

Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik

ISSN 1016-6254

Heft 41

**NUMERISCHE METHODEN IN
DER WETTERVORHERSAGE**

**EINE ÜBERSICHT ÜBER
METHODEN UND PROBLEME**

**TEIL I: GRUNDLAGEN,
ATMOSPHÄRISCHE WELLEN,
DIE GITTERPUNKTMETHODE**

Franz Huber-Pock

Wien 2008

I M P R E S S U M

Herausgeber: Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik (ZAMG), Wien

Leitende Redakteure: Sophie Debit, Fritz Neuwirth, ZAMG, Wien

für den Inhalt verantwortlich:

Franz Huber-Pock

Druck: Grafisches Zentrum HTU GmbH
1040 Wien, Wiedener Hauptstraße 8-10
www.grafischeszentrum.at

Verlag: Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik
Hohe Warte 38, A-1190 Wien
Austria (Österreich)

© ZAMG Das Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Die dadurch begründeten Rechte bleiben vorbehalten.
Auszugsweiser Abdruck des Textes mit Quellenangabe ist gestattet.

**Österreichische Beiträge zu
Meteorologie und Geophysik**

Heft 41



Numerische Methoden in der Wettervorhersage

Eine Übersicht über Methoden und Probleme

Teil I: Grundlagen, atmosphärische Wellen, die Gitterpunktmethode

Wien 2008

Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien

Publ.Nr. 422

ISSN 1016-6254

NUMERISCHE METHODEN IN DER WETTERVORHERSAGE

EINE ÜBERSICHT ÜBER METHODEN UND PROBLEME

Teil I : GRUNDLAGEN, ATMOSPHERISCHE WELLEN, DIE GITTERPUNKTSMETHODE

von

Hon.-Prof. Dr. Franz Huber-Pock
Institut für Meteorologie und Geophysik
Universität Wien

November 2007

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1. Grundlagen und Probleme	
1.1 Kurze Einführung in die grundlegenden Probleme der meteorologischen Vorhersage	6
1.2 Das deterministische Gleichungssystem	10
1.3 Die Divergenz-, Vorticity- und ω -Gleichung	14
1.4 Grundsätzliches zum Modellbegriff	20
1.4.1 Das barotrope Modell	20
1.4.2 Das barokline Modell	25
1.4.3 Das reversible oder adiabatische Modell in einer trockenen Atmosphäre	26
1.4.4 Modelle mit irreversiblen (nicht-adiabatischen) Prozessen	28
1.5 Grundsatzfragen und Probleme der Numerischen Lösungsverfahren	30
1.5.1 Nicht-lineare Instabilität	47
1.5.2. Das „SPIN-UP“-Problem	48
1.6 Erste Versuche einer deterministischen und Numerischen Wettervorhersage	48
1.6.1 Eine angenäherte Vorausberechnung der synoptischen Druckverteilung nach EXNER	49
1.6.2 Das Vorhersagemodell von C.F. RICHARDSON	51
1.6.3 Die Vorhersagemethode von I.A. KIBEL	55
1.6.4 Das „barotrope“ Modell nach CHARNEY, FJØRTOFT und v. NEUMANN	59
2. Atmosphärische Wellen und das Filterproblem	
2.1 Zur mathematischen Analyse von Wellenvorgängen	62
2.2 Wellenvorgänge in der Atmosphäre: Isolierung und Filterung	64
2.3 Nichtgeostrophische Filterung	76
2.4 Die charakteristischen Unterschiede zwischen den „Primitiven Gleichungen (PE)“ und den gefilterten Gleichungen	79
2.5 Zum Problem lärmfreier Anfangsdaten	81
3. Numerische Methoden I	
3.1 Die Gitterpunktmethode	86
3.1.1 Räumliche Diskretisation	87
3.1.2 Endliche Differenzenschemata (Finite difference schemes)	92
3.1.3 Konvergenz und Stabilität numerischer Lösungen	94
3.1.4 Approximation vierter Ordnung für zentrierte räumliche Differenzenbildung	103
3.1.5 Gittersysteme zur globalen Integration der „Primitiven Gleichungen (PE)“	105
3.1.6 Zeitliche Diskretisation (Zeitliche Differenzenschemata)	110
3.1.7 Eigenschaften zeitlicher Differenzenschemata: Stabilität, physikalischer Mode und Numerischer Lärm	115
3.1.8 Die Advektionsgleichung	126
3.1.9 Die „Numerische Dispersion“	130

3.1.10	Approximation vierter Ordnung für zentrierte räumliche Differenzenbildung in der Advektionsgleichung	132
3.1.11	Die zweidimensionale Advektionsgleichung	136
3.1.12	Die nicht-lineare Advektionsgleichung, „Aliasing“ und die „nicht-lineare Instabilität“	138
3.1.13	Der „ARAKAWA-JAKOBI-OPERATOR“	142
3.1.14	Grundlagen der „Primitiven Gleichungen“: Ein und mehrdimensionale Lösungsschemata	146
3.1.15	Das „RUNGE-KUTTA“-Schema	158
3.1.16	Zeit-Splitting-Methoden	163
3.1.17	Zeit-Splitting für multidimensionale Systeme	175
3.1.18	Trägheitsschwerewellen und verschiedene Gittersysteme	181
3.1.19	Schwerewellen und Stabilität in „nicht-gestaggerten“ und „gestaggerten“ Gittersystemen	187
3.1.20	Ein ökonomisches Gittersystem für Rossby- und Schwerewellen	191
4.	Literatur	193

VORWORT

In der vorliegenden Schriftenreihe wurden im Heft 30 „Die atmosphärischen Gleichungen in den meteorologischen Koordinatensystemen“ abgeleitet und dargelegt. Nunmehr ist geplant als Erweiterung in drei weiteren Teilen die Probleme und Grundlagen der Numerischen Wettervorhersage (NWP) in einer zusammenfassenden Übersicht darzustellen. In den letzten 33 Jahren sind im Grund nur drei Lehrbücher für das Thema NWP, [HALTINER (1971), HALTINER u. WILLIAMS (1980), KALNAY (2003)], alle in englischer Sprache erschienen. Deshalb soll für Interessierte, Studierende und Fachkollegen, die nicht unmittelbar mit der NWP befasst sind, eine überblicksweise Darstellung gegeben werden. Mit Hinblick auf die stürmische, extrem umfangreiche Entwicklung der NWP ist es sicher unmöglich auf alle Einzelheiten und Details einzugehen. Die vorliegende und die weiter geplanten Monographien sollen aber auf Basis der bisherigen und der gegenwärtigen Literatur einen informativen Überblick geben. Während hier im Teil I Grundlagen, Atmosphärische Wellen und die Numerischen Methoden I mit der vor allem am Beginn der NWP wichtigen Gitterpunktströmungsmethode und historische Aspekte behandelt werden, sind es im Teil II die Semi-Lagrangische Methode, die Galerkinmethoden, die Parametrisierung, Lösungsmethoden für algebraische Gleichungen und ein Überblick über Numerische Vorhersagemodelle im globalen und mesoskaligen Scale.

Franz HUBER-POCK

1. Grundlagen und Probleme

1.1 Kurze Einführung in die grundlegenden Probleme der meteorologischen Vorhersage

Der Wunsch in die Zukunft zu sehen ist sicherlich so alt wie die Menschheit selbst. Im Zuge der Evolution in eine arbeitsteilige Welt der zeitgenössischen Technokultur haben moderne Prognostiker wie Demoskopien, Ökonomen und Meteorologen die Rolle der Medizinmänner grauer Vorzeit übernommen. Während damals eine mythische Erwartungshaltung in die Zukunft sehen zu können, maßgebend war, beruht diese Erwartungshaltung heute auf dem monokausalen Denken, dessen Entstehung nach der evolutionären Erkenntnistheorie als Erfolgsalgorithmus der Arterhaltung im Zuge der Menschheitsentwicklung anzusehen ist. Man muss FORTAK (1985) zustimmen, dass es erstaunlich ist, dass auf dieser Evolutionsstufe des Gehirns die moderne Naturwissenschaft entwickelt werden konnte, die in der Sprache der Mathematik die Vorstellungswelt der Menschen von seiner unmittelbaren, mesoskaligen Umwelt sowohl in den atomaren, mikroskopischen Bereich als auch in den makroskopischen Kosmos hinein erweitern konnte.

Bei der Erweiterung dieser menschlichen Vorstellungswelt ist es aber sehr rasch zu Konflikten mit dem Kausalitätsprinzip gekommen. Es darf hier an die relevante Problematik im Zusammenhang mit der Quantentheorie und die Probleme in der Kosmologie mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erinnert werden. Gleichzeitig hat vor allem die Beobachtung des Langzeitverhaltens komplexer, physikalischer oder chemischer Systeme zur Erkenntnis geführt, dass kausal nicht erklärbare „kohärente“ Ordnungsstrukturen durch nicht-lineare, innere Wechselwirkungen zustande kommen [PRIGOGINE (1979)].

Wir wollen hier an Hand der von FORTAK (1985) entwickelten Gedankengänge zum Grundproblem naturwissenschaftlicher Prognostik den Einstieg in die meteorologische Problematik darlegen:

„Die Meteorologie ist in der Tat ein besonders schönes Beispiel für die Wandlung unseres naturwissenschaftlichen Denkens. Unsere im Zuge der Evolution erworbenen kognitiven Denkstrukturen linearen, kausalen Denkens passen nicht mehr so recht in die heutige naturwissenschaftliche Vorstellungswelt. Gerade die Meteorologie macht es besonders klar, dass es im Falle sehr komplexer, makroskopischer physikalischer Systeme nicht nur praktische, sondern auch prinzipielle Grenzen der Determinierbarkeit gibt. Die Gesetze, nach denen sich ein beliebiges physikalisches System in seinem zeitlichen Verhalten darstellt, sind innerhalb weniger Jahrhunderte im Labor des Experimentalphysikers dadurch gewonnen worden, dass durch Ausscheiden störender Effekte isolierte Phänomene studiert werden konnten. Experimente mit Systemen, die sehr viele Phänomene gleichzeitig enthalten und deren Ereignisraum von der Größe der Atmosphäre ist, sind in der Regel nicht durchführbar. Deshalb ist das Experiment als Methode der Erkenntnisfindung der Meteorologie nicht zugänglich. Aus diesem Grund können wir nicht sicher sein, ob alle Gesetze der klassischen Laborphysik in der Meteorologie anwendbar sind.“

Charakteristisch für die Gesetze der klassischen Physik ist die Tatsache, dass sie die Gestalt deterministischer, mathematischer Gleichungen besitzen. Dies bedeutet, dass bei exakter Kenntnis eines beliebigen Anfangszustandes das zukünftige Verhalten eines System eindeutig berechnet werden könnte.

Schon in der Vergangenheit haben sich bedeutende Physiker mit dem Problem der Kausalität und damit deterministischer Vorhersagbarkeit beschäftigt. So meinte PLANCK (1948), dass das Kausalgesetz weder richtig noch falsch sei, sondern lediglich ein heuristisches Prinzip darstellt. Er beruft sich hiebei in bemerkenswerter Weise auf die Meteorologie.

Eine sehr eindrucksvolle Darstellung stammt [s. FORTAK (1985)] von ERTEL (1954). Aus erkenntnismethodischen Gründen geht ERTEL von der Tatsache aus, dass die Welt, in unserem Fall die Atmosphäre, stets in mindestens zwei Untersysteme „dekomponiert“ werden muss. Das eine System ist unserer Beobachtung zugänglich, von dem anderen besitzt man hingegen meist nur eine unvollständige Kenntnis. Während der Laborphysiker versucht, den störenden Einfluss des einen Untersystems durch geeignete Maßnahmen auszuschalten, steht dem Meteorologen, dessen Labor die Atmosphäre selbst ist, diese Möglichkeit nicht zur Verfügung. Das störende Untersystem der Atmosphäre enthält eine Unzahl kleinräumiger Phänomene, die permanent gegenwärtig sind und zumindest langfristig das Gesamtgeschehen mitbestimmen. ERTEL konnte hiebei zeigen, dass selbst bei durchgängiger Kausalstruktur des Systems, die Anfangsbedingungen des Teilsystems, das unserer Beobachtung „zugänglich“ ist, nicht ausreichen, um die Folgezustände in die Zukunft erfolgreich zu extrapolieren. Es müssten unbedingt auch die Anfangswerte des störenden Untersystems für eine erfolgreiche, deterministische Vorhersage bekannt sein. Wir wissen heute, dass dies nie der Fall sein wird und das Problem der Wettervorhersage eng mit den Erkenntnissen der Chaosphysik zusammenhängt. Die prinzipielle Unmöglichkeit einer deterministischen Vorhersage über beliebig lange Zeiträume für ein System, das mit einem störenden Untersystem in Wechselwirkung steht, ist somit keineswegs überraschend. Es ist geplant die diesbezügliche Problematik in einer weiteren Monographie über das Problem der Vorhersagbarkeit (Predictability) näher zu behandeln.

Das atmosphärische System enthält Phänomene, die einen sehr großen Bereich von Größenordnungen überdecken. Der Bereich der kleinräumigen Phänomene ist in der Regel routinemäßig nicht beobachtbar und fällt meist durch den „Gitterrost“ des Beobachtungsnetzes. Während großräumige Prozesse im allgemeinen gut beobachtbar sind, stellen die kleinräumigen ein „stochastisches“ Teilsystem dar. Da aber Wechselwirkungen zwischen beiden Systemen, wie schon erwähnt, stattfinden, kann man die Atmosphäre als ein „intern offenes System“ betrachten.

Die Umgebung besteht aus dem Teilsystem Weltraum, welches für die Atmosphäre ein „quasi-deterministisches“ System darstellt, da hier nur die solare Einstrahlung mit dem atmosphärischen System in Wechselwirkung tritt. Im Gegensatz hierzu steht das Umgebungssystem Erdoberfläche als „stochastisches“ Teilsystem mit vielfältigen und komplexen Wechselwirkungen aus den Untersystemen Hydrosphäre (Ozeane), Kryosphäre (Eis- und Schneeflächen), Lithosphäre (Landflächen) und der Biosphäre, welche auch anthropogene Einflüsse enthält (s. Abb. 1.1.1).

Außerdem enthält die Atmosphäre noch eine Reihe von Phänomenen, die vom Standpunkt der Wettervorhersage nur geringes Interesse haben. Es handelt sich hiebei um Schall-, Schwere- und Trägheitswellen, die als „meteorologische Lärmprozesse“ bezeichnet werden. Da aber das uns zur Verfügung stehende System deterministischer Gleichungen äußerst sensibel hinsichtlich möglicher Lösungen auf diese Lärmphänomene anspricht, ergibt sich hier ein wesentliches Grundproblem der atmosphärischen Prognostik.

WELTRAUM
 „Quasi-deterministisches System“

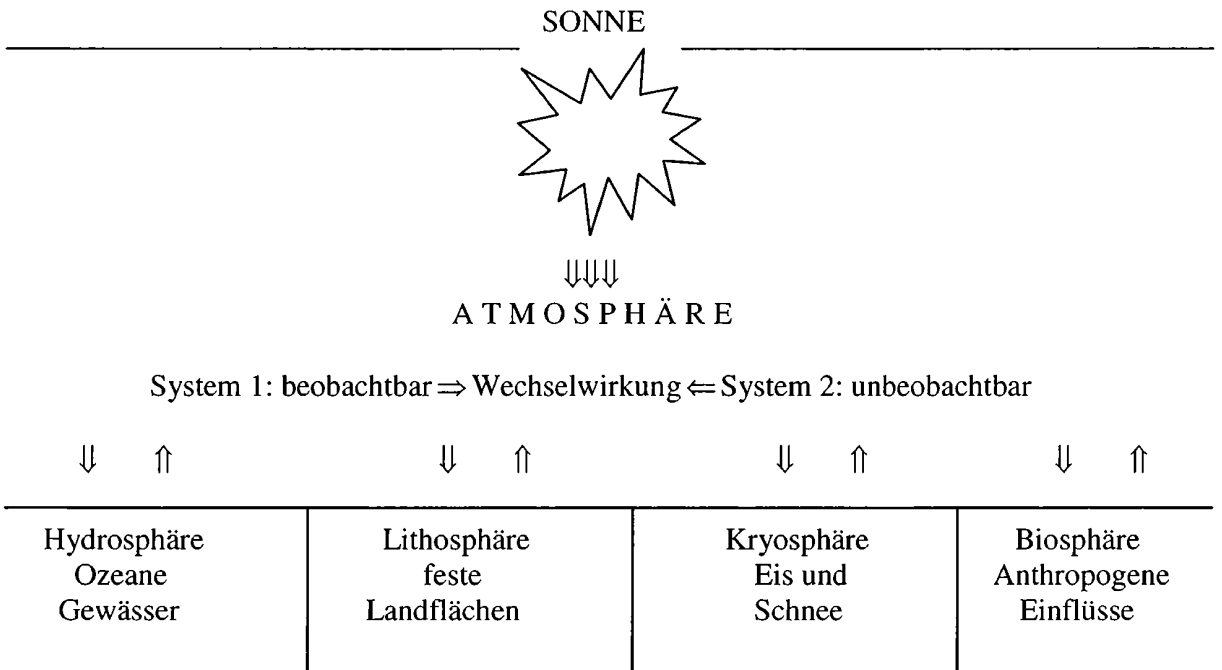


Abb. 1.1 Die Umgebungs- und Untersysteme der Atmosphäre mit ihren Wechselwirkungen

Die Sensibilität der Gleichungen besteht vergleichsweise darin, dass sie die Wellen durch den „Flügel Schlag einer Mücke“ ebenso beschreiben, wie die großen synoptischen Umlagerungen, die uns in der Wettervorhersage interessieren. Das Grundproblem der Trennung der interessanten von den uninteressanten Bewegungen, welches auch als „Filterproblem“ bezeichnet wird, muss uns in der Folge noch eingehend beschäftigen. Glücklicherweise weisen die terrestrischen Teilsysteme höchst unterschiedliche Reaktionszeiten auf Einflüsse von außen und Änderungen in den anderen Teilsystemen auf. So verhält sich die Hydrosphäre relativ träger gegenüber Einflüssen aus ihrer Umgebung als die Atmosphäre. Aber auch die Atmosphäre selbst als Ganzes reagiert relativ träge. So dauert es einige Tage bis die Einflüsse der Sonnenstrahlung und der Reibung auf der Erdoberfläche in den Vorhersagegleichungen wirksam werden, d.h. man kann bei Vorhersagen über ca. 2 Tage so tun als ob die Atmosphäre mit ihren Umgebungssystemen nicht in Wechselwirkung stünde. Diese Tatsache ermöglichte überhaupt erst, dass schon vor der Numerischen Wettervorhersage und auch in ihren Anfängen Methoden der kurzfristigen Prognose erfolgreich entwickelt werden konnten.

Bei Ausdehnung der Prognose auf mehr als 3 Tage kommen hingegen alle Wechselwirkungen der Teilsysteme voll zur Geltung. Mit den Wechselwirkungen und komplexen Rückkopplungen wird aber die Nichtlinearität der Prozesse voll wirksam und es werden Entwicklungen möglich, die von unserer linearen, kausalen Denkweise nicht mehr erfasst werden können. Eben hier bietet sich der Einsatz des nicht-linearen, deterministischen Gleichungssystems an, dem aber selbst durch die mangelhafte Kenntnis der Anfangszustände Vorhersagbarkeitsgrenzen gesetzt sind.

„Innerhalb dieser Grenzen finden wir heute mit Hilfe sehr leistungsfähiger Computer Zugang zur Vorhersage eines relativ großräumigen Scales atmosphärischer Prozesse“ [(wörtl. Zit. FORTAK (1985)].

Trotz aller Einschränkungen, die wir hinsichtlich des Vorhersageproblems aus heutiger naturwissenschaftlicher Sicht erkennen müssen, sind wir dem berühmten Norweger V. BJERKNES besonders zu Dank verpflichtet, dass er es 1904 als erster auf Grund der Erfolge der theoretischen Mechanik unternahm, ein Programm aufzustellen, das zum Ziele hat, exakte Wettervorhersagen mit Hilfe deterministischer Gleichungen zu erstellen. Eine Lösung dieses nicht-linearen Gleichungssystem war damals allerdings überhaupt noch nicht in Sicht.

Für nicht-lineare, partielle Differentialgleichungen versagt bekanntlich als Lösungsmethode das sogenannte „Superpositionsprinzip“, welches sich bei linearen Differentialgleichungen als sehr effizient erweist. Bei nicht-linearen Differentialgleichungen ist es in der Regel nicht möglich, eine Lösung in allgemeiner, analytischer Form anzugeben. Ein nicht-lineares System ist meist nur mit Hilfe „numerischer“ Methoden lösbar. Deshalb spricht man von „Numerischer Wettervorhersage“, wenn die erwähnten relevanten nicht-linearen Differentialgleichungen einer Lösung durch „numerische Integration“ zugeführt werden.

Die Numerische Wettervorhersage befasst sich hierbei, von vorgegebenen Anfangsbedingungen ausgehend und unter Annahme bestimmter Randbedingungen mit der Vorausberechnung meteorologischer Feldgrößen, wie z.B. Luftdruck oder Geopotential, Temperatur, Feuchte, Wind etc. „Numerische Vorhersage“ ist im wesentlichen bis heute eine Vorausberechnung von Feldgrößen. Sie ist noch nicht die Vorausberechnung des „eentlichen“ Wetters, das aus dem wechselwirkenden Zusammenspiel dieser Feldgrößen sich entwickelt. Allerdings ist man zunehmend und mit steigendem Erfolg bemüht, auch Bewölkung, Niederschlag und in den nicht-hydrostatischen Vorhersagemodellen konvektive Wetterereignisse vorherzubestimmen. In letzter Konsequenz ist aber bis heute die endgültige Interpretation und Transformation der Feldgrößenverteilung und der Intensität der Feldgrößen in die vom jeweiligen Prognosekonsumenten gewünschte Vorhersage immer noch eine Aufgabe des erfahrenen Synoptikers. Hierbei werden auch statistische Verfahren wie MOS [Model Output Statistic] angewendet. Jedenfalls ist die Numerische Wettervorhersage eine nicht mehr wegzudenkende und immer wertvoller werdende Grundinformation für den Prognostiker.

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die mangelhafte Kenntnis der Anfangszustände eine Vorhersage für beliebig lange Zeiträume verhindert. Auch heute, nach einer stürmischen Entwicklung der numerischen Wettervorhersage, erweisen sich die Prognosen nach etwa 5 – 7 Tagen bereits relativ unverlässlich. LORENZ (1965) konnte in einem numerischen Vorhersageexperiment mit den deterministischen Gleichungen zeigen, dass schon kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen sehr bald zu einem völligen Unterschied auch in den großräumigen Vorhersageergebnissen führen. Nach einer Vorhersagezeit von 2 bis 3 Wochen besteht nach LORENZ überhaupt kein Zusammenhang mehr zwischen Vorhersagen deren Anfangsfeld nur ganz minimal differierte. Diese Zeitspanne markiert, wann das Atmosphären-Modell praktisch seinen Anfangszustand völlig „vergessen“ hat. Das Auseinanderlaufen der beiden Vorhersagen mit minimal differierenden Anfangszuständen ist dabei in erster Linie auf die Nichtlinearität des Gleichungssystems zurückzuführen. Hierbei zeigt sich ein Charakteristikum nicht-linearer dynamischer Systeme: Kleine Störungen an bestimmter Stelle führen dazu, dass das System aus einem Zustand mehr oder weniger spontan in einen völlig verschiedenen umschlagen kann [s. PRIGOGINE (1979)].

Der Erfolg einer Vorhersage durch möglichst große Annäherung an die absolute Grenze der Vorhersagbarkeit, hängt somit immer von der optimalen Kenntnis der Anfangszustände ab. Damit ist es in der Meteorologie, nicht zuletzt auch aus Kostengründen, die ein dichtes

Beobachtungsnetz verursacht, nicht zum Besten bestellt. An dieser Stelle muss darin erinnert werden, dass etwa 70% der Erdoberfläche von Ozeanen bedeckt werden, auf welchen das Beobachtungsnetz zwangsläufig dünn ist. Trotz der großen Fortschritte der Satelliten-Meteorologie sehen wir uns hier noch immer vor beachtliche Probleme gestellt. Darüber soll aber in einer weiteren geplanten Monographie über Datenassimilierung genauer die Rede sein.

Will man den Vorhersagezeitraum über 2 bis 3 Tage hinaus ausdehnen, dann kommt die gesamte Physik des Systems zum Tragen: die im Sinne der beiden Hauptsätze der Thermodynamik reversiblen und irreversiblen physikalischen Prozesse müssen mitgeführt werden. Zu den prinzipiellen Grenzen, die durch die nichtlineare Fortpflanzung fehlerhafter Anfangsbedingungen entstehen, treten auch solche fehlerbelasteter Randbedingungen. Da wir heute von einem globalen Beobachtungsnetz ausgehen können, ist das Problem der lateralen Randbedingungen hinfällig. Die Problematik der oberen Randbedingungen und der wesentlich komplizierteren an der Erdoberfläche bleiben aber bestehen.

1.2 Das deterministische Gleichungssystem

Die Gleichungen werden hier in einem *generalisierten*, sphärischen Koordinatensystem $(\lambda, \varphi, \varepsilon, t)$ in der sogenannten „vereinfachten Schreibweise“ dargestellt. Je nach Bedarf können hier für ε entweder die Höhe z oder eine sogenannte *physikalische* Vertikalkoordinate (thermodynamische Variable) wie z.B. der Luftdruck P oder der *hydrostatische* Luftdruck p , der dimensionslose Druck σ , die potentielle Temperatur Θ oder auch *hybride* Koordinaten wie Mischsysteme zwischen p und σ oder σ und Θ und andere Variable eingesetzt werden. Allerdings werden zur Ableitung eines *generalisierten* Vertikalkoordinatensystems bestimmte Bedingungen vereinbart. Siehe hinsichtlich der diesbezüglichen Details, der „vereinfachten Schreibweise“ und der Ableitung des *generalisierten* Koordinatensystems die Publikation Heft Nr. 30 der vorliegenden Reihe [HUBER-POCK (2003)]:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a} \tan \varphi - fv + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\varepsilon} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right] - F_{\lambda} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a} \tan \varphi + fu + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{\varepsilon} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right] - F_{\varphi} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + g - F_r = 0 \quad (1.3)$$

Die Gleichung (1.3) kann alternativ auch

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = - \frac{1}{g\rho A} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \quad (1.4)$$

geschrieben werden, wobei A definiert ist als $A = 1 + a^*$ und

$$a^* = \frac{1}{g} \left[\frac{dw}{dt} - F_r \right] \quad (1.5)$$

den sogenannten *hydrostatischen Defekt* in dimensionsloser Form repräsentiert. Für A kann man nach Umformung von (1.4) ebenso die Beziehung

$$A = -\frac{1}{g\rho} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad (1.6)$$

erhalten. Im hydrostatischen Fall verschwindet der hydrostatische Defekt und $a^* = 0$, weshalb $A = 1$ und der wahre Druck P gleich dem hydrostatischen Druck p wird. Ebenso verschwindet in diesem Fall die Vertikalbeschleunigung dw/dt und der Reibungsterm F_r . Differenziert man den dreidimensionalen Wind im kurvilinearen System

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}_\lambda u + \mathbf{i}_\varphi v + \mathbf{i}_r w$$

dann erhält man (s.a. HALTINER u. MARTIN [1957]):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{du}{dt} \mathbf{i}_\lambda + \frac{dv}{dt} \mathbf{i}_\varphi + \frac{dw}{dt} \mathbf{i}_r + u \frac{d\mathbf{i}_\lambda}{dt} + v \frac{d\mathbf{i}_\varphi}{dt} + w \frac{d\mathbf{i}_r}{dt}$$

was exakt nach zeitlicher Ableitung der Basisvektoren zu

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a} \tan \varphi + \frac{uw}{a} \right) \mathbf{i}_\lambda + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a} \tan \varphi + \frac{wv}{a} \right) \mathbf{i}_\varphi + \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} \right) \mathbf{i}_r \quad (1.7)$$

führt. Da die Terme $\frac{uw}{a}$, $\frac{wv}{a}$ und $-\frac{u^2 + v^2}{a}$ aus Gründen ihrer magnitudo ($a = \text{Erdradius}$) vernachlässigt werden können, ist es gestattet die Gleichungen (1.1), (1.2) und (1.3) in eine approximierte Vektorgleichung unter Zuhilfenahme von (1.6) zusammenzufassen

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{i}_r f \times \mathbf{v}_H + \mathbf{i}_r g(1 - A) + \left(\frac{1}{\rho} \nabla_\varepsilon P + A \nabla_\varepsilon \Phi \right) - \mathbf{F} = 0 \quad (1.8)$$

wobei hier nunmehr für die individuelle Änderung von \mathbf{v} nach der Zeit die approximierte Beziehung

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a} \tan \varphi \right) \mathbf{i}_\lambda + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a} \tan \varphi \right) \mathbf{i}_\varphi + \left(\frac{dw}{dt} \right) \mathbf{i}_r \quad (1.7a)$$

gilt. Hinzuzufügen sind weiters: Die sogenannte „generalisierte“ Kontinuitätsgleichung mit

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{d}{dt} (\ln A) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} - \frac{v}{a} \tan \varphi = 0 \quad (1.9)$$

und der *erste Hauptsatz der Thermodynamik* in der Form

$$\frac{1}{c_p T} Q_T = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{c_p P} \frac{dP}{dt} \quad (1.10)$$

mit der Temperatur T , der individuellen Gaskonstante R für feuchte Luft, c_p der spezifischen Wärme bei konstantem Druck feuchter Luft und Q_T der Zufuhr oder dem Entzug von Wärme pro Zeit und Masseneinheit. Schließlich ist das System noch um die *Feuchtebilanzgleichung* mit

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q_s + \frac{E^*}{\rho} \quad (1.11)$$

wobei $q_s = \frac{\rho_v}{\rho}$ die spezifische Feuchte, ρ die Luftdichte und ρ_v die Dichte des

Wasserdampfes bedeutet, zu ergänzen. E^* stellt einen Quellterm pro Volumen und Zeiteinheit dar. Solche Quellen sind Kondensation, Sublimation und Evaporation. Der bedeutendste Effekt der Feuchte auf die atmosphärische Dynamik resultiert aus dem Freiwerden latenter Wärme. Das Auftreten des Wassers in verschiedenen Aggregatzuständen, wie Wasserdampf, flüssiges Wasser und Eis macht die rechnerische Behandlung der feuchten Atmosphäre naturgemäß nicht einfach. Wasserdampf und Wolken spielen eine sehr bedeutende Rolle im Zusammenhang mit der Reflexion, Absorption und Emission solarer und terrestrischer Strahlung. Zu guter letzt müssen der Vollständigkeit halber auch die Strahlungsgleichungen hinzugefügt werden, um unser deterministisches Gleichungssystem zu vervollständigen. Der Hauptfaktor für die Bewegungen in der Atmosphäre ist bekanntlich die zwischen Pol und Äquator unterschiedliche kurzwellige Einstrahlung der Sonne. Die tatsächliche, strahlungsbedingte Erwärmung der Atmosphäre hängt von der Bilanz des solaren Strahlungsinputs und des terrestrischen Strahlungsausganges ab. Diese Bilanz wird von vielen Faktoren, wie z.B. der Temperatur, der Bewölkung, dem Wasserdampfgehalt, Ozongehalt, dem Kohlendioxyd und den Aerosolen bestimmt. Wir haben es mit einem sehr komplexen Wechselwirkungsgeschehen zu tun, dessen exakte Berechnung eine ungeheure theoretische und rechentechnologische Aufgabe darstellt. Diese Aufgabe kann nur durch approximierende Simulationsmodelle halbwegs befriedigend und in vertretbarer Zeit gelöst werden. Jedenfalls zeigt sich, dass mit dem Hinzutreten von Feuchte und Strahlung, nicht zuletzt auch aus „Scale“-Gründen, der „rein“ deterministische Charakter unserer Gleichungssysteme oder Modelle einmal mehr einer Einschränkung unterliegt.

Es war eine vorzügliche Idee von LAPRISE (1991) die nicht-hydrostatischen Modellgleichungen in einem Vertikalkoordinatensystem mit dem hydrostatischen Druck p darzustellen, wobei diese ihre gewohnte Form weitgehend behalten. Man kann leicht zeigen, dass das System von LAPRISE auch für ein *generalisiertes* Vertikalkoordinatensystem und damit für verschiedene physikalische Vertikalkoordinaten zwanglos ableitbar ist, vorausgesetzt, dass die vertikale Verteilung der gewählten thermodynamischen Variablen hydrostatisch durch die nachstehende Relation

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -g\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \quad (1.12)$$

skaliert ist. Die Größe A wird hierbei zu $A = \frac{\partial P / \partial \epsilon}{\partial p / \partial \epsilon}$. In dem vorliegenden System ist auf eine

strenge Unterscheidung zwischen dem Luftdruck P und dem statischen Druck p zu achten. Als besonderen Vorteil erweist sich, dass die Kontinuitätsgleichung für dieses System mit der

Kontinuitätsgleichung im hydrostatischen Modell praktisch ident ist. Bezüglich der Ableitung und der Einzelheiten darf auch hier auf HUBER-POCK (2003) verwiesen werden. Als Alternativform des ersten Hauptsatzes kann man auch

$$Q_T = c_p \frac{T}{\Theta} \frac{d\Theta}{dt} \quad (1.10a)$$

schreiben, wobei Θ die potentielle Temperatur $\Theta = T(p_0/p)^{R/c_p}$ ist und c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck darstellt. Schließlich ist noch die Gasgleichung

$$P\alpha \equiv P \frac{1}{\rho} = RT \quad (1.13)$$

hinzufügen. Der Vollständigkeit halber und um den Unterschied zwischen reversiblen und irreversiblen Prozessen möglichst deutlich zu machen, wollen wir hier auch den 2. Hauptsatz der Thermodynamik ansprechen. Um den 2. Hauptsatz formelmäßig darzustellen muss für das betrachtete System eine Zustandsfunktion S gesucht werden, an deren Verhalten der einseitige Ablauf eines Naturprozesses deutlich wird. Nach CLAUSIUS wird diese Zustandsfunktion als „Entropie“ bezeichnet. Zur Formulierung des 2. Hauptsatzes kann man [s. dazu PICHLER (1997)] von der Relation

$$dS = d_A S + d_i S$$

ausgehen, wobei dS die Änderung der Entropie S in einer gewissen Zeitspanne in einem beliebigen System darstellt, das Masse und Energie mit seiner Umgebung austauscht. Hierbei ist $d_A S$ die Entropie, die dem System zugeführt oder entzogen wird und $d_i S$ die Entropie, welche im inneren des Systems durch irreversible Prozesse, wie z.B. die Reibung, erzeugt wird. Betrachtet man z.B. ein Gefäß mit einer darin rotierenden Flüssigkeit, dann wird nach einer gewissen Zeit die Rotation durch Reibung zum Stillstand kommen und die Rotationsenergie in Wärme, welche sich in einer Temperaturerhöhung der Flüssigkeit äußert, übergeführt sein. Umgekehrt ist es aber nach unserer Erfahrung sehr unwahrscheinlich, dass die in Ruhe befindliche Flüssigkeit unter Verwendung des reibungsbedingten Wärmeverrats wieder zu rotieren beginnt, d.h. der Vorgang ist „irreversibel“. Grundsätzlich kann man Naturvorgänge in reversible und irreversible Prozesse einteilen. Ein irreversibler Prozess kann nicht rückgängig gemacht werden, ohne irgendwelche Veränderungen in der Natur zu hinterlassen. Reversible Vorgänge sind hingegen solche, bei denen keine Veränderungen feststellbar sind. Der Entropiefluss $d_A S$ kann verschiedene Vorzeichen aufweisen und auch verschwinden, für die innere Produktionsrate $d_i S$ gilt jedoch immer

$$d_i S \geq 0$$

und sie ist für irreversible Zustandsänderungen immer positiv. Nur irreversible Prozesse, wie Wärmeleitung, Umwandlung von kinetischer Energie in Wärme zufolge molekularer Reibung oder Diffusion tragen zur Entropieerzeugung im Inneren des Systems bei. Bei reversiblen Zustandsänderungen verschwindet die Produktionsrate $d_i S$. Gemäß dem zweiten Hauptsatz stellen irreversible Prozesse somit immer eine Quelle der Entropie dar. Für ein System, das nur Energie mit seiner Umgebung austauscht, lautet die klassische Formulierung bekanntlich

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

und wird auch als CLAUSIUSsche Ungleichung bezeichnet. Bezüglich Ableitung und Details siehe PICHLER (1997). Das Größerzeichen in der obigen Gleichung gilt für die irreversiblen und das Gleichheitszeichen für die reversiblen Prozesse.

1.3 Die Divergenz-, Vorticity- und ω -Gleichung

In der Dynamischen Meteorologie werden eine Reihe sogenannter „abgeleiteter“ Größen, wie die Divergenz und die Vorticity zur physikalischen Beschreibung von Stromfeldeigenschaften verwendet. Diese Größen haben auch innerhalb der Numerischen Wettervorhersage Bedeutung erlangt und werden im Folgenden ergänzend dargestellt.

Zunächst werden wir die Differentialgleichungen für die Stromfelddivergenz und die Vorticity im generalisierten Koordinatensystem ableiten. Anschließend betrachten wir die ω -Gleichung, die wir aber in einem hydrostatischen p-System unter gleichzeitiger Verwendung der „selektiven“ geostrophischen Approximation gewinnen, wie dies in der Praxis geschehen und in der einschlägigen Literatur [s.z.B. PICHLER (1997)] wiederholt dokumentiert ist.

Wir gehen vom horizontalen Teil der Gl. (1.8) aus

$$\frac{d\mathbf{v}_H}{dt} + (\mathbf{i}_r f \times \mathbf{v}_H) + \left(\frac{1}{\rho} \nabla_\epsilon P + A \nabla_\epsilon \Phi \right) - \mathbf{F} = 0 \quad (1.8a)$$

und schreiben diesen in die explizite Form

$$\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\epsilon \mathbf{v}_H + (\mathbf{i}_r f \times \mathbf{v}_H) + \dot{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \epsilon} + \frac{1}{\rho} \nabla_\epsilon P + A \nabla_\epsilon \Phi - \mathbf{F} = 0 \quad (1.14)$$

um. Als nächstes wenden wir auf die obige Gleichung (1.14) die Operation $\nabla_\epsilon \cdot$ an und erhalten sofort

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \nabla_\epsilon \cdot \mathbf{v}_H}{\partial t} + \nabla_\epsilon \cdot (\mathbf{v}_H \cdot \nabla_\epsilon \mathbf{v}_H) + \nabla_\epsilon \cdot (\mathbf{i}_r f \times \mathbf{v}_H) + \nabla_\epsilon \dot{\epsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \epsilon} + \dot{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\nabla_\epsilon \cdot \mathbf{v}_H) + \dots \\ & \dots + \nabla_\epsilon \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla_\epsilon P \right) + \nabla_\epsilon \cdot (A \nabla_\epsilon \Phi) - \nabla_\epsilon \cdot \mathbf{F} = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

wobei festgehalten wird, dass $D = \nabla_\epsilon \cdot \mathbf{v}_H \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{a} \tan \varphi$ ist.

Nunmehr gelten aber offensichtlich die nachstehenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \nabla_{\varepsilon} \cdot (\mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\varepsilon} \mathbf{v}_H) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\varepsilon} (\nabla_{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_H) \equiv \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\varepsilon} (\nabla_{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_H) \equiv \\ &\equiv (\nabla_{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_H)^2 - 2J(u, v) + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\varepsilon} (\nabla_{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_H) \equiv D^2 - 2J(u, v) + \mathbf{v}_H \nabla_{\varepsilon} D \end{aligned}$$

wobei in obiger Ableitung alle aus $-\frac{uv}{a} \tan \varphi$ und $\frac{u^2}{a} \tan \varphi$ in der Ableitung resultierenden Terme aus Gründen der Magnitudo vernachlässigt wurden und weiters

$$(\mathbf{i}_r \mathbf{f} \times \mathbf{v}_H) = u \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} - f \xi \equiv u\beta - f\xi \quad \text{mit der relativen Vorticity } \xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\tan \varphi}{a} u \text{ gilt.}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen ergibt sich schließlich die „Divergenzgleichung“ in der nachstehenden Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + (\mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\varepsilon} D) + \nabla_{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \varepsilon} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} + D^2 - 2J(u, v) + u\beta - f\xi + \dots \\ \dots + \nabla_{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla_{\varepsilon} P \right) + \nabla_{\varepsilon} \cdot (A \nabla_{\varepsilon} \Phi) - \nabla_{\varepsilon} \cdot \mathbf{F} = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Als nächstes leiten wir die Vorticitygleichung ab. Hierzu gehen wir erneut von der Gl. (1.14) aus und führen für den Advektionsterm die sogenannte Weber-Transformation ein:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla_{\varepsilon} |\mathbf{v}_H|^2 - \mathbf{v}_H \times (\nabla_{\varepsilon} \times \mathbf{v}_H) + \dot{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \varepsilon} + (\mathbf{f} \mathbf{i}_r \times \mathbf{v}_H) + \frac{1}{\rho} \nabla_{\varepsilon} P + A \nabla_{\varepsilon} \Phi - \mathbf{F} = 0 \quad (1.17)$$

Auf diese Gleichung wenden wir die Operation $\mathbf{i}_r \cdot \nabla \times$ an und erhalten, weil die Rotation eines Gradienten bekanntlich verschwindet, d.h. weil

$$\mathbf{i}_r \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla_{\varepsilon} |\mathbf{v}_H|^2 \right) = \mathbf{i}_r \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla_{\varepsilon} P \right) = \mathbf{i}_r \cdot \nabla \times (A \nabla_{\varepsilon} \Phi) = 0$$

und gleichzeitig $-\mathbf{v}_H \times (\nabla_{\varepsilon} \times \mathbf{v}_H) = -\mathbf{v}_H \times \mathbf{i}_r \xi = \mathbf{i}_r \xi \times \mathbf{v}_H$ ist

die „Vorticity-Gleichung“ in der Form

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{i}_r \cdot \nabla_{\varepsilon} \times [\mathbf{i}_r (\xi + f) \times \mathbf{v}_H] + \mathbf{i}_r \cdot \nabla_{\varepsilon} \times \left(\dot{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \varepsilon} \right) = 0 \quad (1.18)$$

wobei $\xi = \mathbf{i}_r \cdot \nabla_\epsilon \times \mathbf{v}_H = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\tan \varphi}{r} u$ die relative und $\xi + f$ die absolute Vorticity ζ bedeutet. Man kann nunmehr leicht zeigen, dass der zweite Term der linken Seite in (1.18)

$$\mathbf{i}_r \cdot \nabla_\epsilon \times [\mathbf{i}_r (\xi + f) \times \mathbf{v}_H] = \nabla_\epsilon \cdot (\mathbf{v}_H \zeta) \quad (1.19)$$

ist. Um dies zu demonstrieren setzen wir zunächst $\mathbf{i}_r \zeta \times \mathbf{v}_H = (\mathbf{i}_\varphi u - \mathbf{i}_\lambda v) \zeta = \mathbf{A}$ und erhalten somit

$$\mathbf{i}_r \cdot \nabla_\epsilon \times [\mathbf{i}_r \zeta \times \mathbf{v}_H] = \mathbf{i}_r \cdot \nabla_\epsilon \times \mathbf{A} \quad (1.20)$$

Weiters kann man zeigen, dass die Identität

$$\mathbf{i}_r \cdot \nabla_\epsilon \times \mathbf{A} \equiv \nabla_\epsilon \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{i}_r) \quad (1.21)$$

gelten muss, denn nach der Vektorrechnung folgt generell die Relation

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

und wenn man für $\mathbf{B} = \mathbf{i}_r$ setzt schließlich

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{i}_r) = \mathbf{i}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{i}_r)$$

Da der letzte Term gleich Null ist, erweist sich die vorher behauptete Identität als richtig. Setzen wir nunmehr (1.20) in (1.21) und führen die Rechnung explizit aus, dann folgt im sphärischen System

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon \cdot [(\mathbf{i}_\varphi u \zeta - \mathbf{i}_\lambda v \zeta) \times \mathbf{i}_r] &= \frac{1}{h_\lambda h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (u \zeta h_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \zeta h_\lambda) \right] = \dots \\ \frac{1}{h_\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u \zeta) + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \zeta) - v \zeta \frac{\tan \varphi}{a} &\equiv [\nabla_\epsilon \cdot (\mathbf{v}_H \zeta)]_{\text{SPH}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

h_λ und h_φ stellen hier die metrischen Faktoren im sphärischen System dar [s. hierzu HUBER-POCK (2003), p.47]. Nach diesen Überlegungen ergibt sich für die Vorticitygleichung, wenn man bedenkt, dass der Coriolisparameter f zeitunabhängig ist, die „Vorticitygleichung“ mit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_\epsilon \cdot (\mathbf{v}_H \zeta) + \mathbf{i}_r \cdot \nabla_\epsilon \times \left(\dot{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \epsilon} \right) = 0 \quad (1.23)$$

Der dritte Term in dieser Gleichung stellt den sogenannten Rotationsterm dar, den man in die vertikale Vorticityadvektion und den Twistingterm („Vertikalschwenkungseffekt“), aufspalten kann.

