eine bestmögliche graphische Aufbereitung der Daten dar, wodurch der Bearbeiter, auf Grund der ausgeprägten Fähigkeit Bilder zu erfassen, in die Lage versetzt wird, die Überprüfung der Eingabedaten und die Interpretation der Ergebnisse durchzuführen. Ein anderer Weg ist durch die Erfassung der Überprüfungskriterien in entsprechenden mathematischen Modellen gegeben, sodaß der Datentest weitgehend automatisiert werden kann. Der Bearbeiter bekommt zusammengefaßte Ergebnisse und wird durch Analyseprogramme auf kritische Punkte (Datenfehler, Modellinkonsistenzen) hingewiesen. Erst wenn die Berechnung entsprechend aufbereitet und in einer absehbaren Zeit wiederholbar ist, wird es für den Bearbeiter verlockend, Eingabefehlern auf die Spur zu kommen und durch genauer angepaßte Modelle seine Ergebnisse zu verbessern. Dieser Idealfall einer Bearbeitung von Meßergebnissen setzt neben einem geschulten Bearbeiter leistungsfähige Modelle und deren Umsetzung für die automatischen Berechnungen voraus.

Weiterentwicklungen in der numerischen Mathematik und der rasante Fortschritt auf dem Gebiet der Datenverarbeitungsanlagen eröffnen neue Möglichkeiten der Analyse von Daten und Modellen. Komplizierte und rechenintensive Modellansätze können für Untersuchungen herangezogen werden, aber auch die Verarbeitung von großen Datenmengen in einem Guß ist in immer komfortablerer Form möglich. Hier soll eine Überblick von Entwicklungen der letzten Jahre, von neuen und zukünftigen Forschungsarbeiten im Bereich der automationsgestützten Verarbeitung von Meßergebnissen gegeben werden. Schwerpunkt stellt dabei sowohl die Datenanalyse und Modellbildung als auch die Lösung der Systeme dar. Diese Arbeit konzentriert sich im wesentlichen auf die Auswertung bei Netzwerken und auf Feldberechnungen. Verschiedene Lösungsansätze werden herausgearbeitet, und an konkreten Anwendungen wird die Wirksamkeit der verwendeten Algorithmen demonstriert.

## 2. Modellbildungen

Netzwerke sind aus zwei Komponenten aufgebaut: Eine meist große Anzahl von Knoten wird durch Kanten miteinander verbunden. Die Kanten können dabei als gerichtete Größen (z.B. Höhen-, Schwere- oder Koordinatenunterschiede, Richtungen usw.) oder ungerichtete Größen (Strecken usw.) auftreten. Aber auch paarweise verknüpfte Kanten (Winkeln, Streckenunterschiede usw.) und verknüpfte Gruppen von Kanten (Richtungssätze, Streckensätze usw.) können im Netz enthalten sein. Wesentlich ist dabei, daß nur wenige Verknüpfungen (im statistischen Sinn) vorhanden sind, die hauptsächlich im lokalen Bereich zu örtlich benachbarten Knoten wirken. Die Aufgabenstellung bei vielen Anwendungen ist dadurch gegeben, daß Meßwerte für die Kanten vorliegen, um daraus unbekannte Knotenparameter überbestimmt und somit kontrolliert rückzurechnen. Da keine Messung unbeeinflußt von systematischen und zufälligen Größen durchgeführt werden kann und außerdem interne Gerätefehler oder Bedienungsfehler unumgänglich sind, können die unbekannten Parameter nicht konsistent (widerspruchsfrei) aus allen Messungen rückgerechnet werden. Durch Vorgaben über das Verhalten der systematischen und zufälligen Meßanteile ermittelt man 'bestmögliche' Parameter aus dem vorhandenen Datenmaterial. Sind systematische Meßanteile durch physikalische oder elektronische Phänomene erklärbar, so kann die Berücksichtigung innerhalb der Berechnung durch deterministische Ansätze modelliert werden (konstanter und proportionaler Anteil bei Streckenmessungen, Uhrenfehler, Verzeichnungen bei Abbildungen, Ausgleichstiefe bei der topographisch-isostatischen Reduktion usw.). Erscheint eine signifikante Berechnung nicht möglich, da die Daten die Einflüsse nicht repräsentativ beschreiben, so kann man die Meßwerte durch Standardmodelle, die durch zusätzliche Informationen (Temperatur, Luftdruck, Geländemodelle usw.) gestützt werden, reduzieren (atmospärische Reduktion, topographisch-isostatische Reduktion). Numerisch problematisch erscheint das bei den GPS-Messungen durchgeführte Verfahren, durch Differenzbildung von Messungen systematische Anteile (Ionosphäre) zu eliminieren. Die verbleibenden Pseudomessungen weisen nur einen sehr verringerten Informationsgehalt auf, da der relative Restfehler der Pseudomessungen vergrößert und durch die Korreliertheit verschleppt wird. Kann kein deterministischer Ansatz die systematischen Fehleranteile erfassen, da diese eher zufälligen Einflüssen unterliegen, so eignet sich der sehr rechenintensive Ansatz über stochastische Modelle (empirische Kovarianzfunktionen) und eine Kollokationslösung zur Ermittlung und Modellierung der systematischen Meßanteile.