Nach den Regeln der Vektorrechnung gilt nämlich

$$\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = (\nabla \psi) \times \mathbf{A} + \psi (\nabla \times \mathbf{A})$$

wobei Ψ einen Skalar und \mathbf{A} einen Vektor darstellt. Da $\dot{\varepsilon}$ ebenfalls ein Skalar ist, folgt

$$\mathbf{i}_r \cdot \nabla_\varepsilon \times \left(\dot{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \varepsilon} \right) = \mathbf{i}_r \cdot \left(\nabla_\varepsilon \dot{\varepsilon} \times \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \varepsilon} \right) + \dot{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\mathbf{i}_r \cdot \nabla_\varepsilon \times \mathbf{v}_H)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist in der Klammer aber mit $\dot{\varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon}$ ident, da f auch von ε in der Regel unabhängig ist. Damit erhalten wir schließlich für die „Vorticitygleichung“ die Endform

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\varepsilon \zeta + \zeta \nabla_\varepsilon \cdot \mathbf{v}_H + \dot{\varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} + \mathbf{i}_r \cdot \left(\nabla_\varepsilon \dot{\varepsilon} \times \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \varepsilon} \right) = 0 \quad (1.24)$$

Als nächste Beziehung demonstrieren wir die Herleitung der sogenannten ω -Gleichung in einem System mit dem hydrostatischen Druck p als Vertikalkoordinate. Zu diesem Zweck ziehen wir zunächst die Kontinuitätsgleichung (1.9) im p -System, in welchem $\dot{\varepsilon} = \dot{p} = \omega$ ist heran und schreiben die nachfolgende Identität wieder in der vereinfachten Schreibweise

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_H \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{a} \tan \varphi = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

Diese setzt man in die Vorticitygleichung (1.24) ein und erhält nach gleichzeitiger Differenzierung nach p :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{v}_H \cdot \nabla \zeta) - \zeta \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \omega \frac{\partial^2 \zeta}{\partial p^2} + \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{i}_r \cdot \nabla_p \omega \times \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial p} \right] = 0 \quad (1.25)$$

Nunmehr führen wir zur Annäherung der Wind- und Vorticity-Felder die sogenannte „geostrophische Approximation“ durch. Man nennt das Verfahren in der hier durchgeführten Form auch „selektive geostrophische Approximation“, da im Term $\nabla_p \cdot \mathbf{v}_H$ keine solche erfolgt. Die Divergenz würde ansonsten sogleich verschwinden, wie sich bekanntlich leicht zeigen lässt.

Die Beziehung für den geostrophischen Wind lautet im sphärischen System

$$\mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{i}_r}{f} \times \nabla_p \Phi \quad (1.26)$$

oder in Komponentenform

$$u_g = -\frac{1}{f h_\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad v_g = \frac{1}{f h_\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \quad (1.27)$$

Wenn man für $f = f_0 = \text{const.}$ setzt, dann ergibt sich, wie schon erwähnt, für die Divergenz exakt

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v}_g = \nabla_p \cdot \left(\frac{\mathbf{i}_r}{f_0} \times \nabla_p \Phi \right) = 0 \quad (1.28)$$

Für die geostrophisch approximierte, relative Vorticity erhalten wir im sphärischen System [bezüglich der Ableitung s. HUBER-POCK (2003), p. 43, Gl.(3.17) und p. 47, Gl.3.38]

$$\xi_g = \mathbf{i}_r \cdot \nabla_p \times \mathbf{v}_g = \frac{1}{h_\lambda h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (v_g h_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_g h_\lambda) \right] \quad (1.29)$$

Setzen wir jetzt die Komponenten (1.27) des geostrophischen Windes in (1.29) ein, dann folgt sofort mit $f = f_0$

$$\xi_g = \frac{1}{f_0} \left[\frac{1}{h_\lambda^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{h_\varphi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\tan \varphi}{a} \right] \quad (1.30)$$

oder in der vereinfachten Schreibweise

$$\xi_g = \frac{1}{f_0} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\tan \varphi}{a} \right] \equiv \frac{1}{f_0} (\nabla^2 \Phi)_{\text{SPH}} \quad (1.31)$$

wobei $(\nabla^2 \dots)_{\text{SPH}} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\tan \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial y} \right]$ der Laplace-Operator auf der Sphäre ist.

Für $\frac{\partial \zeta_g}{\partial p}$ ergibt sich dann sinngemäß

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} (\xi_g + f_0) = \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{\text{SPH}}$$

womit die Gl. (1.25) in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{\text{SPH}} + \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{v}_H \cdot \nabla \zeta_g) - \zeta_g \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \omega \frac{\partial^2 \zeta_g}{\partial p^2} + \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{i}_r \cdot \nabla_p \omega \times \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} \right] = 0 \quad (1.32)$$

geschrieben werden kann.

Als nächstes ziehen wir den 1. Hauptsatz Gl. (1.10) heran, transformieren diesen ins p-System und streichen den diabatischen Term Q_T , womit wir die sogenannte Adiabatangleichung erhalten. Auf diese wenden wir die Operation $\frac{1}{f_0} (\nabla_p^2 \dots)_{\text{sph}}$ an und erhalten unmittelbar, wenn wir ab jetzt den Index SPH weglassen

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{f_0} \nabla_p^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \frac{1}{f_0} \nabla_p^2 \left(\mathbf{v}_H \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \frac{1}{f_0} \nabla_p^2 \omega = 0 \quad (1.33)$$

wobei $s = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial \ln \Theta}{\partial p}$ den *statischen Stabilitätsparameter* darstellt. Bildet man schließlich die Differenz (1.32) und (1.33), dann erhält man eine zeitfreie, diagnostische Gleichung für die Vertikalgeschwindigkeit ω , da sich die Terme der zeitlichen Änderung wegheben

$$\frac{1}{f_0} \nabla_p^2 s \omega + \zeta_g \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \omega \frac{\partial^2 \zeta_g}{\partial p^2} - \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{i}_r \cdot \nabla_p \omega \times \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} \right] = \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{v}_H \cdot \nabla \zeta_g) - \frac{1}{f_0} \nabla_p^2 \left(\mathbf{v}_H \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \quad (1.34)$$

Man bezeichnet diese Gleichung auch als „*vollständige ω -Gleichung*“. Allerdings erweisen sich der dritte und vierte Term der linken Seite von (1.34) für den synoptischen Scale und wenn keine allzustarken zyklonenetischen Effekte wirksam sind, als sehr klein und können in der Regel vernachlässigt werden. Gleichzeitig wird im zweiten Term mit guter Näherung die geostrophische Vorticity durch f_0 approximiert und auf der rechten Seite der Horizontalwind durch den geostrophischen Wind ersetzt. Nimmt man gleichzeitig an, dass s nur von p abhängt, dann lässt sich (1.34) auch in der Form

$$\nabla_p^2 \omega + \frac{f_0^2}{s} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \frac{f_0}{s} \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{v}_g \cdot \nabla \zeta_g) - \frac{1}{s} \nabla_p^2 \left(\mathbf{v}_g \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \quad (1.34)$$

schreiben. Diese Variante stellt die sogenannte „*vereinfachte ω -Gleichung*“ dar. Für die Advektion einer beliebigen Feldgröße ψ gilt unter geostrophischer Approximation im sphärischen System:

$$(\mathbf{v}_H \cdot \nabla \Psi) = \frac{1}{f_0} \left[\frac{1}{h_\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} - \frac{1}{h_\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right]$$

was für die eckige Klammer in der vereinfachten Schreibweise zum Jakobi-Operator

$$J(\Phi, \Psi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1.35)$$

führt. Deshalb kann man, wenn gleichzeitig $\Psi = \frac{1}{f_0} \nabla_p^2 \Phi$ gesetzt wird, die Gl. (1.34) in die in der Literatur häufig verwendete Form

$$\nabla_p^2 \omega + \frac{f_0^2}{s} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial p} \left[J \left(\Phi, \frac{1}{f_0} \nabla_p^2 \Phi + f \right) \right] - \frac{1}{s f_0} \nabla_p^2 \left[J \left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] \quad (1.36)$$

bringen. Die ω -Gleichung stellt eine partielle Differentialgleichung dar, die formal vom Poisson-Typus ist. Numerische Lösungsmethoden stehen zur Verfügung, worüber an anderer Stelle zu berichten sein wird. Mit der obigen Gleichung kann einem durch synoptische Analyse bestimmten Anfangsfeld von Φ und s eine entsprechende ω -Verteilung zugeordnet werden.

1.4 Grundsätzliches zum Modellbegriff

„Modelle“ bzw. „Modellatmosphären“ stellen Simulationen der realen Atmosphäre dar. Die Güte dieser Simulationen hängt offensichtlich davon ab, in welchem Umfang die realen, physikalischen Prozesse mitgeführt werden können bzw. mit welcher Güte das abgeschlossene System der deterministischen Modellgleichungen die relevanten Variablen zu prognostizieren in der Lage ist. Ein Modell bewährt sich insbesondere dann, wenn es nicht nur die relevanten Variablen und damit die wichtigen synoptischen Phänomene, sondern auch als Ausdruck des Zusammenspiels dieser, das eigentliche oder fühlbare Wetter, dem das besondere Interesse des Prognosekonsumenten gilt, richtig prognostiziert. In den frühen Jahren der Numerischen Wettervorhersage standen nur Rechenanlagen mit vergleichbar geringer Rechenkapazität zur Verfügung. Man war daher gezwungen ein sehr einfaches Modell der Atmosphäre zu entwerfen, das dennoch synoptische Prozesse gut zu simulieren in der Lage war. Es war vor allem ROSSBY, der das sogenannte „barotrope Vorhersagemodell“ besonders propagierte. Die barotropen Modelle prognostizieren die Strömung als auch die geopotentielle Höhe einer Fläche gleichen Luftdrucks. Die Gleichungen wurden zu diesem Zweck in ein (x,y,p,t) -System transformiert und die Höhe der 500 hPa-Fläche vorausgesagt. Die „unerwartet“ hohe Leistung dieses Modells war in den frühen Tagen der Numerischen Wettervorhersage dafür verantwortlich, dass sich dieses gegenüber den physikalisch reichhaltigeren baroklinen Modellen lange Zeit sehr gut behaupten konnte.

1.4.1 Das barotrope Modell

Barotrope Modelle zeichnen sich durch ihre rechentechnisch angenehme Eigenschaft aus, zweidimensional behandelt werden zu können. Bei der Darlegung des barotropen Modells folgen wir hier einer ausgezeichneten Darstellung von HINKELMANN u. KORB (1973). Die Annahme der Barotropie allein führt noch zu keiner zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Diese wird erst durch weitergehende, physikalische Annahmen erreicht. Bei den barotropen Modellen sollte man daher vielmehr zutreffend von „zweidimensionalen“ Modellen sprechen. Barotrope Modelle werden in der Numerischen Wettervorhersage nicht mehr verwendet. Sie dienen aber nicht nur dem Verständnis der historischen Entwicklung der Numerischen Vorhersage, sondern auch der Einsicht in viele Probleme des Vorhersagens. In der Meteorologie werden skalare Felder, wie z.B. Druck, Temperatur und Dichte durch Flächen, auf welchen diese Flächenelemente konstant sind, dargestellt. Wenn die Flächen dieser konstanten Elemente verschiedene Werte annehmen, die sich um einen festen Differenzbetrag unterscheiden, dann haben wir es mit einer Flächenschar zu tun, die den atmosphärischen Raum in Lamellen aufteilt (s. Abb. 1.2). Betrachtet man eine Flächenschar der konstanten Dichte und des konstanten Druckes, dann schneiden sich die beiden normalerweise und es entstehen röhrenförmige Gebilde, welche als (p,ρ) -Solenoiden bezeichnet werden. Sind solche Röhren mit einem endlichen Querschnitt existent, dann bezeichnet man die Atmosphäre als „*baroklin*“. Verschwinden die Solenoide, d.h. ist auf einer Fläche der Druck $p = \text{const.}$ und $\rho = \text{const.}$, dann liegt „*Barotropie*“ vor und die Flächen gleichen Druckes und gleicher Dichte fallen zusammen.

Damit liegt aber in einer barotropen Atmosphäre für einen festen Zeitpunkt $t = t_0$ die Dichte als Funktion des Druckes durch die Relation

$$\rho = \rho(p)$$

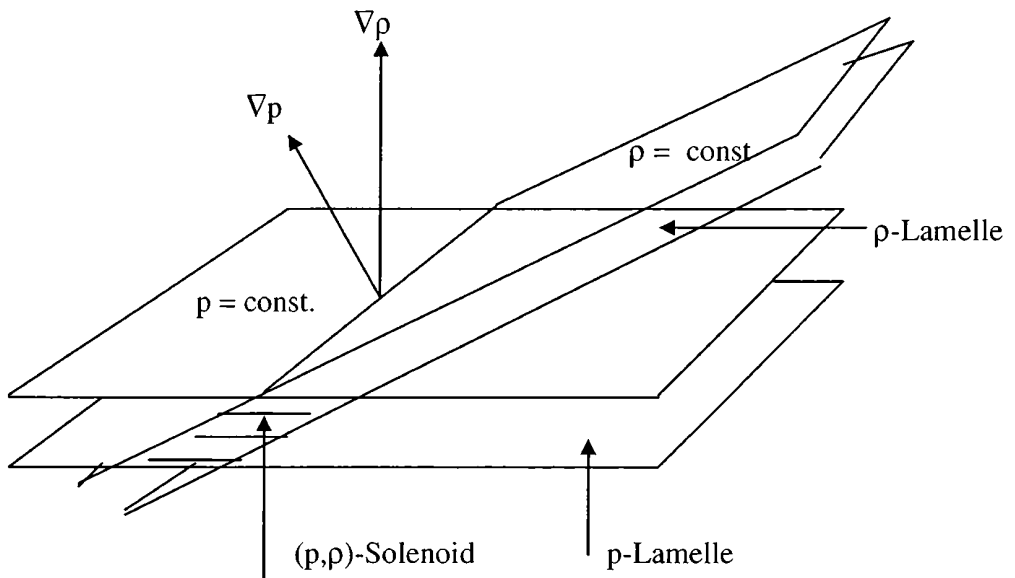


Abb.1.2 Druck-Dichte Solenoide und die Orientierung des Gradienten von Druck und Dichte

fest vor. Umgekehrt haben wir es auch im Fall $\rho(x, y, z, t) = \text{const.}$ mit Barotropie zu tun, obwohl p dann nicht als Funktion der Dichte ρ dargestellt werden kann. Demgegenüber liegt immer „Baroklinie“ vor, wenn die Dichte ρ außer von p noch von anderen Zustandsgrößen, wie z.B. der Temperatur T abhängt. In einer feuchten Atmosphäre spielt auch der Wasserdampf oder die im Einheitsvolumen vorhandene Masse an Flüssigwasser oder Eis eine Rolle. Für den baroklinen Zustand gilt daher für den Zeitpunkt $t = t_0$

$$\rho = \rho(T, p, \dots)$$

Man kann aber auch eine andere Definition der Barotropie und Baroklinie einführen, wenn man die Gradienten ∇p und $\nabla \rho$ betrachtet. Definitionsgemäß stehen diese Gradienten immer senkrecht auf den Flächen $p = \text{const.}$ und $\rho = \text{const.}$ Weisen beide Gradienten in die gleiche Richtung, d.h. sind sie zueinander parallel, dann gilt für das vektorielle Produkt (s.a. Abb 1.2)

$$\nabla \rho \times \nabla p = 0 \tag{1.37}$$

und die Atmosphäre ist „barotrop“. Schließen die Richtungen der beiden Gradienten jedoch einen Winkel zueinander ein, dann ergibt sich

$$\nabla \rho \times \nabla p \neq 0 \tag{1.38}$$

und die Atmosphäre ist „baroklin“. Die Gleichung (1.37) ergibt Null für zwei Varianten: Entweder die beiden Gradienten sind zueinander parallel oder $\nabla \rho(x, y, z) = 0$. Im letzteren Fall haben wir es mit einer homogenen Atmosphäre zu tun. Ist die Atmosphäre nicht nur zum Zeitpunkt $t = t_0$ barotrop, sondern verharrt sie für eine Zeitspanne in diesem Zustand, dann spricht man von „Autobarotropie“ und es gilt

$$\rho = \rho(p, t) \quad (1.39)$$

und aus (1.37) folgt somit zwangsläufig

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \rho \times \nabla p) = 0 \quad (1.40)$$

In den barotropen Modellen wird unterstellt, dass immer und überall die Dichte eine Funktion des Druckes ist, d.h. dass sich die Atmosphäre „autobarotrop“ verhält. Man kann also jederzeit jedem Druck- einen Dichtewert zuordnen, insofern die Beziehung (1.39) auch explizit bekannt ist. Die Dichte folgt dann nicht aus der physikalischen Gesetzmäßigkeit der Kontinuitätsgleichung, sondern aus der Relation (1.39). Im Falle einer baroklinen Atmosphäre wird hingegen der Zusammenhang zwischen Druck und Dichte über den 1. Hauptsatz der Thermodynamik reguliert, welcher somit fester Bestandteil eines baroklinen Modells ist.

Die Einführung der Autobarotropiebeziehung setzt somit den 1. Hauptsatz „außer Kraft“. Wir erhalten damit ein „Modell“, welches eine bedeutende Einschränkung der physikalischen Prozesse, wie sie in der realen Atmosphäre ablaufen, impliziert. Eine solche Annahme ist oder besser war nur deshalb berechtigt, weil sie zu einer bedeutenden Reduktion der Rechenarbeit bei gleichzeitig optimaler Simulation der synoptischen Prozesse führte. Ein gutes Beispiel für ein autobarotropes System, welches sich auch von der (ihm eigenen) Physik her autobarotrop verhält, stellt ein homogenes und inkompressibles Medium (z.B. Wasser) dar.

Das Rechenpensum einer Numerischen Vorhersage kann aus Gründen der Rechenstabilität dann verringert werden, wie noch zu zeigen sein wird, wenn man die sogenannte „hydrostatische Approximation“ einführt. Die statische Grundgleichung (1.12) im z-System lautet bekanntlich:

$$-g = \frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.12a)$$

Die horizontale Ableitung dieser Relation ergibt, weil $\nabla_H g \cong 0$ ist:

$$\nabla_H \left(\frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.41)$$

Wegen der Barotropie-Bedingung $\rho = \rho(p)$ lässt sich für die in den Bewegungsgleichungen auftretende Gradientkraft

$$K = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

eine nur von p direkt abhängige Potentialfunktion

$$\Pi(p) = \int_{p=0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{p}{\rho(p)}$$

angeben, womit die Relation

$$\nabla \Pi(p) = \frac{1}{\rho(p)} \nabla p$$

gilt. Die statische Grundgleichung besagt nun, dass die Vertikalkomponente dieses Gradienten

$$\frac{\partial}{\partial z} \Pi(p) = \left(\frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -g$$

praktisch konstant ist. Bedenkt man, dass $\nabla_{\text{H}} g \cong 0$ ist, dann folgt ebenso

$$\nabla_{\text{H}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \Pi(p) \right) = 0$$

Da die Differentiation in horizontaler bzw. vertikaler Richtung bedenkenlos vertauscht werden darf, ergibt sich schließlich

$$\frac{\partial}{\partial z} [\nabla_{\text{H}} \Pi(p)] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(p)} \nabla_{\text{H}} p \right] = 0 \quad (1.42)$$

d.h. die horizontale Druckgradientkraft ist mit der Höhe konstant. Mit der hydrostatischen Approximation wird auch die vertikale Komponente der Bewegungsgleichungen „außer Kraft“ gesetzt. Damit werden, wie noch zu zeigen sein wird

- 1.) vertikale Schallwellen ausgefiltert und der tatsächliche „dynamische“ Druck P durch den „hydrostatischen“ Druck p ersetzt, d.h. der Luftdruck resultiert lediglich aus dem Gewicht einer Luftsäule, die auf einer Flächeneinheit lastet und
- 2.) ist die hydrostatische Annahme für synoptische Prozesse (Rossby-Prozesse) zulässig, weil diese Vorgänge weitgehend „quasi-statisch“ ablaufen.

Allerdings wird die hydrostatische Annahme auch in „baroklinen Modellen“ aus Gründen der Rechenstabilität zur Ausfilterung vertikaler Schallwellen („vertikaler Lärmprozesse“) und damit zur Verminderung des Rechenaufwandes verwendet. Jedenfalls dient die hydrostatische Approximation in barotropen Modellen der Unterdrückung der vertikalen Abhängigkeit der Modellvariablen. Man gelangt damit von einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit in (x,y,z) zu einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit in (x,y) , womit sich der Rechenaufwand dramatisch verringerte.

Für sehr kleinräumige „Scales“ ist die hydrostatische Annahme aber keineswegs mehr zutreffend, weshalb viele Phänomene des eigentlichen Wetters, wie z.B. konvektive Bewölkung, Schauer, Gewitter etc. keinesfalls durch barotrope, hydrostatische Modelle beschrieben werden können. Die gegenwärtige Weiterentwicklung der Numerischen Wettervorhersage ist gekennzeichnet durch große Anstrengungen in Richtung höherer Auflösung auch die mesoskaligen und regionalskaligen „Prozesse und Scales“ zu erfassen. Darüber wird später noch eingehend zu berichten sein.

Während im „quasi-statischen“ barotropen Modell zwar vertikale Schallwellen eliminiert sind, bleiben die horizontalen Schall- und Schwerewellen erhalten. Mit Methoden zur Eliminierung dieser für die synoptische Wetterentwicklung uninteressanten „Lärmprozesse“ werden wir uns später befassen.

Aus der hydrostatischen Version der Gl. (1.8) im z-System und der Relation (1.42) lässt sich für den geostrophischen Wind unmittelbar die Folgerung

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v}_g = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mathbf{i}_r}{f} \times \frac{1}{\rho(p)} \nabla_{HP} \right] \quad (1.43)$$

ableiten. Ähnliche Beziehungen gelten für die auf horizontalen Druckunterschieden basierenden Approximationen von Gleichgewichtswinden [z.B. dem zyklotropischen Wind oder dem Windfeld aus der sogenannten „Balance-Gleichung“, einem Derivat der Divergenzgleichung (1.16)]. Natürlich kann der „wahre Wind“ auch bei der Annahme barotroper und hydrostatischer Verhältnisse noch mit der Höhe z variieren. Diese Variation beschreibt aber nur Abweichungen von einem Gleichgewichtszustand zwischen Wind- und Druckfeld, also im wesentlichen wieder Lärmprozesse. Es liegt daher nahe, dass die Berücksichtigung vertikaler Windunterschiede keinen Beitrag zur prognostischen Güte barotroper Modelle leisten kann. Man führt deshalb eine zusätzliche Modellannahme ein, d.h. zum Zeitpunkt $t = t_0$ soll auch der wahre Wind von z unabhängig sein

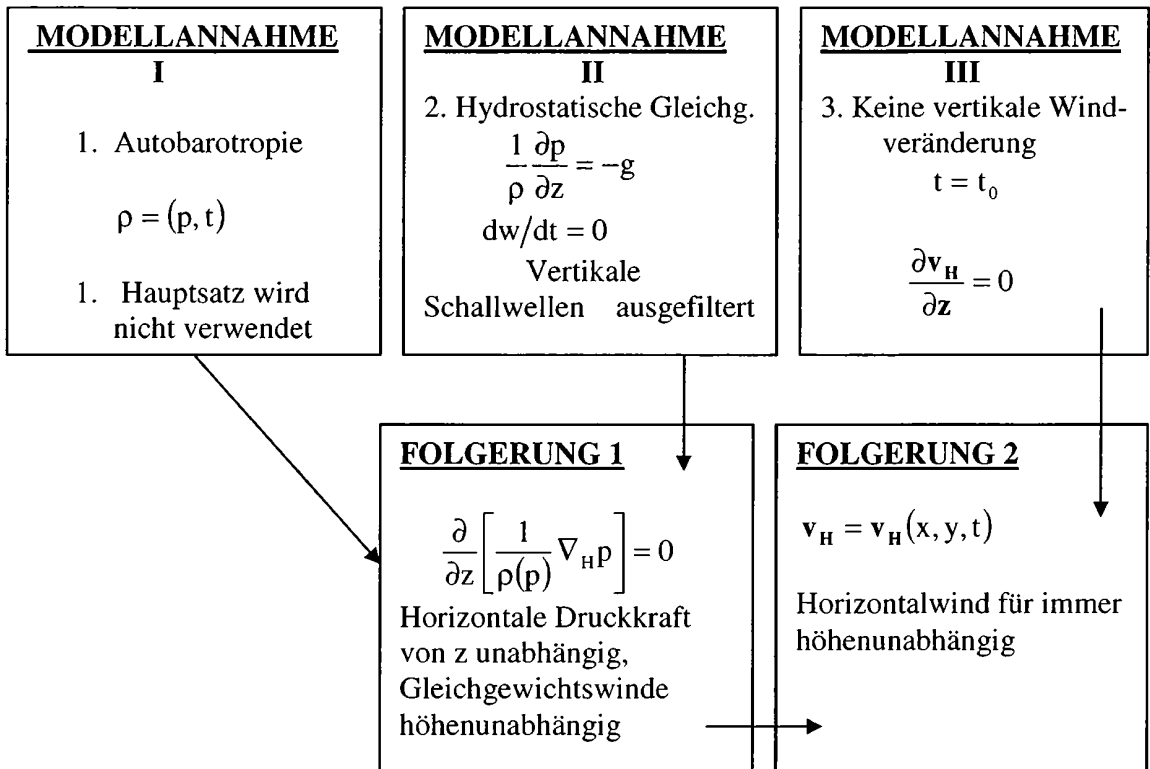


Abb. 1.3 Zusammenfassung der Modellannahmen und Folgerungen im barotropen Modell

$$\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial z} = 0 \quad (1.44)$$

Unter diesen Umständen lässt sich zeigen, dass der horizontale Windvektor auch für alle weitere Zukunft von der Höhe z unabhängig bleibt. Damit ergibt sich aus der statischen Grundgleichung und (1.44) zwingend, dass der horizontale Wind nur von der Zeit t und einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit (x,y) abhängt, d.h. es gilt

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_H(x, y, t) \quad (1.45)$$

Damit gelang es, barotrope Modelle als räumlich, zweidimensionale Prognosesysteme zu formulieren. In der Abb. 1.3 findet sich, ähnlich wie bei HINKELMANN u. KORB (1973), eine bildlich sehr übersichtliche Darstellung der Modellannahmen und der daraus sich ergebenden Folgerungen.

1.4.2 Das barokline Modell

Gibt man die Modellannahmen I und III des vorherigen Abschnittes auf, dann kann sofort ein baroklines Modell formuliert werden. Die Modellannahme II wurde hingegen bisher zur Erhaltung ökonomischer Zeitschritte überwiegend beibehalten. Auf die relevante Problematik kommen wir noch eingehend zurück. Dieses hydrostatische, barokline Modell musste aber auf Prozesse beschränkt bleiben, bei welchen der charakteristische Horizontalscale der zu prognostizierenden Phänomene groß ist gegenüber dem vertikalen Scale [s. HINKELMANN (1976)]. Damit werden in erster Linie wiederum nur synoptische Prozesse (Rossby-Prozesse) beschrieben, während Phänomene, die das „eigentliche“ Wetter bedingen, zwangsläufig nicht erfasst werden können. Wie schon erwähnt sind aber heute intensive Bemühungen im Gange, die Auflösung in Richtung Mesoscale und Regionalscale voranzutreiben und damit immer mehr auch Bewölkung und Niederschlag mit hoher Auflösung zu erfassen. Auch auf diese Thematik wird später noch zurückzukommen sein. Um in den Scale spezifischer Wetterphänomene vorzudringen, wird man nicht umhin können, auch nicht-statische Modelle zu entwickeln. In dieser Richtung gibt es bereits sehr wertvolle Ansätze. Ein baroklines hydrostatisches Modell lässt sich wie folgt in generellen Koordinaten formulieren

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{i}_r \mathbf{f} \times \mathbf{v}_H + \left(\frac{1}{\rho} \nabla_\varepsilon P + \nabla_\varepsilon \Phi \right) - \mathbf{F} = 0 \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \quad (1.47)$$

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} - \frac{v}{a} \tan \varphi = 0 \quad (1.48)$$

$$Q_T = c_p \frac{T}{\Theta} \frac{d\Theta}{dt} \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q_s + \frac{E^*}{\rho} \quad (1.50)$$

$$p\alpha \equiv p \frac{1}{\rho} = RT \quad (1.51)$$

In dieser sehr komplexen Form hat das „barokline“ Modell in der historischen Entwicklung zunächst aber keinen Eingang gefunden, denn es enthält implizit die gesamte Thermodynamik irreversibler Prozesse. Für die kurzfristige Numerische Wettervorhersage (Prognosezeitraum etwa 1 – 2 Tage) ist die Mitführung dieser nicht unbedingt erforderlich. Man setzte deshalb in (1.49) $Q_T = 0$ und erhielt ein reduziertes „baroklines Modell“, das sich aber prognostisch bereits sehr effizient erwies. Demgegenüber bezeichnet man heute die baroklinen Modelle, welche die irreversiblen Prozesse mitführen, d.h. Strahlung, den hydrologischen Zyklus (Wasserkreislauf), die irreversiblen molekularen und mikroturbulenten Flüsse, die kinetische turbulente Energie und ihre Erzeugung, sowie jeglichen Austausch von Energie, Materie und Impuls mit der Erdoberfläche und den Ozeanen auch als „Zirkulationsmodelle“ (Mittelfrist- oder Langfristmodelle). Fast alle größeren Wetterdienste der Welt betreiben Modelle dieser Art.

1.4.3 Das reversible oder adiabatische Modell in einer trockenen Atmosphäre

Ein Prozess, bei dem die Entropie konserviert wird, nennt man unseren bisherigen Überlegungen entsprechend isentrop oder auch adiabatisch. Das vorliegende Modell wird in einem hydrostatischen ε -System betrachtet und für das totale Differential der Entropie pro Masseneinheit gilt dann

$$dS \equiv \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{REV}} = c_p \frac{dT}{T} - \frac{R}{p} dp = 0 \quad (1.52)$$

was mit der nachstehenden Formulierung

$$dS \equiv c_p d \ln \Theta = 0 \quad (1.53)$$

ident ist. In $\left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{REV}}$ wird keine Wärme durch irreversible Prozesse erzeugt. Die Gl. (1.52)

oder (1.53) stellen somit einen Erhaltungssatz der Entropie bzw. der potentiellen Temperatur dar. Für die spezifische Entropie folgt dann durch Integration von (1.53) sofort

$$S(T, p) = c_p \ln \Theta + \text{const.} \quad (1.54)$$

Diese Gleichung wird häufig auch in der Form

$$S(p, \rho) = c_v \ln p - c_p \ln \rho + \text{const.} \quad (1.54a)$$

geschrieben. Der Beweis ist leicht zu führen. Wegen $R = c_p - c_v$ erhält man aus (1.52)

$$dS = c_p (d \ln T - d \ln p) + c_v d \ln p \quad (1.55)$$

Setzt man in der Gasgleichung für $\alpha = \frac{1}{\rho}$, dann erhält man nach logarithmieren und differenzieren, weil $d \ln R = 0$ ist, die Relation

$$-d \ln \rho = d \ln T - d \ln p$$

was in (1.55) eingesetzt nach Integration sofort zu (1.54a) führt, quod erat demonstrandum.

Entwickeln wir nun das totale zeitliche Differential der spezifischen Entropie mit

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\epsilon S + \dot{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial \epsilon}$$

und multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{\partial p}{\partial \epsilon}$, dann ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \frac{dS}{dt} = \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\epsilon S + \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \left(\dot{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right) \quad (1.56)$$

Wenn man gleichzeitig die „generalisierte“ Kontinuitätsgleichung für hydrostatische Verhältnisse mit der Entropie S multipliziert, dann erhält man in expliziter Form

$$S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right) + S \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\epsilon \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right) + S \dot{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right) + S \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right) \nabla_\epsilon \cdot \mathbf{v}_H + S \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right) \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}}{\partial \epsilon} \right) = 0 \quad (1.57)$$

Da für adiabatische Prozesse die linke Seite von (1.56) gleich Null ist, erhalten wir nach Addition der restlichen Gl. (1.56) und (1.57) den sogenannten „Entropie-Erhaltungssatz“:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(S \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right) + \nabla_\epsilon \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \mathbf{v}_H S \right) + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\dot{\epsilon} S \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right) = 0 \quad (1.58)$$

Ähnlich wie bei der Ableitung des „Entropie-Erhaltungssatzes“ können wir auch mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und der Bewegungsgleichung den sogenannten „Impulssatz“ im „generalisierten“ sphärischen Koordinatensystem ableiten und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{v} \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right) = -\nabla_\epsilon \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \mathbf{v} \right) - \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \left(\frac{u}{a} \tan \varphi + f \right) (\mathbf{i}_r \times \mathbf{v}_H) - \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \left[\frac{1}{\rho} \nabla_\epsilon p + \nabla_\epsilon \Phi \right] \quad (1.59)$$

oder ähnlich wie bei HINKELMANN (1972) im z-System

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = -\nabla_z \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \rho \left(\frac{u}{a} \tan \varphi + f \right) (\mathbf{i}_r \times \mathbf{v}_H) - \nabla_z p - \rho \nabla_z \Phi \quad (1.59a)$$

Es stehen uns nunmehr im Modell 7 Gleichungen zur Verfügung.:

1. Die drei Bewegungsgleichungen für die Komponenten des dreidimensionalen Windvektors $\mathbf{v} = \mathbf{i}_\lambda u + \mathbf{i}_\varphi v + \mathbf{i}_r w$ in Gl. (1.59a)

2. Die Kontinuitätsgleichung oder der Massenerhaltungssatz

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right) + \nabla_{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \mathbf{v}_H \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\dot{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right) = 0$$

3. Der erste Hauptsatz für reversible Prozesse in Form des Entropieerhaltungssatzes (1.58)
4. Eine diagnostische Gleichung mit dem Druck p mit Gl. (1.54a) und
5. Eine diagnostische Beziehung für T mit der Gasgleichung (1.51)

Damit haben wir für die sieben abhängigen (prognostischen) Variablen ρ, S, u, v, w, p und T sieben Gleichungen, womit das System mathematisch ausreichend bestimmt ist. Für fünf Zustandsgrößen steht jeweils eine prognostische und für zwei eine diagnostische Beziehung zur Verfügung. Die Beschränkung auf Reversibilität führt jedenfalls auf ein sehr transparentes und durchsichtiges und im Rechenpensum sparsames Modell bzw. Gleichungssystem. Es konnte allerdings nur für kurzfristige Vorhersagen in der Vergangenheit verwendet werden.

Die prognostischen Gleichungen verknüpfen die zeitlichen Änderungen der abhängigen Variablen auf der linken Seite mit den stets im Feld auftretenden Divergenzen der Flüsse und mit ihren Erzeugungstermen auf der rechten Seite. Das Fehlen von Erzeugungstermen in der Kontinuitätsgleichung und im Entropieerhaltungssatz dokumentiert einerseits den Massenerhaltungssatz und andererseits die Reversibilität des Systems. Als Erzeugungsterme im Impulssatz treten die Druck-, Coriolis- und Potentialkräfte der rotierenden Erde in Erscheinung. Ist der Zustand der Atmosphäre definiert durch die fünf Zustandsgrößen u, v, w, p und T , dann kann man zunächst ρ und S über die diagnostischen Relationen (1.51) und (1.54a) bestimmen. Alsdann werden die rechten Seiten der prognostischen Gleichungen berechnet, um die Tendenzen der linken Seiten zu erhalten. Damit können die Variablen u, v, w, p, S zum Zeitpunkt $t + dt$ ermittelt werden. Schließlich kann man T und p über die diagnostischen Beziehungen rückermitteln.

1.4.4 Modelle mit Irreversiblen (nicht-adiabatischen) Prozessen

Dehnt man die Zeitspanne einer Prognose über 2 – 3 Tage hinaus aus, dann können die „irreversiblen“ Prozesse nicht mehr länger unberücksichtigt bleiben. Im Impulssatz (1.59) für „quasi-statische“ Bewegungen ist der Reibungsterm hinzuzufügen und anstatt des Erhaltungssatzes der Entropie (1.58) muss der komplette erste Hauptsatz mit diabatischen Wärmequellen und Wärmesenken gemäß (1.49) treten. Zusätzlich benötigen wir die Bilanzgleichung für den Wasserdampf bzw. die spezifische Feuchte (1.50). Die Ausbreitung des Wasserdampfes in der Modellatmosphäre hat durch geeignete Simulation der Konvektion (geordnete Bewegung) und turbulente Transporte (ungeordnete Bewegung) zu erfolgen. Auch die solare Einstrahlung muss in die Betrachtung Eingang finden. Ein irreversibles Modell hat daher eine Simulation folgender Prozesse zu enthalten [s.a. PICHLER (1997)]:

1. Die Strahlungsprozesse:
Dies bedeutet die Errechnung einer Netto-Strahlungsbilanz an der Erdoberfläche und der Di- und Konvergenzen der Strahlungsströme in der Atmosphäre. Das gelingt aber nur, wenn die Verteilung von Kohlendioxyd, Ozon und des Wasserdampfes sowie dessen Kondensation- und Sublimationsprodukte bekannt sind.
2. Den hydrologischen Zyklus als Voraussetzung, um die Strahlungsprozesse genau genug simulieren zu können, d.h. eine Simulation des Wasserkreislaufes.
3. Die konvektiven Prozesse: Simulation thermischer Konvektionszellen, wie sich z.B. in Cumulus congestus oder Cumulonimbus-Wolken etc. manifestieren.
4. Die turbulenten Transporte:
Es handelt sich hierbei um alle irreversiblen, turbulenten Transporte von Impuls, fühlbarer und latenter Wärme in der planetaren Grenzschicht (PBL: 0 bis 1000 m) sowie auch turbulente Transporte der freien Atmosphäre im Bereich von Wolken oder unterhalb des „Jet-Streams“, da ein Teil der kinetischen Energie in diesem Bereich dissipiert.

Die meisten irreversiblen Prozesse lassen sich nun leider in vielen bis heute verwendeten Gitternetzen unserer Integrationsmodelle numerisch nicht mehr auflösen, obwohl eine ständige Verfeinerung und Erhöhung der Auflösung angestrebt wird. Man musste daher bisher die irreversiblen Prozesse als „subskalige“ Vorgänge auffassen. Eine Behandlung im Detail war unmöglich und man musste sich daher mit einer pauschalen Beschreibung ihrer Wirkung auf die prognostischen Gitterpunktvariablen (z.B. v , p , T , ρ), welche als repräsentativ für den „Macroscale“ einer Gitterbox anzusehen sind, begnügen. Die pauschale Wirkungsbeschreibung der subskaligen Prozesse auf die Gitterpunktvariablen erfolgt in Parametern der numerisch auflösbaren und dem großskaligen Bereich angehörenden Bewegungsformen und physikalischen Größen. Man bezeichnet daher den Beschreibungsvorgang folgerichtig als „*Parametrisierung*“. Die Parametrisierungsfunktionen stellen in den Modellgleichungen, die das großräumige Feld beschreiben, Quellen und Senken der großskaligen abhängigen Gitterpunktvariablen dar. Allgemein verbindliche Richtlinien können im Regelfall nur schwer angegeben werden, da sie von den Auflösungeigenschaften des jeweiligen Modells abhängig sind. Mit der Annäherung an die heute verwendeten Gitterdistanzen von etwa 10 km wird in der Zukunft die Abkehr von der hydrostatischen Approximation zwingend. Bei noch höherer Auflösung mit $d \leq 1$ bis 2 km wäre eine direkte Erfassung der oben erwähnten Prozesse unter Punkt 1 – 4 denkbar. In den Lokal- und Mesoscale-Modellen wird bereits unter nicht-hydrostatischer Voraussetzung gerechnet.