Der verbleibende, rein zufällige, unkorrelierte Meßanteil (white noise) wird durch externe Genauigkeitsabschätzungen oder die Relativierung einzelner Meßgenauigkeiten untereinander abgeschätzt. Die unkorrelierten Einflüsse werden in einer Diagonalmatrix als Gewichtsansatz oder als Kovarianzansatz modelliert. Für die 'bestmögliche' Berechnung der Parameter muß noch eine zusätzliche Annahme über das statistische Verhalten der zufälligen Meßanteile vorgegeben werden. Unter der idealen

Voraussetzung, daß unendlich viele, gleich große Fehlereinflüsse den zufälligen Meßanteil hervorrufen, beschreibt die Normalverteilung das statistische Verhalten am besten. Auf Grund der Methode der maximalen Mutmaßlichkeit (maximum Likelihood-Methode) kann die 'bestmögliche' Berechnung der Parameter durch Minimierung der gewichteten Quadratsumme der Verbesserungen (Gauß'sches Minimumsprinzip, L2-Norm) erreicht werden. Empirische Untersuchungen der zufälligen Anteile zeigen jedoch, daß diese idealen Voraussetzungen und somit die Normalverteilung nur in wenigen Fällen wirklich vorhanden sind. Wie verschiedene Arbeiten (*Carosio (1979), Borutta (1988), Caspary (1988)*) zeigen, weist die Minimierung nach dem Gauß'schen Minimumsprinzip die unangenehme Eigenschaft auf, daß sie für nicht normalverteilte Daten kein sehr stabiles Verhalten zeigt und gegenüber robusten Verfahren bei annähernd normalverteilten Daten oder Mischverteilungen schlechte Ergebnisse erzielt. Durch Minimierung sowohl des Einflusses der Verteilung als auch der groben Datenfehler auf das Berechnungsergebnis stößt man auf robuste Berechnungsverfahren, die durch Iteration und Neugewichtung auch bei nichtidealen Voraussetzungen stabile Ergebnisse liefern (*Huber (1977), Hampel (1983)*). Geodätische Anwendungen der Neugewichtungsmethode wurden durch *Krarup u.a. (1980)* initiiert und sind inzwischen als 'Dänische Methode' weitverbreitet. Robuste Ausgleichsverfahren mit Hilfe der Minimierung der Absolutsumme der Verbesserungen (L1-Norm) und entsprechende Rechenvorschriften der linearen Programmierung haben ebenfalls einen festen Platz bei den Analysetechniken von Netzen (*Fuchs (1980),(1982), Kampmann (1986),(1988)*).