Zur Illustration eines Modells mit irreversiblen Prozessen, wie es z.B. beim ECMWF (1979) zu Anwendung kommt, sei auf Abb. 1.4 verwiesen. Diese zeigt die verschiedenen im Modell simulierten reversiblen und irreversiblen Prozesse in den Ellipsen und ihre Abhängigkeit von den großskaligen Variablen, welche vom Modell her gegeben sind, in den Rechtecken. Die Dicke der Pfeile stellt hierbei die qualitative Bedeutung der jeweiligen Wechselwirkungen dar. Jede geschlossene Schleife weist auf ein Rückkopplungsphänomen hin. Aus der Abbildung ist plakativ erkennbar, mit welcher Komplexität die heutigen Vorhersagemodelle leben und welchen Rechenaufwand sie bewältigen müssen. Die rasante Entwicklung der Computertechnologie hat aber faktisch die historischen Schwierigkeiten, welche hinsichtlich des zu bewältigenden Rechenpensums bestanden, weitgehend überwunden.

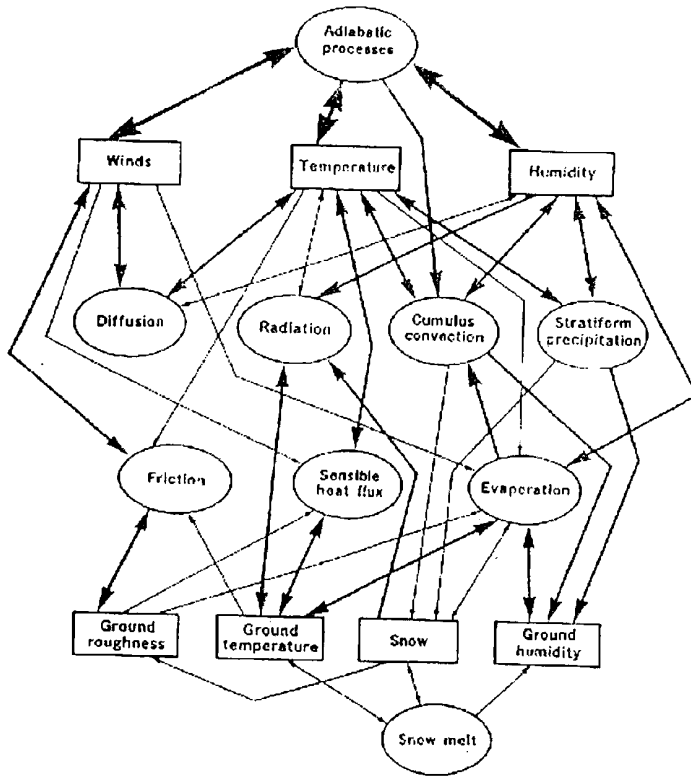


Abb. 1.4 Schematische Darstellung der simulierten Prozesse in einem irreversiblen Zirkulationsmodell des ECMWF (1979)

1.5 Grundsatzfragen und Probleme der Numerischen Lösungsverfahren

Numerische Lösungsverfahren sind so angelegt, die einzelnen Feldverteilungen der abhängigen Variablen sukzessive aus den Feldtendenzen, die für kleine Zeitspannen berechnet werden, aufzubauen. Man geht hierbei von den partiellen Differentialgleichungen des bisher dargelegten deterministischen Systems zu äquivalenten Differenzgleichungen über. Hierbei werden die Differentialquotienten zum Zeitpunkt $t = 0$ durch endliche Differenzenquotienten ersetzt und an diskreten Punkten eines Datengitters berechnet. Durch diese Näherung muss man aber einen sogenannten „Verstümmelungsfehler“ oder „Truncation-Error“ in Kauf nehmen. Gelingt es diesen Fehler in Grenzen zu halten, dann kann man zunächst ein relativ einfaches und effizientes numerisches Lösungsverfahren erwarten. Mit Hilfe dieser numerischen Methode berechnet man aus der bekannten Ausgangssituation zum Zeitpunkt $t = t_0$ die auf der rechten Seite stehenden Di- und Konvergenzen des Massen-, Entropie- und Impulsflusses bzw. die Quellterme für den Impuls in Gl. (1.59) aus den durch „Diskretisation“ (= Umwandlung von Differential- in Differenzgleichungen) entstandenen Differenzgleichungen und erhält die zeitliche Änderung der jeweiligen prognostischen Variablen zu diesem Zeitpunkt. Anschließend wird die zeitliche Änderung der jeweiligen Variablen Ψ über eine kleine, endliche Zeitspanne linear extrapoliert und zum Anfangsfeld addiert, z. B.

$$\Psi_{t_0+\Delta t} = \Psi_{t_0} + \left(\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \right)_{t_0} \Delta t$$

woraus man eine neue Feldverteilung zum Zeitpunkt $t_1 = t_0 + \Delta t$ erhält. Diese neue Feldverteilung dient nunmehr als neues Ausgangsfeld, mit dem wieder in die rechte Seite der Prognosegleichungen eingegangen wird, um erneut aus den Vergenzen der Flüsse und den Quelltermen die neuen Tendenzen zum Zeitpunkt $t_1 = t_0 + \Delta t$ zu berechnen, welche mit

$$\Psi_{t_0+2\Delta t} = \Psi_{t_0+\Delta t} + \left(\frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \right)_{t_1} \Delta t$$

die Feldverteilung der jeweiligen prognostischen Variablen ψ zum Zeitpunkt $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ ergibt. Der Rechenzyklus wird nunmehr so oft wiederholt bis schließlich der gewünschte Prognosezeitpunkt $t_n = t_0 + n\Delta t$ in n Zeitschritten erreicht ist. Hierbei zeigt sich aber eine wesentliche Schwierigkeit. Damit das Verfahren in Richtung der wahren Lösung konvergiert, müssen alle n Zeitschritte Δt in einem bestimmten Verhältnis zu den im Datengitter verwendeten Raumschritten $\Delta x = \Delta y$ bzw. Δz stehen, da ansonsten die numerische Rechnung „*instabil*“ wird. COURANT, FRIEDRICHS und LEWY (1928) konnten an Hand linearer, partieller Differentialgleichungen diese Instabilität aufzeigen. Für lineare Differentialgleichungen sind bekanntlich exakte, analytische Lösungen möglich und es kann somit zwischen der numerischen Näherungs- und der analytischen, exakten Lösung ein entsprechender Vergleich angestellt werden. Damit die Lösung stabil bleibt und gegen die „wahre“ analytische (lineare) Lösung konvergiert, muss deshalb immer das Kriterium

$$\frac{d}{\Delta t} \geq c\sqrt{2} \tag{1.60}^1$$

erfüllt sein. Hierbei gibt c die maximale Phasengeschwindigkeit der im System laufenden Wellen an. Diese lineare und in der Literatur als CFL-Kriterium bezeichnete Relation, wird im allgemeinen auch auf nicht-lineare Gleichungen angewandt.

Unser deterministisches Gleichungssystem, wie wir es in den vorhergehenden Abschnitten in extenso betrachtet haben, enthält neben den Lösungen für die großräumigen, synoptisch bedeutenden barotropen und baroklinen Wellen, welche sich mit der relativ langsamen Phasengeschwindigkeit von $c = 5$ bis 10 m/sek fortbewegen auch Lösungen für energetisch nicht so stark besetzte Wellen, wie Schall- und Schwerewellen, die aber Phasengeschwindigkeiten von $c = 300$ m/sek aufweisen können.

Diese letzteren Wellen sind synoptisch gesehen uninteressant. Solange aber das Gleichungssystem Lösungen für diesen Teil des atmosphärischen Wellenspektrums enthält, muß in Gl.(1.60) als maximale Phasengeschwindigkeit $c = 300$ m/sek eingehen, was bei einer horizontalen Felddauflösung von $d = 250$ km ($d =$ der Abstand, über welchen die räumlichen Differenzenquotienten gebildet werden) zu einem Zeitschritt von $\Delta t = 10$ Minuten führt. Da aber in der Vertikalen eine Auflösung von wenigstens 1 km für eine halbwegs realistische Simulation der atmosphärischen Strukturen als Minimalforderung anzusehen ist, kommt man zu Zeitschritten Δt , welche $2 - 3$ Sekunden nicht überschreiten dürfen. An dieser Stelle wird klar, welche große Rechenaufgabe sich der Rechentechnologie in diesem Fall stellt.

1) Das Kriterium gilt in dieser Form streng nur für zweidimensionale Betrachtung. Für den dreidimensionalen Fall ist es aber auch eine gute Näherung, da sich der Faktor der rechten Seite nur geringfügig ändert.

Deshalb war die Numerische Wettervorhersage, solange keine superschnellen Rechner vorhanden waren, nicht in der Lage, mit hochauflösenden und aufwendigen Modellen den Wettlauf mit der Natur zu gewinnen, denn die Rechenzeit war länger als die Zeitspanne einer Vorhersage. Soll z.B. für X Variable eine Prognose über die Zeitspanne

$$T = n\Delta t \quad (1.61)$$

an N Gitterpunkten in L Schichten berechnet werden, wobei diese Zeitspanne in n Zeitschritte Δt unterteilt ist und pro Zeitschritt und Variabler R Rechenoperationen erforderlich sind, dann ergeben sich [s.a. FORTAK (1982)]

$LNXRn$

Rechenoperationen für die gesamte prognostische Zeitspanne $T = n\Delta t$. Die hierzu notwendige Rechenzeit τ hängt von der Rechengeschwindigkeit $\Delta\tau$ ab, mit welcher eine Rechenoperation bewältigt wird, d.h. die Rechenzeit beläuft sich auf

$$\tau = LNXRn\Delta\tau \quad (1.62)$$

Setzt man aus (1.61) für n in (1.62) ein, dann ergibt sich etwas umgeformt das Verhältnis

$$\frac{\tau}{T} = LNXR \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \quad (1.63)$$

der „Rechenzeit- oder Modellzeit“ zur „Echtzeit T“, in welcher die Vorgänge in der Natur ablaufen. Um die Prognose praktisch verwenden zu können, muss man natürlich schneller „rechnen“ als die Natur, d.h. es muss $\tau / T \ll 1$ gelten. Bei globaler Betrachtung und einer Gitterdistanz von $d = 250$ km ergaben sich pro Schicht und Hemisphäre ursprünglich etwa 5000 Gitterpunkte, was etwa 10000 Gitterpunkte für den Gesamtglobus bedeutete. Mit einer Vertikalauflösung von $\Delta z = 1$ km und Aufteilung der Modellatmosphäre in 10 Schichten erhielt man dreidimensional gesehen ca. 100000 Gitterpunkte. Für $X = 7$ Variable und eine typische Anzahl von $R = 200$ Rechenoperationen pro Variabler, Gitterpunkt und Zeitschritt und für eine seinerzeitige Rechengeschwindigkeit von $\Delta\tau = 10^{-6}$ sek pro Rechenoperation, ergab sich bei einem vom CFL-Kriterium (1.60) geforderten Zeitschritt von $\Delta t = 2$ sek :

$$\frac{\tau}{T} = 10^5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot \frac{10^{-6}}{2} \cong 70$$

d.h. die EDV-Anlage benötigte für die Prognose 70 mal so lange als die Prozesse in der Natur ablaufen. Die Rechanlage war damals damit total überfordert und auf diesem Wege konnten keine praktikablen Vorhersagen berechnet werden. Erst bei einer Rechengeschwindigkeit von $\Delta\tau = 10^{-9}$ sek schien eine praktische Lösung möglich. Solange aber die Wetterdienste keine solchen superschnellen Rechner zur Verfügung hatten, musste man trachten von den Sekundenzeitschritten wegzukommen. Es kommt ja noch hinzu, dass bei Übergang zu irreversiblen Modellen die Rechanforderung pro Gitterpunkt nochmals beträchtlich steigt. Hiemit wird außerdem einmal mehr klar, weshalb der kühne Versuch einer Numerischen Vorhersage von RICHARDSON in der zweiten Dekade des vergangenen Jahrhunderts a priori an dem gigantischen Rechenaufwand und der Nichtbeachtung des CFL-Kriteriums scheitern musste. Wir kommen darauf später noch zurück.

Es war ein bedeutender Schritt in Richtung einer erfolgreichen Numerischen Wetterprognose, als man erkannte, dass durch die sogenannte „hydrostatische Approximation“ (= Streichung der Beschleunigungsterme in der w- Komponente der Bewegungsgleichungen) die vertikal laufenden schnellen Schallwellen eliminiert werden konnten und damit die vertikale Gitterdistanz im CFL-Kriterium nicht mehr berücksichtigt werden musste. Für das Verhältnis Modellzeit zur Echtzeit ergibt sich dann bei einem Raumschritt $d = 250$ km nach dem vom CFL-Kriterium geforderten Zeitschritt von $\Delta t = 10$ Minuten

$$\frac{\tau}{T} = 10^5 \cdot 7.2 \cdot 10^2 \cdot \frac{10^{-6}}{6 \cdot 10^2} \cong 0.23 \quad (1.64)$$

d.h. man konnte in dem besprochenen globalen 10-Schichtenmodell die Rechenzeit für eine 24-stündige Prognose auf 5 ½ Stunden beschränken, womit man in den Bereich praktischer Anwendbarkeit gelangte. Das gleiche Problem wird von einem heutigen Supercomputer mit einer Rechengeschwindigkeit von $\Delta\tau = 10^{-9}$ sek in etwa 20 Sekunden gelöst. Man sieht also, dass die Fragen der Rechentechnologie kein essentielles Hindernis für die Lösung sehr umfangreicher und komplexer Probleme darstellen. Dennoch gibt es, soweit das heute beurteilt werden kann, gewisse Grenzen.

Bisher haben wir das Problemverhältnis „Rechen- bzw. Modellzeit“ zur „Echtzeit“ mit Hinblick auf das Rechenpensum für eine bestimmte Vorhersagezeitspanne betrachtet. Man kann aber ebenso gut auch eine Betrachtung unter dem Aspekt des jeweiligen „Scales“ der zu prognostizierenden Phänomene anstellen. Um einen bestimmten Scale gerade noch auflösen zu können, darf die Maschenweite des verwendeten Gitters höchstens die Hälfte der charakteristischen Dimension des betrachteten Phänomens betragen. Der Beweis wird in einem späteren Abschnitt noch nachgeliefert. Offensichtlich gelten die nachstehenden „Scalebereiche“:

Turbulenzscale $L(m) = D(m) = 100$ m, daher $d = 50$ m notwendig.

Konvektiver Scale $L(m) = D(m) = 1000$ m, daher $d = 500$ m notwendig.

Mesoscale $L(m) = 100.000$ m; $D(m) = 10.000$ m, daher $d = 5000$ m
notwendig.
Aber in der Vertikalen wegen genauere Auflösung mindestens
 $\Delta z = 1000$ m erforderlich.

L = horizontale, charakteristische Ausdehnung in m

D = vertikale charakteristische Ausdehnung in m

d = für eine effiziente Auflösung notwendige Gitterdistanz

Bei den heutigen Hochgeschwindigkeitsrechnern werden bereits bis zu 94 Modellschichten [ECMWF T 711/94] verwendet. Als nächstes setzen wir aus dem Stabilitätskriterium (1.60) für Δt in (1.63) ein und erhalten nach leichter Umformung

$$\frac{\tau}{T} = [XRc\sqrt{2\Delta\tau}] F_s \quad (1.65)$$

wobei $F_s = \frac{L \cdot N}{d}$ einen "Scale-Faktor" darstellt. Hierbei ist immer die kleinste zur exakten Auflösung des relevanten Scales notwendige Gitterdistanz d zu verwenden. Aus (1.65) kann dann, wenn die notwendige Gitterdistanz d , die Anzahl der Schichten L und die Anzahl der sich ergebenden Gitterpunkte N bekannt ist, für eine bestimmte Rechengeschwindigkeit die Rechenzeit τ für $T = 1$ sek (also eine Sekunde „Echtzeit“) angegeben werden. Aus der nachstehenden Tabelle 1.1 können die Ausgangsdaten und die notwendigen Rechenzeiten bei verschiedenen Rechengeschwindigkeiten $\Delta\tau$ entnommen werden. Es zeigt sich in Tab. 1.1 eindeutig, dass gegenwärtig selbst die schnellsten Supercomputer nicht in der Lage sind bei globaler Simulation klein- und kleinströmiger Phänomene die Natur einzuholen, d.h. es sind auch vom Scale her deterministischen Prognosen Grenzen gesetzt. Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass es nicht möglich ist, den Anfangszustand der Atmosphäre mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen. Die Vertikalgeschwindigkeit z.B. wird vom heutigen Beobachtungssystem überhaupt nicht erfasst und muss durch vereinfachende Annahmen rechnerisch ermittelt werden. Die Bewegungsgleichungen reagieren aber schon auf kleinste Fehler in diesem Anfangszustand außerordentlich empfindlich. Diese Empfindlichkeit resultiert aus einer weitgehenden Kräftebilanzierung in der Atmosphäre. Die Abweichungen von diesem Gleichgewichtszustand, die aber andererseits das Wettergeschehen weitgehend kontrollieren, sind aus unseren derzeitigen Beobachtungen unglücklicherweise weder dem Betrage noch dem Vorzeichen nach genau genug zu bestimmen. Neben den realen Schwerewellen in der Atmosphäre erzeugen fehlerhafte Anfangsbedingungen „Ungleichgewichte“, die künstliche „Schwerewellen“ in der Modellrechnung anregen. In der realen Atmosphäre vollzieht sich gleichzeitig ein Prozess, der die realen Schwerewellen allmählich „aussterben“ und die Windfelder dem „geostrophischen“ Gleichgewicht zustreben lässt. Man nennt diesen Vorgang bekanntlich „geostrophische Adaptation“. In den Rechenmodellen muss man diesen Vorgang, d.h. auch die „fiktiven“ aus den Fehlern des Anfangszustandes angeregten Schwerewellen zutreffend simulieren oder schon den Anfangszustand in ein entsprechendes Gleichgewicht bringen. Auf relevante Methoden in dieser Richtung werden wir später im Rahmen des sogenannten „Filterproblems“ noch eingehend zurückkommen.

Schätzung der globalen Gitterpunktzahl für eine Gitterdistanz d und die Anzahl der Schichten L sowie der Wert des sich ergebenden „Scale“-Faktors

$d = 50$ m:	$N = 2 \cdot 10^8$	$L = 200$	$F_s = 8 \cdot 10^8$	Turbulenzscale
$d = 500$ m:	$N = 2 \cdot 10^6$	$L = 20$	$F_s = 8 \cdot 10^4$	Konvektiver Scale
$d = 5000$ m:	$N = 2 \cdot 10^4$	$L = 10$	$F_s = 40$	Mesoscale

Tab. 1.1 a Zu Gl. (1.65). Schätzung der globalen Gitterpunktzahlen für eine Gitterdistanz d und Anzahl L der Schichten.

Megaflop-Bereich $\Delta\tau = 10^{-6} \text{ sek} \quad \left[\text{X.R.c.} \cdot \sqrt{2} \cdot \Delta\tau \right] = 5.94 \cdot 10^{-1} \text{ m}$

Turbulenzscale Rechenzeit $\tau \cong 15$ Jahre für Simulation einer Sekunde „Echtzeit“

Konvektiver Scale Rechenzeit $\tau \cong 13$ Stunden für Simulation einer Sekunde „Echtzeit“

Mesoscale Rechenzeit $\tau \cong 24$ Sekunden für Simulation einer Sekunde „Echtzeit“

Gigaflop-Bereich $\Delta\tau = 10^{-9} \text{ sek} \quad \left[\text{X.R.c.} \cdot \sqrt{2} \cdot \Delta\tau \right] = 5.94 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Turbulenzscale Rechenzeit $\tau \cong 5$ Tage für Simulation einer Sekunde „Echtzeit“

Konvektiver Scale Rechenzeit $\tau \cong 47$ Sekunden für Simulation einer Sekunde „Echtzeit“

Mesoscale Rechenzeit $\tau \cong 0.02$ Sekunden für Simulation einer Sekunde „Echtzeit“

Teraflop-Bereich $\Delta\tau = 10^{-12} \text{ sek} \quad \left[\text{X.R.c.} \cdot \sqrt{2} \cdot \Delta\tau \right] = 5.94 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

Turbulenzscale Rechenzeit $\tau \cong 8$ Minuten für Simulation einer Sekunde „Echtzeit“

Konvektiver Scale Rechenzeit $\tau \cong 0.05$ Sekunden für Simulation einer Sekunde „Echtzeit“

Mesoscale Rechenzeit $\tau \cong 0.23 \cdot 10^{-4}$ Sekunden für Simulation einer Sekunde „Echtzeit“

Tab. 1.1b Zu Gl. (1.65). Rechenzeiten für die Simulation einer Sekunde „Echtzeit“ in einem Gitterpunktsmodell in Abhängigkeit von der Rechengeschwindigkeit, dem Rechenpensum und dem Scale der relevanten Phänomene.

Die Verwendung numerischer Modelle für die Wettervorhersage erfordert die Lösung eines Satzes gekoppelter, nicht-linearer, partieller Differentialgleichungen. Diese Gleichungen beschreiben im allgemeinen sehr wichtige dynamische Prozesse in der Atmosphäre, wie z.B. die Advektion oder die Anpassung des Massen- und Windfeldes gegeneinander sowie Effekte der Diffusion. Wir werden uns in erster Linie mit den ersten beiden Prozessen zu beschäftigen haben. Die relevante Lösungsproblematik kann durch eine einfache, eindimensionale Form des erwähnten Gleichungssystems eindrucksvoll dargestellt und repräsentiert werden. Eine solche Form ist aus den sogenannten „Flachwassergleichungen“ leicht abzuleiten. Diese beschreiben die Bewegungen in einem homogenen und inkompressiblen Medium, in welchem wegen

$$p(x, z) = \int_z^{z=h} g\bar{\rho} dz \equiv g\bar{\rho} \int_z^{z=h} dz$$

die Relation

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\bar{\rho} \frac{\partial h}{\partial x}$$

gilt. Außerdem wollen wir in der vorliegenden Betrachtung $v = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ setzen und keine Variationen in der y-Richtung zulassen sowie außerdem die Erdrotation vernachlässigen. Unter diesen Voraussetzungen erhält man aus Gl.(1.1) für ein hydrostatisches und reibungsfreies z-System ($dw/dt = 0$ und $\mathbf{F} = 0$) schließlich die Relation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1.66)$$

und für die Kontinuitätsgleichung (1.9) für welche unter den obigen Voraussetzungen und Inkompressibilität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

gilt, nach Integration dieser Beziehung über $dz = h$

mit den Randbedingungen $w_{z=0} = 0$ und $w_h = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$ schließlich als Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.67)$$

Hierbei sind in den Gl. (1.66) und (1.67) die Terme $u \frac{\partial u}{\partial x}$ und $u \frac{\partial h}{\partial x}$ die sogenannten

Advektionsterme und $g \frac{\partial h}{\partial x}$ und $h \frac{\partial u}{\partial x}$ die sogenannten „Adjustment-“ oder Anpassungsterme.

Die Gln. (1.66) und (1.67) können entsprechend um einen Grundzustand linearisiert werden, wenn man in (1.66) und (1.67) $u = U + u'$ und $h = H + h'$ einsetzt, weshalb man

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

erhält, wobei U und H Konstante des Grundzustandes in Raum und Zeit sind und gleichzeitig alle Produkte $u' \frac{\partial u'}{\partial x}$, $u' \frac{\partial u'}{\partial x}$ oder $h' \frac{\partial u'}{\partial x}$ aus Gründen der magnitudo vernachlässigt werden. u' und h' sind dann die Perturbationen in der x -Komponente der Geschwindigkeit und in der freien Oberfläche des homogenen und inkompressiblen Mediums. Man kann dann die einzelnen Prozesse getrennt betrachten. So ist der Advektionsprozess durch

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (1.68)$$

zu formulieren, wobei hier Ψ jeweils für u' oder h' steht. Natürlich muss uns auch das nicht-lineare Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.69)$$

beschäftigen. Das Gleichungspaar

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (1.70)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (1.71)$$

steht für den Adjustment-Prozess und wird auch als eindimensionale Schwerewellengleichung bezeichnet. Die bevorzugte numerische Methode zur Lösung dieser erwähnten partiellen Differentialgleichungen war lange Zeit die Methode der endlichen Differenzen bis sich in den letzten Jahrzehnten die sogenannten Galerkin-Methoden in Form der „Spektralen Methode“ oder der Methode der „Finiten Elemente“, begleitet von einer rasanten Entwicklung in der Computertechnik (Massive Parallel Computing) immer mehr durchgesetzt haben. Die Bestrebungen in Richtung Erfassung der lokalen und mesoskaligen Prozesse konnten hierbei erfolgreich ausgedehnt werden.

Die meisten meteorologischen Probleme lassen sich nach RIDDAWAY/HORTAL (2000) in drei Kategorien einteilen:

1.) Randwert-Probleme

Hier geht es darum, Ψ innerhalb der Domäne D durch Differentialgleichungen, welche innerhalb der Domäne D $L(\Psi) = f$ und am Rande der Domäne D $B(\Psi) = g$ lauten, zu bestimmen. L und B sind als Differential-Operatoren aufzufassen. Ein typisches Beispiel für solche Probleme stellen eine Helmholtz- oder Poissongleichung dar.

2.) Anfangswert-Probleme

Diese sind als die klassischen Problem der Numerischen Wettervorhersage anzusehen. Sie sind im Grunde Verlagerungsprobleme, in welchen das Verhalten eines Systems in der Zukunft, basierend auf den Anfangsbedingungen, gesucht wird. Das Problem wird durch Lösung der Differentialgleichung $L(\Psi) = f$ innerhalb der Lösungsdomäne D , wo die Anfangsbedingungen bekannt sind, behandelt. An den offenen Rändern hingegen herrschen vorgeschriebene Randbedingungen $B(\Psi)$. Charakteristische Lösungsaufgaben ergeben sich aus der Advektionsgleichung, der Schwerewellengleichung und der die Diffusion beschreibenden Beziehung.

3.) Eigenwert-Probleme

Bei diesen Problemen ist der Eigenwert λ und die prognostische Variable ψ so zu bestimmen, dass die Differentialgleichung $L(\Psi) = \lambda\Psi$ in der Domäne D erfüllt ist. Probleme dieser Art finden sich in baroklinen Instabilitäts-Studien.

Eine alternative Methode partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung zu klassifizieren wird von der Mathematik in der nachstehenden Form angeboten

$$a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial \Psi}{\partial x} + 2e \frac{\partial \Psi}{\partial y} + f\Psi = 0$$

Hierbei sind die nachstehenden Charakteristika in der Tabelle 1.2 grundsätzliche Klassifizierungsmerkmale.

TYPE	BEDINGUNG	BEISPIEL	FORMEL
hyperbolisch	$b^2 - ac > 0$	Wellengleichung	$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$
parabolisch	$b^2 - ac = 0$	Diffusionsgleichung	$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$
elliptisch	$b^2 - ac < 0$	Poissongleichung	$\nabla^2 \Psi = 0$

TAB. 1.2 Verschiedene Typen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. In der Formel der Wellengleichung bedeutet c die Verlagerungsgeschwindigkeit der Welle. In der Diffusionsgleichung ist $\sigma = \frac{K\Delta t}{(\Delta x)^2}$ mit K = Eddy-Diffusionskoeffizient.

Hyperbolische und parabolische Gleichungen sind Anfangswertprobleme wogegen elliptische Gleichungen Randwertprobleme darstellen. Das Verhalten der Lösungen, der entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen und die zu verwendenden numerischen Methoden zur Auffindung einer Lösung hängen wesentlich vom Typ der partiellen Differentialgleichung (PDE) ab. Nichtlineare, multidimensionale PDEs können natürlich kaum auf die in Tabelle 1.2 dargestellte kanonische Form gebracht werden, aber man kann letztere als Prototypen betrachten, an welchen ihre Eigenschaften besser verstanden werden können. Ähnliche Lösungsmethoden können dann auch auf kompliziertere Gleichungssysteme angewandt werden. So kann man leicht zeigen, dass die lineare Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

eine PDE erster Ordnung darstellt und als hyperbolisch klassifiziert werden kann. Ihre Lösung genügt der Wellengleichung, die in vektorieller Form [s. KALNAY (2003)] wie folgt formuliert wird

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$$

wobei \mathbf{A} die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

ist und \mathbf{u} einen Vektor $\mathbf{u} = \left[\frac{\partial u}{\partial t} \quad c \frac{\partial u}{\partial x} \right]^T$ darstellt.

In erster Linie werden wir uns in der Folge bei den numerischen Methoden mit Anfangswert- und Randwertproblemen befassen. Ein solches Anfangswertproblem wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\Psi}{dt} = f(\Psi, t) \text{ mit } \Psi(t_0) = \Psi_0 \quad (1.72)$$

repräsentiert, wobei f hier eine Funktion zweier Variabler darstellt. Wenn wir nicht in der Lage sind die Gl. (1.72) einer Lösung zuzuführen, müssen wir uns zunächst die nachstehenden Fragen überlegen:

- 1.) Woher wissen wir, dass dieses Anfangswertproblem tatsächlich eine Lösung hat ?
- 2.) Wie können wir wissen, dass es nur eine Lösung für das Problem gibt ?
- 3.) Weshalb stellen sich die beiden Fragen 1.) und 2.) ?

Die Antwort auf die 3. Frage führt uns vor Augen, dass die Lösung nur mit numerischen Methoden erfolgen kann und daher die relevante zu lösende Gleichung nur eine Annäherung an das zu lösende physikalische Problem darstellt. Wenn diese Gleichung keine oder nur eine Lösung hat, kann es kaum eine gute Darstellung des relevanten physikalischen Problems sein. Man sagt dann, dass das Problem nicht korrekt formuliert (= not well posed) ist. Andererseits, wenn das Problem korrekt formuliert (= well posed) ist, kann man erwarten, auf irgend eine Weise eine Lösung zu erhalten, die der wahren oder analytischen Lösung sehr nahe kommt. Diese Situation entspricht der „Grenzwerttheorie“, in der es oft möglich ist, zu beweisen, dass eine Folge von Funktionen $\psi(t)$ einen Grenzwert hat, ohne diesen genau zu kennen, es aber dennoch möglich ist irgend ein Glied der Folge vorwärts schreitend zu verwenden, um eine Näherung an den Grenzwert zu erreichen. Mit Hilfe eines iterativen Algorithmus kann sukzessive die Existenz einer Lösung approximativ durch die sogenannten PICARD-Iterationen [RIDDAWAY/HORTAL (2001)] festgestellt werden.

Vorausgesetzt f und $\partial f/\partial y$ sind kontinuierlich in einer rechtwinkligen Domäne $R: t_0 \leq t \leq t_0 + a, |\Psi - \Psi_0| < b$ gegeben, dann hat Gl.(1.72) mit $\psi(t)$ im Intervall $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ eine eindeutige Lösung. Diese Folgerung wird als „PICARD'sches Theorem“ bezeichnet. Dies sei hier nur erwähnt ohne auf die relevante Theorie näher einzugehen. Es sollte vor allem darauf hingewiesen werden, dass Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung von Bedeutung ist. Bei der Behandlung von linearen Differentialgleichungen, können wir im allgemeinen analytische Lösungen finden, weshalb wir das „Existenztheorem“ nicht weiter beachten müssen. In der Frage der Eindeutigkeit können wir allerdings nur hoffen, dass dieses unter der Voraussetzung der entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen gegeben ist bzw. bewiesen werden kann. Nicht-lineare Gleichungen, welche zumeist die Entwicklung atmosphärischer Zustände beschreiben, haben in der Regel keine analytischen Lösungen, auch wenn das Problem „well posed“ ist. Da keine analytischen Lösungen möglich sind, müssen wir auf numerische Verfahren zur Lösung zurückgreifen, um zumindest eine entsprechende Näherung an die wahre Lösung zu finden. Eine analytische Funktion wäre natürlich das beste Mittel, um den physikalischen Zustand der Atmosphäre zu beschreiben, denn wir würden aus dieser die Werte der relevanten Zustandsvariablen an einer unbegrenzten Zahl von Raum- und Zeitpunkten erhalten. Die Aufgabe, an Hand der initialen Variablenwerte innerhalb einer raumzeitlichen Domäne eine Lösung des Gleichungssystems zu finden, ist, wie wir bereits dargestellt haben (s.Tab. 1.1), eine außerordentliche Rechenaufgabe. Eine wirkliche Lösung ist deshalb erst mit dem Einsatz von schnellen Computern gelungen. Da aber auch die modernsten Computer nur mit einer begrenzten Menge von Zahlen arbeiten können, müssen wir die meteorologischen Felder durch eine ebenso begrenzte Zahl von Werten der relevanten

Variablen ausdrücken. Dies geschieht durch Umsetzung der PDEs in „partielle Differenzengleichungen“. Das diesbezügliche Verfahren wird als „Diskretisationsprozess“ bezeichnet. Zur Demonstration gehen wir hier von einer sehr einfachen Entwicklungsgleichung aus:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = F(\Psi) \quad (1.73)$$

Hiebei kann F entweder ein linearer oder auch ein nicht-linearer räumlicher Differential-Operator sein. Ψ ist an $(N + 1)$ sogenannten Gitterpunkten in der Domäne $0 \leq x \leq L$ gegeben. Außerdem gibt es entsprechende Randbedingungen für Ψ . Aus (1.73) wollen wir dann mit Hilfe der räumlichen Diskretisation der rechten Seite unter Verwendung der Gitterpunktwerte Ψ_j die auf der linken Seite erscheinende zeitliche Tendenz von Ψ bestimmen. Dies ist im Grunde die sogenannte „endliche Differenzen- oder Gitterpunktmethode“. Bei diesem Verfahren kennt man die Werte von Ψ zwischen den Gitterpunkten natürlich nicht. Alternativ kann man Ψ auch als endliche Reihe von $(N + 1)$ linear unabhängigen Funktionen e_r , wobei $r = r_1, \dots, r_n$ und $N = r_n - r_1$ ist, durch

$$\Psi = \sum_{r=r_1}^{r_n} \Psi_r(t) e_r(x) \quad (1.74)$$

darstellen. Diese Reihenentwicklung führt nicht unbedingt zu einer exakten Lösung der ursprünglichen PDE. In der Regel ergibt sich ein Restwert (Residuum) der nachstehenden Form, wenn man (1.74) in (1.73) einsetzt und

$$R = \sum_{r=r_1}^{r_n} \frac{d\Psi_r}{dt} e_r(x) - \sum_{r=r_1}^{r_n} \Psi_r F(e_r) \quad (1.75)$$

erhält. Nunmehr gilt es die zeitliche Änderung $d\Psi_r/dt$ unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass R ein Minimum wird. Hiebei wird eine Annäherung nach der „Methode der kleinsten Quadrate“ verwendet. Das Integral über das Quadrat des Fehlerrestgliedes soll ein Minimum werden, d.h. es muss

$$\int R^2 dx = 0 \quad (1.76)$$

gelten. Die Vorgangsweise bedeutet nichts anderes, als dass zu jeder Zeit nur solche Werte

$$\frac{d\Psi_r}{dt} = \dot{\Psi}_r \quad (1.77)$$

zugelassen sind, welche die Minimalisierungsbedingung

$$\int \left[\sum_{r_1}^{r_n} \dot{\Psi}_r e_r - \sum_{r_1}^{r_n} \Psi_r F(e_r) \right]^2 dx = 0 \quad (1.78)$$

erfüllen. Für jede einzelne Änderung $\dot{\Psi}_r$ ($r = 1, 2, \dots, r_n$) soll

$$\frac{dR^2}{d\Psi_r} = 0$$

gelten. Nach entsprechender Differentiation folgt aus (1.78) sofort

$$\int \left\{ \sum_{r_1}^{r_n} [\dot{\Psi}_s e_s - \Psi_s F(e_s)] e_r \right\} dx = 0$$

oder umgeordnet schließlich

$$\sum_{r_1}^{r_n} \dot{\Psi}_s \int e_s e_r dx = \sum_{r_1}^{r_n} \Psi_s \int e_r F(e_s) dx \quad r = r_1, \dots, r_n \quad (1.79)$$

Diese Gleichung kann man auch mit Hilfe der Galerkin-Methode erhalten, in welcher

$$\int R \varphi_i dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N + 1$$

gesetzt wird, wobei für φ_i irgend ein beliebiger Satz von Testfunktionen verwendet werden kann. Man erhält dann auch eine Gleichung wie (1.79).

Da die Entwicklungsfunktionen e_r bekannt sind, können mit Hilfe der Gitterpunktwerte Ψ_j jederzeit die Expansionskoeffizienten Ψ_r aus (1.74) berechnet werden. Ebenso sind die Integrale in (1.79) für alle möglichen Werte von s und r berechenbar. Auf diese Weise wird (1.79) auf ein System gekoppelter, gewöhnlicher Differentialgleichungen reduzierbar und dieses kann bei bekannten Ψ_r in der Form

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_r \dot{\Psi}_r e_r \quad (1.80)$$

geschrieben werden. Diese Form der Diskretisation wird unter dem Begriff „Galerkin-Methoden“ zusammengefasst. Aus diesem Methodenkreis resultieren unmittelbar die „Spektrale Methode“ und die „Methode der finiten Elemente“. In den relevanten Kapiteln werden wir uns zumindest mit einem dieser Verfahren näher beschäftigen müssen.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der numerischen Lösung der relevanten Differentialgleichungen sind Konvergenz, Konsistenz und, wie schon früher erwähnt, die Stabilität.

Von *Konvergenz* einer diskretisierten Differentialgleichung sprechen wir, wenn die relevante Lösung sich mit der Verfeinerung der Diskretisation immer mehr der Lösung der kontinuierlichen Gleichung nähert. Dies geschieht dann, wenn die Auflösung zunimmt, d. h. in der Gitterpunktmethode die Maschenweite immer feiner wird und in den Galerkin-Methoden die Anzahl der Basisfunktionen ansteigt.

Konsistenz wird garantiert, wenn die Diskretisationstechnik mit der PDE übereinstimmt bzw. wenn der „Truncation-Error“ der diskretisierten Gleichung durch Verfeinerung des Diskretisationsgrades gegen Null geht. Konsistenz kann man leicht testen. Nimmt man an,

dass $\tilde{\Psi}_j^n$ die wahre Lösung der PDE (1.72) am Ort x_j zum Zeitpunkt t_n ist, dann ergibt sich nach Einsetzen von Ψ_j^n in eine endliche Differenzengleichung und Entwicklung in einer Taylor-Reihe, um alle Terme des Verhaltens von $\tilde{\Psi}_j^n$ auszudrücken

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} \right|_j^n = F(\Psi)_j^n + \varepsilon$$

Wenn der „Truncation-Error ε “ sich Null nähert, da die Maschenweite und der Zeitschritt gegen Null gehen, ist das Schema als „konsistent“ zu betrachten.

Von *Stabilität* sprechen wir dann, wenn das Diskretisationsschema einer diskretisierten Gleichung gewährleistet, dass deren Lösung eine eindeutig durch den Anfangszustand bestimmte Funktion für jeden Zeitschritt Δt darstellt, der klein genug ist, um zu verhindern, dass die numerische Lösung gegen unendlich geht, wenn die Zeit fortschreitet.

Sowohl *Konsistenz* als auch *Stabilität* der Diskretisationsschemata können untersucht werden und daraus kann man mit Hilfe des „LAX-RICHTMEYER- Theorems“ auch eine Aussage hinsichtlich der *Konvergenz* machen:

Nach diesem Theorem ist ein Diskretisationsschema *konsistent* und *stabil*, wenn es *konvergent* ist oder auch *vice versa*.