## 3. Numerische Behandlung

Bei der numerischen Behandlung all dieser Ansätze stößt man auf manche Gemeinsamkeiten, aber auch auf spezielle Eigenheiten bei einzelnen Problemstellungen. Den meisten Aufgaben liegt die Lösung eines symmetrischen, positiv definiten Gleichungssystems zugrunde. Wegen des netzwerkartigen Aufbaus und der nur lokal vorhandenen Kanten sind viele Systeme extrem schwach besetzt. Durch Ausnutzung dieser Eigenschaft ist es möglich, die quadratisch anwachsende Speicheranforderung bei vollen Matrizen auf lineare Anforderungen zu senken. Entscheidend dabei ist es, während des Lösungsverfahrens diese schwache Besetztheit bestmöglich zu bewahren.

Bei den iterativen Lösungsmethoden stellt dies keine Schwierigkeit dar, da die Matrizen nur multiplikativ verwendet werden. Die deshalb gerne verwendete Methode der konjugierten Gradienten eignet sich ausgezeichnet als schnelles Lösungsverfahren bei schwach besetzten Systemen (*Gründig (1980)*). Bedingt durch spezielle Eigenschaften von netzwerkartigen Systemen wird eine hohe Nachbarschaftsgenauigkeit schon nach wenigen Iterationen erlangt. Das Konvergenzverhalten sowie die Abschätzung von globalen Ungenauigkeiten verursachen jedoch Probleme (*Schuh (1984b)*), die auch durch verfeinerte Methoden (Vorkonditionierung (*Benciolini u.a. (1981)*) nicht gänzlich zu beseitigen sind. Bei Ausnutzung der positiven Eigenschaften (schnelle lokale Konvergenz) eignet sich diese Methode besonders für alle Neugewichtungsmethoden (*Fuchs u.a. (1983), Schuh (1984a)*).

Um die schwache Besetztheit bei direkten Lösungsverfahren bestmöglich ausnützen zu können, bedient man sich eines einfachen Hilfsmittels. Durch eine Umordnung der Reihenfolge der Unbekannten (betrifft Zeilen und Spalten in gleicher Weise, um die Symmetrie zu erhalten) versucht man die Anzahl der Nullelemente während des Lösungsprozesses möglichst groß zu halten. Man erreicht damit eine Einsparung an Speicherplatz und Rechenzeit und erzielt zusätzlich ein günstigeres Verhalten der Rundungsfehler (*Meissl (1980)*). Von den drei verwendeten Methoden (Verfahren nach dem Grad der Knoten, band- oder profilorientierte Verfahren) haben sich in der geodätischen Anwendung die profilorientierten Verfahren als am leistungsfähigsten herauskristallisiert (*Benning (1986)*). An Umordungsalgorithmen werden das weitverbreitete, einfachere Verfahren von Cuthill-McKee (reversed Cuthill-McKee) (*Cuthill (1972)*) und das leistungsfähigere Verfahren nach Snay (*Snay (1976), Schuh (1981)*) verwendet. Die Lösung erfolgt durch ein speziell adaptiertes Cholesky-Verfahren, welches auf die variable Bandbreite bei der Speicherung und Berechnung Rücksicht nimmt (*Meissl (1982), Poder und Tscherning (1973)*). Die Inverse innerhalb des Profils, also zumindest die Elemente zwischen allen Nachbarpunkten, kann durch ein auf *Hanson (1978)* zurückgehendes Verfahren rekursiv ermittelt werden. Wenn die dadurch erzielte Einsparung an Speicherplatz

($n \cdot b$ anstatt $n^2/2$) und Rechenzeit ($n \cdot b^2$ anstatt $n^3/6$; n.. Anzahl der Unbekannten, b... mittlere Bandbreite) bei sehr großen Systemen nicht ausreicht, so kann auf die Methode der Helmert-Blockzerlegung (Nested Dissection) (*George und Liu (1981)*) übergegangen werden, wodurch eine parallele Berechnung mit mehreren Recheneinheiten gleichzeitig ermöglicht wird.