Der dem früher erwähnten geostrophischen Gleichgewicht entsprechende „geostrophische Wind“ resultiert aus (1.8)

$$\mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{i}_r}{\rho f} \times \nabla_{HP} p \quad (1.81)$$

wenn man im z-System alle Beschleunigungsterme und den Reibungsterm streicht sowie im sphärischen System mit bester Näherung auch $\nabla_H \Phi = 0$ setzen kann. Diese Beziehung besagt bekanntlich, dass sich die horizontale Corioliskraft und die Druckgradientkraft im Gleichgewicht befinden. Aber gerade die Abweichungen von diesem Gleichgewicht sind jene interessanten, das Wettergeschehen steuernden Vorgänge. Aus der Synoptischen Meteorologie wissen wir, dass sie die Hauptursache für die lokalen Druckänderungen sind und das Wetter maßgeblich beeinflussen. Deshalb werden hier die Ursachen der Druckänderungen kurz aufgerollt. Der hydrostatische Druck ist durch die Beziehung

$$p(z) = \int_z^{\infty} g \rho dz \quad (1.82)$$

gegeben [s.a. REUTER (1976)]. Da die Begrenzung der Atmosphäre von t unabhängig ist, lässt sich die lokale Druckänderung durch Differentiation unter dem Integralzeichen in (1.82) mit

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z = \int_z^{\infty} g \frac{\partial \rho}{\partial t} dz \quad (1.83)$$

ausführen. Transformiert man die generalisierte Kontinuitätsgleichung (1.9) in ein hydrostatisches z-System, dann erhält man, wie man sich leicht überzeugen kann

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v}_H - \frac{\rho v}{a} \tan \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \rho \mathbf{v}_H)_{SPH} - \frac{\partial}{\partial z} \rho w$$

Diese letztere Relation in Gl.(1.83) eingesetzt führt schließlich zu

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z = - \int_z^\infty g \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_H)_{SPH} dz - \int_z^\infty g \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz$$

Mit den Randbedingungen $\rho = 0$ für $z = \infty$ wird das zweite Integral der rechten Seite zu $g(\rho w)_z$, da g innerhalb der wetterwirksamen Tropo- und unteren Stratosphäre nahezu konstant ist. Für den Boden $z = 0$ gilt dann, weil w dort verschwindet, schließlich

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{z=0} = - \int_z^\infty g \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_H)_{SPH} dz \quad (1.84)$$

Aus (1.84) ersieht man, dass die Di- und Konvergenzen des integralen, horizontalen Massenflusses die Bodendruckänderungen bedingen. Der Druck steigt bei überwiegender Konvergenz und fällt bei überwiegender Divergenz des Massenflusses in der darüberliegenden Atmosphäre. Um die Di- und Konvergenzen des Massenflusses zu berechnen, darf aber keineswegs der „wirkliche“ Wind durch den geostrophischen Wind ersetzt werden, was man sofort aus der Relation, wenn $f = \text{const.}$ gesetzt wird,

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_g) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{i}_r}{f} \times \nabla_{HP} p \right) = 0 \quad (1.85)$$

ablesen kann. Aber selbst, wenn man eine Variation von f mit der geographischen Breite berücksichtigt, kommt man zu Vergenzen, die in keinem Zusammenhang zu den tatsächlichen Beobachtungen stehen. Wir sehen also, dass die geostrophische Approximation zur Berechnung von horizontalen Divergenzen nicht statthaft ist. Damit Druckänderungen, wie sie von der Synoptischen Meteorologie beobachtet werden überhaupt zustande kommen, müssen „Abweichungen“ vom geostrophischen Gleichgewicht auftreten. Bezeichnet man mit \mathbf{v}_H den horizontalen Vektor des wahren Windes und mit \mathbf{v}_g den Windvektor des geostrophischen Windes, dann bedeutet der Differenzvektor

$$\Delta \mathbf{v}_g = \mathbf{v}_H - \mathbf{v}_g$$

den sogenannten „ageostrophischen Wind“ und $\rho \Delta \mathbf{v}_g$ ergibt den „ageostrophischen Massenfluss“. Die Di- und Konvergenzen dieses Massenflusses sind dann für die synoptisch relevanten Druckänderungen verantwortlich, d.h. es gilt

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_H) = \nabla \cdot [\rho (\mathbf{v}_g + \Delta \mathbf{v}_g)] = \nabla \cdot (\rho \Delta \mathbf{v}_g)$$

Für horizontale Bewegungen im hydrostatischen z-System kann man (1.8) auch in Form einer sogenannten „Pseudovektorgleichung“ (= horizontale Komponente einer Vektorgleichung) schreiben, wenn vertikale Bewegungen und Variablenänderung unberücksichtigt bleiben:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_H}{dt} \right)_H + f \mathbf{i}_r \times \mathbf{v}_H = -\frac{1}{\rho} \nabla_H p \quad (1.86)$$

und wie schon oben erwähnt $\nabla_H \Phi = 0$ gesetzt werden darf. Nun bilden wir von links das vektorielle Produkt von (1.86) mit dem Einheitsvektor \mathbf{i}_r und erhalten

$$\mathbf{i}_r \times \left(\frac{d\mathbf{v}_H}{dt} \right)_H + \mathbf{i}_r \times (f \mathbf{i}_r \times \mathbf{v}_H) = -\frac{\mathbf{i}_r}{\rho} \times \nabla_H p$$

Nach Ausführung des Vektorproduktes im zweiten Term der linken Seite und Umformung ergibt sich

$$\mathbf{i}_r \times \left(\frac{d\mathbf{v}_H}{dt} \right)_H = -\frac{\mathbf{i}_r}{\rho} \times \nabla_H p + f \mathbf{v}_H \quad (1.87)$$

(1) (2) (3)

Für Bewegungen im „synoptischen Scale“ ergeben sich etwa folgende Größenordnungen für die drei obigen Terme

$$(1) \ 10^{-4} \text{ m sek}^{-1} \quad (2) \ 10^{-3} \text{ m sek}^{-1} \quad (3) \ 10^{-3} \text{ m sek}^{-1}$$

Daraus kann man leicht erkennen, dass ein Fehler von 10% in der Messung des Geschwindigkeitsfeldes in die Größenordnung des Terms (1) fallen kann. Ein Fehler von 10% ist aber für Windmessungen als Regelwert anzusehen. Somit kann der Beschleunigungsterm (1) nicht genau genug bestimmt werden. Mit Hilfe von (1.81) kann man (1.87) sofort in die Form

$$\frac{\mathbf{i}_r}{f} \times \left(\frac{d\mathbf{v}_H}{dt} \right)_H = \mathbf{v}_H - \mathbf{v}_g \equiv \Delta \mathbf{v}_g \quad (1.88)$$

umwandeln. Mit Hinblick auf die vorhin besprochene Größenordnung sehen wir jetzt deutlich, dass der ageostrophische Wind eine gegenüber dem Windfeld sehr kleine und kaum messbare Größenordnung besitzt. Die Atmosphäre befindet sich daher überwiegend in oder nahe dem geostrophischen Gleichgewicht. Dennoch resultiert der Antrieb aller wetterbestimmenden Änderungen aus den kleinen und messtechnisch nicht erfassbaren Abweichungen von eben diesem Gleichgewicht. Dieser Umstand bedeutet zweifellos ein großes „prognostisches Dilemma“. Außerdem durchläuft ein breites Spektrum von Wellenbewegungen die Atmosphäre. Die Bewegungsgleichungen halten, wie schon erwähnt, für die Bewegungen durch den „Flügel Schlag einer Mücke“ ebenso wie für kleinräumige Turbulenz- und Lokalwindssysteme, Hoch- und Tiefdruckgebiete und die großen planetaren Zirkulationsformen entsprechende Lösungen parat. Diese Bewegungen verschiedener Größenordnung sind über den nicht-linearen Term $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ rückgekoppelt. Betrachtet man die

charakteristischen Dimensionen dieser Bewegungsformen in horizontaler, vertikaler und zeitlicher Richtung mit

L = horizontale, charakteristische Ausdehnung in m

D = vertikale, charakteristische Ausdehnung in m

T = zeitliche bzw. mittlere Lebensdauer in sek

so kann man mit PICHLER (1997) zu der in der nachfolgenden Tabelle 1.3 dargestellten Einteilung kommen.

T Y P U S	L(m)	D(m)	T(sek)	SCALE
Kleinräumige Turbulenz	10^{-2} bis 10^2	10^{-2} bis 10^2	1 bis 10^2	Microscale
Cumulus- Konvektion	10^3	10^3	10^2	Konvektiver Scale
Cumulonimbus- Konvektion	10^4	10^4	10^3	Konvektiver Scale
Wolkencluster Böenlinien,Fronten	10^5	10^4	10^4	Mesoscale
Synoptischer Scale Hochs und Tiefs	10^6	10^4	10^5	Macroscale
Planetare Zirkulation	10^7	10^4	10^6	Macroscale

Tab. 1.3 Charakteristische Dimensionen atmosphärischer Bewegungen und Prozesse

Will man nunmehr eine Feldgröße in einem bestimmten „Scalebereich“ prognostizieren, dann muss ein zu diesem „Scalebereich“ passendes Gleichungssystem mit den zu diesem Scalebereich passenden Anfangsbedingungen gefunden werden. Fügt man einem „Scalebereich“ Werte aus einem „nicht-passenden“ hinzu oder lässt diese unberührt drinnen, dann fügt man eher „Lärmprozesse“ als „zusätzliche Information“ ein. Zum Beispiel wird ein hydrostatisches Modell (Gleichungssystem) nicht in der Lage sein, erfolgversprechend die Cumuluskonvektion vorauszusagen. Umgekehrt werden in den Messungen enthaltene Effekte kleinerer Scales mitunter „störende Lärmprozesse“ in den Modellgleichungen für die Prognose der großräumigen Feldverteilung auslösen. Eine isolierte Betrachtung eines „Scales“ ist dabei umso eher möglich, je geringer die nicht-lineare Kopplung bzw. Wechselwirkung mit den anderen Scales ist. Allerdings ganz ist diese Wechselwirkung nie aufgehoben.

Es stellt sich daher die wichtige Frage:

Wie stark ist die Kopplung der einzelnen „Scales“ untereinander für eine bestimmte prognostische Aufgabenstellung ?

Das Problem stellt sich insbesondere bei der Messung der meteorologischen Feldgrößen, die für den Ausgangswert einer numerischen Vorausberechnung maßgebend sind. Wir können nie

sicher sein, dass das Ergebnis der Messung einer Feldgröße tatsächlich jenem Scalebereich entspricht, der für die prognostische Aufgabe relevant ist. Man denke z. B. an die Messung des Windes, die, wie jede Registrierung deutlich zeigt, extreme hochfrequente Schwankungen um einen zeitlichen Mittelwert aufweist. (s. Abb. 1.5)



Abb. 1.5 Beispiel einer Windregistrierung

Ein breites Spektrum verschiedenartiger Bewegungsformen sind in den Messungen enthalten, ohne dass wir zunächst angeben könnten, welcher Wert der Feldgröße „Wind“ sich dem uns interessierenden „Scalebereich“ zuordnen lässt. Ähnlich geht es uns auch mit den Temperatur- und Feuchtefeldern, die mitunter auf kleinstem Raum diskontinuierliche Strukturen aufweisen können. Beim Luftdruck liegen die Verhältnisse etwas günstiger, weil die Schwankungen nur einen Bruchteil seiner Gesamtgröße ausmachen.

Ohne über dieses Problem eingehend nachzudenken, sind wir überhaupt nicht in der Lage eine problemadequate Feldverteilung aus den Beobachtungen „herauszudestillieren“. Die Gleichungen selbst reagieren auf inadequate Feldverteilung und zusätzlich durch die aus den verwendeten Analysemethoden resultierenden Fehler aber äußerst sensibel, indem „fiktive“ Schwerewellen im Modell angeregt werden, die exzessive und in der realen Atmosphäre nicht existierende Amplituden aufweisen. Es kann hierbei leicht dazu kommen, dass die uns interessierenden synoptischen Lösungen von den fiktiven vollkommen zugedeckt werden. Die numerische Prognose endet dann in einer „t o t a l e n R e c h e n k a t a s t r o p h e“. Würden wir deshalb die Gleichungen numerisch integrieren ohne das Problem eines adequate Anfangsfeldes zu lösen, müssten wir, wie seinerzeit RICHARDSON (1922) scheitern. Die Numerische Wettervorhersage wäre damit schon am Ende bevor sie noch begonnen hätte.

PICHLER (1997) präzierte daher die Forderung:

„Um diesen Schwierigkeiten mit Erfolg zu begegnen, muss die zunächst rein hydrodynamisch erscheinende Problemstellung in eine spezifisch meteorologische übergeführt werden“.

Ein brauchbarer Filter sollte grundsätzlich folgende Eigenschaften aufweisen:

1. Wellen mit großer Phasengeschwindigkeit sollen möglichst eliminiert werden, um ökonomische Zeitschritte gemäß dem CFL-Kriterium zu gewährleisten.
2. Filter müssen zeitfreie (diagnostische) Beziehungen zwischen den meteorologischen Feldgrößen herstellen, die es gestatten, aus einer vorgegebenen Feldverteilung einer Feldgröße die genau zu dem entsprechenden Scale korrespondierende andere Feldgröße zu berechnen. Damit stellen Filter auch „Verträglichkeitsbedingungen“ dar. So kann man aus einer Druckverteilung, die den großräumigen, synoptischen Zustand der Atmosphäre beschreibt und die hinreichend genau erfasst werden kann, mit Hilfe diagnostischer Beziehungen eine zu diesem synoptischen „Scale“ passende

Geschwindigkeitsverteilung berechnen. Diese muss allerdings nicht überall mit den tatsächlichen Windmessungen übereinstimmen, die ja alle möglichen „Scales“ enthalten.

Dabei wird nach PICHLER (1997) die hydrodynamische Problemstellung in eine rein meteorologische übergeführt.

Die atmosphärischen Bewegungen lassen sich in zwei große, sich allerdings auch überlagernde Bewegungsklassen aufteilen:

1. In solche, die sich mit großen Phasengeschwindigkeiten ausbreiten, nämlich Schall-, interne und externe Schwerewellen, welche man generell als „atmosphärische Lärmprozesse“ oder „meteorologischen Lärm“ bezeichnet. Sie sind auf synoptischen Wetterkarten nicht zu analysieren und für die großräumige, synoptische Wetterentwicklung unbedeutend und
2. in relativ langsame, aber dafür energetisch stärker besetzte Bewegungsformen, die sich durch die Verlagerung, Entwicklung, Auflösung und Deformation der großräumigen synoptischen Drucksysteme manifestieren. Dazu gehören Strömungsformationen, Frontogenese und Frontolyse, Okklusionsprozesse etc. Diese sind für die Wetterentwicklung wichtig und auf den Wetterkarten verfolgbar. Man nennt diese Prozesse, dem großen Pionier der meteorologischen Forschung C.G. ROSSBY zu Ehren bekanntlich auch „ROSSBY-Prozesse“.

Daraus lässt sich eine weitere Anforderung an Filter begrifflich machen:

Ein idealer meteorologischer Filter sollte alle Lärmprozesse eliminieren und die ROSSBY-Prozesse möglichst unberührt lassen. Es ist nicht allzu schwierig, die Lärmprozesse auszufiltern, wie später noch zu zeigen sein wird, aber keineswegs einfach, die ROSSBY-Prozesse hierbei intakt zu halten [s. hierzu HINKELMANN (1951)]. Ursprünglich hat man sich bemüht die Lärmprozesse schon aus dem Anfangsfeld durch die sogenannten Intialisierungsverfahren zu eliminieren. Heute beschäftigt sich ein eigenes Wissensgebiet der Meteorologie in Gestalt der sogenannten „Datenassimilisation“ damit, eine generelle Lösung dieser Problematik zu erreichen. Eine entsprechende Darstellung in detaillierter Form wird an anderer Stelle zu geben sein.

1.5.1 Nichtlineare Instabilität

Da in der Numerischen Wettervorhersage nicht-lineare Gleichungen gelöst werden müssen, reicht die Anwendung des linearen CFL-Kriteriums nicht aus, alle Schwierigkeiten zu beseitigen. Die Kopplung der einzelnen atmosphärischen Bewegungsformen verschiedener Größenordnung über den nicht-linearen Term in den Bewegungsgleichungen bewirkt einen Energieaustausch zwischen den einzelnen Scales. Bei Übergang von Differentialen zu Differenzen, wie es die numerischen Methoden notwendig machen, können die kleinen Scales bzw. Wellenlängen nicht mehr aufgelöst werden. Der Energietransport zu diesen Wellenlängen wird dadurch gestört und es entsteht bei den Wellenlängen $\lambda = 2d$ ein Energiestau, der schließlich völlig unrealistische Feldverteilungen und einen Zusammenbruch der Rechnung bewirkt. Die erwähnte Nichtauflösung von Wellenlängen $\lambda < 2d$ wird durch die numerischen Differenzenschemata bewirkt. Sie verursachen einen Fehler, der als „Aliasing-Fehler“ bezeichnet wird. Man kann diesen in der englischen Literatur verwendeten Ausdruck auch als „Wellenverfälschungs-Fehler“ übersetzen. Wir werden im Kapitel über die

Numerischen Methoden noch eine eingehende mathematische Analyse dieses Phänomens vornehmen. Eine Reihe von numerischen Schemata wurde zur Überwindung dieses Problems der nicht-linearen Instabilität entwickelt. Eine weitgehende Lösung konnte aber erst mit Einführung der „Spektralen Methode“, einer Alternative zu den Verfahren der Gitterpunktmethode, gefunden werden. Auch damit werden wir uns in den diesbezüglichen Abschnitten noch zu befassen haben.

1.5.2 Das „SPIN UP“-Problem

In den bisherigen Betrachtungen haben wir die Notwendigkeit dynamisch gut ausbalanzierter Anfangsbedingungen bereits angesprochen. Im Falle rein adiabatischer Prozesse genügt es nur dem Massen- und Windfeld zwingende Bedingungen aufzuerlegen, um die Anregung von Schwerewellen zu vermeiden bzw. einen im Gleichgewicht befindlichen Anfangszustand zu erhalten. Wenn man aber „irreversible Prozesse“ im Modell zulässt, dann erweist sich der Gleichgewichtszustand als wesentlich komplexer, da er sowohl den dynamischen als auch den thermodynamischen Modellzustand umfassen muss. Die Ungleichgewichte des anfänglichen thermodynamischen Zustandes haben einen allmählichen Anpassungsprozess der Modellfelder in Richtung auf ein physikalisches Gleichgewicht zur Folge. Diese anfängliche Anpassungsphase in der Modellrechnung nennt man „SPIN UP“, d.h. das Hineinschwanken in einen Gleichgewichtszustand [s. BENGTTSSON (1981), ILLARI (1987), WERGEN (1987)]. BENGTTSSON bezeichnet den „Spin up“ treffend auch als „Anpassung zweiter Art“, bei welchem die prognostizierten Variablen und die dynamisch-physikalische Struktur im Modell ins Gleichgewicht kommen. Diese Definition unterscheidet den „Spin up“ deutlich vom geostrophischen Anpassungsprozess, bei welchem ausschließlich Massen- und Windfelder ins Gleichgewicht gebracht werden. Um längere „Spin up“-Zeiten in der Modellrechnung zu vermeiden, erscheint es notwendig, die Anfangsfelder einem Verfahren zu unterwerfen, das zusätzlich zu gegenseitig konsistenten Massen- und Windfeldern auch solche konsistente der abgeleiteten Größen produziert, die bei der „Parametrisierung“ eine entscheidende Rolle spielen können. Der „Spin up“-Prozess ist besonders manifest in den Feldern der Vertikalbewegung, der Feuchte und damit des Niederschlags. Ein besonders sensibler Indikator des „Spin up“ ist der globale hydrologische Kreislauf, der einen Überschuss an Niederschlägen in den ersten zwei bis drei Tagen der Modellrechnung zeigt. Erst ab dem dritten Tag passen sich die prognostizierten Niederschläge den gewohnten klimatologischen Werten an. Die durchgeführten praktischen Untersuchungen zeigen, dass der „Spin up“ sehr empfindlich mit Hinblick auf Feuchte- und durch Satelliten gestützte Temperaturdaten reagiert. Ebenso empfindlich erweist er sich mit Hinblick auf das „Parametrisierungsschema“ der konvektiven Prozesse. Generell lässt sich der Schluss ziehen, dass der „Spin up“ eines Modells nicht in erster Linie Ergebnis dynamischer Anpassungsvorgänge ist, sondern vielmehr die Konsequenz der Inkompatibilität zwischen dem thermodynamischen Status des Modells und dem thermodynamischen Zustand, wie er aus der Datenanalyse resultiert. Mit zunehmender Auflösung bzw. mit räumlich dichterem Datenmaterial, kann der Modellzustand und der Datenzustand beachtlich im Ungleichgewicht sein. Deshalb verdient das „Spin up“-Problem besondere Beachtung bei der Weiterentwicklung der Numerischen Wettervorhersage.

1.6 Erste Versuche einer deterministischen und numerischen Wettervorhersage

Im folgenden Abschnitt werden die wichtigsten ersten Versuche einer deterministischen Wettervorhersage überblicksweise dargestellt. Auf die mitunter sehr umfangreichen

mathematischen Ableitungen muss natürlich aus Platzgründen verzichtet werden und es können nur die Grundzüge der verwendeten Modelle zur Darstellung kommen.

1.6.1 Eine angenäherte Vorausberechnung der synoptischen Druckverteilung nach EXNER

Es war der Österreicher EXNER (1906) der erste Versuche zur Vorausberechnung synoptischer Wetterkarten auf mathematisch-deterministischer Basis unternahm. Ihm war durchaus klar, dass seine Methode nur eine erste Annäherung an das Problem darstellte, aber theoretische Überlegungen eine Entwicklungsfähigkeit in Aussicht stellten. EXNER (1906 u. 1907) leitete Differentialgleichungen ab, welche die zeitliche Änderung des Luftdrucks an einem Ort der Erdoberfläche unter sehr vereinfachten Voraussetzungen ergeben [s. dazu auch PICHLER (2001)]. Es sollen an jenen Teilen der Erdoberfläche, welche zwischen 30 und 80 Grad nördlicher und südlicher Breite liegen, die hier und innerhalb einer Schicht von vertikal 5 km beobachteten a-periodischen Luftdruckschwankungen berechnet werden. Alle Druckänderungen oberhalb von 5 km werden für kürzere Zeitspannen von EXNER vernachlässigt. In einer weiteren Annahme wird postuliert, dass alle Luftbewegungen in der 5 km-Schicht parallel zu den Isobaren am Boden erfolgen. Weiters werden in den Gleichungen für die Windgeschwindigkeit alle Beschleunigungsterme vernachlässigt. Außerdem soll der erste Hauptsatz der Thermodynamik die Zufuhr und den Entzug von Wärme für die ganze Luftschicht mit der Höhe $H = 5$ km realisieren. Somit geht EXNER im Grunde vom 1. Hauptsatz der Thermodynamik (1.10) aus und führt für die Windgeschwindigkeit den geostrophischen Wind ein, was sich in Grad (λ, φ) in Komponentenform mit

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{RT}{pr^2 \omega \sin 2\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{RT}{pr^2 \omega \sin 2\varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

schreibt, wobei r die radiale Distanz zum Erdmittelpunkt und ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation darstellt. Nach Annahme von EXNER herrscht in der Höhe $H = 5000$ m der Luftdruck p_H , der als zeitlich konstant angenommen wird. In Richtung der Pole nimmt der Druck p_H ab und nur entlang eines Breitenkreises φ wird er als konstant angenommen. Dieser Sachverhalt wird von EXNER durch die Relation

$$p_H = \varepsilon + \gamma \cos 2\varphi$$

mathematisch fixiert, wobei ε und γ Konstante darstellen. Aus der barometrischen Höhenformel erhält man unter Annahme hydrostatischer Verhältnisse

$$p = p_H \exp\left(\frac{gH}{RT}\right)$$

und mit Hilfe des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik (1.10) unter Berücksichtigung der getroffenen Vereinfachungen für die Prognosegleichung des Bodendruckfeldes

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial p}{\partial \lambda} = -\beta \left(\frac{dQ}{dt} \right)$$

$$\text{wobei } \alpha = \frac{2\gamma c_p RT^2}{\omega r^2 p_H (c_p T + AgH)} \text{ und } \beta = \frac{pgH}{RT(c_p T + AgH)} \text{ bedeuten.}$$

A ist das Wärmeäquivalent der Arbeit. Im Grunde genommen liegt somit ein, wenn auch einfaches, nicht-adiabatisches Modell vor. EXNER nimmt an, dass die Koeffizienten α und β Konstante sind und aus Mittelwerten der relevanten Variablen ermittelt werden können. EXNER ist sich bewusst, dass dQ/dt eine sehr komplexe Funktion von Raum und Zeit darstellt. Dennoch wird zunächst angenommen, dass diese Funktion zeitlich konstant ist, d.h. für jeden Ort der Erdoberfläche einen gewissen positiven oder negativen Wert für eine gewisse Zeitspanne beibehält. α wird auch als Geschwindigkeit der West-Ostbewegung des Druckfeldes, ermittelt aus den Anfangsbedingungen, betrachtet und für $dQ/dt = q(\varphi, \lambda)$ gesetzt. Die Integration dieser partiellen Differentialgleichung lieferte die Relation:

$$p(\lambda, \varphi, t) = F(\varphi, \lambda - \alpha t) + \phi(\varphi, \lambda) + \phi(\varphi, \lambda - \alpha t)$$

In dieser bezeichnet $F(\varphi, \lambda)$ die Druckverteilung am Boden zum Zeitpunkt $t = t_0$. $\phi(\varphi, \lambda)$ ist eine Funktion des Ortes, welche von der Wärmezufuhr abhängig und leider unbekannt ist., Man kann diese aber eliminieren, wenn man durch die Betrachtung der bekannten Druckverteilung zu zwei bereits erreichten Zeitpunkten die Formel

$$p_2(\varphi, \lambda) = p_1(\varphi, \lambda - \alpha \Delta t) + p_0(\varphi, \lambda) - p_0(\varphi, \lambda - \alpha \Delta t)$$

verwendet. Hierbei sind p_0 und p_1 die jeweiligen Druckverteilungen am Boden zu den Zeitpunkten $t = t_0$ und $t = t_1$ während p_2 die gesuchte Druckverteilung am Boden zum zukünftigen Zeitpunkt t_2 darstellt. Der Zeitschritt $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1$ ist hierbei so zu wählen, dass $q(\varphi, \lambda)$ gleich groß ist und annähernd konstant bleibt. Man sieht leicht ein, dass die EXNERSche Gleichung einer durch Wärmezufuhr modifizierten West-Ostbewegung der Druckverteilung entspricht. Man könnte im Sinne moderner synoptischer Betrachtungen die Gleichung in der Form $(p_1 - p_0)_{\lambda - \alpha \Delta t} = (p_2 - p_1)_{\lambda}$ schreiben und den ganzen Prozess als west-östliche Verlagerung des Isallobarenfeldes, welches hierbei durch die angenommenen, wenn auch konstanten, nicht-adiabatischen Effekte modifiziert werden, betrachten. In einem praktischen Versuch wurde von EXNER die Druckänderung für den 3. 1. 1895 für die Zeitspanne 8 h bis 12 h vorausberechnet und der tatsächlich eingetretenen Druckänderung gegenübergestellt (s. Abb. 1.6a u. 1.6b). Die Übereinstimmung ist im Grunde, wenn man die Vereinfachungen bedenkt, überraschend gut. An der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik berechnete EXNER mit A. DEFANT mehrere Wochen täglich Wetterkarten nach der beschriebenen Methode, wobei ebenfalls eine recht gute Übereinstimmung festgestellt werden konnte, obwohl es natürlich auch eklatante Misserfolge gab. Auch bei EXNER trat das Problem der Randbedingungen auf, weil für eine 24-stündige Prognose Druckbeobachtungen etwa 15 Längengrade weiter westlich und bei 48-stündigen Vorhersagen bereits die Daten 30 Grade weiter westwärts benötigt worden wären. Das war damals aber mit Hinblick auf das Beobachtungsnetz ein kaum zu bewältigendes Problem. Trotzdem muss man die Genialität dieses ersten Versuches zur numerischen Vorhersage bewundern.

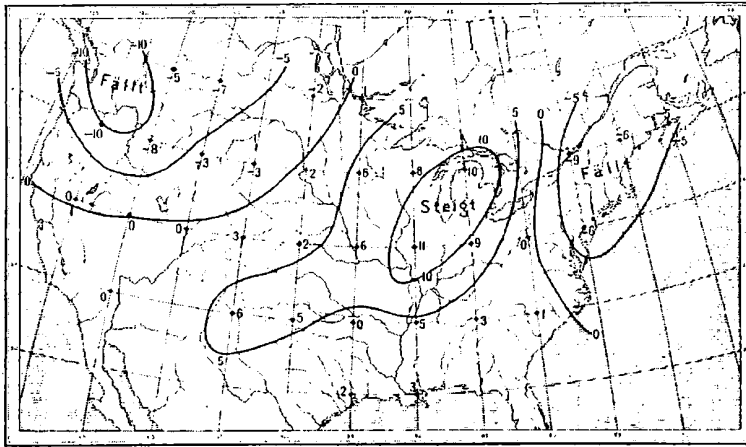


Abb. 1.6a: Berechnete Luftdruckveränderung vom 3. I. 1895 8p bis 12p, in 1/100 Zoll

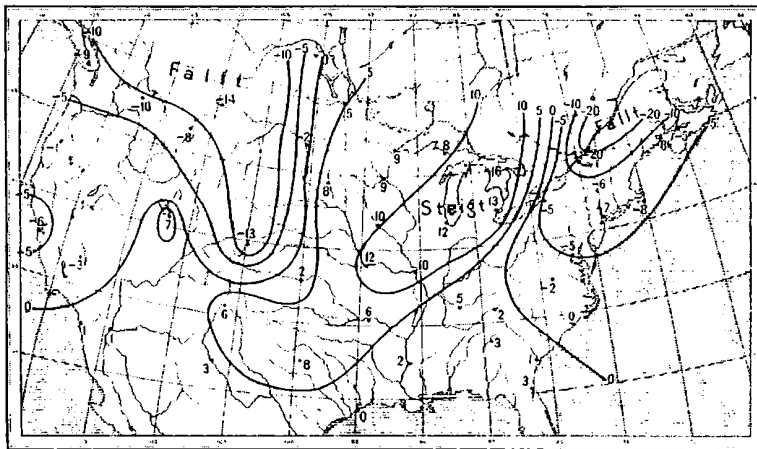


Abb. 1.6 b: Eingetretene Luftdruckveränderung vom 3. I. 1895 8p bis 12p, in 1/100 Zoll

1.6.2 Das Vorhersagemodell von C.F. RICHARDSON

Der nächste sehr bedeutende Versuch, der im Grunde bereits den heutigen Modellen der NWP sehr nahe kommt, war der Versuch von RICHARDSON (1922) mit der Integration der sogenannten „Primitiven Gleichungen (PE)“. Aber auch für RICHARDSON war das grundlegende Handicap das Fehlen des Rechengertes „Elektronischer Computer“ und die Unkenntnis der Problematik, die mit der „Rechenstabilität“ zusammenhängen. Inspiriert von der berühmten Arbeit von V. BJERKNES (1904) geht RICHARDSON an die Aufgabe heran, das deterministische System der 7 Gleichungen und 7 abhängigen Variablen zu lösen. Da es keine analytischen Lösungen für dieses System gibt, wählte auch er natürlich den numerischen Weg. Den Ausgangspunkt und die weitere Methode seines Versuches beschreibt RICHARDSON in seinem hervorragenden Buch „Weather Prediction by Numerical Process“ (1922)¹. Er geht hierbei von der Vektorgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2[\bar{\omega}, \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi$$

¹(Erstaussage Cambridge University, London, 1922, Reprint: Dover Publication, Inc. 1965, New York, N.Y. 10014

aus, wobei $\nabla\phi = \nabla\phi' + [\bar{\omega} \cdot [\bar{\omega} \cdot \mathbf{a}]]$ ist und $\bar{\omega}$ den Erdrotationsvektor und \mathbf{a} einen Radiusvektor vom Erdzentrum zu dem unter Betrachtung stehenden Punkt in der Atmosphäre bedeutet. $\nabla\phi'$ ist die eigentliche Schwerkraft und $[\bar{\omega} \cdot [\bar{\omega} \cdot \mathbf{a}]]$ die Beschleunigung eines relativ zur rotierenden Erde in Ruhe befindlichen Punktes. Ferner zieht RICHARDSON die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \text{div}(\mathbf{m}) = \mathbf{v}\nabla\rho + \rho\text{div}\mathbf{v}$$

wobei $\mathbf{m} = \rho\mathbf{v}$ bedeutet, heran. RICHARDSON transformiert die Gleichungen in ein sphärisches Koordinatensystem und erhält drei Bewegungsgleichungen für die zeitlichen Tendenzen der Geschwindigkeitskomponenten u , v und w .

Diese Beziehungen werden dann in der üblichen Weise von RICHARDSON in Impulsform gebracht, d.h es werden die drei Bewegungsgleichungen mit ρ und die Kontinuitätsgleichung jeweils mit $u = v_E$, $v = v_N$ und $w = v_H$ multipliziert und alsdann zu der jeweiligen, relevanten Bewegungsgleichung addiert. Die entstehenden drei Gleichungen in Impulsform und die Kontinuitätsgleichung werden von RICHARDSON zu Schichtmittel integriert, was schließlich zu den nachstehenden Beziehungen für die Bewegungsgleichungen

$$-\frac{\partial M_E}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial e} + \left[p \frac{\partial h}{\partial e} \right]_G + \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{M_E^2}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{M_E M_N}{R} \right) + [m_H v_H]_8 - 2\omega \sin \varphi M_N + 2\omega \cos \varphi M_H + ..$$

$$+ \frac{3M_E M_H}{aR} - \frac{2M_E M_N \tan \varphi}{aR}$$

$$-\frac{\partial M_N}{\partial t} = -g_N R + \frac{\partial P}{\partial n} + \left[p \frac{\partial h}{\partial n} \right]_G + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{M_N^2}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{M_E M_N}{R} \right) + [m_N v_H]_8 + 2\omega \sin \varphi M_E + \frac{3M_H M_N}{aR} ...$$

$$+ \frac{\tan \varphi \{ M_E^2 - M_N^2 \}}{aR}$$

$$-\frac{\partial M_H}{\partial t} = -gR + p_8 - p_G + \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{M_E M_H}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{M_H M_N}{R} \right) + [m_H v_H]_8 - 2\omega \cos \varphi M_E + ...$$

$$+ \frac{2M_H^2}{aR} - \frac{M_E^2}{aR} - \frac{M_N^2}{aR} - \frac{M_H M_N}{aR} \tan \varphi$$

wobei e , n und h die Koordinatenrichtungen bedeuten und zur Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial M_E}{\partial e} + \frac{\partial M_N}{\partial n} + [m_H]_8 - \frac{\tan \varphi M_N}{a} + \frac{2M_H}{a}$$

führen. In den obigen Gleichungen bedeuten die Versalien Schichtmittel, d.h. Integrale über die Höhe h . So ist z. B. $R = \int_G^8 \rho dh$ oder $M_E = \int_G^8 m_E dh$, wobei $m_E = \rho v_E$ bedeutet. Ähnliche Beziehungen gelten für die übrigen Geschwindigkeitskomponenten. a entspricht in etwa dem Erdradius. Das Integral $\int_G^8 dh$ ergibt die Höhe der Grundsicht. Ansonsten verwendet RICHARDSON als Schichtgrenzen die zu den Druckwerten in Dezibar 8, 6, 4 und 2 gehörigen, konventionellen Höhenwerte z . Die Terme $p \partial h / \partial e$ und $p \partial h / \partial n$ treten natürlich nur auf, wenn sich die Gleichungen auf die unterste Schicht beziehen. Die Größe g_N resultiert aus

$$\frac{\partial \phi}{a \partial \varphi} = \left| \Omega^2 \right| r \cos \varphi \sin \varphi \equiv \left| \Omega^2 \right| (a + h) \cos \varphi \sin \varphi$$

und ist eine nach Norden gerichtete Komponente der Zentrifugalkraft der rotierenden Erde. [s.hiezu HUBER-POCK (2003); p. 49 und p. 50; Gl. (3.50) und (3.53)]. Schließlich wird von RICHARDSON als Äquivalent zum ersten Hauptsatz der Thermodynamik eine entsprechende Änderung der Entropie eingeführt. Hierbei kommen die sogenannte Wärmetransportgleichung, die Wassertransportgleichung für die Masse des Wasserdampfes, des Flüssigwassers und Eis, d.h. also alle drei Aggregatzustände, ins Spiel. Mit Hilfe der statischen Grundgleichung kann die Änderung des Luftdruckes in einer bestimmten Höhe h aus der Relation (1.83) ermittelt werden. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung kommt RICHARDSON deshalb zu der Relation

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \int_h^{h_0} g \left[\frac{\partial m_E}{\partial e} + \frac{\partial m_N}{\partial n} + \frac{\partial m_H}{\partial h} - \frac{m_N \tan \varphi}{a} + \frac{2m_H}{a} \right] dh$$

für die Druckänderung im gewünschten Niveau. Aus diesen Überlegungen leitete RICHARDSON auch eine Beziehung für die Vertikalbewegung ab. Es ist im vorliegenden Rahmen nicht möglich auf alle Aspekte seines Modells, das den Niederschlag, die Turbulenz, die Strahlung und eine spezielle Behandlung der Stratosphäre umfasst, näher einzugehen. Der interessierte Leser sei auf den Reprint (1962) seines Buches verwiesen. Die geringe Dichte des vorhandenen Beobachtungsmaterials war sicher ein weiteres ernstes Problem für den Versuch RICHARDSONs. Vor allem das Fehlen von Daten aus der freien Atmosphäre, aber auch über den angrenzenden Meeresgebieten stellte einen sehr negativen Aspekt dar. RICHARDSON hat sich auch mit der Diskretisation der verwendeten Gleichungen beschäftigt. Es wird ein schachbrettartiges Gitter (s. Abb. 1.7) aufgespannt. Die jeweiligen Datenpunkte, an welchen die abhängigen Variablen tabuliert werden, weisen eine westöstliche Entfernung von $\Delta \lambda = 3^\circ$ und eine nord-südliche Entfernung von etwa 200 km auf. Natürlich kommen in diesem Zusammenhang die Probleme entsprechender Randbedingungen auf und diese werden von RICHARDSON auch angesprochen. Er setzt für diese mitunter klimatologische Mittelwerte an, obwohl er sich natürlich im Klaren ist, dass dieses Vorgehen fallweise zu einer beachtlichen Fehlerquelle werden kann. RICHARDSON

verwendet für die zeitliche Extrapolation der abhängigen Variablen die sogenannte „Step-over“ – Methode. Der Prozess startet mit einem unzentrierten, daher ungenauen, Anfangs-Zeitschritt

$$1.) \psi_1 = \psi_0 + \Delta t \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{t=0}$$

und wird danach fortgesetzt

2) mit einer Rückkehr zu einem zeitlich zentrierten „Step-over“-Schritt:

$$\psi_2 = \psi_0 + 2\Delta t \frac{\partial \psi_1}{\partial t}$$

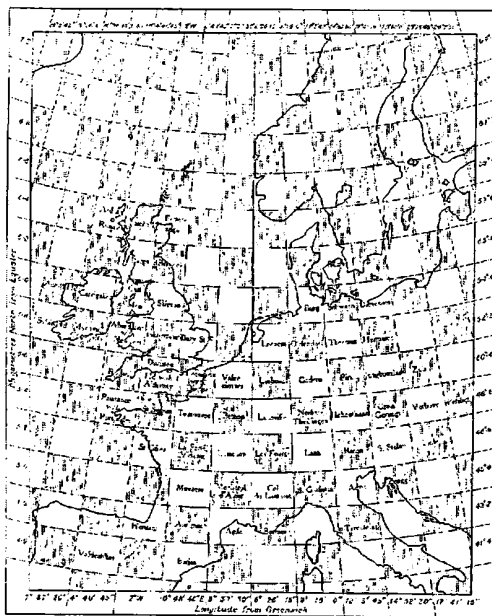


Abb. 1.7 Das Datenpunkt- bzw. Gitterpunktsystem von RICHARDSON

RICHARDSON berechnet von einer beobachteten Analyse um 0 Uhr in einem kurzen, unzentrierten Zeitschritt, die Variablen zu einem 1 ½ Stunden später liegenden Zeitpunkt. Aus der gewonnenen Verteilung zum Zeitpunkt 1h30 wird nunmehr ein zentrierter Zeitschritt von $\Delta t = 3$ h von 0 Uhr bis 3 Uhr durchgeführt. In weiterer Folge berechnete RICHARDSON aus den Werten zum Zeitpunkt 3 Uhr einen zentrierten Zeitschritt $\Delta t = 6$ Stunden bis zum Zeitpunkt 6 Uhr. RICHARDSON war der Ansicht, dass die Steigerung des Zeitschrittes Δt sowohl hinsichtlich Genauigkeit als auch der rechnerischen Durchführung optimal sei. Leider hat sich aber herausgestellt, dass dieser in seiner Grundkonzeption geniale und auch nach heutigen Maßstäben gemachte Versuch scheitern musste. Abgesehen davon, dass durch das Fehlen eines schnellen, elektronischen Computers und die deshalb notwendige manuelle Rechnung das Rechenpensum zur zeitlichen Einholung der Prozesse in der Natur praktisch niemals bewältigen konnte, war die damalige Unkenntnis des Problems der Rechenstabilität ein Hauptgrund des Misserfolges. Dies wurde besonders deutlich mit den prognostizierten Druckänderungen in der Größenordnung von 10^2 hPa pro 6 Stunden, welche

sich weit außerhalb jeder meteorologischen Realität befinden. Betrachtet man das Datengitter, welches von RICHARDSON verwendet wurde, dann ergibt sich eine Gitterdistanz von etwa 200 km in der Horizontalen und etwa 2 km in der Vertikalen. Unter Voraussetzung von nicht-hydrostatischen Verhältnissen hätte das CFL-Kriterium einen maximalen Zeitschritt von etwa $\Delta t = 10$ Sekunden und unter hydrostatischen Verhältnissen von etwa $\Delta t = 15$ Minuten gestattet. Nach den Überlegungen RICHARDSONs wären für eine Vorhersage für den gesamten Globus etwa 64.000 menschliche Rechner notwendig. Allerdings unterlief RICHARDSON laut CHAPMAN (1965) ein Rechenfehler und in Wirklichkeit wäre die vierfache Anzahl an Rechner notwendig gewesen, abgesehen davon, dass zum damaligen Zeitpunkt die globale Datendichte noch vollkommen unzureichend war. So ist der Ausspruch RICHARDSONs einerseits verständlich und andererseits außerordentlich visionär [s.a. LYNCH (2006)]:

„Vielleicht eines Tages in dunkler Zukunft wird es möglich sein, die Rechnung schneller zu erledigen als das Wetter eintrifft..... aber das ist ein Traum.“

1.6.3 Die Vorhersagemethode von I. A. KIBEL

Der nächste große Versuch einer deterministischen Wettervorhersage geht auf I.A. KIBEL (1940) im dritten und vierten Jahrzehnt des vergangenen Jahrhunderts zurück. KIBEL verwendete in seinem Experiment ein sogenanntes „polytropes Modell“ der Atmosphäre, welches vom Standpunkt der Physik als ein sehr einfaches Modell betrachtet werden kann. Sein numerisches Schema enthielt allerdings bereits alle grundlegenden Charakteristika für ein „quasi-geostrophisches Modell“. Zu seiner Formulierung verwendete KIBEL die Methode der sogenannten „sukzessiven Approximation“ [s. hierzu SADOKOV(1969)]. Die enge Übereinstimmung der Vektor-Windrichtung und der Tangente an die Isobaren weist nach KIBEL auf die Existenz eines grundlegenden stationären Prozesses in der Atmosphäre hin. Dieser grundlegende Prozess wird von kleinen nicht-stationären Vorgängen überlagert, welche dann als Ganzes mit den vorher erwähnten Prozessen die gesamte Varietät der atmosphärischen Vorgänge ausmacht. Von dieser Tatsache ausgehend und der Größenordnung der Terme in den Bewegungsgleichungen schloß KIBEL, dass die geostrophische Beziehung als „erste Approximation“ zu betrachten ist. Der Bereich, in welchem diese Relation vorrangig anzuwenden ist, ist die freie Atmosphäre. Die obere Grenze der Bodenschicht war somit die untere Grenze der von KIBEL betrachteten Domäne. Die von dieser ausgehenden Einflüsse auf die freie Atmosphäre wurden deshalb vernachlässigt, ebenso alle Strahlungseffekte, die in der Atmosphäre und in der Bodenschicht vorkommen. Einer der wesentlichsten Punkte der Methode der „sukzessiven Approximation“ bestand darin, die Geschwindigkeitskomponenten in der Form

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}' \quad \text{mit} \quad u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{und} \quad v = v_g + v' \quad \text{mit} \quad v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}$$

zu schreiben, wobei u_g und v_g die geostrophischen Windkomponenten sind, die als „erste Approximation“ von KIBEL betrachtet werden. u' und v' stellen somit den „ageostrophischen“ Anteil des Windes dar. Setzt man die obige Beziehung in die beiden horizontalen Bewegungsgleichungen in einem hydrostatischen z -System ein, dann ergibt sich nach kurzer Rechnung, wenn man die Vertikalkomponente w des Windes vernachlässigt:

$$u' = -\frac{1}{f} \left[\frac{\partial}{\partial t} (v_g + v') + (u_g + u') \frac{\partial}{\partial x} (v_g + v') + (v_g + v') \frac{\partial}{\partial y} (v_g + v') \right]$$

$$v' = -\frac{1}{f} \left[\frac{\partial}{\partial t} (u_g + u') + (u_g + u') \frac{\partial}{\partial x} (u_g + u') + (v_g + v') \frac{\partial}{\partial y} (u_g + u') \right]$$

KIBEL betrachtet allerdings nur die sogenannte „zweite Approximation“, bei welcher u' und v' auf der rechten Seite gleich Null gesetzt werden:

$$u' = -\frac{1}{f} \left[\frac{\partial}{\partial t} (v_g) + (u_g) \frac{\partial}{\partial x} (v_g) + (v_g) \frac{\partial}{\partial y} (v_g) \right]$$

$$v' = -\frac{1}{f} \left[\frac{\partial}{\partial t} (u_g) + (u_g) \frac{\partial}{\partial x} (u_g) + (v_g) \frac{\partial}{\partial y} (u_g) \right]$$

Die weiteren Ableitungen KIBELS führen zu einem sehr komplexen Modell, in welchem Bewegungsgleichungen, Adiabatengleichung, Kontinuitätsgleichung und auch eine Relation für die Vertikalbewegung sowie die allgemeine Gasgleichung Verwendung finden. Es ist hier nicht möglich die umfangreiche Ableitung näher darzulegen. Der interessierte Leser sei auf KIBEL (1940) oder SADOKOV (1969) verwiesen. Das Modellgleichungssystem enthält erste und gemischte zweite Ableitungen mit Hinblick auf Raum und Zeit sowie Ableitungen dritter Ordnung entlang der horizontalen Koordinaten. Auch KIBEL standen noch keine Computer zur Verfügung, weshalb eine Lösung mit Hinblick auf die Komplexität des Modells außerordentlich schwierig war. Die von KIBEL angewandte Methodik der sogenannten „sukzessiven Approximation“ war hier der einzige Weg, um zu einer wenigstens approximativen Lösung zu kommen. Die erste Näherung bestand in der geostrophischen Approximation. Der geostrophische Wind ist besonders wichtig für die advektiven Temperatur- und Druckänderungen. Somit war diese erste Approximation außerordentlich bedeutend für die Entwicklung der synoptischen Praxis und lieferte zunächst theoretische Erklärungen für viele atmosphärische Prozesse. Zunächst strich KIBEL alle Terme, die mit Abweichungen des Windes vom geostrophischen Gleichgewicht zusammenhängen. Damit ergab sich schließlich ein sehr einfaches Modell mit zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \beta^* J(T_0, p_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\gamma_a m}{g \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} = -\frac{RT_0}{f p_0} J(p_0, T_0)$$

wobei hier $\beta^* = \frac{RT_H}{f p_0}$ ist. T_H ist die Temperatur in der Höhe h , p_0 bzw. T_0 Druck und Temperatur am Erdboden. γ_a = der adiabatische Temperaturgradient und m stellt das Integral

$$m = \frac{1}{h} \int_0^h \left[\frac{p_0}{p} - \frac{\gamma_a}{\gamma} \left(\frac{p_0}{p} - 1 \right) \right] dz$$

dar, in welchem $\gamma = -\partial T / \partial z$ ist. In den beiden obigen Gleichungen repräsentiert J den Jakobi-Operator, welcher die geostrophische Advektion der Temperatur beschreibt. Eliminiert man mit Hilfe der ersten Gleichung die Temperatur-Änderung $\partial T_0 / \partial t$ in der zweiten

Gleichung, dann erhält man nach kurzer Rechnung eine Beziehung für die Druckänderung am Boden in Form von

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -\alpha^* J(T_0, p_0) \quad \text{wobei } \alpha^* = \frac{g}{\gamma_a m f} \left(1 - \frac{T_H}{T_0} \right) \text{ bedeutet.}$$

Diese letztere Gleichung beschreibt somit die Druckänderungen in Übereinstimmung mit der geostrophischen Advektion der Temperatur. Positive Advektion ergibt ein Ansteigen der Temperatur bei gleichzeitigem Druckfall und umgekehrt. Weiters gelang es KIBEL zu zeigen, dass die lineare Kombination

$$\vartheta = \alpha^* T_0 + \beta^* p_0$$

sich mit der Zeit nicht ändert, denn es ergibt sich aus

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \alpha^* \frac{\partial T_0}{\partial t} + \beta^* \frac{\partial p_0}{\partial t} = \alpha^* \beta^* J(T_0, p_0) - \beta^* \alpha^* J(T_0, p_0) = 0$$

weshalb sofort auch die Relation

$$J(p_0, \vartheta) = J(p_0, \alpha^* T_0 + \beta^* p_0) \equiv \alpha^* J(p_0, T_0) + \beta^* J(p_0, p_0) = -\alpha^* J(T_0, p_0)$$

folgt, weil $\beta^* J(p_0, p_0) \equiv 0$ ist. Analog hierzu gilt natürlich auch $J(p_0, \vartheta) = \beta^* J(T_0, p_0)$, womit schließlich, wie man leicht einsehen kann, sich unschwer auch die Beziehungen

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = J(T_0, \vartheta) \quad \text{und} \quad \frac{\partial p_0}{\partial t} = J(p_0, \vartheta)$$

ergeben. Der Jakobi-Operator $J(A, \vartheta)$ beschreibt somit den Transport einer Funktion A entlang der Tangente an den Geschwindigkeitsvektor. Somit können die zeitlichen Änderungen der Felder von T_0 und p_0 mit Hilfe der Advektion der Felder von T_0 und p_0 mit der tangentialen Geschwindigkeit $c = \partial \vartheta / \partial n$, weil c aus der Beziehung

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n}$$

gewonnen werden kann und n in die Richtung des Gradienten von ϑ weist. Als nächstes galt es daher das ϑ -Feld zu bestimmen. KIBEL konnte zeigen, dass sich die Konfiguration der ϑ -Isolinien sehr ähnlich der Isobaren-Konfiguration erweist. KIBEL konnte durch eine Reihe weiterer Überlegungen (s. dazu SADOKOV (1969)] zeigen, dass eine solche übereinstimmende Konfiguration für eine Höhe von $z = 5600$ m im besonderen gegeben ist. Dies entspricht aber etwa der Höhe der 500 hPa-Fläche, d.h man kann mit bester Näherung die Isopotentialfelder der 500 hPa-Fläche anstatt der ϑ -Felder verwenden. Ein solches Niveau kann daher auch als „Steuerungsniveau“ bezeichnet werden. In der Abb. (1.8a,b) werden Vorhersagen mit der KIBELschen Methode den beobachteten Druckverteilungen gegenübergestellt. Die relativ gute Übereinstimmung ist auch hier mit Hinblick auf die Vereinfachungen beeindruckend. Differenziert man die Relation

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = J(p_0, \vartheta)$$

nochmals nach der Zeit, dann ergibt sich

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} = J\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}, \vartheta\right)$$

weil ϑ ja zeitlich konstant ist. Daraus folgt, dass das Isallobarenfeld am Boden ebenfalls mit Isopotentialen-Feld im 500 hPa-Niveau gesteuert wird. An dieser Stelle wird man unmittelbar an die von SCHERHAG (1948) im DWD bis in die späten 50-er Jahre angewandte Methode zur Vorausbestimmung der synoptischen Luftdruckverteilung erinnert. Sowohl KIBEL als auch SCHERHAG hatten mit ihren Verfahren für Prognosen auf 24 bzw. 48 Stunden recht gute Erfolge. KIBEL versuchte in einem weiteren Experiment auch die „zweite Approximation“ seines vollständigen Gleichungssystems anzuwenden, welche darin bestand nur die gemischten Ableitungen nach x und y und der Zeit zu vernachlässigen. Er erhielt hierbei eine Gleichung für die Druckänderungen vom Helmholtz-Typ und musste zwangsläufig an dem Umstand scheitern, dass kein Computer vorhanden war, um diese aufwendige Aufgabe einer Lösung zuzuführen. Iterative Ersatzverfahren waren weitgehend unperfekt und konnten keine operationelle Reife erlangen.

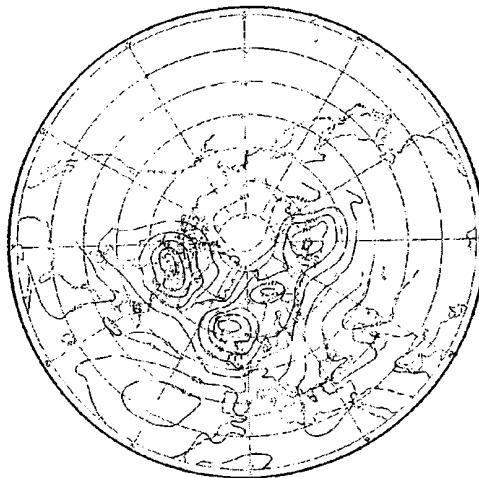


Abb. 1.8a : 24 stündige Vorhersage des Bodendruckes für den 2. Dezember 1932

Die Hauptnachteile des Modells von KIBEL waren nach SADOKOV (1969):

- 1.) Die simple Vertikalstruktur der polytropen Atmosphäre.
- 2.) Die groben Bedingungen an der Tropopause, welche zusammen mit Punkt 1.) zur Vernachlässigung des Einflusses der Vertikalbewegungen auf die Temperaturänderungen in der Atmosphäre führen und
- 3.) die nicht perfekte Technik der Problemlösung.

Trotz dieser Nachteile war KIBELS Modell ein weiterer bedeutender Schritt in Richtung der Entwicklung der Numerischen Wettervorhersage.

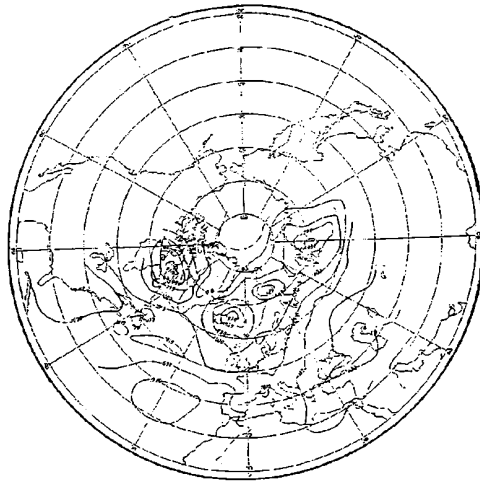


Abb. 1.8b : Verifizierende Analyse des Bodendruckes für den 2. Dezember 1932

1.6.4 Das „barotrope“ Modell nach CHARNEY, FJØRTOFT und v. NEUMANN

Nach einem Bericht von PHILLIPS (2000) trafen sich über Anregung von ROSSBY im Jahr 1946 CHARNEY und v. NEUMANN bei einer meteorologischen Tagung in Princeton. Dies war der Anstoß zur Gründung einer meteorologischen Gruppe in v. NEUMANNs Projekt zur Konstruktion eines elektronischen Computers, in welcher CHARNEY der Chef wurde. Eine Reihe von berühmten Namen wie ELIASSEN und FJØRTOFT gesellten sich alsbald dazu. Man beschloss zunächst ein barotropes Modell zu integrieren. [CHARNEY (1948, 1949), CHARNEY u. ELIASSEN (1949)]. 1950 waren die Möglichkeiten einen großen Rechenaufwand auch mit dem von der US-Armee zur Verfügung gestellten Electronic-Computer ENIAC noch sehr beschränkt. Jeder heutige PC kann sicher bedeutend mehr. Man musste daher a priori verzichten die deterministischen Gleichungen in ihrer ursprünglichen Eulerschen Form (d.h. die Primitiven Gleichungen) zu integrieren, wie dies RICHARDSON in seinem Versuch anstrebte und scheiterte. Man wählte deshalb das barotrope Modell, welches zweifellos das einfachste in der Reihe der bisherigen besprochenen Experimente darstellt. In diesem wird die Autobarotropie-Bedingung unterstellt, d. h. die Dichte ist überall eine Funktion des Luftdruckes und dadurch wird, wie bereits erwähnt (s. Abschnitt 1.4.1), der erste Hauptsatz der Thermodynamik „außer Kraft“ gesetzt. Ferner wurde die Atmosphäre als im lediglich, lokalen hydrostatischen Gleichgewicht befindlich betrachtet. Damit konnten die vertikalen Schallwellen, welche sich mit $c = 300$ m/sek ausbreiten ausgefiltert werden. Die schnellen, horizontalen Wellenprozesse wurden durch Einführung der geostrophischen Approximation eliminiert. Mit Hilfe diesen Vorkehrungen, der Ausfilterung des sogenannten meteorologischen Lärms, mussten im CFL-Kriterium nur die relativ langsamen ROSSBY-Prozesse ($c = 5 - 10$ m/sek) berücksichtigt und der Integrationszeitschritt Δt konnte entsprechend ausgedehnt werden, was bei einer Gitterdistanz von $d = 736$ km zu einer entsprechenden Anpassung an die Leistungsfähigkeit des ENIAC führte. Die Modellannahme der Autobarotropie $\rho = \rho(p, t)$ und die hydrostatische Bedingung führen weiters zur Folgerung, dass die horizontale Druckgradientkraft höhenunabhängig wird. Mit der

gleichzeitigen Annahme, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der horizontale Wind höhenunabhängig ist, bleibt er dies für alle weitere Zeitspannen. Auf diese Weise wird der Wind im barotropen Modell nur von der Zeit t und von einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit (x,y) abhängig [s. HINKELMANN u. REISER (1973)]. Trotz aller dieser Vorkehrungen benötigte der ENIAC anfänglich noch 24 Stunden für eine 24-stündige Prognose. Erst eine bessere softwaremäßige Organisation führte in weiterer Folge dazu, dass die Natur bei der Integration der Gleichungen eingeholt werden konnte. Die Integrationsdomäne musste außerdem auf einen entsprechenden Ausschnitt des Globus beschränkt werden und auch CHARNEY musste sich mit der Problematik der Randbedingungen eingehend befassen, d.h. mit der Frage, wie ausgedehnt in nord- südlicher wie west-östlicher Richtung die Vorhersagedomäne für eine 24-stündige Prognose sein muss. Als Grundlage für derartige Überlegungen zog CHARNEY das von ROSSBY in die Meteorologie eingeführte Konzept der Gruppengeschwindigkeit heran. Es kam in diesem Zusammenhang zu einem kritischen Einwurf ERTELs (1941), der die Möglichkeiten der barotropen Vorhersage mit Pessimismus sah. CHARNEY spielte ERTELs Einwurf herunter und erwähnte diesen nur in einer Fußnote seiner Arbeit und betonte, dass ein sensibler Einfluss sich nur in einem durch die maximalen Werte der Gruppengeschwindigkeit bestimmten Ausmaß in die Vorhersage-Domäne ausbreiten könnte. Somit kam es zu dem historisch bedeutsamsten und letztlich folgenreichen Versuch die barotrope Vorticitygleichung oder den Erhaltungssatz der absoluten Vorticity

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0,$$

welcher nach Einführung der geostrophischen Approximation in der nachstehenden expliziten Form geschrieben wird,

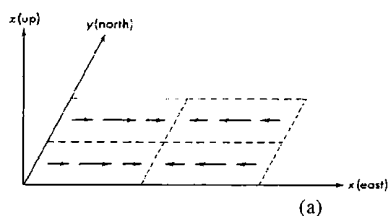
$$\frac{\partial \nabla^2 \Phi}{\partial t} = J\left(\frac{1}{f} \nabla^2 \Phi, \Phi\right) - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

zu integrieren. Hierbei ist Φ das Geopotential, $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ und $f = 2\omega \sin \varphi$ der Coriolisparameter.

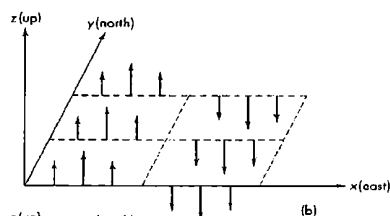
Die Gleichung wurde auf dem v. NEUMANN'schen Computer ENIAC erstmalig integriert. Damit begann ein sehr erfolgreicher Weg und eine stürmische Entwicklung der NWP, die bis heute faktisch anhält. CHARNEY, FJØRTOFT und v. NEUMANN berichten (1950) in ihrer legendären Arbeit über dieses barotrope Modell. Bei vielen Wetterdiensten standen damals aber noch keine Computer zur Verfügung. Man griff daher gerne zu einer von FJØRTOFT (1952) entwickelten „graphischen Integrationsmethode“, die später sogar noch auf barokline Modelle ausgedehnt wurde. Auch in Österreich kam diese Methode zur Anwendung und konnte im Zuge der Entdeckung des Äquivalenzprinzips zwischen räumlichem und zeitlichem Mittel des 850 hPa-Geopotentialfeldes durch REUTER (1958) und dessen theoretischen Begründung durch PICHLER (1959) von HUBER-POCK (1959) für die Praxis bei der Rückberechnung des Geopotentialfeldes aus dem Vorticityfeld vereinfacht werden. Schließlich gelang es auch den orographischen Einfluss zu berücksichtigen [ESTOQUE (1957), PICHLER u. REUTER (1960)]. Bald gab es auch Versuche einfache barokline Mehrschichten-Modelle graphisch zu integrieren, aber mit der nachfolgenden raschen Entwicklung der NWP und der Computertechnik konnten diese Methoden nur kurze Zeit Schritt halten. Man ging von den gefilterten Modellen wieder ab und heute hat sich die Modellwirklichkeit zu einer Höhe entwickelt, die den Traum von V. BJERKNES und seiner ihm nachfolgenden Pioniere EXNER, RICHARDSON, KIBEL sowie CHARNEY, FJØRTOFT und v. NEUMANN in kühnster Weise übertrifft.

2. Atmosphärische Wellen und das Filterproblem

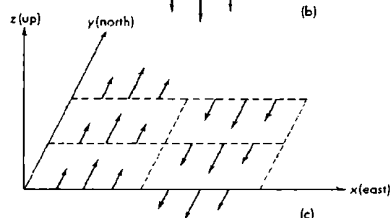
In der Vielfalt atmosphärischer Bewegungen spielen Wellenvorgänge eine wesentliche Rolle. Während Schwingungen (Oszillationen) als periodische Vorgänge angesehen werden, die sich entweder nur zeitlich oder nur räumlich manifestieren, werden Wellen als räumlich und zeitlich ablaufende Phänomene definiert. Man kann viele Wellenbewegungen mittels linearer oder linearisierter Differentialgleichungen relativ einfach mathematisch beschreiben, da sich analytische Lösungen angeben lassen. Wir finden in der Atmosphäre sich vertikal und horizontal ausbreitende Wellenbewegungen, wie z. B. Schallwellen, die Kompressionswellen darstellen. Solche Wellen, die in der Ausbreitungsrichtung schwingen, nennt man auch „Longitudinalwellen“. Außerdem kommen noch horizontale und vertikale „Transversalwellen“ vor, welche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen. Die horizontalen „Transversalwellen“ gehören auch zum Typus der ROSSBY-Wellen, die vertikalen stellen Schwerewellen dar. Im kleinräumigen Bereich des Wellenspektrums, haben wir es meist mit Wellen zu tun, die z.B. beim Überströmen einer stabil geschichteten Luftmasse über ein Gebirge entstehen und als „Leewellen“ (Föhnwellen) bezeichnet werden. Es handelt sich hierbei um sogenannte „interne“ Schwerewellen, welche wir auch an Diskontinuitätsflächen, wie z.B. Inversionen, antreffen. Im Zusammenhang mit starker vertikaler Windscherung können solche Wellen auch instabil werden und zu der im Flugverkehr gefürchteten „Clear Air Turbulence (CAT)“ führen. Verschwindet die Dichte über einer Diskontinuitätsfläche ganz oder nahezu, dann erhalten wir Oberflächenwellen oder „externe Schwerewellen“, welche z.B. an der Oberfläche von Gewässern (Meeresflächen etc.) auftreten. Bezüglich der Wellentypen hat THOMPSON (1961) eine sehr eindrucksvolle graphische Darstellung gegeben:



a.) Kompressionswellen/Schallwellen



b.) vertikale Transversalwellen/Schwerewellen



c.) horizontale Transversalwellen/Rossby-Wellen

Abb. 2.1 Schematische Darstellung der Geschwindigkeitsperturbationen für die zu besprechenden Wellentypen. [Nach THOMPSON (1961)]

Alle Wellenbewegungen, die sich mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten, gehören zum Bereich der „Meteorologischen Lärmprozesse“ und sind wegen ihrer geringen energetischen Besetzung für die Wetterentwicklung unwichtig. Aus Gründen der Rechenstabilität hat man sie früher meistens komplett ausgefiltert. Andernfalls hätte man sehr unökonomische Zeitschritte mit Hinblick auf das CFL-Kriterium in Kauf nehmen müssen.

2.1 Zur mathematischen Analyse von Wellenvorgängen

Zur Vorbereitung der mathematischen Formulierung von Filterbedingungen, wollen wir uns zunächst kurz mit der theoretischen Beschreibung von Wellenvorgängen befassen. Eine weitergehende und ausführliche Darstellung findet sich bei PICHLER (1997):

Die Darstellung einer Welle kann durch eine Kreisfunktion erfolgen (s. Abb. 2.2):

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 \cos(k_x x - vt) \quad (2.1)$$

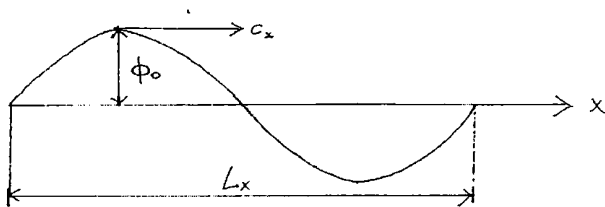


Abb. 2.2 Harmonische Welle, welche sich in der x-Richtung ausbreitet.

In der Gl. 2.1 bedeuten

L_x = die Wellenlänge

Φ_0 = die Amplitude der Welle

$k_x = \frac{2\pi}{L_x}$ die Wellenzahl in der x - Richtung

$v = \frac{2\pi}{\tau}$ die Kreisfrequenz

τ = die Periode der Welle

Das Argument der Kreisfunktion wird als Phase bezeichnet und durch

$$\psi = k_x x - vt$$

ausgedrückt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle (Phasengeschwindigkeit) c eines Punktes mit konstantem Argument ist dann durch

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}(k_x x - vt) = 0 \quad (2.2)$$

gegeben, was nach erfolgter Differentiation sofort zu

$$\frac{dx}{dt} \equiv c_x = \frac{v}{k_x} \quad \text{oder auch} \quad c_x = \frac{v}{k_x} \equiv \frac{v}{\frac{2\pi}{L_x}} = \frac{L_x}{\tau} \quad (2.3)$$

führt. c_x gibt die Phasengeschwindigkeit in der x -Richtung an. Man kann daher (2.1) mit Hilfe von (2.3) auch

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 \cos k_x (x - c_x t) \quad (2.4)$$

schreiben. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit (z.B. Vorteil beim Differenzieren) kann man mit der EULER-Formel

$$e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi$$

(2.1) bzw. (2.4) unter Bedachtnahme auf (2.3) auch in die Form

$$\Phi(x, t) = \operatorname{Re}\{\Phi_0 \exp[i(k_x x - vt)]\} \equiv \operatorname{Re}\{\Phi_0 \exp[ik_x (x - c_x t)]\} \quad (2.5)$$

überführen. Re bezeichnet den sogenannten Realteil, welcher allein für die Beschreibung des Wellenvorganges maßgebend ist.

Für den Betrag der Gruppengeschwindigkeit erhält man [bezüglich der Ableitung s. PICHLER (1997)]

$$c_g = \frac{dv}{dk} \equiv \frac{dck}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} \quad (2.6)$$

oder auch, weil

$$\frac{dk}{dL} = \frac{d}{dL} \left(\frac{2\pi}{L} \right) = -\frac{2\pi}{L^2} \quad \text{bzw.} \quad dk = -\frac{2\pi}{L^2} dL \quad \text{ist, schließlich alternativ}$$

$$c_g = c - L \frac{dc}{dL} \quad (2.7)$$

Daraus erkennt man, dass, wenn die Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängt, die Gruppengeschwindigkeit c_g und die Phasengeschwindigkeit c verschieden sind. Bei numerischen Differenzenschemata führt diese Umstand beispielsweise zum Phänomen der „Numerischen Dispersion“, d.h. die Wellengruppen laufen auseinander. In solchen numerischen Differenzenschemata kann die Gruppengeschwindigkeit, wie später noch zu zeigen sein wird, auch ein negatives Vorzeichen bekommen. Nur wenn keine Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit c von der Wellenzahl bzw. Wellenlänge vorliegt, gilt $c = c_g$. Dies ist z.B. für analytische Lösungen linearer Gleichungen wie der linearen Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.8)$$

der Fall. Wir werden auf Fragen dieser Art im Rahmen der numerischen Methoden noch eingehend zurückkommen.

2.2 Wellenvorgänge in der Atmosphäre: Isolierung und Filterung

Das Verständnis für die sehr komplexen, atmosphärischen Bewegungen kann am besten durch Isolierung und Analyse einiger einfacher Bewegungstypen gefunden werden. Für die folgenden Betrachtungen verwenden wir der Einfachheit halber wieder ein kartesisches Koordinatensystem und wollen die Bewegungen zunächst in einer x-z-Ebene betrachten. In der y-Richtung wird vollkommene Uniformität angenommen und die Rotation der Erde wird zunächst vernachlässigt. Außerdem werden nur reversible Zustandsänderungen zugelassen, weshalb die Reibung in den Bewegungsgleichungen und der diabatische Term im ersten Hauptsatz verschwinden. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir für ein kartesisches z-System aus Gl.(1.1) bzw. (1.3) die Relationen

$$\frac{du}{dt} + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{dw}{dt} + \alpha \frac{\partial P}{\partial z} + g = 0 \quad (2.10)$$

wobei hier $\alpha = \frac{1}{\rho}$ bedeutet. Für den ersten Hauptsatz ergibt sich mit Hilfe der zeitlichen Ableitung der Gasgleichung (1.13)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P}{R} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\alpha}{R} \frac{dP}{dt}$$

und unter Beachtung auf $R = c_p - c_v$ die alternative Form der Adiabatangleichung

$$\alpha \frac{dP}{dt} + P\gamma \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

wobei $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ bedeutet. Die Kontinuitätsgleichung (1.9) degeneriert entsprechend unseren Annahmen zu

$$\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad (2.12)$$

Wir erhalten somit ein einfaches, aber nichtlineares System von partiellen Differentialgleichungen. Dieses System kann mit Hilfe der „Perturbationsmethode“ linearisiert und gelöst werden. Für die linearisierten Gleichungen lassen sich bekanntlich dann analytische Lösungen angeben. Glücklicherweise ist diese Methode für Wellenprozesse sehr gut geeignet. Dem Grundzustand, der dem nicht-linearen Gleichungssystem entsprechen muss, werden Störungen oder „Perturbationen“ überlagert, die gegenüber dem Grundzustand als sehr klein betrachtet werden können. Die nichtlinearen Glieder der Perturbationen können

hiebei auch als Größen zweiter Ordnung betrachtet und deshalb vernachlässigt werden. Damit erhält man ein lineares System partieller Differentialgleichungen für die Perturbationen. Der Einfachheit nehmen wir einen zeitlich und räumlich konstanten Grundstrom U an. Außerdem wollen wir im Grundstrom nur horizontale Bewegungen zulassen, d. h. $W = 0$. Ferner fordern wir, dass sich der Grundzustand im hydrostatischen Gleichgewicht befinden soll. Es gilt daher

$$\bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g \text{ und } \frac{dW}{dt} = 0 \quad (2.13)$$

Die abhängigen Variablen werden durch Summe aus Grundzustand plus entsprechender Perturbation in der Form

$$u = u' + U \quad p = p' + \bar{p} \quad \alpha = \alpha' + \bar{\alpha} \quad w = w' \quad (2.14)$$

ausgedrückt. Führt man (2.13) und (2.14) in (2.9) bis (2.12) unter Bedachtnahme auf unsere Annahmen ein, dann erhält man [s.auch HALTINER (1971) oder HALTINER u. WILLIAMS (1980)]:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

$$\delta_1 \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g \alpha'}{\bar{\alpha}} = 0 \quad (2.16)$$

$$\bar{\alpha} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - g w' + \bar{p} \gamma \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \bar{\alpha} - \delta_2 \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.18)$$

Die Symbole δ_1 und δ_2 fungieren lediglich als Identitätskoeffizienten, welche jeweils den Wert 0 oder 1 annehmen, je nachdem, ob der vertikale Beschleunigungs- oder der Kompressibilitätsterm beibehalten oder vernachlässigt werden soll, d.h. ob die sogenannte *hydrostatische* oder die *quasi-Boussinesque* oder *anelastische* Approximation eingeführt wird. Nunmehr überlagern wir dem Grundstrom in x , z und t die nachstehenden harmonischen Perturbationen:

$$\begin{bmatrix} u' \\ w' \\ p' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ W_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{bmatrix} \exp[i(k_x x + k_z z - vt)] \quad (2.19)$$

wobei k_x die horizontale, k_z die vertikale Wellenzahl und v die Kreis-Frequenz bedeuten.

Die S_0, W_0, P_0 und A_0 sind konstante Amplituden. Da die Gleichungen (2.15) bis (2.18) linear sind, ist jede lineare Kombination der Lösungen (2.19) wegen des Superpositionsprinzipes, ebenfalls eine Lösung. Wir können daher eine einzelne Harmonische betrachten. Setzt man

zunehmend (2.19) in (2.15) bis (2.18) ein, dann erhält man ein System von homogenen, algebraischen Gleichungen für die Amplituden S_0, W_0, P_0 und A_0 , welches etwas umgeformt und in Matrixform

$$\begin{bmatrix} (k_x U - v) & 0 & \bar{\alpha} k_x & 0 \\ 0 & \delta_1 (k_x U - v) & \bar{\alpha} k_z & g i / \bar{\alpha} \\ 0 & i \left(g - \bar{\gamma} \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) & \bar{\alpha} (k_x U - v) & \bar{\gamma} (k_x U - v) \\ \bar{\alpha} k_x & (\bar{\alpha} k_z + i \delta_2 \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z}) & 0 & -\delta_2 (k_x U - v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ W_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

geschrieben werden kann. Für eine nicht-triviale und von Null verschiedene Lösung für die Amplituden S_0, W_0, P_0 und A_0 muß die Koeffizientendeterminante der Matrix in (2.20) verschwinden. Entwickelt man diese und setzt sie gleich Null, dann erhält man eine Gleichung 4. Ordnung, welche die Werte der zulässigen Frequenzen mit Hilfe der Parameter des Grundzustandes und der Wellenzahlen der Störungen (Perturbationen) beschreibt

$$\begin{aligned} & \delta_1 \delta_2 (k_x U - v)^4 - \left[R \bar{T} \bar{\gamma} (k_z^2 + k_x^2 \delta_1) + i g k_z (\delta_2 - 1) + \delta_2 \frac{g}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right] (k_x U - v)^2 - \dots \\ & \dots - g k_x^2 \left(g - R \bar{T} \bar{\gamma} \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei $\bar{\gamma} \bar{\alpha}$ durch $R \bar{T}$ mit Hilfe der Gasgleichung (1.13) ersetzt wurde. Die Gleichung (2.21) wird auch als „Frequenzgleichung“ bezeichnet. Die vier Wurzeln dieser Gleichung stehen in Beziehung zu einem Paar von Schall- und einem Paar von Schwerewellen. Wenn wir die Schallwellen isolieren wollen, dann genügt es $g = 0$ zu setzen und gleichzeitig den vertikalen Beschleunigungsterm sowie den Kompressibilitätsterm durch $\delta_1 = \delta_2 = 1$ beizubehalten. Man erhält dann die „Frequenzgleichung“ für das Schallwellenpaar

$$(k_x U - v)^4 - [R \bar{T} \bar{\gamma} (k_z^2 + k_x^2)] (k_x U - v)^2 = 0 \quad (2.22)$$

Da U nur zur Verlagerung in der x -Richtung einen konstanten Beitrag liefert, wollen wir es hier vernachlässigen. Da wir gemäß den Überlegungen in Abschnitt 2.1 für die Frequenz

$$v = c (k_x^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

schreiben können, ergibt sich mit $U = 0$ aus (2.22) sofort die Phasengeschwindigkeit für Schallwellen mit

$$c_s = \pm \sqrt{R \bar{T} \bar{\gamma}} \quad (2.23)$$

Gleichzeitig können wir eine wichtige Feststellung machen:

Schallwellen können entweder durch Annahme der Inkompressibilität $\delta_2 = 0$ oder die vertikalen Schallwellen durch die hydrostatische Annahme $\delta_1 = 0$ eliminiert werden. Somit haben wir eine erste „Filterbedingung“ gefunden. Während Inkompressibilität eine strenge Filterbedingung bedeutet, die vor allem der Forderung die Rossby-Prozesse intakt zu halten

leider kaum entspricht, stellt die hydrostatische Approximation einen sehr brauchbaren Filter dar, da die Rossby-Prozesse weitgehend quasi-statisch verlaufen.

Um nun die Schwerewellen zu isolieren setzen wir $\delta_2 = 0$, d.h. wir betrachten ein inkompressibles Medium. Gleichzeitig kann man zur Vereinfachung in Gl. (2.21) die Terme mit den Faktoren $-igk_z$ und $-g^2k_x^2$ aus Gründen der Magnitudo vernachlässigen [s. HALTNER (1971)]. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir sofort die Frequenzgleichung für interne Schwerewellen mit

$$-\left[\overline{RT}\gamma(k_z^2 + k_x^2\delta_1)\right](k_x U - v)^2 + \left(g\overline{RT}\gamma k_x^2 \frac{1}{\overline{\alpha}} \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial z}\right) = 0 \quad (2.24)$$

Nunmehr kann man für den letzten Term die potentielle Temperatur durch den Ansatz

$$\frac{1}{\overline{\alpha}} \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial z} = \frac{1}{\overline{\Theta}} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial z}$$

eingeführen. Dies ist durch folgende Überlegungen gestattet. Die Beziehung für die potentielle Temperatur des Grundzustandes lautet in logarithmischer Form

$$\ln \overline{\Theta} = \ln \overline{T} + \frac{R}{c_p} (\ln p_0 - \ln \overline{p}) \quad (2.25)$$

Differenziert nach z ergibt sich

$$\frac{1}{\overline{\Theta}} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial z} = \frac{1}{\overline{T}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} - \frac{R}{c_p} \frac{1}{\overline{p}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \quad (2.26)$$

Durch Logarithmierung der Gasgleichung für den Grundzustand erhalten wir

$$\ln \overline{p} = \ln \overline{\rho} + \ln \overline{T} + \ln R$$

und wiederum differenziert nach z zunächst

$$\frac{1}{\overline{p}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} = \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial z} + \frac{1}{\overline{T}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \quad (2.27)$$

Setzt man in (2.26) aus (2.27) für $\frac{1}{\overline{T}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}$ ein, dann ergibt sich

$$\frac{1}{\overline{\Theta}} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial z} = \left(1 - \frac{R}{c_p}\right) \frac{1}{\overline{p}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} - \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial z} \quad (2.28)$$

Bekanntlich gilt die Identität $\frac{1}{\overline{\alpha}} \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial z} \equiv -\frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial z}$

woraus mit $R = c_p - c_v$ aus (2.28)

$$\frac{1}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{1}{\gamma \bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \quad (2.29)$$

folgt. Für den Grundzustand haben wir mit (2.13) hydrostatische Verhältnisse vorausgesetzt. Deshalb kann man zusätzlich mit Hilfe der Gasgleichung leicht zeigen, dass die nachstehenden Beziehungen gelten müssen:

$$\frac{1}{\gamma \bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\bar{\alpha}}{R \bar{T}} \frac{g}{\bar{\alpha}} = -\frac{g}{\gamma R \bar{T}} \equiv -\frac{g}{c_s^2}$$

wobei c_s^2 laut (2.23) das Quadrat der Schallgeschwindigkeit darstellt. Da sich Schallwellen nur in einem kompressiblen Medium ausbreiten können, wir aber hier mit $\delta_2 = 0$ Inkompressibilität voraussetzen, muss $c_s = \infty$ werden, woraus schließlich mit (2.29)

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} = \frac{1}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} \quad (2.30)$$

folgt, quod erat demonstrandum. Mit dieser letzteren Relation erhalten wir für die Frequenzgleichung (2.24) sofort mit $\delta_1 = 1$ und $U = 0$

$$v^2 = \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_z^2} \frac{g}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} \quad (2.31)$$

Entsprechend $v^2 = c^2(k_x^2 + k_z^2)$ erhält man dann schließlich

$$c = \pm \frac{k_x}{k_x^2 + k_z^2} \left[\frac{g}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

als Phasengeschwindigkeit für interne Schwerewellen.

Verschwindet die Dichte über einer Diskontinuitätsfläche, dann erhält man Oberflächen- oder „externe“ Schwerewellen. Man kann diese ebenfalls bei einem inkompressiblen Medium, das wir hier auch als homogen annehmen wollen (d.h. die Dichte sei nicht nur zeitlich, sondern auch räumlich konstant ($\rho = \bar{\rho}; \rho' = 0$)) und außerdem im hydrostatischen Gleichgewicht beobachten. Das Medium besitzt eine freie Oberfläche in der Höhe $h(x)$. An jedem Punkt mit den Koordinaten (x, z) innerhalb des Mediums herrscht der hydrostatische Druck

$$p(x, z) = \int_z^{z=h} g \bar{\rho} dz \equiv g \bar{\rho} \int_z^{z=h} dz \quad (2.33)$$

da g mit der Höhe als konstant angesehen werden kann. Nach erfolgter Integration ergibt sich

$$p(x, z) = g \bar{\rho} (h - z) \quad (2.34)$$

Differenziert man diese Beziehung (2.34) nach x , dann folgt sofort

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\bar{\rho} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.35)$$

weil im (x,z) -System $\partial z/\partial x = 0$ ist. Die linearisierte Bewegungsgleichung (2.15) lässt sich mit Hilfe von (2.35) und der Aufspaltung von h in $h = H + h'$, wobei $H = \text{const.}$ ist, in

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (2.36)$$

umschreiben. Für die Kontinuitätsgleichung (2.18) erhalten wir, da $\bar{\alpha} \neq 0$ ist und $\delta_2 = 0$ (Inkompressibilität) angenommen wurde

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.37)$$

Integriert man in den Grenzen $z = 0$ und $z = h$, dann folgt, wenn u' von z unabhängig ist ¹:

$$\int_{z=0}^{z=h} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) dz = h \frac{\partial u'}{\partial x} + w'_h - w'_0 = 0 \quad (2.38)$$

Da an einer ebenen unteren Begrenzung des Mediums keine vertikalen Bewegungen auftreten können, gilt $w'_0 = 0$. Für w'_h , die vertikale Bewegung des Mediums an der freien Oberfläche, ergibt sich in der (x,z) -Ebene

$$w'_h = \frac{dh'}{dt} = \frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x}$$

woraus schließlich aus (2.38) mit $h = h' + H$ unter Vernachlässigung nicht-lineare Perturbationsterme, wie z. B. $h' \partial u' / \partial x$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.39)$$

folgt. Da h' und u' von z unabhängig sind, kann man als Lösung für (2.36) und (2.39) Harmonische der Form

$$\begin{bmatrix} u' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ h_0 \end{bmatrix} \exp[ik_x(x - ct)] \quad (2.40)$$

ansetzen. Führt man diese in die Gleichungen (2.36) und (2.39) ein, dann ergibt sich ein homogenes, algebraisches Gleichungssystem, dessen Koeffizientendeterminante

¹ Wegen (2.35) ist der Druckgradient höhenunabhängig. Deshalb ist bei höhenunabhängiger Perturbationskomponente u' auch deren zeitliche Änderung höhenunabhängig. Dies bleibt dann für alle Zeit so.

$$\begin{vmatrix} (U-c) & g \\ H & (U-c) \end{vmatrix} = 0$$

gesetzt werden muss, um für u_0 und h_0 von Null verschiedene Lösungen zu erhalten.

Die Entwicklung der Determinante ergibt sofort die Beziehung für die Phasengeschwindigkeit externer Schwerewellen mit

$$c = U \pm (gH)^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

Man nennt diese Schwerewellen auch „Flachwasserwellen“ (shallow water waves).

Bisher haben wir unsere Betrachtungen auf die (x,z) -Ebene und ein ruhendes kartesisches Koordinatensystem beschränkt und konnten hiebei Schall- und Schwerewellen isolieren. Nunmehr wollen wir zu einer noch realistischeren Betrachtung übergehen und ein mit der Winkelgeschwindigkeit Ω rotierendes, kartesisches (x,y,z) -Koordinatensystem betrachten. Auch hier wollen wir ein homogenes, inkompressibles Medium im hydrostatischen Gleichgewicht, mit einer ebenen, unteren Begrenzung und einer freien Oberfläche, verwenden. Wir werden damit zu einem Mischtypus von Wellen gelangen, der sich aus „Trägheitsschwerewellen“ und „Rossby-Wellen“ zusammensetzt.