Bei sehr großen Gleichungssystemen, die aus Approximationsansätzen stammen, kann der Übergang auf regelmäßige Gitterstrukturen die Berechnung erleichtern oder auch erst ermöglichen. Die durch Kollokationsansätze so entstehenden Kovarianzmatrizen weisen zirkulierende oder Toeplitz-Strukturen auf und können mit sehr platzsparenden, schnellen Algorithmen gelöst werden. Toeplitz-Systeme können rekursiv mit einem Rechenaufwand von quadratischer Ordnung berechnet werden. Zirkulierende Systeme können durch Diskrete Fast Fourier Transformationen unter besten Voraussetzungen in einer Ordnung $n \cdot \log n$ gelöst und invertiert werden. Bedingt durch Verwendung von Funktionen mit endlichen Trägern als Basisfunktionen (Finite Elemente, Splines) oder als Kovarianzfunktionen (Finite Kovarianzfunktionen (*Sansó und Schuh (1987)*) können auch bei Approximationsverfahren schwach besetzte, meist bandähnliche Matrizen erzeugt werden. Die sich anbietenden Lösungsmöglichkeiten sind Bandalgorithmen oder Blockbandalgorithmen bei unregelmäßigen Strukturen. Für regelmäßige Strukturen ist es gelungen, eine Rechenvorschrift zu entwickeln, die Bandtoeplitzmatrizen streng mit einem Rechenaufwand der Ordnung ($n \cdot \log n$ bzw. $b^2$) löst. Die Rechenzeiten für 30.000 Unbekannte, bei einer Bandbreite von 3000, liegen bei einem Minicomputer bei etwa 2 Minuten (institutseigener Rechner VAX 3200).

Neben der einmaligen Berechnung der Lösung von symmetrischen, positiv definiten Gleichungssystemen tritt bei den robusten Schätzverfahren ein dynamischer Aspekt in den Vordergrund. Das Gleichungssystem unterliegt Veränderungen in den Koeffizienten (Neugewichtungen, Elimination von groben Ausreißern), oder es wird auf eine andere Zusammenstellung der Unbekannten durch andere zugrundegelegte Modelle übergegangen. Ist vorweg bekannt, daß ein dynamisches Verfahren bei der Berechnung verwendet wird, kann man sich spezieller numerischer Techniken bedienen.

Die Möglichkeiten bei Änderung der Koeffizienten sind vielfältig und reichen von inversionsfreien Verfahren, um den Einfluß einzelner Beobachtungen hinzuzufügen oder zu eliminieren (Formel von *Sherman-Morrison-Woodbury*), bis zu iterativen Möglichkeiten der Berechnung der neuen Lösung oder der veränderten Inversen (*Schmitt (1985)*). Austauschverfahren eignen sich zum Übergang auf unterschiedliche Gruppen von Unbekannten. Der Austauschschritt bildet deshalb auch die Grundlage des Simplexverfahrens, des Universallösungsverfahrens der linearen Programmierung (*Danzig (1966)*). Alle Versuche, den Simplexalgorithmus bzw. das revidierte Simplexverfahren durch leistungsfähigere Methoden zu ersetzen, zeigten keinen Erfolg (*Strang (1986)*). Verbesserte Verfahren für spezielle Situationen konnten zwar gefunden werden, jedoch kein universell einsetzbares Verfahren. Zur Minimierung der Absolutsumme von Verbesserungen wurde von Barrodale und Roberts ein Verfahren vorgestellt, das wegen der gleichzeitigen und vereinfachten Behandlung mehrerer Optimierungsschritte während eines Austauschschrittes eine Speicherplatz- und Rechenzeitersparnis bringt (*Barrodale und Roberts (1983), Fuchs (1980)*). Bei eindimensionalen Netzen (z.B. Höhen- und Schwerenetze) konnte durch Umformungen eine Überführung des L1-Ausgleichsproblems in ein Transportproblem verwirklicht werden, womit der mächtige Rechenapparat dieser Optimierungsverfahren für unsere Problemstellungen erschlossen werden konnte. Eindimensionale Netze können mit kapazitiven Zirkulationsflußalgorithmen gelöst werden. Der Rechenaufwand weist eine Ordnung von $n*m*\log m$ (m...Anzahl der Messungen) auf, wobei nur Additionen und Subtraktionen benötigt werden, also keine Rundungsfehler entstehen. Der Speicherplatz steigt nur linear mit der Größe des Systems (*Schuh (1985)*). Die große Flexibilität, die durch die Einführung von zusätzlichen Bedingungen (Gleichungen und Ungleichungen) und durch Schlupfvariable ermöglicht wird, macht uns optimistisch, auch neue Anforderungen behandeln zu können. Die Forderungen der Meßtechnik (GPS-Messungen) erzwingen die Modellierung von gemischt-ganzzahligen Problemen, da für bestimmte Gruppen von Unbekannten Ganzzahligkeit gefordert ist. Auch das Zusammenwirken von verschiedenen Ausgleichsansätzen und die Einführung von Ungleichungen in den quadratischen Ausgleichsansatz stellen Schwerpunkte der Forschung dar. Neuen Möglichkeiten, die schwache Besetztheit bei linearen Programmen auszunützen, die durch ein