Die Bewegungsgleichungen in Komponentenform schreiben sich dann unter Bedachtnahme auf $p(x,y,z) = g\bar{\rho}(h-z)$ bzw.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\bar{\rho} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = g\bar{\rho} \frac{\partial h}{\partial y} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -g\bar{\rho}$$

und Reibungsfreiheit von (1.46) ausgehend

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2.43)$$

Auch hier handelt es sich um die sogenannten „Flachwassergleichungen“. Die dritte Bewegungsgleichung degeneriert zur statischen Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g\bar{\rho} = 0 \quad (2.44)$$

Mit konstanter Dichte und unter der Voraussetzung des hydrostatischen Zustandes, ist die horizontale Druckkraft höhenunabhängig. Nehmen wir nunmehr an, dass u und v anfangs ebenfalls von z unabhängig sind, dann gilt dies ebenso für $\partial u/\partial t$ bzw. $\partial v/\partial t$. Hiemit ist aber auch $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$ für alle weitere Zukunft. Damit vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen ein weiteres mal zu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.42a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (2.43a)$$

Für die Kontinuitätsgleichung in dem gewählten kartesischen und hydrostatischen (x,y,z) -System und einem inkompressiblen Medium ergibt sich aus (1.9)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.45)$$

Nach Integration über z erhalten wir für das (x, y, z) -System analog zu (2.39)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.46)$$

Damit haben wir ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten u , v und h , welches ausreichend bestimmt ist. Da f in den Bewegungsgleichungen als Funktion $f = f(y)$ behandelt werden muß, wird die Analyse einigermaßen umständlich. Man kann aber einen dem obigen Gleichungssystem äquivalenten Satz ableiten, indem für eine Bewegungskomponente die Vorticitygleichung eingeführt wird. Sie ist im vorliegenden Fall leicht dadurch zu erhalten, dass man (2.43a) nach x und (2.42a) nach y ableitet und die Differenz beider Komponenten bildet:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + \beta v + (\xi + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.47)$$

wobei $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ist und $\beta = \frac{df}{dy}$ den sogenannten „Rossby-Parameter“ darstellt. Mit Hilfe von (2.46) kann (2.47) leicht in die Form

$$\frac{d}{dt} (\xi + f) = \frac{\xi + f}{h} \frac{dh}{dt}$$

umgewandelt werden, was mit dem Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\xi + f}{h} \right) = 0 \quad (2.48)$$

identisch ist. Die Größe $\left(\frac{\xi + f}{h} \right)$ wird auch als „potentielle Vorticity“ bezeichnet. Mit Hilfe der Vorticitygleichung haben wir nunmehr eine entsprechende Beziehung für die Abhängigkeit des Coriolisparameters von y eingeführt, womit sich die beabsichtigte Analyse vereinfacht. Als nächstes linearisieren wir die Gleichungen (2.42a), (2.46) und (2.47) in gewohnter Weise, wobei wir aber der Einfachheit halber annehmen, dass die Perturbationen von y unabhängig sind und der Grundstrom in die y -Richtung $V = 0$ gesetzt wird. Weiters

ersehen wir aus (2.43.a), dass H nicht streng konstant ist und U und H über die Gleichgewichtsbedingung

$$-\frac{fU}{g} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad (2.49)$$

in Beziehung stehen. H ist hier die atmosphärische Skalenhöhe oder die Tiefe des Fluids. Damit ergeben sich schließlich die drei Gleichungen:

$$\delta \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u' - fv' + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (2.50)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) h' + \frac{\partial H}{\partial y} v' + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.51)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial v'}{\partial x} + \beta v' + f \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.52)$$

Der Multiplikator δ ($= 0$ oder 1) in (2.50) dient wieder zur Identifizierung des horizontalen Beschleunigungstermes im Zuge der weiteren Betrachtungen. Als nächstes wollen wir wieder harmonische Perturbationen der Form

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ h_0 \end{bmatrix} \exp[ik_x(x - ct)] \quad (2.53)$$

annehmen. An Hand dieser Lösungsansätze kann man leicht verifizieren [s.dazu THOMPSON (1961)], dass die nachstehenden Operator-Identitäten gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\equiv -c \frac{\partial}{\partial x} \text{ ist, weil } \frac{\partial u'}{\partial t} = -c \{ ik_x U_0 \exp[ik_x(x - ct)] \} \text{ und} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\equiv -k_x^2 \text{ bedeutet, weil } \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = -k_x^2 \{ V_0 \exp[ik_x(x - ct)] \} \text{ ist.} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Man erkennt sofort, dass die Terme in der geschlungenen Klammer jeweils $\frac{\partial u'}{\partial x}$ bzw. v' bedeuten. Mit Hilfe von (2.49) und (2.54) folgt sodann

$$\delta(U - c) \frac{\partial u'}{\partial x} - fv' + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (2.55)$$

$$-k_x^2(U - c)v' + \beta v' + f \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.56)$$

$$(U - c) \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{fU}{g} v' + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.57)$$

Somit erhalten wir ein simultanes System von drei homogenen, algebraischen Gleichungen mit den Variablen $\frac{\partial u'}{\partial x}$, v' und $\frac{\partial h'}{\partial x}$, welches in Matrixform

$$\begin{bmatrix} \delta(U-c) & -f & g \\ f & -[k_x^2(U-c)-\beta] & 0 \\ H & -fU/g & (U-c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u'/\partial x \\ v' \\ \partial h'/\partial x \end{bmatrix} = 0 \quad (2.58)$$

geschrieben werden kann. Für eine nicht-triviale von Null verschiedene Lösung muß die Koeffizientendeterminante verschwinden. Die Entwicklung dieser Determinante führt dann erneut zu einer „Frequenzgleichung“, welche die zu einer bestimmten Wellenzahl zugehörige Phasengeschwindigkeit determiniert:

$$[\beta - k_x^2(U-c)][gH - (U-c)(U-c)\delta] - f^2[(U-c) - U] = 0 \quad (2.59)$$

Die vorliegende Gleichung ist von dritter Ordnung mit Bezug auf die unbekannte Variable $(U-c)$. Eine angenäherte Wurzel lässt sich finden, wenn man zunächst Versuchsweise annimmt, dass $(U-c)^2 \ll gH$ ist, d.h. die relative Geschwindigkeit des gesuchten Wellentyps wesentlich kleiner als die von Schwerewellen ist, womit die Gleichung (2.59) zu

$$\beta gH - (k_x^2 gH + f^2)(U-c) + f^2 U = 0 \quad (2.60)$$

degeneriert, woraus schließlich die relative Phasengeschwindigkeit

$$c - U = -\frac{\beta + f^2 U / gH}{k_x^2 + f^2 / gH} \quad (2.61)$$

resultiert. Für jeden realistischen Wert von gH , welcher nichts anderes als das Quadrat der Phasengeschwindigkeit von Schwerewellen darstellt, ist die relative Phasengeschwindigkeit $(U-c)$ sehr klein, womit die vorhin getroffene Annahme nachträglich als zutreffend bestätigt wird. Mit großem gH degeneriert die Gl. (2.61) zu

$$c \cong U - \frac{\beta}{k_x^2} \quad (2.62)$$

was nichts anderes als die berühmte „ROSSBY-Formel“ darstellt. Wir haben es also im vorliegenden Fall überwiegend mit horizontalen Transversalwellen, welche vom Rossby-Typ sind zu tun. Diese breiten sich relativ langsam in eine Richtung, in der Atmosphäre in der Regel westwärts, aus. Die Rossby-Wellen stellen im allgemeinen die großen Fluktuationen in den synoptischen Strukturen der Variablenfelder dar.

Die beiden verbleibenden Wurzeln können durch eine weitere Versuchsannahme, nämlich, dass die Phasengeschwindigkeit des gesuchten Wellentyps viel größer als die der Rossbywellen c_R , d.h. dass

$$|c| \gg |c_R| = \left| U - \frac{\beta}{k_x^2} \right| \text{ bzw. } k_x^2 |U - c| \gg |\beta|$$

ist, gefunden werden. Da die Magnitudo $c_R \equiv \text{Magnitudo } U$ ist, ergibt sich weiters

$$|c| \gg |U| \text{ bzw. } |c - U| \gg U$$

Unter diesen Voraussetzungen degeneriert die Frequenzgleichung (2.59) zu

$$(U - c)(U - c)\delta = gH + \frac{f^2}{k_x^2} \quad (2.63)$$

Daraus erkennt man, dass die Phasengeschwindigkeit von Schwerewellen relativ zum Medium wesentlich größer als die der Rossby-Wellen ist, womit auch hier die getroffene Annahme a posteriori bestätigt wird. Setzt man für $\delta = 1$, dann folgt für die Phasengeschwindigkeit des untersuchten Wellentyps:

$$c = U \pm \left[gH + \frac{f^2}{k_x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.64)$$

Es handelt sich hierbei um „Trägheitsschwerewellen“. Die Wellenbewegungen, welche von (2.64) beschrieben werden, sind Schwerewellen, die sich nach zwei Richtungen ausbreiten und deren Phasengeschwindigkeit durch die Erdrotation leicht modifiziert wird.

Schon früher haben wir festgestellt, dass Schallwellen mit vertikaler Komponente entweder durch die Annahme der Inkompressibilität oder der hydrostatischen Annahme ausgefiltert werden können. Im folgenden wollen wir dies noch etwas mehr präzisieren. Zur Isolierung vertikaler Schallwellen genügt es, die erste Zeile und die erste Spalte in der zu der Matrix in (2.20) gehörenden Koeffizientendeterminante zu streichen und $U = 0$ zu setzen. Für die vertikale Ausbreitung ergibt sich weiters $v = ck_z$ und $k_x = 0$ und da wir auch hier ein homogenes Medium annehmen wollen $\partial \bar{\alpha} / \partial z = 0$. Damit degeneriert die Koeffizientendeterminante zu

$$\begin{vmatrix} -\delta_1 ck_z & \bar{\alpha} k_z & gi / \bar{\alpha} \\ ig & -\bar{\alpha} ck_z & -\bar{p} \gamma ck_z \\ \bar{\alpha} k_z & 0 & \delta_2 ck_z \end{vmatrix} = 0$$

woraus nach Entwicklung

$$\delta_1 \delta_2 c^2 k_z^2 - \bar{p} \bar{\alpha} \gamma k_z^2 + k_z ig - \delta_2 k_z ig = 0 \quad (2.65)$$

als Frequenzgleichung für vertikale Schallwellen folgt. Mit $\bar{p} \bar{\alpha} = R \bar{T}$ und $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ergibt sich sofort für die Phasengeschwindigkeit vertikaler Schallwellen, wie schon früher für Schallwellen generell, die Beziehung:

$$c = \pm [\gamma R \bar{T}]^{\frac{1}{2}}$$

Aus (2.21) und (2.65) erkennt man nunmehr eindeutig, dass durch die Annahme der Inkompressibilität sowohl horizontale als auch vertikale Schallwellen ausgefiltert werden,

während durch die hydrostatische Approximation nur die vertikalen Schallwellen verschwinden. Es verbleibt das Problem, auch die horizontalen Schallwellen zu isolieren. Zu diesem Zweck setzt man in der Koeffizientendeterminante von (2.20) $W_0 = 0$ und $k_z = 0$ und streicht die zweite Reihe und zweite Spalte. Auch hier ergibt sich eine nicht-triviale Lösung, wenn die entstehende Determinante gleich Null gesetzt wird.

$$\begin{vmatrix} (k_x U - v) & \bar{\alpha} k_x & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}(k_x U - v) & \bar{p}\gamma(k_x U - v) \\ \bar{\alpha} k_x & 0 & -\delta_2(k_x U - v) \end{vmatrix} = 0$$

Die Entwicklung dieser Determinante führt mit $ck_x = v$ zur Frequenzgleichung für horizontale Schallwellen

$$\delta_2(U - c)^3 - \gamma R \bar{T}(U - c) = 0 \quad (2.66)$$

Für ein kompressibles Medium mit $\delta_2 = 1$ ergeben sich drei Wurzeln mit

$$c = U \text{ als triviale Lösung und } c = U \pm [\gamma R \bar{T}]^{\frac{1}{2}}$$

als Lösung für die Phasengeschwindigkeit der horizontalen Schallwellen. Führt man Inkompressibilität mit $\delta_2 = 0$ ein, dann verbleibt nur die triviale Lösung $c = U$ und gleichzeitig sind auch die horizontalen Schallwellen ausgefiltert. Es gibt allerdings auch horizontale Schallwellen mit einer vertikalen Anhängigkeit, welche nach ihrem Entdecker LAMB-Wellen genannt werden. Bezüglich einer rigorosen Ableitung darf hier auf PICHLER (1997) verwiesen werden. Die Formel für die Phasengeschwindigkeit dieses Wellentyps lautet ebenfalls:

$$c = U \pm \left[\gamma R \bar{T} + \frac{f^2}{k_x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.67)$$

Auch LAMB-Wellen transportieren nur sehr geringe Energien in der Atmosphäre, mit Hinblick auf das Stabilitätskriterium führte ihre Existenz aber zu beachtlichen Einschränkungen des möglichen Zeitschritts bei der numerischen Integration der hydrostatisch approximierten Modellgleichungen. Gleichzeitig stellen wir totale Ähnlichkeit zwischen (2.67) und (2.64) fest. Da die Modellgleichungen ohnehin nicht von sich aus den Wellentyp unterscheiden können, spricht man mit Recht sowohl bei Schwere- wie bei Schallwellen von „horizontalen Lärmprozessen“ oder auch kurz vom „Meteorologischen Lärm“ [s. HINKELMANN (1951)]. Während die Schallwellen durch Annahme der Inkompressibilität komplett ausgefiltert werden können, genügt dies für Schwerewellen allein nicht. Aus der Frequenzgleichung (2.59) können wir entnehmen, dass Schwerewellen ihre Existenz dem Term $(U - c)(U - c)\delta$ verdanken. Dementsprechend ist die notwendige, wenn auch sehr strenge Bedingung, Schwerewellen auszufiltern, die Relation

$$(U - c)\delta = 0 \quad (2.68)$$

Wenn man die Ableitung der Frequenzgleichung (2.59) zurückverfolgt, dann ist sofort ersichtlich, dass die Bedingung (2.68) mit

$$\delta \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u' = 0$$

ident ist, wodurch aber (2.50) bzw. (2.55) zu

$$v' = \frac{g}{f} \frac{\partial h'}{\partial x} \tag{2.69}$$

degeneriert. Diese Beziehung ist aber nichts anderes als die geostrophische Windbeziehung. Diese erweist sich somit als „Filter“ für Schwerewellen. Ein geostrophisches Windfeld ist, wie zu ersehen ist, beschleunigungsfrei. Deshalb ist in einem solchen auch Schallwellenausbreitung unmöglich. Man kann dies noch zusätzlich demonstrieren, wenn man in (2.20) keine Beschleunigung im u' -Feld zulässt, (d.h. $\delta(U-c)=0$ ist), $W_0 = 0$ setzt und somit die zweite Zeile und zweite Spalte streicht und deshalb

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{\alpha}k_x & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}(k_x U - v) & \bar{p}\gamma(k_x U - v) \\ \bar{\alpha}k_x & 0 & -\delta_2(k_x U - v) \end{vmatrix} = 0$$

erhält. Man kann sich dann leicht überzeugen, dass durch deren Entwicklung selbst mit $\delta_2 = 1$ keine Schallwellen auftreten können. Damit sind alle „Lärmprozesse“ ausgefiltert. Die Gleichungen (2.69), (2.56) und (2.57) stellen die linearisierte Form der „gefilterten Modellgleichungen“ dar. Die Frequenzgleichung für diese gefilterten Modellgleichungen entspricht exakt der Beziehung (2.60). Die Beziehungen (2.61) und (2.62) stellen somit eine sehr gute Näherung für die Phasengeschwindigkeit der synoptisch wichtigen Rossby-Prozesse dar. Die „geostrophische“ Filterbedingung zur Ausfilterung der horizontalen Lärmprozesse erweist sich als hinreichend und entspricht einigermaßen der Forderung die Rossby-Prozesse nicht allzustark zu beeinflussen. Weshalb dies so ist, lässt sich damit begründen, dass die Amplituden der Lärmprozesse viel kleiner sind als die der Rossby-Wellen und die Atmosphäre im allgemeinen ständig in Richtung des geostrophischen Gleichgewichts tendiert. Da aber die eigentlichen Ursachen für die synoptischen Umlagerungen letztlich in den Abweichungen vom geostrophischen Gleichgewicht zu suchen sind, kann die Filterung durch „geostrophische Approximation“ keinesfall als ideal angesehen werden und genießt deshalb auch heute nur mehr historisches Interesse.

2.3 Nichtgeostrophische Filterung

Obwohl die im vorhergehenden Abschnitt dargelegten Filterungsmethoden für horizontale Lärmprozesse hinreichend sind, erweisen sie sich aber mitunter mehr als hinreichend, da sie dann leider auch die Rossby-Prozesse beschneiden. Die Frage ist insoferne von größerer, praktischer Bedeutung, weil die wahren Winde in der Atmosphäre mitunter beachtlich vom geostrophischen Gleichgewicht abweichen können, wie dies besonders bei hoher Strömungsgeschwindigkeit und stark gekrümmten Stromlinien der Fall ist. Obwohl die großräumigen Bewegungen in der Atmosphäre durch die „geostrophische Windbeziehung“

recht gut beschrieben werden können, erfasst sie die Detailstrukturen mitunter sehr unzutreffend. Außerdem können, wie bereits wiederholt festgestellt wurde, Druckänderungen, auf welche unter anderem Rossby-Prozesse zurückzuführen sind, nur durch ageostrophischen Massenfluß zustande kommen. Man hat sich deshalb die Frage gestellt, ob man nicht mit einer weniger strengen Filterbedingung das Auslangen finden könnte. Schwerewellen verursachen, wie im Modell des homogenen Mediums gezeigt werden konnte, wellenförmig strukturierte Vertikalbewegungen einer materiellen Fläche, d.h. der freien Oberfläche des Mediums. Diese Vertikalbewegungen werden von einer Oszillation der horizontalen Divergenz begleitet, wie aus der Kontinuitätsgleichung (2.46) zu entnehmen ist. Die horizontale Stromfelddivergenz auf einer materiellen Fläche kann durch die Relation [s. PICHLER (1997);p.49]

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_H = \frac{1}{\delta\sigma} \frac{d(\delta\sigma)}{dt} \quad (2.70)$$

beschrieben werden, wobei die rechte Seite die individuelle Änderung eines Flächenelementes (= relative Ausdehnungsgeschwindigkeit) ausgedrückt durch

$$\delta\sigma = \delta x \delta y$$

darstellt. Damit oszilliert auch die Ausdehnungsgeschwindigkeit einer materiellen Fläche konform zur horizontalen Divergenz und Vertikalgeschwindigkeit, d.h. wie FORTAK (1973) gezeigt hat, dass Schwerewellen Ausdehnungsbeschleunigungen einer materiellen Fläche auslösen. Bildet man von (2.70) die individuelle Änderung, dann ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(\nabla \cdot \mathbf{v}_H) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\delta\sigma} \frac{d(\delta\sigma)}{dt} \right] = \frac{1}{\delta\sigma} \frac{d^2(\delta\sigma)}{dt^2} - \frac{1}{(\delta\sigma)^2} \left[\frac{d(\delta\sigma)}{dt} \right]^2 \quad (2.71)$$

Damit folgt aber gemäß (2.70) und (2.71) sofort

$$\frac{d}{dt}(\nabla \cdot \mathbf{v}_H) + (\nabla \cdot \mathbf{v}_H)^2 = \frac{1}{\delta\sigma} \frac{d^2(\delta\sigma)}{dt^2} \quad (2.72)$$

Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen den beiden Divergenztermen und der Ausdehnungsbeschleunigung einer materiellen Fläche dar. Nun erinnern wir uns an die Divergenzgleichung (1.16) im Abschnitt 1.3, die wir in etwas zusammengefasster Form und unter Vernachlässigung des Reibungsterms und des dritten Terms der rechten Seite aus Gründen der magnitudo unter hydrostatischen Verhältnissen im System $\varepsilon = p$ in nachfolgender Form schreiben können:

$$\frac{dD}{dt} + D^2 - 2J(u, v) + u\beta - f\xi + \nabla_p^2 \Phi = 0$$

wobei $D \equiv \nabla \cdot \mathbf{v}_H = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{a}$ bedeutet. Man erkennt sofort, dass die ersten beiden

Terme nichts anderes als die Ausdehnungsbeschleunigung auf einer p-Fläche darstellen. Unterbindet man diese, dann können auch keine Schwerewellen ausgelöst werden. Somit degeneriert die Divergenzgleichung zu der Relation

$$\xi f - u\beta + 2J(u, v) = \nabla_p^2 \Phi \quad (2.73)$$

Diese Gleichung wird in der Literatur als „Balancegleichung“ bezeichnet. Sie ist eine zeitfreie, diagnostische Verträglichkeitsbedingung, die den Zusammenhang zwischen Wind und Geopotentialfeld herstellt. Gleichzeitig ist sie auch ein „Filter“ für Schwerewellen. Während der geostrophische Wind geradlinig und beschleunigungsfrei ist und keine befriedigende Näherung für den wirklichen Wind darstellt, beschreibt die Balancegleichung eine wesentlich bessere Näherung des horizontalen Windes. Dieser ist hiemit nicht länger beschleunigungsfrei. Die Balancegleichung enthält z.B. den Gradientwind als Lösung, womit auch Zentrifugalbeschleunigungen mitberücksichtigt werden. In der Form von (2.73) kann die Balancegleichung aber noch nicht gelöst werden, da sie gleichzeitig u und v als unbekannte Variable enthält. Mit Hilfe des Helmholtz-Theorems kann man aber den horizontalen Wind in einen rotorfreien und divergenzfreien Anteil zerlegen:

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_d = \mathbf{i}_r \times \nabla_p \psi + \nabla_p \chi \quad (2.74)$$

wobei in (2.74) ψ die Stromfunktion und χ das Geschwindigkeitspotential darstellen. Im „synoptischen Scale“ ist der rotorfreie gegenüber dem divergenzfreien Anteil des Windfeldes klein, sodaßs(2.74) mit guter Näherung zu

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{i}_r \times \nabla_p \psi \quad (2.74a)$$

degeneriert. In vereinfachter Komponentenschreibweise ergibt sich für (2.74a) im sphärischen Koordinatensystem

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.75a,b)$$

Für die relative Vorticity erhalten wir gemäß Abschnitt 1.3, Seite 12, in sphärischen Koordinaten

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\tan \varphi}{r} u$$

und entsprechend ausgedrückt durch die Stromfunktion im sphärischen System

$$\xi \equiv \nabla_{\text{psph}}^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\tan \varphi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.76)$$

Nach Einsetzen von (2.75a,b) und (2.76) in die Balancegleichung (2.73) ergibt sich schließlich

$$f \nabla_{\text{psph}}^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \beta - 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = \nabla_p^2 \Phi \quad (2.77)$$

Ist die Stromfunktion ψ a priori bekannt, dann stellt (2.77) eine Poisson-Gleichung zur Bestimmung von Φ dar. Umgekehrt wird bei bekanntem Geopotential Φ (2.77) zu einer nicht-linearen Differentialgleichung vom Monge-Ampère-Typus zur Bestimmung der

Stromfunktion ψ . Entsprechende numerische Lösungsverfahren stehen zur Verfügung, worüber an anderer Stelle zu berichten sein wird. Auf Grund unserer bisherigen Überlegungen kann man die Balancegleichung als „nichtgeostrophische Approximation“ eines „lärmfreien“ Anfangswindfeldes verwenden und damit auch nichtgeostrophische Modellgleichungen ableiten. Nach Verwendung der Balancegleichung können keine Schwerewellen-Lösungen im Modell mehr auftreten. Werden die Gleichungen in einem (x,y,p,t) -System abgeleitet, dann ist mit Hinblick auf die inkompressiblen Medien ähnliche Kontinuitätsgleichung (RICHARDSON-Gleichung) davon auszugehen, dass sich die Luft zwischen zwei isobaren Flächen so verhält als ob sie inkompressibel wäre. Damit sind aber auch keine Schallwellen-Lösungen möglich. Somit sind auch hier alle „Lärmprozesse“ ausgefiltert. Man bezeichnet somit die Balancegleichung als „generalisierte Filterbedingung“. Bei Verwendung der nicht-linearen Balancegleichung (2.77) sprechen wir von „nicht-linear balanzierten Modellen“. Es gibt allerdings auch eine lineare Form der Balancegleichung mit

$$f \nabla_{pSPH}^2 \psi + \nabla_p \psi \cdot \nabla_p f = \nabla_p^2 \Phi$$

für „linear balanzierte Modelle“. Allen diesen „nicht-geostrophischen“ gefilterten Modellgleichungen ist aber eines gemeinsam:

Sie stellen eine enorme Aufgabe hinsichtlich des Rechenpensums dar, die alle jene Vorteile ökonomischer Zeitschritte gemäß dem CFL-Kriterium, welche durch die Filterung gewonnen werden konnten, wieder aufhebt.

Aus diesem Grund begann man sich in den späten Fünfzigerjahren des vergangenen Jahrhunderts mit dem Gedanken zu tragen, die Gleichungen in ihrer ursprünglichen und ungefilterten Form zu integrieren. Man spricht deshalb von den „Primitiven Gleichungen (PE)“ oder „ursprünglichen Gleichungen“. Tatsächlich werden heute keine gefilterten Gleichungen in der „Numerischen Wettervorhersage (NWP)“ mehr verwendet. Die eingehende Betrachtung des Filterproblems sollte aber hier dazu dienen, das Verständnis für einige grundlegende Probleme der NWP zu erleichtern.

2.4 Die charakteristischen Unterschiede zwischen den „Primitiven Gleichungen(PE)“ und den gefilterten Gleichungen

Die hauptsächlichen, physikalischen Unterschiede zwischen den PE und den gefilterten Gleichungen lassen sich einer Darstellung von HINKELMANN (1969) folgend, in nachstehender Weise auflisten:

- 1.) Nach dem Wellentyp, den sie beschreiben. Gefilterte Gleichungen beinhalten nur typisch meteorologische Wellenvorgänge (stabile und instabile), wie sie sich in der Verlagerung und Entwicklung des Druck-, Temperatur- und Windfeldes in den synoptischen Wetterkarten manifestieren. Sie werden als Rossby-Prozesse bezeichnet und bewegen sich mit einer Phasengeschwindigkeit, die der Größenordnung des Horizontalwindes entspricht.
- 2.) Die PE lassen hingegen zusätzlich auch Lösungen zu, die sich nicht auf synoptische Prozesse beziehen und für die großräumige Wettervorhersage nur von geringem Interesse sind. Es sind dies die „Lärmwellen“, welche als kombinierte Schall-Schwere-Trägheitswellen auftreten. Diese breiten sich mit einer Phasengeschwindigkeit aus, die um eine Größenordnung höher ist und im Bereich der Schallgeschwindigkeit liegt. Die Ausbreitung erfolgt in verschiedenen Richtungen im

- Raum. Sie können im Rechenprozess sehr leicht die wetterwichtigen Rossby-Prozesse vollständig überdecken, wenn man nicht entsprechende Schritte unternimmt, sie schon im Anfangszustand zu unterdrücken.
- 3.) Nach der Darstellung des Anfangszustandes: Die hydrostatischen PE erlauben uns als Konsequenz der Existenz verschiedener Wellentypen bzw. Typen von Wellenfamilien das anfängliche Massenfild, z.B. die potentielle Temperatur θ , den Bodendruck p_s , oder das Geopotential Φ und das horizontale Windfeld völlig beliebig vorzugeben und für die abhängigen Variablen jeweils eigene Gleichungen separat zu spezifizieren. Die gefilterten Gleichungen gestatten uns nur die Spezifizierung eines skalaren Feldes, z.B. des Geopotentials oder der Stromfunktion des Horizontalwindes.
 - 4.) Nach der Komplexität: Auf Grund der größeren Flexibilität, gestatten die Lösungen der PE die Untersuchung sehr spezieller atmosphärischer Phänomene, für welche die gefilterten Gleichungen keinen Zugang gewähren.
 - 5.) Nach der physikalischen Genauigkeit: Wir können erwarten, dass die Rossby-Prozesse, welche in den Lösungen der PE eingeschlossen sind, die realen und relevanten Prozesse, die uns meteorologisch und in der Wettervorhersage interessieren, perfekt simulieren. Wie vorher in extenso beschrieben, suchte man nach „Filtern“, welche die Lärmprozesse eliminieren, aber die Rossby-Prozesse weitgehend intakt halten. Die Lärmwellen können relativ leicht eliminiert werden, es gibt allerdings keine „Filter-Operatoren“ mit endlichem Aufwand, welche ausschließlich den „Lärm“ filtern und die Rossby-Prozesse komplett intakt halten. Die Unterschiede zwischen den realen Rossby-Prozessen und solchen, welche in „gefilterten“ Systemen verbleiben, wenn man diese an Hand der Phasengeschwindigkeiten der „linearen“ Wellentheorie untersucht, scheinen von geringer Bedeutung in barotropen, aber von essentieller Bedeutung in baroklinen Modellen zu sein. Die Amplifikation physikalisch instabiler Wellen ist in den Lösungen der PE kleiner als in den Lösungen der gefilterten Modellgleichungen. Auf Grund dieses Umstandes erscheint der Einbezug eines gewissen Anteils von „Lärmprozessen“ in den Rechengang ein notwendiges Übel zur Aufrechterhaltung einer möglichst großen Genauigkeit in der Simulation von Rossby-Prozessen zu sein. In der Tat bleibt bei den Initialisierungsverfahren ein balanzierter Anteil von „Lärmprozessen“ erhalten.
 - 6.) Nach dem numerischen Aufwand: Wegen des Vorhandenseins von Signalgeschwindigkeiten in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit, muss der zeitliche numerische Integrationsschritt um eine Größenordnung kleiner ausfallen als bei den gefilterten Gleichungen. Andererseits muss man festhalten, dass der Rechenaufwand pro Zeitschrittzyklus für die PE viel geringer ist als bei „gefilterten Modellen“, weil bei diesen zeitaufwendige und komplizierte Randwertprobleme gelöst werden müssen. Insbesondere, wenn die Rossby-Physik und die räumliche Gitterauflösung gesteigert wird steigt der Rechenaufwand in unökonomische Dimensionen. Aus diesen Gründen hat man den gefilterten Systemen den Rücken zugewendet und ist endgültig zur Lösung der PE übergegangen.
 - 7.) Nach dem Gebrauch verschiedener Differenzenschemata: Die numerischen Lösungen der PE weisen erfahrungsgemäß eine höhere Sensitivität auf Veränderungen der Differenzenschemata bzw. der Gitterstruktur auf als Lösungen der gefilterten Gleichungen. Dies dürfte aus dem Umstand resultieren, dass die PE mehr Variablen bzw. mehr prognostische Gleichungen und eine kompliziertere Physik enthalten. Es ist viel schwieriger für PE ökonomische und konsistente endliche Differenzenschemata zu entwickeln, die den „Truncation-Error“ (s. Kap.3, Abschnitt 3.1) in Grenzen halten als bei gefilterten Modellen. Häufig werden deshalb Glättungs- und/oder Diffusions-Operatoren angewendet, um den Truncation-Error zu reduzieren.

8.) Nach der Genauigkeit der Anfangsdaten: Ein Umstand der ursprünglich gegen die Verwendung der PE sprach, besteht in der Notwendigkeit, die zeitlichen Tendenzen aus der kleinen Differenz von im Betrag großer Terme, wie z.B. Coriolis- und Druckgradientkräfte, zu berechnen. Diese Differenzen sind im allgemeinen nicht mit genügender Genauigkeit bekannt, da ihre Größenordnung im Bereich der Beobachtungsfehler liegt. Trotz dieses Hindernisses hat man begonnen die PE zu verwenden. Hierbei zeigte sich, dass Fehler im Feld der Anfangskräfte für die praktische, kurzfristige Wettervorhersage nur wenig Bedeutung haben, solange die Messfehler klein gegenüber den absoluten Werten der Kräftekomponenten selbst bleiben. Diese Bedingung ist in der realen Atmosphäre glücklicherweise meist erfüllt und letztere befindet sich meist im „quasi-geostrophischen“ Gleichgewicht, womit vernünftige Lösungen der PE auf der Basis des gegenwärtigen Niveaus der Beobachtungsgenauigkeit gegeben sind. Das Vorhandensein von Meß- und Analysefehlern überhaupt setzt aber der Vorhersagbarkeit der Atmosphäre Grenzen.

Die NWP will natürlich keine Lärmprozesse vorhersagen und ist in erster Linie nur an der korrekten Simulation der Rossby-Prozesse interessiert. Da die Lärmprozesse aber die letzteren überdecken können, müssen die Lärmprozesse möglichst vom Anfang an aus dem Lösungsprozess eliminiert werden. Um dieses Ziel zu erreichen, hat man bei Verwendung der PE die Anfangsfelder durch spezielle, diagnostische Relationen zu adjustieren versucht. Das Problem, diese diagnostischen Differentialgleichungen zu finden und zu lösen, wobei diese nur den Anfangsbedingungen genügen und im weiteren lärmfreie Bewegung garantieren sollen, wurde somit ein wesentliches Problem der diagnostischen Meteorologie. Im Rahmen dieser Problematik wurden die sogenannten „Initialisierungsverfahren“ [MACHENAUER (1977), BAER u. TRIBBIA (1977), LYNCH u. HUANG (1992), LYNCH (1997)] entwickelt. Der Hintergrund zur Behandlung des Initialisierungsproblems findet sich im nachfolgenden Abschnitt 2.5. Darüber hinaus hat sich aber ein sehr umfangreiches Programm zur Behandlung der initialen Daten in der NWP in Form der „Datenassimilisation“ entwickelt, welches aber mit Hinblick auf seinen Umfang nur in einer weiteren Monographie dargestellt werden kann. Allerdings muss hier noch ergänzend erwähnt werden, dass im Zuge der „Numerischen Methoden“, welche im Kapitel 3 dieser Monographie eingehend behandelt werden, auch Differenzenschemata entwickelt werden konnten, die a priori absolut stabil sind, weshalb in diesem Fall die Filterproblematik und die Rechenstabilität keinen Einfluss mehr aufweisen. Natürlich bleiben aber Datendichte und raumzeitliche Auflösung und damit der Rechenaufwand, trotz ständig wachsender Computereffektivität, vollauf von Bedeutung.

2.5 Zum Problem lärmfreier Anfangsdaten

Die hier angesprochene Problematik bildet den Hintergrund der Behandlung des sogenannten Initialisierungsproblems. Wir gehen zur Demonstration von einer linearisierten Form der Flachwassergleichungen aus, wobei auch hier jede Variation der Variablen u' , v' und $gh' = \Phi'$ in der y -Richtung vernachlässigt werden:

$$\delta \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u' - f v' + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \quad (2.78)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) v' + f u' = 0 \quad (2.79)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi' + \overline{\Phi} \frac{\partial u'}{\partial x} - f U v' = 0 \quad (2.80)$$

In obigen Gleichungen bedeutet $\overline{\Phi} = gH$, wobei H die Höhe der homogenen Atmosphäre darstellt. Eine Variation des Coriolisparameters $\beta = \partial f / \partial y$ wurde in den obigen Gleichungen der Einfachheit halber nicht berücksichtigt. Wir erinnern uns an das „Superpositionsprinzip“ und stellen fest, dass eine Lösung durch Überlagerung partikulärer Lösungen erreicht werden kann. Konsequenter Weise genügt deshalb die Betrachtung einer einfachen Welle mit der Wellenlänge L und der Wellenzahl $k_x = 2\pi/L$, die sich mit der Phasengeschwindigkeit c bzw. der relativen Phasengeschwindigkeit $c^r = U - c$ ausbreitet. Wellenlösungen ergeben sich somit aus dem Ansatz:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ \Phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix} \exp[ik_x(x - c t)] \quad (2.81)$$

wobei u_0, v_0 und Φ_0 relevante Amplituden darstellen. Setzt man (2.81) in (2.78) bis (2.80) ein, dann erhält man für die unbekanntenen Amplituden u_0, v_0 und Φ_0 ein homogenes Gleichungssystem, das in Matrixform

$$ik_x c^r \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f & -ik \\ -f & 0 & 0 \\ -ik\overline{\Phi} & fU & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

geschrieben werden kann. (2.82) stellt eine Eigenwertgleichung mit c^r als Eigenwert der Matrix in (2.82) dar. Nichttriviale Lösungen für u_0, v_0 und Φ_0 ergeben sich nur, wenn c^r einen Eigenwert der Matrix in (2.82) darstellt oder wenn c^r eine Wurzel der Frequenzgleichung

$$(c^r)^3 - \left(\overline{\Phi} + \frac{f^2}{k_x^2}\right) c^r + U \frac{f^2}{k_x^2} = 0 \quad (2.83)$$

ist. Näherungslösungen ergeben sich, wenn man für die langsame Lösung den ersten Term in (2.83) vernachlässigt und für die schnellen Lösungen $U = 0$ setzt. Man erhält dann:

$$c_1^r \equiv (U - c_1) \cong \frac{U}{1 + \frac{\overline{\Phi} k_x^2}{f^2}} \quad (2.84)$$

$$c_2^r \equiv (U - c_2) \cong +\frac{c_1^r}{2} - \sqrt{\overline{\Phi} + \frac{f^2}{k_x^2}} \quad (2.85)$$

$$c_3^r \equiv (U - c_3) \cong -\frac{c_1^r}{2} - \sqrt{\overline{\Phi} + \frac{f^2}{k_x^2}} \quad (2.86)$$

Man kann in weiterer Betrachtung die generelle Lösung von (2.78) bis (2.80) auch in Ausdrücken von Eigenwerten und Eigenlösungen diskutieren:

Linearen Gleichungen, wie $\underline{A}x = b$ begegnen wir bei stabilen Zustandsproblemen. Eigenwerte und Eigenwertgleichungen, wie $\underline{A}x = \lambda x$, haben hingegen ihre größte Bedeutung bei dynamischen Problemen [s. STRANG (1993)]. Eigenwerte einer Differentialgleichung bestimmen Zahlenwerte der Konstanten und Parameter, die in der Gleichung vorkommen und für die allein die Gleichung lösbar ist. Zu den Eigenwerten gehören die Eigenfunktionen oder Eigenvektoren, die Lösungen der Eigenwertgleichung darstellen. Die Aufgabe die Eigenwerte zu bestimmen heißt „Eigenwertproblem“. Auch in der Matrizenrechnung und bei der linearen Abbildung in der analytischen Geometrie können Eigenwertprobleme auftreten. So hat die oben erwähnte Eigenwertgleichung nur für gewisse Werte von λ nicht-triviale und n von der Nullmatrix verschiedene Lösungen. Es muß nämlich λ eine Wurzel der Gleichung $|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = 0$ sein, wobei \underline{I} die Einheitsmatrix darstellt und der ganze letztere Ausdruck eine Determinante ist. Die Berechnung dieser Determinante führt auf ein Polynom für λ , aus welchem λ berechnet werden und damit aus der Eigenwertgleichung auch die Eigenvektoren x bestimmt werden können.

Man findet die Amplituden u_j, v_j und Φ_j der Eigenlösungen durch Substitution der Wurzeln c_j^r in die Gleichung (2.82) . Eine der Größen ist beliebig und kann spezifiziert werden. Man wählt deshalb

$$u_j = U - c_j \tag{2.87a}$$

und löst anschließend zwei Gleichungen des Systems (2.82) . Aus

$$ik_x c_j^r u_j = f v_j - ik_x \Phi_j \tag{2.87b}$$

$$ik_x c_j^r v_j = -f u_j \tag{2.88}$$

ergibt sich folgerichtig

$$v_j = \frac{if}{k_x} \frac{u_j}{c_j^r} \text{ bzw. } \Phi_j = \frac{f^2}{k_x^2} \frac{u_j}{c_j^r} - c_j^r u_j$$

und somit schließlich mit entsprechender Normierung durch

$$u_j = c_j^r \tag{2.87c}$$

$$v_j = \frac{if}{k_x} \tag{2.89}$$

$$\Phi_j = \frac{f^2}{k_x^2} - (c_j^r)^2 \tag{2.90}$$

In Ausdrücken dieser Eigenvektoren kann man eine erweiterte, lineare Lösung in der nachstehenden matriziellen Form angeben:

$$\begin{pmatrix} u'(x, t) \\ v'(x, t) \\ \Phi'(x, t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 u_1 & a_2 u_2 & a_3 u_3 \\ a_1 v_1 & a_2 v_2 & a_3 v_3 \\ a_1 \Phi_1 & a_2 \Phi_2 & a_3 \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp[ik(x - c_1 t)] \\ \exp[ik(x - c_2 t)] \\ \exp[ik(x - c_3 t)] \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

wobei $c_j = U - c_j^r$ ist. Die Lösung der Gleichung (2.91) demonstriert, dass sich eine anfangs spezifizierte Welle für die drei Variablen u', v', Φ' in drei Wellen aufspaltet, die sich mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten ausbreiten. Dabei bestimmt c_1 die Verlagerung der Rossby-Wellen und c_2 und c_3 die in verschiedene Richtungen erfolgende Verlagerung der Trägheitsschwerewellen. Die Eigenkoeffizienten u_j, v_j und Φ_j werden charakterisiert durch die Eigenheiten der Wellen und die Parameter der Gleichungen (2.87c) bis (2.90), während die Faktoren a_1, a_2, a_3 beliebige Konstante sind, die wir jeweils zur Spezialisierung des Anfangszustandes der Amplituden und Phasen der drei verschiedenen Wellen, die zu u', v', Φ' gehören, beliebig wählen können. Mit dem Problem der Anfangsdaten stellen sich somit nach HINKELMANN (1969) die nachstehenden Fragen:

- 1.) Welche Beziehungen müssen die Anfangsdaten erfüllen, um lärmfreie Lösungen zu gewährleisten ?
- 2.) Wie stehen die drei Wellentypen, welche von den Phasengeschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 charakterisiert werden mit Hinblick auf die Spezialisierung der Anfangsbedingungen zueinander in Beziehung ?

Man kann diese Fragen auf Basis der Gleichung (2.81) beantworten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt offensichtlich für die Variante:

$$\begin{pmatrix} u'(x, t = 0) \\ v'(x, t = 0) \\ \Phi'(x, t = 0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix} \exp i k_x x \quad (2.92)$$

Mit Hilfe von (2.91) und (2.92) ist sofort einzusehen, dass daher die nachstehende Matrix-Beziehung gilt:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2.91a)$$

Um die Frage 1.) zu beantworten, fordern wir, dass die Amplituden der schnellen Prozesse gegen Null gehen, d.h. dass $a_2 = a_3 = 0$ ist, womit sich die diagnostische Beziehung für u_0, v_0 und Φ_0 von (2.91a) auf

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

und damit auf die Relationen

$$u_0 = \frac{u_1}{\Phi_1} \Phi_0 \quad \text{und} \quad v_0 = \frac{v_1}{\Phi_1} \Phi_0 \quad (2.94)$$

reduziert. Die Relationen (2.94) begründen die These, dass, um lärmfreie Bewegungen zu garantieren, der Amplitudenvektor mit den Komponenten u_0, v_0 und Φ_0 zum Eigenamplitudenvektor mit den Komponenten u_1, v_1, Φ_1 , der zu den Rossby-Wellen gehört, proportional sein muss, womit die Frage 1.) beantwortet ist. Explizit lässt sich dies mit (2.87c), (2.89) und (2.90) aus (2.94) in der Form

$$u_0 = \frac{c_1^r}{\frac{f^2}{k_x^2} - (c_1^r)^2} \Phi_0 \quad (2.95)$$

und

$$v_0 = \frac{\frac{if}{k_x}}{\frac{f^2}{k_x^2} - (c_1^r)^2} \Phi_0 = \frac{\frac{ik_x}{f}}{1 - (c_1^r)^2 \frac{k_x^2}{f^2}} \Phi_0 \quad (2.96)$$

darstellen, d.h. wir erhalten mit (2.95) und (2.96) die relevanten Beziehungen für lärmfreie Bewegungen. Wenn man die lärmfreien Beziehungen mit den geostrophischen Relationen

$$(u_0)_{\text{geostrophisch}} = 0 \quad \text{und}$$

$$(v_0)_{\text{geostrophisch}} = \frac{ik_x}{f} \Phi_0$$

vergleicht, dann können wir erkennen, dass es Beziehungen zwischen Anfangsdaten gibt, die lärmfreie Bewegungen garantieren, aber nicht mit den ebenso „lärmfreien“ geostrophischen Beziehungen zusammenfallen. Man kann somit zusammenfassen:

- a.) dass der lärmfreie nicht-divergente Wind, dargestellt durch die Meridionalkomponente v mit dem geostrophischen Wind in Phase, aber größer in der Amplitude ist und
- b.) dass der divergente, lärmfreie Wind, repräsentiert durch die zonale Komponente u , nicht Null ist. Der geostrophische Wind ist natürlich nicht-divergent.