Verfahren des indischen Mathematikers *Karmarka* eröffnet wurden, werden untersucht.

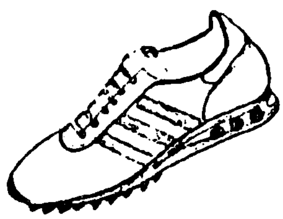
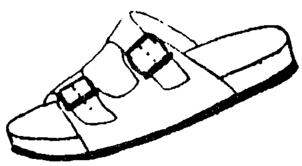
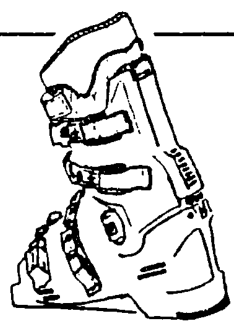
| | Eigenschaften | num. Verfahren |
|---|---|---|
|  | konventionell, sehr universell und problemlos | Eliminationsverfahren (Gauß, Cholseky und Austauschverfahren) |
|  | sehr robust, überwindet jedes Hindernis | Orthogonalisierungs-verfahren (Singular Value Decomposition SVD, Spektralanalysen) |
|  | rasch, eröffnet neue Möglichkeiten | Verfahren für schwach besetzte Systeme (band- oder profilorientierte Verfahren) |
|  | für manches ungeeignet, manchmal unübertreffbar | Iterative Verfahren (Relaxationsmethoden, konjugierte Gradienten) |
|  | sehr eingeengt, aber enorm schnell | Regelmäßige Strukturen (Diskrete Fast Fourier Techniken DFFT, rekursive Toeplitzalgorithmen, Bandtoeplitzverfahren) |

Abb. 1: Gegenüberstellung numerischer Gleichungsauflösungsverfahren

## 4. Schlußbemerkungen

Ich hoffe, Ihnen hiermit einen Eindruck vermittelt zu haben, wie die Werkzeuge eines 'rechnenden Geodäten' heute beschaffen sind. Als Zusammenfassung sei - auf Grund persönlicher Bindungen des Autors zur Fußbekleidung - eine Gegenüberstellung (Abbildung 1) erlaubt.

## Literaturverzeichnis

*Barrodale I. und F.D.K. Roberts (1973):* An Improved Algorithm for Discrete $L_1$ Linear Approximation. SIAM J. Numer. Anal. Vol. 10, No. 5, Seite 839-848.

*Benciolini B., L. Mussio und F. Sansò (1981):* The Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method in Network Adjustment. Proceedings of the $6^{th}$ Int. Symp. on Geodetic Network and Computation, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft 258.

*Benning W. (1986):* Analyse hybrider Lageaufnahmen in Sparse-Technik. Zeitschrift für Vermessungswesen, Band 11, Seite 506-513.

*Borutta H. (1988):* Robuste Schätzverfahren für geodätische Anwendungen. Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen, Heft 33, Universität der Bundeswehr, München.

*Carosio A. (1979):* Robuste Ausgleichung. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Band 11, Seite 293-297.

*Caspary W. (1988):* Fehlerverteilung, Methode der kleinsten Quadrate und robuste Alternativen. Zeitschrift für Vermessungswesen, Band 3, Seite 123-133.

*Cuthill E. (1972):* Several Strategies for Reducing the Bandwidth of Matrices. In 'Sparse Matrices and their Application' *D. Rose and R. Willoughby (Edit.).* Plenum Press, New York-London.

*Dantzig G. (1966):* Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

*Fuchs H. (1980):* Untersuchung zur Ausgleichung durch Minimierung der Absolutsumme der Verbesserungen. Dissertation an der TU Graz.

*Fuchs H., B. Hofmann-Wellenhof und W.D. Schuh (1983):* Adjustment and Gross Error Detection of Leveling Networks. In 'Precise Leveling', *H. Pelzer und W. Niemeier (Hrsg.),* Dümmler Verlag, Bonn.

*George A. and J. Liu (1981):* Computer Solution of Large Sparse Positiv Definite Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

*Gründig L. (1980):* Feasibility Study of the Conjugate Gradient Method for Solving Large Sparse Equation Sets. NOAA Technical Report,NOS 82 NGS 13.

*Hanson R. (1978):* A Posteriori Error Propagation. Second International Symposium on Problems related to the Redefinition of the North American Geodetic Network. Proceedings.

*Hampel F. (1973):* Robust Estimation: A Condensed Partial Survey. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 27, Seite 87-104, Springer Verlag.

*Huber P. (1977):* Robust Statistical Procedures. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pennsylvania.

*Kampmann G. (1986):* Robuste Ausreißertest mit Hilfe der $L_1$-Norm Methode. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Heft 4, Seite 139-147.
*Kampmann G. (1988):* Zur Kombinativen Norm Schätzung mit Hilfe der $L_1$-, der $L_2$- oder der Boškovic-Laplace-Methode mit den Mitteln der Linearen Programmierung. Veröffenlichung des Geodätischen Institutes der Rheinisch-Westfälischen TH Aachen, Heft 43.
*Krarup T., J. Juhl und K. Kubik (1980):* Götterdämmerung over Least Squares Adjustment. ISP Congress Hamburg. Comm. III, Seite 369-378.
*Meissl P. (1980):* A Priori Prediction of Roundoff Error Accumulation in the Solution of a Super-Large Geodetic Normal Equation System. NGS, NOS, Rockville Md. 20852.
*Meissl P. (1982):* Least Squares Adjustement: A Modern Approach. Mitteilungen der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 43.
*Poder K. and C. Tscherning (1973):* Cholesky's Method on a Computer. The Danish Geodetic Institute, Internal Report No. 8.
*Sansò F. and W. Schuh (1987):* Finite Covariance Functions. Bulletin Geodesique 61, Seite 331-347.
*Schmitt G. (1985):* Third Order Design. In 'Optimization and Design of Geodetic Networks', *E. Grafarend and F. Sansò* (Edit.), Springer-Verlag, Heidelberg-New York-Tokyo.
*Schuh W. (1981):* Programmierung rationeller Algorithmen zur Umordnung, Auflösung und Inversion der Normalgleichungen geodätischer Netze. TU Graz, Diplomarbeit.
*Schuh W. (1984a):* Rasche und einfache automatische Fehlererkennung bei großen Datenmengen. Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, Band 4, Seite 137-147.
*Schuh W. (1984b):* Analyse und Konvergensbeschleunigung der Methode der konjugierten Gradienten bei geodätischen Netzen. Mitteilungen der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 49.
*Schuh W. (1985):* Transforming the $L_1$-Norm Adjustment of a Leveling Network into a Flow Problem. Proceedings of the 7th International Symposium on Geodetic Computations, Cracow, Poland, pp. 385-409.
*Snay A. (1976):* Reducing the Profile of Sparse Symmetric Matrices. NOAA Technical Memorandum NOS NGS-4.
*Strang G. (1986):* Introduction to Applied Mathematics. Wellesley-Cambridge-Press, Massachusetts.
*Sünkel H., N. Bartelme, H. Fuchs, M. Hanafy, W. Schuh, M. Wieser (1987):* The Gravity Field in Austria. In 'The Gravity Field in Austria', Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band IV, Seite 47-77.