Es ist leicht einzusehen, dass die a priori zum Zeitpunkt $t = 0$ definierten Beziehungen (2.94), (2.95) und (2.96) für die gesamte Integrationszeit gelten müssen. Hiemit wird implizit ein System gefilterter Gleichungen definiert. Man erhält eine prognostische und zwei diagnostische Gleichungen und konserviert die synoptisch wichtige relative Rossby-Phasengeschwindigkeit c_1^r . Um auch die Frage 2.) entsprechend zu beantworten, muß man die Gleichung (2.91a) für die Konstanten a_1, a_2, a_3 einer entsprechenden Lösung zuführen. Die Matrix in Gleichung (2.91a) bezeichnen wir nunmehr mit \mathbf{A} , ihre Elemente ergeben sich

aus (2.87a), (2.89) und (2.90). Anschließend multiplizieren (2.91a) von links mit der Inversen \mathbf{A}^{-1} , womit wir die nachstehende Gleichung in der Matrixform

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_0 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

erhalten, was schließlich nach HALTNER u. WILLIAMS (1980), wenn man die Anfangsbedingungen u_0, v_0 und Φ_0 als bekannt voraussetzt, zu den Beziehungen

$$a_1 = \frac{ik_x f^{-1} \overline{\Phi} v_0 - \Phi_0}{U^2 f^4 k_x^{-4} \alpha^{-2} - \alpha} \quad (2.98)$$

und

$$a_{2,3} = \mp \frac{u_0}{2\sqrt{\alpha}} \mp \frac{ifk_x^{-1}(1+U\alpha)^{\frac{1}{2}} + \Phi_0}{2\left(Uf^2 k_x^{-2} \alpha^{-\frac{1}{2}} \pm \alpha\right)} \quad (2.99)$$

führt, wobei $\alpha = \overline{\Phi} + \frac{f^2}{k_x^2}$ bedeutet. In dem vorliegenden Abschnitt sollte gezeigt werden,

dass es grundsätzlich möglich ist „lärmsfreie Bewegungen“ durch Einwirkung auf das Anfangsfeld zu initiieren. Relevante „Initialisierungsverfahren“ müssen aber aus thematischen und Umfanggründen einer weiteren Monographie über die Vorbereitung des Anfangsfeldes, d.h. der „Datenassimilisation“, vorbehalten bleiben.

3. Numerische Methoden I

3.1 Die Gitterpunktmethode

Die numerische Lösung der prognostischen Gleichungen wurde in der historischen Entwicklung der Numerischen Wettervorhersage (NWP) zunächst mit Hilfe der sogenannten „Gitterpunktmethode“ bewerkstelligt. Bei dieser Methode wird ein Gitternetz über das interessierende Gebiet (Vorhersagedomäne) gelegt und an den Maschenpunkten dieses Gitternetzes (= die Gitterpunkte oder „grid-points“) werden die abhängigen Variablen definiert. Von den meist unregelmäßig in der Geographie verteilten Messpunkten (Beobachtungsstationen) werden durch ein entsprechendes Analyseverfahren die beobachteten Werte an die Gitterpunkte interpoliert. Dieses Analyseverfahren nennt man „Objektive Analyse“. Als objektive Analyse kann man nach GANDIN (1963) jede Konstruktion eines Feldes meteorologischer Elemente auf Grund von Beobachtungsdaten mit Hilfe eines quantitativen Algorithmus verstehen. Sie ist damit ein Verfahren, das aus einer Reihe gegebener Beobachtungen im Gegensatz zur subjektiven Analyse, unabhängig von den persönlichen Entscheidungen eines Meteorologen, eine eindeutige Lösung ergibt. Es ist aber a priori klar, dass verschiedene objektive Analyseverfahren (d.h. differente Analyse-Algorithmen) mitunter zu verschiedenen Ergebnissen führen können. Der Ausdruck

„objektiv“ bezieht sich nur auf die Tatsache der Anwendung eines qualitativen und von subjektiven Entscheidungen freien Algorithmus. Die verschiedenen Verfahren der „Objektiven Analyse“ sind ihrem Umfang gemäß in einer weiteren Monographie im Rahmen der sogenannten Datenassimilierung darzustellen.

Mit Hilfe der an dem erwähnten Datengitter definierten, abhängigen Variablen und den unabhängigen Raum- und Zeitkoordinaten, kann man die in den Gleichungen auftretenden Differentialquotienten durch Differenzenquotienten aus Taylor-Reihenentwicklungen approximieren.

Andere numerische Approximationsmethoden werden unter dem Namen „GALERKIN“-Methoden zusammengefasst. Sie stellen die abhängigen Variablen durch eine Summe von Funktionen, die eine vorgegebene räumliche Struktur besitzen, dar. Die Entwicklungskoeffizienten, die mit jeder dieser Funktionen verbunden sind, sind in der Regel auch Funktionen der Zeit. Diese numerische Methode transformiert die partiellen Differentialgleichungen der Modelle in einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten. Die beiden wichtigsten Galerkin-Methoden werden durch die „Spektrale Methode“ und die Methode der „Finiten Elemente“ repräsentiert. Bei der „Spektralen Methode“ in der ebenen Geometrie haben wir es hiebei mit den aus der Fourier-Analyse bekannten orthogonalen, trigonometrischen Funktionen, in der sphärischen Geometrie des sphärischen Koordinatensystems mit Kugelfunktionen zu tun. Die „Spektrale Methode“ hat inzwischen die Gitterpunktmethode im täglichen Routinedienst bereits weitgehend verdrängt, da sie eine ganze Reihe von Vorteilen aufweist. Dennoch wird auch die Gitterpunktmethode eine eingehendere Darstellung erfahren, weil diese im besonderen Maße geeignet ist, Probleme der NWP aufzuzeigen. Die Methode der „Finiten Elemente“ kommt aus der Ingenieurmathematik und wurde erst später in die Meteorologie eingeführt. Sie fand mitunter bei Regionalmodellen Anwendung, weil sie bei der Erfassung kleiner Scales gegenüber der „Spektralen Methode“ Vorteile aufweisen kann. Im allgemeinen hat sie aber bis heute keine sehr weitverbreitete oder größere Anwendung gefunden. Der interessierte Leser sei auf die einschlägige Literatur hingewiesen. [z. B. BURRIDGE, STEPPELER u. STRÜFING (1986), STEPPELER (1987)]. Schließlich hat sich in der folgenden Entwicklung eine weitere numerische Methode als sehr effizient zur Erreichung ökonomischer Zeitschritte bei der Numerischen Integration erwiesen, da deren Differenzenschemata hohe Stabilität aufweisen. Es handelt sich um die sogenannte „Semi-Lagrangesche Methode“, die heute bereits fester Bestandteil numerischer Vorhersage-Modelle geworden ist und auch mit der „Spektralen Methode“ gerne kombiniert wird. Es gelingt hiebei die Vorteile beider Verfahren optimal auszuschöpfen. Im Zuge der „Gitterpunktmethode“, mit welcher wir uns zunächst beschäftigen werden, stellt sich, wie schon erwähnt, die Aufgabe, die in den Gleichungen auftretenden räumlichen und zeitlichen Ableitungen durch entsprechende diskrete, d.h. endliche Differenzen zu approximieren. Den Vorgang der Umsetzung von Differentialen in äquivalente Differenzen nennt man deshalb auch „Diskretisation“.

3.1.1 Räumliche Diskretisierung

Wie es dem Charakter jeder Approximation entspricht, ist die Diskretisation natürlich mit einem gewissen Fehler behaftet. Zunächst betrachten wir eine beliebige Funktion $f(x)$ und entwickeln diese in einer Taylor-Reihe

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2!} \pm f'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} \dots \quad (3.1)$$

Lösen wir diese Gleichung für die erste Ableitung $f'(x)$, wobei wir zunächst das Pluszeichen verwenden, dann erhalten wir

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + R \quad (3.2)$$

Hierbei bedeutet R das Restglied

$$R = \left[-f''(x) \frac{\Delta x}{2!} - f'''(x) \frac{\Delta x^2}{3!} \dots \right] \quad (3.3)$$

der verbleibenden Terme in der obigen Reihe (3.2). Dieses Restglied wird vernachlässigt und deshalb auch als Abbruchfehler oder „Truncation-Error“ bezeichnet. Seine Größenordnung wird durch die kleinste in R vorkommende Potenz von Δx durch $O(\Delta x)$ charakterisiert. Man sagt dann, dass die Approximation von der Genauigkeit $R = O(\Delta x)$ oder von 1. Ordnung genau ist. Nach Vernachlässigung von R stellt (3.2) eine sogenannte „vorwärtsgerichtete“ Differenzenapproximation (forward difference approximation) dar. Verwendet man hingegen das Minuszeichen in (3.1), dann erhält man eine „rückwärtsgerichtete“ Differenzenapproximation (backward difference approximation). Bilden wir die Differenz der beiden Reihenentwicklungen in (3.1) durch

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} \pm f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} \dots \quad \text{und}$$

$$-f(x - \Delta x) = -f(x) + f'(x)\Delta x - f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} \pm f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} \dots$$

dann ergibt sich nach $f'(x)$ aufgelöst

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + R^* \quad (3.4)$$

$$\text{wobei } R^* = \left[-f'''(x) \frac{\Delta x^2}{3!} \dots \right]$$

bedeutet. Bei Vernachlässigung von R^* erhalten wir eine Näherung der Ordnung $O(\Delta x^2)$ und (3.4) stellt eine sogenannte „zentrierte“ Differenzenapproximation zweiter Ordnung dar. Summiert man die beiden Reihen (3.1), dann erhält man nach Auflösung für $f''(x)$ die Relation

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + R^{**} \quad (3.5)$$

$$\text{mit } R^{**} = \left[-2f^{IV}(x) \frac{\Delta x^2}{4!} \dots \right]$$

d.h. auch diese Approximation ist nach Vernachlässigung von R^{**} von der Genauigkeit $O(\Delta x^2)$ und somit eine Näherung zweiter Ordnung. Im allgemeinen gilt für numerische Differenzenschemata, dass, je höher die Ordnung des „Truncation-Errors“ mit Bezug auf Δx ist, sich die Approximation umso genauer erweist. Da wir es in der Atmosphäre häufig mit Wellenbewegungen zu tun haben, liegt es nahe, die endlichen Differenzenapproximationen an Hand einer einfachen harmonischen Welle hinsichtlich ihrer „Approximationsgüte“ zu untersuchen. Setzen wir

$$f(x) = Ak \sin x \tag{3.6}$$

wobei $k = 2\pi/L$ die Wellenzahl und A die Amplitude bedeutet. Da wir in diesem Abschnitt überwiegend 1-dimensionale Schemata behandeln, wird für die Wellenzahl $k_x = k$ gesetzt. Für die Ableitung in der x -Richtung ergibt sich dann exakt analytisch

$$f'(x) = Ak \cos x \tag{3.7}$$

Setzen wir nunmehr (3.6) in die Differenzenapproximation (3.4) unter Vernachlässigung von R^* ein, dann erhält man

$$f'(x)_a = \frac{\sin k(x + \Delta x) - \sin k(x - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{3.8}$$

wobei das Subskript a den approximierten Wert der Ableitung signalisieren soll. Mit Hilfe des trigonometrischen Additionstheorems

$$\sin(kx \pm k\Delta x) = \sin kx \cos k\Delta x \pm \cos kx \sin \Delta x$$

ergibt sich sofort

$$f'(x)_a = A \frac{\sin kx \cos k\Delta x + \cos kx \sin k\Delta x - \sin kx \cos k\Delta x + \cos kx \sin k\Delta x}{2\Delta x}$$

und daher

$$f'(x)_a = \frac{A \cos kx \sin k\Delta x}{\Delta x} \tag{3.9}$$

Bildet man schließlich den Quotienten von $f'(x)_a$ der approximierten und $f'(x)$ der exakten Lösung, dann erhält man einen Ausdruck für die Güte der Näherung durch

$$\frac{f'(x)_a}{f'(x)} = \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \tag{3.10}$$

Trägt man den Verlauf dieses Verhältnisses als Funktion der dimensionslosen Zahl $k\Delta x$ auf, dann kann man dem Graphen von (3.10) (s. Abb. 3.1) leicht entnehmen, dass die normale zentrierte Differenzenapproximation eine gute Näherung ist, wenn $k\Delta x$ den Wert 1 nicht wesentlich übersteigt, d.h. wenn die Wellenlänge L der untersuchten Welle nicht viel kleiner als $6\Delta x$ ist. Wenn wir z.B. einen Raumschritt von $\Delta x = 300$ km annehmen, dann wird der

„Truncation-Error“ für Wellenlängen kleiner als $L = 1800$ km intolerabel groß, da sich das Verhältnis

$$\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}$$

dem Wert 1 nähert, wenn Δx gegen Null geht, da für kleine Argumente $\sin k\Delta x \cong k\Delta x$ ist. Deshalb ist es aber offensichtlich, dass die Genauigkeit der Approximation zunimmt, wenn der gewählte Raumschritt Δx kleiner wird bzw. gegen Null geht.

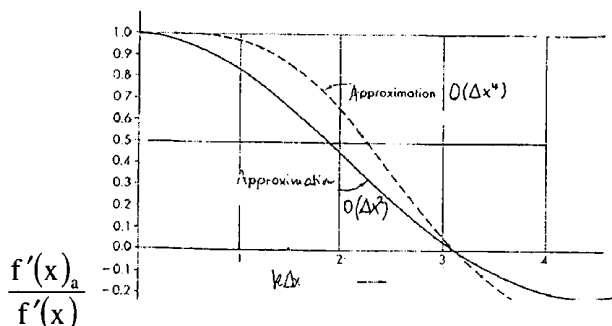


Abb. 3.1 Das Verhältnis (3.10) als Funktion von $k\Delta x$ für Approximationen 2. und 4. Ordnung [nach THOMPSON (1961)]. (Die Approximation 4.Ordnung wird im Abschnitt 3.8 im Detail abgeleitet)

Man sieht aus der Abb. 3.1, dass bei Erhöhung des Ordnungsgrades die Näherung wesentlich besser wird und erst ab etwa $L = 1000$ km der Fehler die gleiche Größenordnung erreicht wie bei der Näherung zweiter Ordnung. Allerdings erweisen sich die Differenzenschemata höherer Ordnung mit Hinblick auf den Rechenaufwand als wesentlich teurer. Wir werden auf solche Schemata später noch zurückkommen.

Der einfachste Weg, ein Gitterpunktssystem zu entwerfen, besteht darin, eine Menge von Maschenpunkten einzuführen, die ein bestimmtes Gebiet der Länge L_x bzw. der Breite L_y in gleiche Intervalle mit der Gitterdistanz $\Delta x = \Delta y = d$ teilen. Die Längen d bezeichnet man als Gitterdistanz (grid point length). Die Anzahl der Gitterintervalle wird mit I in der x -Richtung und J in der y -Richtung definiert. Den Ursprung kann man z.B. in die linke untere Ecke des Gittersystems legen (s. Abb. 3.2). Nunmehr suchen wir die Approximation der Funktion $u = u(x, y)$ an den diskreten Punkten $x = i\Delta x$ und $y = j\Delta y$, wobei i, j natürlich immer ganze Zahlenwerte $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, I$ bzw. $j = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, J$ annehmen, d.h. wir wollen aus dem Gitter $(I+1)(J+1)$ Werte von u_{ij} entnehmen. Nun müssen wir uns aber klar machen, dass die Kenntnis von Werten u_{ij} an einer Reihe von Punkten $P(i\Delta x, j\Delta y)$ auch bei optimaler Approximation, d.h. bei einem sehr dichten Gitternetz mit kleinem d weniger Information bedeutet als die Kenntnis der kontinuierlichen Funktion $u(x, y)$. Nun wollen wir zunächst der Einfachheit halber unsere Betrachtungen in eindimensionaler Form vornehmen und die Funktion $u(x)$ durch eine Fourier-Reihe der Form

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

annähern. In dieser Beziehung ist $k = 2\pi/L$ wieder die Wellenzahl mit der Wellenlänge L .

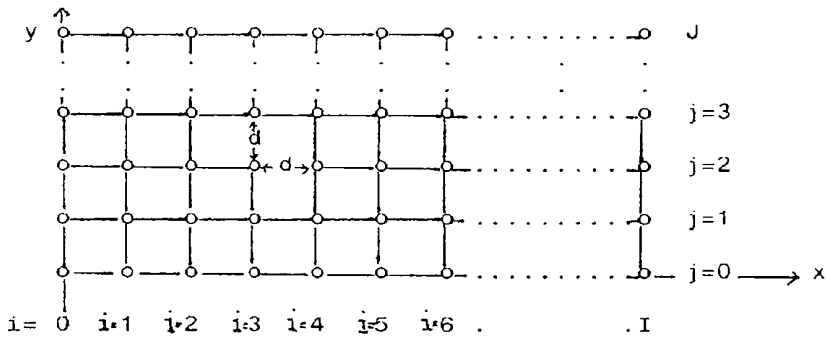


Abb. 3.2 Schema eines räumlichen Gitterpunktsystems

Man kann die Wellenlänge L auch durch $L = L_x / i$ mit der Längenausdehnung des Gitters in x -Richtung L_x definieren. Deshalb kann man die obige Fourier-Reihe auch in der Form

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \cos \frac{2\pi i x}{L_x} + b_i \sin \frac{2\pi i x}{L_x} \right]$$

schreiben. Nun können wir aber aus den $(I+1)$ Werten u_i nicht alle Koeffizienten der unendlichen Reihe bestimmen, aber immerhin $(I+1)$ verschiedene a_i bzw. b_i . Die $(I+1)$ Werte u_i definieren näherungsweise den Wert a_0 und so viel als möglich der Koeffizienten a_i bzw. b_i im langwelligeren Bereich der Reihe, d.h. für die Koeffizienten für

$$i = 1, 2, 3, \dots, I/2$$

Von diesen Koeffizienten hat der mit $i = I/2$ die kürzeste Wellenlänge

$$L = L_x / i = L_x / (I/2) = 2L_x / I$$

Da aber $I = L_x / \Delta x$ ist, folgt schließlich unmittelbar

$$L = 2L_x / (L_x / \Delta x) = 2\Delta x$$

Entsprechend unserer Wahl können wir nunmehr eindeutig sagen, dass aus den Werten u_i an den diskreten Punkten $x = i\Delta x$ keine Wellenlängen kleiner als $L = 2\Delta x$ auflösbar sind. Das gleiche Ergebnis erhalten wir auch aus der Relation (3.10) mit

$$\frac{f'(x)_a}{f'(x)} = \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} = 0$$

Bildlich gesprochen kann man sagen, dass das „Auge“ unseres Gitters alle Wellenlängen kleiner als $2\Delta x$ „übersieht“. Vorhin haben wir gesehen, dass der „Truncation-Error“ ein Maß darstellt, in welchem Grade der Differenzenquotient den Differentialquotienten bei gegebenem Raumschritt Δx annähert. Als Maß der Annäherung haben wir hierbei die kleinste Potenz von Δx , welche im Restglied R aufschien, definiert. Damit eine numerische Approximation konsistent ist, muss sie zumindest von 1. Ordnung genau sein, d.h. es muß

somit $R = O(\Delta x)$ gelten. „Konsistenz“ einer endlichen Differenzenapproximation heißt, dass sich die Näherung einer Ableitung der „wahren“ Ableitung selbst annähert, wenn das Gitterintervall d gegen Null geht. Es gibt eine große Reihe von Möglichkeiten die erste Ableitung an einem Punkt durch „endliche“ Differenzen (finite differences) zu approximieren. Wichtig und entscheidend ist, dass sie der Konsistenzforderung entsprechen. Dieser entsprechen offensichtlich auch die nachstehenden Approximationen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \cong \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad \text{Unzentrierte Vorwärtsdifferenz über } \Delta x$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \cong \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{Unzentrierte Rückwärtsdifferenz über } \Delta x$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1/2} \cong \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad \text{Zentrierte Differenz über } \Delta x$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad \text{Zentrierte Differenz über } 2\Delta x$$

3.1.2 Endliche Differenzenschemata (finite difference schemes)

Die algebraische Gleichung, die man erhält, wenn eine Differentialgleichung durch entsprechende endliche Differenzenapproximationen in eine Differenzengleichung umgewandelt (= diskretisiert) wird, heißt eine „endliche Differenzenapproximation“ oder auch ein „endliches Differenzenschema“. Zum Studium eines solchen Differenzenschemas bedient man sich am besten einer linearisierten Gleichung, um die bei einer solchen mögliche exakte, analytische Lösung mit der zugehörigen numerischen Lösung vergleichen zu können. Ein solches System von großem meteorologischen Interesse bietet sich zunächst in der sogenannten „linearen Advektionsgleichung“

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

an, wobei c die konstante Phasen- oder Advektionsgeschwindigkeit in der x -Richtung darstellt. Damit ist die Gleichung „linear“. Die Advektionsgleichung beschreibt die Advektion einer abhängigen Variablen bzw. deren zeitliche Änderung, verursacht durch die Advektion. Sie stellt einen äußerst wichtigen Teil im System prognostischer Gleichungen dar und wird uns

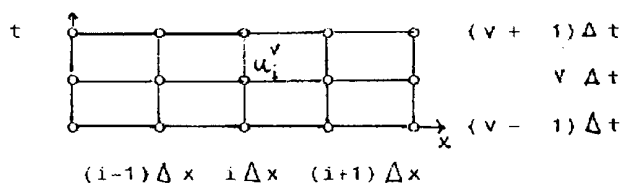


Abb. 3.3 Raumzeitliches Gitterschema

sehr häufig als Basis für die Diskussion vieler Probleme der numerischen Methoden dienen. Die abhängige Variable u_i^v ($v = \text{Zeitindex}$) stellen wir entsprechend unseren bisherigen Überlegungen an einem raumzeitlichen Gitterschema dar. Nunmehr diskretisieren wir (3.11) in Raum und Zeit, wobei wir hier zunächst willkürlich eine Vorwärtsdifferenz in der Zeit und eine Rückwärtsdifferenz im Raumschritt wählen. Wir erhalten dann für den raumzeitlichen Gitterpunkt mit den Koordinaten $(i\Delta x, v\Delta t)$ (s. Abb. 3.3) die Beziehung:

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^v}{\Delta t} + c \frac{u_i^v - u_{i-1}^v}{\Delta x} = 0 \quad (3.12)$$

Die Gleichung (3.12) ist eine von vielen, möglichen Differenzenschemata, die als konsistent zu betrachten sind, d.h. es nähert sich der zugehörigen Differentialgleichung, wenn Δx und Δt gegen Null gehen. Damit dürfen wir erwarten, dass die aus dem endlichen Differenzenschema folgende Lösung sich der Lösung der Differentialgleichung nähert, d.h. (3.12) nähert sich (3.11). Die Lösung von (3.12) nennt man eine „numerische Lösung“. Letztere kann man dann mit der exakten, analytischen Lösung, wie sie für die meisten linearen Gleichungssysteme vorliegt, vergleichen und damit Aufschluß über die Eigenschaften der „numerischen Lösung“ gewinnen. Betrachten wir nun u_i^v als eine approximierte Lösung für $(i\Delta x, v\Delta t)$, dann wird der Fehler der numerischen Lösung durch

$$\varepsilon = u_i^v - u(i\Delta x, v\Delta t)$$

auszudrücken sein. Leider können wir diesen Fehler in der Praxis im allgemeinen nicht bestimmen, da wir es in der atmosphärischen Realität ausschließlich mit nicht-linearen Gleichungen zu tun haben, für welche in der Regel keine exakten Lösungen bekannt sind. Man kann aber auch in diesem Fall ein Maß für die Genauigkeit des numerischen Schemas finden, wenn man die wahre Lösung „post festum“ in das numerische Schema einführt. Die wahre Lösung wird selbstverständlich die numerische Gleichung nicht exakt erfüllen und man muß einen Zusatzterm ε addieren, um die Gültigkeit der Gleichung zu bewahren. Für (3.12) ergibt sich dann

$$\frac{u[i\Delta x, (v+1)\Delta t] - u[i\Delta x, v\Delta t]}{\Delta t} + c \frac{u[i\Delta x, v\Delta t] - u[(i-1)\Delta x, v\Delta t]}{\Delta x} = \varepsilon \quad (3.12a)$$

Der Term ε kann dementsprechend als „Truncation-Error“ des endlichen Differenzenschemas betrachtet werden. Man kann dies leicht demonstrieren, wenn man die „wahren Werte“ u an den Punkten $[i\Delta x, (v+1)\Delta t]$ und $[(i-1)\Delta x, v\Delta t]$ des Raumzeitgitters in einer Taylor-Reihe entwickelt

$$u_i^{v+1} = u_i^v + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^v \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^v \Delta t^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^v \Delta t^3 + \dots$$

bzw.

$$-cu_{i-1}^v = -cu_i^v + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^v \Delta x - \frac{c}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^v \Delta x^2 + \frac{c}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^v \Delta x^3 + \dots$$

wobei der einfacheren Schreibweise halber jeweils in den Indizes Δx und Δt weggelassen haben. Setzen wir diese Beziehungen in (3.12) ein, dann ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^v + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^v \Delta t + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^v \Delta t^2 + \dots\right] \\ & \dots + c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^v - c\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^v \Delta x - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^v \Delta x^2 + \dots\right] = 0 \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung ersieht man leicht, dass der „Truncation-Error“ ε mit

$$\varepsilon = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^v \Delta t + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^v \Delta t^2 + \dots\right] - c\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^v \Delta x - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^v \Delta x^2 + \dots\right]$$

ident ist. Das abgeleitete Differenzschema ist deshalb von 1. Ordnung genau, da die niedrigsten Potenzen in ε gleich Δx und Δt sind. Man schreibt deshalb auch symbolisch

$$\varepsilon = O(\Delta x, \Delta t)$$

Damit erweist sich auch dieses Differenzschema als konsistent, womit sich die Differenzgleichung (3.12) mit $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ der Differentialgleichung nähert. Wir sehen also, dass man den „Truncation-Error“ durch entsprechende Verkleinerung der Raum- und Zeitschritte beliebig klein machen kann. Grenzen setzt in der Praxis aber hier der daraus resultierende Rechenaufwand, denn jede Verkleinerung der Raum- und Zeitinkremente bedeutet eine Vermehrung der Gitterpunktzahl und damit der notwendigen Rechenoperationen (s. hierzu auch Kap. 1). Obwohl der Truncation-Error eines konsistenten Schemas durch Reduktion der Inkremente Δx und Δt beliebig klein gemacht werden kann, ist dies noch keine Garantie, dass sich auch der Fehler der numerischen Lösung ebenfalls entsprechend verkleinert. Mit diesen Fragen werden wir uns im folgenden Abschnitt beschäftigen.

3.1.3 Konvergenz und Stabilität numerischer Lösungen

Zunächst wollen wir uns zwei grundlegende Fragen stellen:

- 1.) Wie verhält sich der Fehler $u_i^v - u(i\Delta x, v\Delta t)$, wenn für eine festgelegte Zeitspanne $v\Delta t$ die Raum und Zeitschritte Δx und Δt gegen Null gehen?

Die Beantwortung dieser Frage hängt mit der „Konvergenz“ einer numerischen Lösung zusammen, d.h. wenn der Fehler durch Verfeinerung des Gitters ($\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$) sich Null nähert, spricht man von Konvergenz der numerischen Lösung. Ein numerisches Differenzschema ist vor allem dann „konvergent“, wenn sich für jede beliebige Anfangsbedingung eine konvergente Lösung ergibt. Die „Konsistenz“ eines Differenzschemas garantiert keinesfalls seine Konvergenz. Um die gestellte Frage zu klären, verwenden wir die Gleichung (3.11) und verändern jetzt [s. MESINGER u. ARAKAWA (1976)] die unabhängigen Variablen x, t in ξ, t , wobei

$$\xi \equiv x - ct \quad (3.13)$$

bedeutet. Gleichzeitig treffen wir die Übereinkunft, dass

$$u(x, t) = U[\xi(x, t), t] \quad (3.14)$$

ist. Für die lokale Ableitung von (3.14) nach der Zeit erhalten wir unter Zuhilfenahme der Kettenregel

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t}$$

Gleichzeitig ergibt sich aus (3.13) für die zeitliche Ableitung von ξ

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) = -c$$

was in die obere Beziehung eingeführt, sofort

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} - c \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (3.15)$$

ergibt. Ferner gelangen wir mit (3.14) ebenso zu

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = c \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \right) = c \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (3.16)$$

weil $\partial \xi / \partial x = 1$ und $\partial t / \partial x = 0$ ist. Setzt man (3.15) und (3.16) in (3.11) ein, dann erhält man unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\xi, t) = 0 \quad (3.17)$$

U kann somit keine Funktion der Zeit sein, wohl aber eine solche von ξ . Daher ist mit (3.14) und (3.17)

$$u = f(x - ct) \quad (3.18)$$

eine Lösung der "linearen" Advektionsgleichung (3.11), wobei f eine beliebige Funktion sein kann. Da diese Lösung auch einer beliebigen Anfangsbedingung $u(x, 0) = F(x)$ genügt, ist

$$u = F(x - ct) \quad (3.19)$$

die allgemeine Lösung der linearen Advektionsgleichung (3.11). Betrachtet man diese Lösung in einer x, t - Ebene, dann kann man leicht sehen, dass diese Lösung entlang der Geraden

$$(x - ct) = \text{const.}$$

einen konstanten Wert annimmt (s. Abb. 3.4).

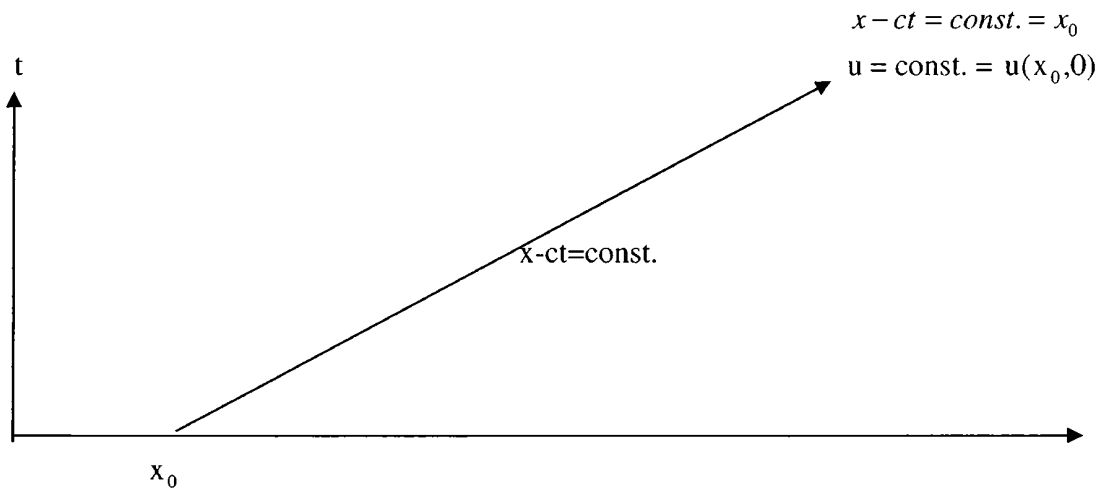


Abb 3.4 Eine „Charakteristische“ der linearen Advektionsgleichung

Gerade dieser Art nennt man „Charakteristische“ der Advektionsgleichung. Man kann auch sagen, dass die Lösung entlang dieser „Charakteristischen“ fortschreitet. Nunmehr kehren wir zur Konvergenzfrage zurück. Hierzu betrachten wir eine beliebige „Charakteristische“ durch den Ursprung A_0 eines Gitterschemas und einen Gitterpunkt A. Die „wahre“ Lösung in A muss unseren Überlegungen gemäß gleich dem Anfangswert in A_0 sein (s. Abb. 3.5). Die numerische Lösung der Gl. (3.12) wird hingegen nur von den Werten $u(i\Delta x, v\Delta t)$, die auf oder rechts der gestrichelten Linie in Abb. 3.6 liegen, bestimmt.

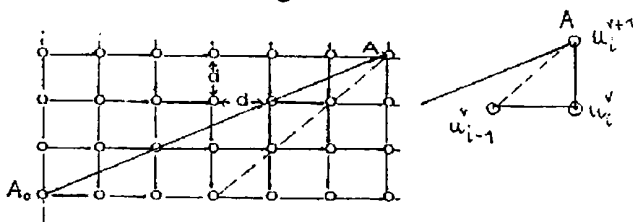


Abb. 3.5 Eine mögliche „Charakteristische“ und die Lage des Abhängigkeitsbereiches

Den rechts der gestrichelten Linie liegenden Bereich nennt man auch den „Abhängigkeitsbereich (domain of dependence)“ des Numerischen Schemas. Der Gitterpunkt A_0 liegt außerhalb dieses Einflussbereiches und kann deshalb die numerische Lösung nicht beeinflussen. Aus diesem Umstand können mitunter beachtliche Unterschiede zwischen der exakten und der numerischen Lösung resultieren. Reduziert man die Raum und Zeitschritte Δx und Δt um einen gleichen, relativen Betrag, dann verändert sich der Einflussbereich der numerischen Lösung in seinem Verhältnis zur Charakteristischen nicht, d. h. solange das Verhältnis $\Delta x : \Delta t$ unverändert bleibt, kann auch die Verfeinerung des Gitters keine Fehlerreduktion in der numerischen Lösung liefern.

Die notwendige Bedingung für eine kontinuierliche Fehlerreduktion und damit Konvergenz der Lösung ist daher folgende:

Die „Charakteristische“, welche die wahre Lösung am Gitterpunkt A definiert, muss innerhalb des „numerischen“ Abhängigkeitsbereiches liegen bzw. ihren Ursprung haben. Das ist aber nur dann der Fall, wenn die „Charakteristischen“ einen steileren Anstieg in der x, t – Fläche als die Begrenzung des Abhängigkeitsbereiches (gestrichelte Linie in Abb. 3.5) haben. Diese Bedingung ist im allgemeinen erfüllt, wenn

$$c\Delta t \leq \Delta x \quad (3.20)$$

ist. Somit ist (3.20) die notwendige Bedingung für die Konvergenz der numerischen Lösung der Differenzgleichung (3.12). Man kann sich dies durch die nachfolgende Abb. 3.6 sehr plakativ veranschaulichen.

Als nächste Frage erhebt sich [s. MESINGER u. ARAKAWA (1976)]:

- 2.) Wie ist das Verhalten des Fehlers $u_i^v - u(i\Delta x, v\Delta t)$, wenn für festgehaltene Werte Δx und Δt die Zahl der Zeitintervalle ansteigt und v gegen N geht ?

Die Beantwortung dieser Frage führt auf das Problem der „Stabilität“ einer numerischen Lösung. Zu ihrer Beantwortung bieten sich verschiedene Methoden an. Wir wollen uns hier mit der sehr häufig verwendeten Methode von J. v. NEUMANN beschäftigen.

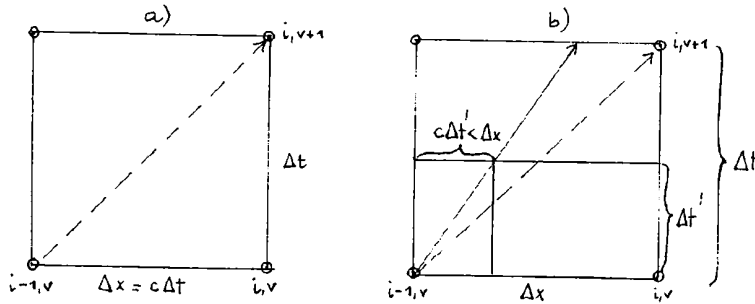


Abb.3.6 Charakteristische für $c\Delta t = \Delta x$ und $c\Delta t < \Delta x$

- a.) Charakteristische und Grenze des Abhängigkeitsbereiches fallen zusammen
 b.) Die Charakteristische weist einen steileren Anstieg auf, weil $\Delta t' < \Delta t$ ist

Erneut werden wir uns der linearisierten Gleichung (3.11) bedienen, da für diese bekanntlich analytische Lösungen existieren, an welchen die Güte der numerischen Lösung durch Vergleich gemessen werden kann. Die Lösung für eine lineare Gleichung kann mitunter durch eine Fourier-Reihe ausgedrückt werden, wobei jede einzelne harmonische Komponente ebenfalls eine Lösung darstellt. Somit genügt es, die Stabilität an Hand einer Harmonischen zu untersuchen. Die Stabilität aller zulässigen Harmonischen stellt dann die notwendige Bedingung der Stabilität für die Lösung des numerischen Schemas bzw. der Differenzgleichung dar. Für die Gleichung (3.11) kann man die folgende analytische Lösung angeben:

$$u(x, t) = \text{Re}[U(t)\exp ikx] \quad (3.21)$$

wobei wieder $k = 2\pi/L$ die Wellenzahl in der x -Richtung und $U(t)$ die zeitabhängige Amplitude der Welle darstellt. „Re“ soll anzeigen, dass nur der „Realteil“ der Wellenlösung relevant ist. Setzt man die Relation (3.21) in (3.11) ein, dann ergibt sich

$$\frac{dU}{dt} \exp(ikx) + ikcU \exp(ikx) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dU}{dt} + ikcU = 0 \quad (3.22a,b)$$

Aus der partiellen Differentialgleichung (3.11) ist somit, da (3.22) nur noch eine abhängige und eine unabhängige Variable enthält, eine gewöhnliche Differentialgleichung geworden, für die man die nachstehende Lösung

$$U(t) = U(0)\exp(-ikct) \quad (3.23)$$

findet, wobei $U(0)$ den Anfangswert der Wellenamplitude zum Zeitpunkt $t = 0$ bedeutet. Durch Einsetzen von (3.23) in (3.21) erhält man schließlich

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[U(0)\exp ik(x - ct)] \quad (3.24)$$

Jede Wellenkomponente k wird mit der konstanten Geschwindigkeit c entlang der x -Achse ohne Änderung der Amplitude advektiert. Nun erinnern wir uns an die Gleichung (3.12)

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^v}{\Delta t} + c \frac{u_i^v - u_{i-1}^v}{\Delta x} = 0$$

die in etwas geänderter Form auch mit

$$u_i^{v+1} = (1 - \mu)u_i^v + \mu u_{i-1}^v \quad (3.25)$$

geschrieben werden kann, wobei $\mu = c \Delta t / \Delta x$ bedeutet. In diese Gleichung setzen wir nunmehr eine „diskrete“ Lösung der Form

$$u_i^v = \operatorname{Re}[U^v \exp ik(\hat{i}\Delta x)] \quad (3.26)$$

ein, wobei U^v die Amplitude am Zeitpunkt v bedeutet und der Gitterindex durch \hat{i} zur Unterscheidung von $i = \sqrt{-1}$ ersetzt wurde. Aus (3.25) ergibt sich dann

$$U^{v+1} = (1 - \mu)U^v + \mu U^v \exp(-ik\Delta x) \quad (3.27)$$

Die Gleichung (3.27) versetzt uns in die Lage, das Amplitudenverhalten mit der Zeit einer zu untersuchenden Welle, wenn v zunimmt, zu studieren. Wir definieren deshalb einen „Amplifikationsfaktor“ λ durch die Relation

$$U^{v+1} = \lambda U^v \quad \text{bzw.} \quad |U^{v+1}| = |\lambda| |U^v|$$

Für jede „stabile“ harmonische Lösung (3.26) kann man fordern, dass

$$|U^v| = |\lambda|^v |U^0| < B$$

ist, wobei B eine endliche Zahl bedeutet, d.h. die Amplitudenänderung bleibt in gewissen Grenzen. Aus der letzteren Beziehung ergibt sich durch Logarithmieren der rechts stehenden Ungleichung

$$v \ln |\lambda| < \ln [B / |U^0|] \equiv B' \quad (3.28)$$

wobei B' eine neue Konstante darstellt. Da die Anzahl der Zeitintervalle, über welche wir unsere Betrachtung erstrecken, durch den Ausdruck $v = t / \Delta t$ gegeben sind, kann man (3.28) auch in der Form

$$\ln|\lambda| \leq \left(\frac{B'}{t}\right)\Delta t \quad (3.29)$$

schreiben. Fordern wir nunmehr, dass die Lösung in einem endlichen Zeitabschnitt $t = N\Delta t$ (z.B. innerhalb einer bestimmten Prognosezeitspanne) unter einer bestimmten Schranke bleibt, dann kann man in symbolischer Schreibweise die Geltung der Relation

$$\ln|\lambda| \leq O(\Delta t) \quad (3.30)$$

erwarten. Definiert man schließlich $|\lambda| \equiv 1 + \delta$, dann ergibt sich für $\delta \ll 1$ die bekannte Näherungsformel $\ln(1 + \delta) \approx \delta$ und damit

$$\delta \leq O(\Delta t) \quad (3.31)$$

oder schließlich auch

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t) \quad (3.32)$$

Diese Relation (3.32) stellt die notwendige Stabilitätsbedingung nach v. NEUMANN dar. Die NEUMANNsche Bedingung lässt auch exponentielles Wachstum zu, wenn dies mit der ursprünglichen Differentialgleichung im Einklang steht, d.h. die wahre Lösung dieser tatsächlich exponentiell wächst [s. a. HALTINER (1971)].

Wenn wir hingegen wissen, wie im Falle der linearen Advektionsgleichung, dass die Amplitude der wahren Lösung nicht wächst, dann genügt es $|\lambda| \leq 1$ als hinreichende Stabilitätsbedingung anzusehen. Diese Bedingung ist wesentlich weniger streng als (3.32). Setzt man nunmehr

$$U^{v+1} = \lambda U^v$$

in die Gleichung (3.27) ein, dann erhält man sofort

$$\lambda = (1 - \mu) + \mu \exp(-ik\Delta x) \quad (3.33)$$

Mit Hilfe der Eulerschen Identität $\exp(-ikx) = \cos k\Delta x - i \sin k\Delta x$ können wir (3.33) in die Form

$$\lambda = [1 - \mu(1 - \cos k\Delta x)] - i[\mu \sin k\Delta x]$$

bringen und anschließend λ als „komplexe“ Zahl $\lambda = a - ib$ auffassen. Der Absolutbetrag dieser komplexen Zahl ist aber bekanntlich

$$|\lambda| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

Aus dieser Überlegung ergibt sich

$$|\lambda|^2 = [1 - \mu(1 - \cos k\Delta x)]^2 - i[\mu \sin k\Delta x]^2$$

was nach Ausführung des Quadrats und entsprechender Umformung schließlich zu

$$|\lambda|^2 = [1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\Delta x)] \quad (3.34)$$

führt. Aus (3.34) erkennt man sofort, dass als hinreichende Stabilitätsbedingung für die lineare Advektionsgleichung (3.25) die Relation $(1 - \mu) \geq 0$ gelten muss, denn für $\mu = 1$ folgt aus (3.34) $|\lambda| = 1$ und für $0 < \mu < 1$

$$|\lambda| < 1$$

was mit dem Stabilitätskriterium von NEUMANN ident ist. Die Beziehung (3.34) liefert aber noch weitere sehr wertvolle Aufschlüsse über das Verhalten der numerischen Lösung [s. MESINGER u. ARAKAWA (1976)]. Trägt man Kurven für fixierte Werte der Wellenlänge L in ein Diagramm mit $|\lambda|^2$ als Ordinate und μ als Abszisse ein, dann kann man die Variation von $|\lambda|$ mit μ studieren.

Die Abb. 3.7 zeigt die $|\lambda|^2$ -Kurven aus (3.34) durchgehend als Parabeln. Nun erinnern wir uns, dass die kleinste noch auflösbare Welle in unserem Gitter mit $2\Delta x$ ermittelt werden konnte, d.h. die maximale auflösbare Wellenzahl liegt bei

$$k_{\text{MAX}} = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{2\Delta x} = \frac{\pi}{\Delta x}$$

Weitere Kurven im Diagramm sind für $L = 4\Delta x$ bzw. $k = \pi/2\Delta x$ und $L = 8\Delta x$ bzw. $k = \pi/4\Delta x$ dargestellt. Die erste Ableitung von $|\lambda|^2$ nach μ ergibt

$$\frac{\partial |\lambda|^2}{\partial \mu} = -2(1 - 2\mu)(1 - \cos k\Delta x)$$

Für $\mu = 1/2$ ergibt sich deshalb für jede beliebige Kurve $|\lambda|^2$ ein Minimum, da

$$\frac{\partial |\lambda|^2}{\partial \mu} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 |\lambda|^2}{\partial \mu^2} > 0$$

ist. Aus der Abb.3.7 kann man entnehmen, dass sich mit wachsender Wellenlänge der Amplifikationsfaktor für jeden μ - Wert 1 nähert. Außerdem zeigt sich, dass im stabilen Bereich $|\lambda| < 1$ für alle Werte $\mu < 1$ aus der numerischen Lösung eine Dämpfung erfolgt. Da die „wahre“ Lösung aber eine konstante Amplitude aufweisen muss, rührt dieser Effekt von der „numerischen Approximation“ her. Diese Dämpfung bzw. dieser Fehler gegenüber der „wahren“ Lösung wächst mit abnehmender Wellenlänge L bzw. mit wachsender Wellenzahl k . Bei der kleinsten Wellenlänge $L = 2\Delta x$ bzw. $k = \pi/\Delta x$ wird der Fehler maximal. Der

Fehler kann, wenn Δt nicht extrem klein gehalten wird, für Wellen mit der Länge $L = 2\Delta x$ so groß werden, dass im Zuge einer numerischen Integration diese Welle schon nach einem Zeitschritt völlig ausgelöscht wird. Wir sehen also erneut, dass unser Gitternetz, die verschie-

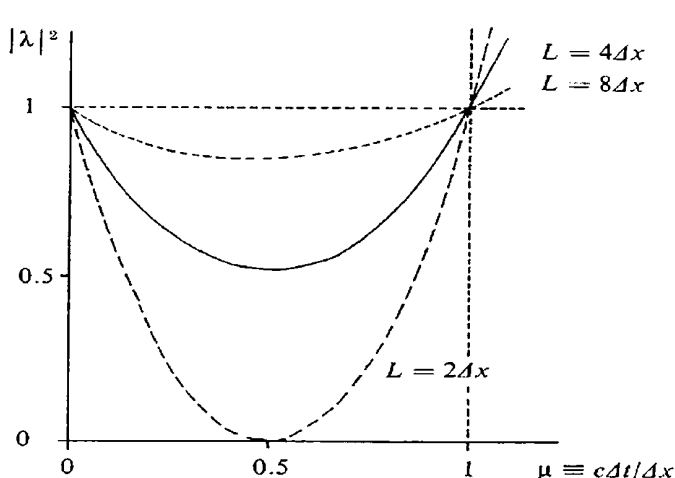


Abb. 3.7 $|\lambda|^2$ -Kurven in Abhängigkeit von μ für verschiedene Wellenlängen L
[aus MESINGER u. ARAKAWA (1976)]

denen Wellenlängen mit einem sehr „selektiven“ Auge registriert. Je kleiner die Wellenlänge ist, desto „kurzsichtiger“ scheint die Gitterpunktmethode zu sehen. Mit Hinblick darauf, dass EDV-Anlagen Datenmengen nicht unbegrenzt speichern können, haben wir es noch mit einem anderen mathematischen Fehler zu tun. Dieser fällt vor allem bei der Berechnung höherer Ableitungen ins Gewicht und wird als „Round-off-Error“ oder „Rundungsfehler“ bezeichnet. THOMPSON (1961) konnte zeigen, dass der „Round-off-Error“ durch Verminderung der Gitterdistanz noch verstärkt wird. Andererseits darf aber die Gitterdistanz nicht beliebig vergrößert werden, da dann der viel ernstere „Truncation-Error“ wieder voll zuschlägt. Während die Erweiterung der Speicherkapazität von EDV-Anlagen zur Verminderung des „Round-off-Errors“ beiträgt, können „Round-off-Errors“ im Anfangsfeld auch durch eine geeignete Filtertechnik eingeschränkt werden [s. THOMPSON (1961) und SHUMAN (1957)].

Aus den bisherigen Überlegungen können wir abschließend [s.a. HALTINER u. WILLIAMS (1980) oder RIDDAWAY/HORTAL (2000)] für die Konvergenz und Stabilität einer numerischen Lösung, wie bereits in Abschnitt 1.5 überblicksweise erwähnt, nunmehr detailliert zusammenfassen:

- 1.) Die numerische Lösung eines endlichen Differenzschemas ist konvergent, wenn sie sich für ein fixes Zeitintervall $N\Delta t$ der Lösung der Differentialgleichung nähert, sobald die Inkremente Δx und Δt gegen Null gehen.
- 2.) Wenn ein numerisches Differenzschema eine konvergente Lösung für jede beliebige Anfangsbedingung liefert, bezeichnet man dieses gleichfalls „konvergent“.
- 3.) Ein numerisches Differenzschema ist stabil, wenn seine Lösungen gleichförmig begrenzte Funktionen des Anfangszustandes für alle genügend kleinen Zeitschritte Δt bleiben [RICHTMYER u. MORTON (1967)].
- 4.) Wenn die Lösungen der Differentialgleichungen zwar in Grenzen bleiben, ist das zugehörige, numerische Differenzschema dennoch instabil, sofern für einen fixen räumlichen Schritt Δx und homogene Randbedingungen Anfangsstörungen existieren,

für welche die numerische Differenzlösung unbeschränkt wächst, sobald v gegen ∞ geht. Diese Definition impliziert eine noch strengere Forderung als die Definition unter Punkt 3.

- 5.) Ein Satz von Differentialgleichungen ist, unbeschadet der Punkte 3. und 4. stabil, wenn der kumulative Effekt aller „Round-off-Errors“ bei wachsendem v vernachlässigbar bleibt.

Erwähnt sei hier noch zusätzlich das LAX'sche Äquivalenztheorem [RICHTMYER u. MORTON (1967)], welches besagt, dass

- 6.) für ein entsprechend formuliertes lineares Anfangswertproblem und eine endliche Differenzenapproximation, welche „konsistent“ ist, „Stabilität“ die notwendige und hinreichende Bedingung für „Konvergenz“ ist.

Wir sehen also, dass bei numerischen Approximationen im Zuge der praktischen Ausführung der Integration unbedingt auf Konsistenz und Stabilität zu achten ist, damit Konvergenz der Lösungen gewährleistet werden kann. Mit verschiedenen Methoden diese Eigenschaften einer numerischen Lösung zu gewährleisten, werden wir uns daher in der Folge noch zu beschäftigen haben. Zusammenfassend sei hier erwähnt, dass es drei Methoden der Stabilitätsanalyse gibt. Die sogenannte „Energimethode“, die „Matrixmethode“ und die „Fourier-Methode“ nach v. NEUMANN. Einschlägige Literatur findet der interessierte Leser bei HALTNER u. WILLIAMS (1978) oder RIDDAWAY/HORTAL (2001). Wir wollen hier nur die am meisten in der NWP verwendete Methode nach v. NEUMANN näher beschreiben. Im allgemeinen ist diese Methode leicht anzuwenden und gestattet einen guten Einblick in ihre Funktionsweise. Wir gehen hier wieder von der eindimensionalen, linearen Advektionsgleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

aus. Als Anfangsbedingung soll

$$\psi(x, 0) = C_k \exp(ikx) \text{ mit der Wellenzahl } k = 2\pi/L$$

gelten. Wir kennen dann die „analytische“ oder „wahre“ Lösung aus

$$\psi(x, t) = C_k \exp[ik(x - Ut)]$$

Nun betrachten wir die Differenzgleichung, deren Anfangsbedingung durch

$$\psi_i^0 = C_k \exp(ikx_i)$$

gegeben ist. Die generelle Lösung resultiert nun aus

$$\psi_i^y = (\lambda_k)^y C_k \exp(ikx_i)$$

wobei λ_k eine komplexe Größe darstellt, welche von dem endlichen Differenzschema und der Wellenzahl k abhängt. Wenn

$$\lambda_k = |\lambda_k| \exp(i\theta)$$

ist, wobei $|\lambda_k|$ die fraktionelle Änderung in der Amplitude pro Zeitschritt und θ die Information über die Phase angibt, dann resultiert die Beziehung

$$\psi(x, t) \equiv C_k |\lambda_k|^v \exp\left[ik\left(x_i + \frac{v\theta}{k}\right)\right]$$

Der Vergleich dieser diskreten Lösung mit der anfangs angegebenen analytischen Lösung bedingt die nachfolgenden Schlussfolgerungen:

- 1.) Das diskrete Schema ist stabil, wenn $|\lambda_k| \leq 1$ für alle k ist.
- 2.) Das Numerische Schema bedingt eine Dämpfung D , wenn pro Zeitschritt $D = |\lambda_k| < 1$ ist. Ist $D = 1$, dann ist das Schema stabil und neutral.
- 3.) Die Phasengeschwindigkeit der numerischen Lösung ist gegeben durch $c = -\theta/k\Delta t$. Diese ist gewöhnlich unterschiedlich zu U und damit wird ein Phasenfehler induziert. Ein sehr geeignetes Maß hierfür ist die sogenannte relative Phasengeschwindigkeit

$$r^* = \frac{c}{U}.$$
- 4.) Da die Geschwindigkeit einer Störung von der Wellenzahl abhängt, gibt es numerische Dispersion, d.h. eine aus einer Varietät von Fourier-Komponenten erzeugte Störung behält ihre Form nicht bei. Daraus resultiert, dass die Gruppengeschwindigkeit nicht gleich der Phasengeschwindigkeit ist.

Das Stabilitätskriterium ist sehr streng. Da exponentielles Wachstum auch für physikalisch realistische Störungen möglich ist, wird, wie schon früher erwähnt, das Stabilitätskriterium durch $|\lambda_k| \leq 1 + O(\Delta t)$ formuliert. Dies gestattet ein exponentielles aber nicht schnelleres als exponentielles Wachstum der Lösung. Im Falle der Advektionsgleichung wissen wir, dass die „wahre“ Lösung nicht wächst, weshalb es genügt als Stabilitätskriterium $|\lambda_k| \leq 1$ zu fordern.

3.1.4 Approximation 4. Ordnung für zentrierte räumliche Differenzenbildung

Ähnlich wie im Abschnitt 3.1 entwickeln wir die Funktion $f(x) = u$ in einer Taylor-Reihe um den zentralen Punkt $x = i\Delta x$ der Form

$$f(x \pm \Delta x) = \pm f(x) + f'(x)\Delta x \pm f''(x)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} \pm f^{IV}(x)\frac{\Delta x^4}{4!} + f^V(x)\frac{\Delta x^5}{5!} \dots$$

d.h. wir erhalten auch

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{\Delta x^4}{4!} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \frac{\Delta x^5}{5!} \dots$$

$$-u_{i-1} = -u_i + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{\Delta x^4}{4!} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \frac{\Delta x^5}{5!} \dots$$

Bildet man die Differenz dieser beiden Beziehungen, dann folgt, wenn gleichzeitig durch $2\Delta x$ dividiert wird

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\Delta x^2}{3!} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \frac{\Delta x^4}{5!} \dots \quad (3.35)$$

Dieser Differenzenquotient ist offensichtlich von zweiter Ordnung genau. Er wird gebildet durch Werte $u(x)$, welche jeweils eine Gitterdistanz vor und nach dem zentralen Gitterpunkt anzutreffen sind, d.h. die Differenz wird über die Entfernung $2\Delta x$ gebildet. Man kann aber auch eine ähnliche Entwicklung über $\pm 2\Delta x$, d.h. eine Differenz über die Entfernung $4\Delta x$ bilden und erhält dann

$$u_{i+2} - u_{i-2} = 4 \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + 16 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + 64 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \frac{\Delta x^5}{5!} \dots$$

bzw. nach Division durch $4\Delta x$

$$\frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\Delta x^2}{3!} + 16 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \frac{\Delta x^4}{5!} \dots \quad (3.36)$$

Auch dieser Differenzenquotient ist offensichtlich von der Genauigkeit $R = O(\Delta x^2)$, wobei allerdings die Koeffizienten größer sind. Man kann aber auch eine ebenfalls „konsistente“ Approximation für $\partial u/\partial x$ finden, wenn man die beiden Relationen (3.35) und (3.36) linear kombiniert [s.a. ARAKAWA u. MESINGER (1976)]. Zu diesem Zweck multipliziert man (3.35) mit 4 und erhält

$$\frac{4(u_{i+1} - u_{i-1})}{2\Delta x} = 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\Delta x^2}{3!} + 4 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \frac{\Delta x^4}{5!} \dots$$

Subtrahiert man von dieser letzten Gleichung (3.36), dann resultiert

$$\frac{4(u_{i+1} - u_{i-1})}{2\Delta x} - \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta x} = 3 \frac{\partial u}{\partial x} + (\text{Restterm von der Ordnung } O(\Delta x^4)) \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{4}{3} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^4) \quad (3.37)$$

$$\text{oder auch, da } \Delta x = d \text{ bezeichnet wird } 2 \frac{(u_{i+1} - u_{i-1})}{3d} - \frac{(u_{i+2} - u_{i-2})}{12d} = \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^4)$$

d.h. wir erhalten somit eine Approximation von einer Genauigkeit der Ordnung $R = O(\Delta x^4)$.

3.1.5 Gittersysteme zur globalen Integration der „Primitiven Gleichungen (PE)“

In der ersten Monographie Nr. 30 [HUBER-POCK (2003)] wurde dargelegt, dass es mitunter sinnvoll ist, die großräumigen atmosphärischen Bewegungen in einem sphärischen Polarkoordinatensystem darzustellen. Von dieser fundamentalen Überlegung ausgehend, wurden dann die „primitiven“ Gleichungen (PE) in die jeweils ausgewählte Projektionsebene einer Landkarte transformiert. Dieser Weg erweist sich als sehr praktisch, weil die durchzuführenden Analysen und Prognosen in der synoptisch gewohnten Darstellungsform angeboten werden können. Hierbei kann man ein rechteckiges Gitter Muster von diskreten Punkten über die gewählte Kartenprojektion ausbreiten. Die Orientierung der Koordinatenachsen erfolgt hierbei beliebig und entsprechend der gewählten Kartenprojektion. Bei der Kegel- oder polar-stereographischen Projektion jeweils in Richtung eines beliebig ausgewählten Meridians. Bei der Merkator-Projektion kann man die x-Achse entlang eines Breitenkreises (z.B. des Äquators) und die y-Achse entlang des Nullmeridians legen. Die Gitterdistanzen Δx und Δy können dann ebenfalls entsprechend beliebig gewählt werden, wenn man darauf achtet, dass $|\Delta x| = |\Delta y|$ ist. Die Beschränkung auf einen Kartenausschnitt einer gewählten Projektion erfolgte lange Zeit mit Rücksicht auf das Rechenpensum und die Computerkapazitäten. Mit zunehmender Verbesserung der Rechentechnologie wurden aber die Voraussetzungen geschaffen, zu einer globalen Betrachtungsweise überzugehen und die Gleichungen wieder in ihrer elementaren Form auf der Kugel selbst zu integrieren. Allerdings zeigte sich hierbei, dass die Ergebnisse der Integration gegenüber der Beschaffenheit des über die Kugel zu legenden Gitters, an welchem die Ausgangswerte- als auch die prognostizierten Endwerte betrachtet werden, nicht unempfindlich sind. Die Wahl eines bestimmten Gitternetzes zur Darstellung der Strömungsverhältnisse auf der Kugel ist keineswegs eine leichte geometrische Aufgabe, wegen der verschiedenen im Gegensatz zueinander stehenden Anforderungen an ein solches Netz. Es handelt sich um drei wichtige Eigenschaften, die für eine erfolgreiche Integration offensichtlich beachtet werden müssen:

- 1.) Die Homogenität, d.h. die Gitterpunkte müssen möglichst gleichmäßig über die gesamte Sphäre verteilt sein.
- 2.) Die Uniformität, d.h. das Gitter soll die Sphäre in solche Elemente teilen, dass deren Fläche und Form möglichst gleichförmig sind. Vor allem für die Gitterdistanz sollte dies zutreffen.
- 3.) Die Isotropie, d.h. das Gitter soll keine Richtung auf der Kugeloberfläche, rund um jeden Gitterpunkt gegenüber einer anderen bevorzugen, was bedeutet, dass singuläre Punkte zu vermeiden sind.

Im übrigen sollten diese Eigenschaften bei jedem Gitter, welches für die numerische Integration entwickelt wird, vorausgesetzt werden. Auch bei den in den Kartenprojektionen ausgebreiteten Gittern treten bekanntlich gewisse Schwierigkeiten bei der Erfüllung der obigen Forderungen auf, doch ist die Größe des Kartenausschnittes meist so beschaffen, dass der begangene Fehler nicht allzu sehr ins Gewicht fällt. Bei globaler Betrachtung darf er allerdings nicht mehr akzeptiert werden. Entsprechende sphärische Gitter wurden entwickelt. Diese können aber aus Platzgründen im Rahmen dieser Darstellung nicht alle dargestellt werden. Der interessierte Leser findet diese an Hand der nachstehenden Literaturzitate: KURIHARA (1965), SADOURNY, ARAKAWA u. MINTZ (1968), WILLIAMSON (1970) und MAJEWSKY et al. (2000). Auf dieses letztere Zitat wollen wir etwas näher eingehen. Es handelt sich hierbei um das Global-Modell des Deutschen Wetterdienstes (DWD). Bei diesem wird, ähnlich wie bei SADOURNY, ARAKAWA u. MINTZ (1968) sowie WILLIAMSON

(1970), in die Erdkugel ein Ikosaeder zur Erzeugung des Gitters gestellt, wobei zwei Eckpunkte des Ikosaeders mit den Polen zusammenfallen. Breitenkreis in etwa 26.565° Nord, die anderen 5 Eckpunkte in etwa 26.565° Süd. Durch Verbindung der nächsten Nachbarn unter diesen zwölf Punkten mit Großkreisabschnitten entstehen 20 große sphärische Dreiecke mit einer Seitenlänge von etwa 7054 km (s. Abb. 3.8). Ausgehend von diesem Gitter von Dreiecken, werden durch sogenannte rekursive Halbierung der Dreiecksseiten immer feinmaschigere Gitter erzeugt. Siehe Abb. (3.9a bis d). Der Unterteilungsprozess endet, wenn die gewünschte Auflösung erreicht ist.

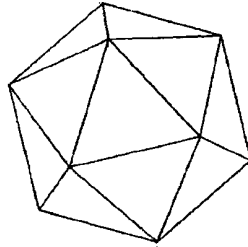


Abb.3.8 Regulärer Ikosaeder, der aus 20 gleichseitigen Dreiecken besteht

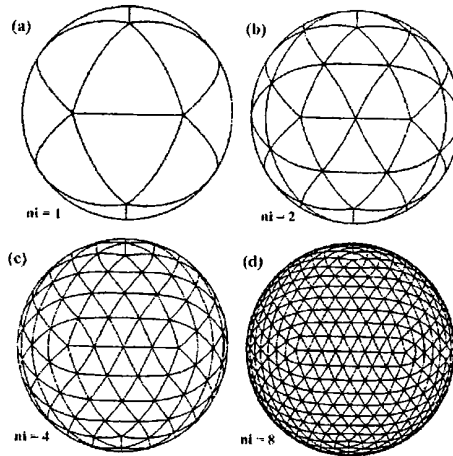


Abb.3.9 Gittergenerierung durch rekursive Halbierung der Dreiecksseiten
 Der Parameter n_i bedeutet die Anzahl der Intervalle auf einer großen Dreiecksseite

Jeder Gitterpunkt innerhalb der sphärischen Hauptdreiecke oder an deren Seiten befindet sich im Zentrum eines Hexagons. Nur die Gitterpunkte an den 12 Scheiteln des Ikosaeders werden nur von 5 Dreiecken umgeben und stellen somit die Zentralpunkte eines Pentagons dar (s. Abb. 3.10). Aus der Abb.(3.10) ersieht man gleichfalls, dass die Pole pentagonale Mittelpunkte darstellen. Die Dreiecksflächen des Ikosaeders formen 10 sphärische Rhomben, von welchen 5 um den Nordpol und 5 um den Südpol gelagert sind. Die Gitterpunkte werden mit den zwei Indizes i und j markiert (s. Abb. 3.11). Nach diesem Indexsystem ergibt sich direkt einsichtig aus Abb. (3.11), dass innerhalb eines Rhombus $(n - 1)^2$ Gitterpunkte zu liegen kommen, da auf jedem Größtkreis des Hauptdreiecks $(n - 1)$ Gitterpunkte vorgefunden werden, wenn man die Scheitelpunkte abrechnet. Innerhalb eines sphärischen Dreiecks befinden sich deshalb

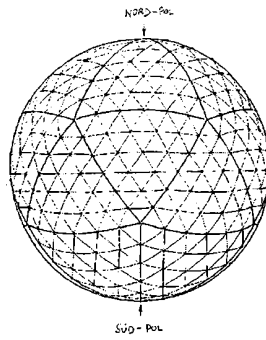


Abb. 3.10 Darstellung des sphärischen Icosaeders und des hexagonalen Icosaedergitters für $n = 6$ ($n =$ die Anzahl der Intervalle auf einer großen Dreiecksseite)

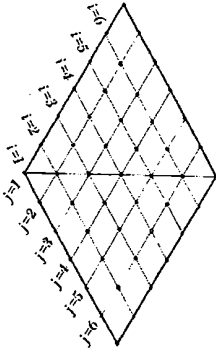


Abb. 3.11 Indexbezeichnung einer Rhombuszelle

q	n_i	N	$A_{\min} (\text{km}^2)$	$A_{\max} (\text{km}^2)$
4	16	2562	154109	238061
5	32	10242	38515	59955
6	64	49962	9628	15017
7	128	163842	2407	3756
8	256	655362	602	939
9	512	2621442	150	235

q	n_i	$\Delta_{\max} (\text{km})$	$\Delta_{\min} (\text{km})$	$\Delta_{\text{Mitt}} (\text{km})$
4	16	477.6	440.5	526.0
5	32	239.3	220.3	263.2
6	64	119.8	110.1	131.6
7	128	59.9	55.1	65.8
8	256	30.0	27.6	32.9
9	512	15.0	13.8	16.5

Tab. 3.1: Charakteristische Größen des Dreiecksgitters für verschiedene Auflösungen n_i . $\Delta =$ Gitterdistanzen, $A =$ Dreiecksflächen

$$\frac{1}{2} [(n-1)^2 - (n-1)]$$

Gitterpunkte, da die $(n-1)$ auf dem den Rhombus in zwei Dreiecke teilenden Größtkreis weggerechnet werden müssen. Da auf der ganzen Kugel 20 sphärische Hauptdreiecke liegen und auf den 30 Kanten des sphärischen Icosaeders $(n-1)$ Gitterpunkte plus 12 Scheitelpunkte zu finden sind, ergibt sich ohne weitere Schwierigkeit für die Gesamtzahl an Gitterpunkten in dem sphärischen Netz die Formel:

$$N = 10[(n-1)^2 - (n-1)] + 30(n-1) + 12 = 10n^2 + 2 \quad (3.38)$$

Das Gitter bietet eine nahezu gleichförmige Diskretisierung der Kugeloberfläche, auch wenn die sechseckigen Zellen in ihrer Größe variieren, speziell in der Nähe der Fünfecke. Das Verhältnis zwischen der minimalen und der maximalen Fläche der Gitterelemente ist eine Funktion der Dichte der Gitterpunkte bzw. der sogenannten „Auflösung“. Um die Auswahl an Auflösungen zu erhöhen kann man zuerst eine Dreiteilung der großen Dreiecksseiten mit anschließender rekursiver Halbierung vornehmen. Die Flächen der Gitterelemente nehmen mit zunehmenden n ab [s. a. Tab. (3.1)].

Nach WILLIAMSON (1968) kann man relativ leicht die mittlere Gitterdistanz \bar{d} auf folgende Weise bestimmen: Man definiert eine mittlere Fläche \bar{F} als jenen Flächeninhalt, welchen ein sphärisches Dreieck annimmt, wenn $20n^2$ gleiche Dreiecke mit der Oberfläche der Erdkugel flächengleich sind, d.h. mathematisch formuliert

$$\bar{F} = \frac{4a^2\pi}{20n^2}$$

wobei a den Erdradius bedeutet, da jedes Hauptdreieck n^2 sphärische Sekundärdreiecke enthält und das ganze Ikosaeder aus 20 Hauptdreiecken gebildet wird. Die Seitenfläche des vorliegenden Ikosaeders beläuft sich auf $\bar{SF} = \bar{d}^2/4\sqrt{3}$ und stellt 1/20 der Erdoberfläche dar. Deshalb kann man

$$\bar{d}^2/4\sqrt{3} = \frac{4a^2\pi}{20n^2} \text{ bzw. umgeformt } \bar{d} = \frac{2a}{n} \sqrt{\frac{\pi}{5\sqrt{3}}} \text{ schreiben.}$$

Aus dieser Relation erhält man einen Überblick über die Varianz der Gitterdistanz als Funktion des Koeffizienten n , der faktisch die Auflösung des Gitters bestimmt. Der Tab. (3.1) des DWD kann man die Werte und Varianzen der übrigen Größen entnehmen. Das GME-Modell des deutschen Wetterdienstes (DWD) verwendet zur vertikalen Diskretisierung ein σ -Koordinatensystem nach SIMMONS u. BURRIDGE (1981). Diesbezüglich siehe auch HUBER-POCK (2003). Zur Abbildung der Differenzenoperatoren werden an jedem Gitterpunkt auf der Kugel lokale Basisfunktionen eingeführt. [s. MAJEWSKI (1998) oder MAJEWSKI et al. (2000)]. Diese Basisfunktionen werden durch die Länge und Breite eines lokal definierten, sphärischen Koordinatensystems, dessen Äquator und Nullmeridian sich am relevanten Gitterpunkt schneiden. Hierbei sind (η, χ) die Koordinaten dieses lokalen Systems [s. Abb. (3.12)].

Die lokale Ostrichtung stimmt mit der globalen Ostrichtung und die lokale Nordrichtung mit der globalen Nordrichtung überein. Drei orthogonale Einheitsvektoren

$$\bar{\mathbf{x}}_0, (\bar{\mathbf{e}}_0)_\lambda \text{ und } (\bar{\mathbf{e}})_\varphi$$

spannen das lokale, sphärische Koordinatensystem auf. $\bar{\mathbf{x}}_0$ ist hierbei der Ortsvektor des Gitterpunkts auf der Einheitskugel. $(\bar{\mathbf{e}}_0)_\lambda$ ist orthogonal zu $\bar{\mathbf{x}}_0$ und stimmt mit der globalen Ostrichtung überein. $(\bar{\mathbf{e}})_\varphi$ ist ebenfalls orthogonal zu $\bar{\mathbf{x}}_0$ und zeigt in die globale Nordrichtung. Die Vorteile eines solchen Koordinatensystems bestehen darin, dass

- 1.) das Koordinatensystem in der Umgebung des Gitterpunktes nahezu kartesisch ist. Singularitäten sind weit vom Gitterpunkt entfernt.
- 2.) Es werden nur zwei tangentielle Geschwindigkeitskomponenten benötigt, um die kugeloberflächenparallelen Geschwindigkeitsvektoren zu beschreiben.

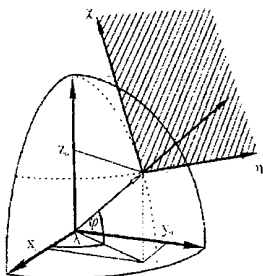


Abb. 3.12: Das globale kartesische und das lokale, sphärische (η, χ) - Koordinatensystem

Natürlich müssen die Geschwindigkeitsfelder in das jeweilige lokale Koordinatensystem transformiert werden, bevor man Differenzenoperatoren berechnet. Die meteorologischen Gleichungen werden für das lokale, sphärische Koordinatensystem (η, χ) gelöst, wobei die horizontalen Abstände (dx, dy) auf der Erde mit dem Radius a aus $dx = a \cos \chi d\eta$ und $dy = a d\chi$ folgen. Für dieses Koordinatensystem sind nunmehr Differenzenoperatoren für Gradient und Laplace herzuleiten. Man geht hierbei von der üblichen Form der Operatoren im sphärischen Koordinatensystem aus, wobei man berücksichtigen muß, dass am zentralen Gitterpunkt $\eta = \chi = 0$ ist. Jede Funktion ψ kann man in der Nachbarschaft eines Gitterpunktes durch ein quadratisches Polynom ψ mit den lokalen Koordinaten (η, χ) approximieren:

$$\psi(\eta, \chi) = \psi_0 + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \chi + \alpha_3 \eta^2 + \alpha_4 \eta \chi + \alpha_5 \chi^2 \quad (3.39)$$

was auch als Taylor-Reihe der Form

$$\psi(\eta, \chi) = \psi_0 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) \eta + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \chi}\right) \chi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right) \eta^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \chi}\right) \eta \chi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2}\right) \chi^2 \quad (3.40)$$

dargestellt werden kann. Die diskretisierte Form der Gradient- und Laplace-Operatoren eines skalaren Feldes ψ wird als gewichtete Linearkombination der Werte von ψ am zentralen Gitterpunkt und den umgebenden fünf oder sechs Nachbargitterpunkten angesetzt. Der Index m der Nachbargitterpunkte variiert immer von 1 – 6, wobei das Gewicht des mitunter nicht existenten Gitterpunktes bei den auftretenden Pentagons gleich Null ist.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \sum_{m=1}^6 G_{\eta,m} (\psi_m - \psi_0) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \chi} = \sum_{m=1}^6 G_{\chi,m} (\psi_m - \psi_0) \quad (3.42)$$

Die Gewichte $G_{\eta,m}$ und $G_{\chi,m}$ ($m = 1, 2, \dots, 6$) sind für jeden Nachbargitterpunkt unterschiedlich und hängen ausschließlich von der Position der Gitterpunkte ab. Diese Position ist durch die lokalen Koordinaten (η, χ) gegeben. Die Gitterpunkte werden gegen den Uhrzeigersinn gezählt (s. Abb. 3.13).

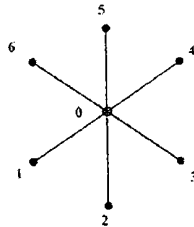


Abb. 3.13: Der zentrale Gitterpunkt (0) und die sechs Nachbargitterpunkte (1 – 6)

Eine zum Gradientoperator analoge Ermittlung ergibt sich für den Laplace mit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right) \Psi = \sum_{m=1}^6 L_m (\Psi_m - \Psi_0) \quad (3.43)$$

Um die Gewichte $G_{\eta,m}$ und $G_{\chi,m}$ sowie L_m abzuleiten, muss man von Gl. (3.39) ausgehen. Für sechs umgebende Gitterpunkte haben wir sechs Bestimmungsgleichungen für die fünf Koeffizienten α_i in der nachfolgenden Relation:

$$\Psi_m(\eta_m, \chi_m) = \Psi_0 + \alpha_1 \eta_m + \alpha_2 \chi_m + \alpha_3 \eta_m^2 + \alpha_4 \eta_m \chi_m + \alpha_5 \chi_m^2 \quad (3.39a)$$

mit $m = 1, 2, \dots, 6$. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (Minimierung der Fehlerquadrate) kann man nunmehr die fünf Koeffizienten α_j unter Verwendung der Relation (3.39a) und dem Gleichungssystem

$$\alpha_j = \beta_{j,m} (\Psi_m - \Psi_0) \quad (3.39 b)$$

bestimmen. Aus diesen Überlegungen, insbesondere Gl. (3.40), ergibt sich dann für die Gradientengewichte $G_{\eta,m} = \beta_{1,m}$ und $G_{\chi,m} = \beta_{2,m}$ und für die Laplace-Gewichte $L_m = 2(\beta_{3,m} + \beta_{5,m})$ wobei hier m von 1 bis 6 läuft. Auf Grund der Symmetriebeziehungen im GME müssen die Gewichte nur für den Rhombus 1 berechnet werden. Die gleichen Gradient-Koeffizienten werden für die Berechnung der Divergenz verwendet. Allerdings müssen die Windkomponenten u_m und v_m an den sechs Nachbargitterpunkten in das lokale Koordinatensystem des zentralen Gitterpunktes rotiert werden, bevor der Divergenzoperator berechnet werden kann. Bezüglich der Einzelheiten darf auf MAJEWSKI et al. (2002) verwiesen werden.

3.1.6 Zeitliche Diskretisierung (Zeitliche Differenzenschemata)

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns überwiegend mit gewöhnlichen Differentialgleichungen mit einer abhängigen und einer unabhängigen Variablen. Obwohl die Modellgleichungen der NWP in der Regel ein komplexes System partieller Differentialgleichungen bilden, stellt die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen einen wichtigen Teil des Rechenprozesses dar. So reduzieren sich die bestimmenden partiellen Differentialgleichungen bei der „Spektralen Methode“ auf einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen für die zeitabhängigen Entwicklungskoeffizienten. Auch bei Anwendung der „Semi-Lagrangeschen Methode“ werden wir einem ähnlichen Ergebnis begegnen. Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen werden uns deshalb hier beschäftigen, da diese zur Approximation der zeitlichen Ableitungen in den partiellen Modelldifferentialgleichungen verwendet werden können. Differenzenschemata für die zeitliche Ableitung bei den „Primitiven Gleichungen“ sind meist nur von zweiter oder mitunter auch erster Ordnung genau. Die Erfahrung hat nämlich gezeigt, dass Approximationen höherer Ordnung meist nicht sehr erfolgreich sind. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen genügt gewöhnlich die Gleichung selbst und eine einzige Anfangsbedingung, um zu einer exakten Lösung zu gelangen. Der Fehler der äquivalenten numerischen Lösung ist daher ausschließlich durch die Inadequatheit des numerischen Schemas bedingt. Bei partiellen Modelldifferentialgleichungen resultiert der Fehler der numerischen Lösung aber sowohl aus der Inadequatheit des Schemas als auch der

ungenügenden Information über den Anfangszustand. Die Steigerung der Genauigkeit des numerischen Schemas kann deshalb den aus der mangelnden Information resultierenden Fehler nicht verringern. Andererseits wird aber wegen des Stabilitätskriteriums ohnehin mit sehr kleinen Zeitschritten Δt zu rechnen sein, die kleiner sind als für eine ausreichende Genauigkeit notwendig wäre. Approximationen höherer Ordnung sind deshalb für die zeitlichen Differenzenschemata nicht erforderlich und es ist viel sinnvoller höheren Rechenaufwand für die Reduktion der viel größeren Fehler der räumlichen Ableitungen aufzuwenden. In der Praxis der NWP haben wir es mit einem System nicht-linearer partieller Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F\left[U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \dots\right] \tag{3.44}$$

zu tun, wobei U beispielsweise eine vorauszusagende abhängige Variable darstellt. Die Gleichung (3.44) gibt im allgemeinen nur Auskunft über die Steigung der Tangente an die Kurve des wahren zeitlichen Verlaufs $U(t)$ in Abb. 3.14. Man setzt daher den Verlauf der Funktion $U(t)$ durch ein Fortschreiten in ausreichend kleinen angenäherten Tangentenstücken zusammen. Die Vorhersage über ein größeres Zeitintervall $t = N\Delta t$ wird in viele Vorhersagen über möglichst kleine Zeitschritte Δt zerlegt. Die v -te Vorhersage U^v ist dabei das Anfangsfeld für die $(v+1)$ -te Vorhersage. Die Zeitschritte müssen hierbei so gewählt werden, dass die Rechnung stabil bleibt.

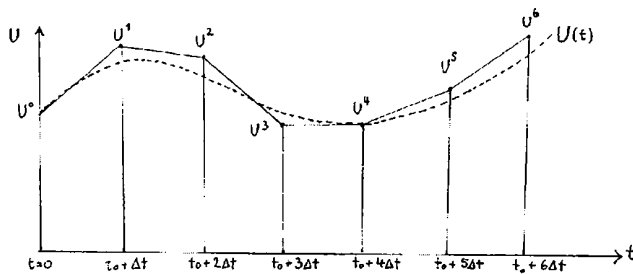


Abb. 3.14 Zeitlicher Verlauf der „wahren Funktion“ $U(t)$ und der numerisch approximierten Werte von U^v

Die Forderung der Einhaltung des Stabilitätskriteriums bedeutet im Sinne der Abb. 3.14 nichts anderes als Δt so klein zu wählen, dass der entsprechende Polygonzug aus Tangentenstücken den raschesten Schwingungen der Variablen $U(t)$ noch ausreichend genau folgen kann. [s. a. EDELMANN (1976)]. Voraussetzung der Rechnung ist natürlich, dass $U(0)$ zum Zeitpunkt t_0 bekannt ist. Von diesem Zeitpunkt t_0 ausgehend, können wir dann bis zum Zeitpunkt $t = t_0 + N\Delta t$ in der Zukunft fortschreiten und den Verlauf der Variablen $U(t)$ angenähert numerisch extrapolieren. Um zeitliche Differenzenschemata zu konstruieren gehen wir zunächst wie MESINGER u. ARAKAWA (1976) von

$$\frac{dU}{dt} = F[U, t] \tag{3.45}$$

aus, wobei $U = U(t)$ ist. Die unabhängige Variable ist hier die Zeit t . Wir teilen die Zeitachse in v Intervalle der gleichen Länge Δt und bezeichnen U^v als den approximierten Wert des „wahren“ Wertes U zum Zeitpunkt $v\Delta t$. Gleichzeitig setzen wir voraus, dass uns die Werte U^v und U^{v-1} bekannt sind. Nunmehr wollen wir Schemata entwickeln mit deren Hilfe ein

angenäherter Wert U^{v+1} berechnet werden kann. Hiezu gibt es eine Reihe von Möglichkeiten. Die wichtigsten werden wir im Folgenden besprechen. Grundsätzlich gibt es zeitliche Differenzenschemata mit Einschluss von zwei und drei Zeitebenen. Die Schemata mit zwei Zeitebenen setzen die Werte U^v und U^{v+1} zueinander in Beziehung. Sie spielen für die Integration über den ersten Zeitschritt, ausgehend von t_0 , eine wichtige Rolle, wenn die Anfangsbedingungen nur auf einer Zeitebene bekannt sind. Wir müssen also die exakte Beziehung

$$U^{v+1} = U^v + \int_{v\Delta t}^{(v+1)\Delta t} F(U, t) dt \quad (3.46)$$

jeweils durch ein entsprechendes numerisches Schema approximieren. Hiezu kann man sogenannte nicht-iterative oder iterative Schemata heranziehen, z. B.

1.) Das „EULER“ oder „Vorwärts-Schema“ (EULER forward scheme)

$$U^{v+1} = U^v + \Delta t F^v \text{ mit } F^v = F(U^v, v\Delta t) \quad (3.47)$$

Hiebei wird der Integrand durch die als konstant betrachtete Funktion F am jeweiligen unteren Rand des Zeitintervalls angenähert. Das Schema ist zeitlich nicht zentriert und von erster Ordnung genau [$O(\Delta t)$]. Im allgemeinen sind alle nicht zentrierten Schemata von erster, alle einfachen zentrierten Schemata von zweiter Ordnung [$O(\Delta t)^2$] genau.

2.) Das „Rückwärts-Schema“ (Backward scheme)

$$U^{v+1} = U^v + \Delta t F^{v+1} \text{ mit } F^{v+1} = F(U^{v+1}, (v+1)\Delta t) \quad (3.48)$$

Der Integrand wird hier durch eine konstant betrachtete Funktion F am oberen Rand approximiert. Der Truncation-Error ergibt für dieses Schema $R = O(\Delta t)$. Jedesmal, wenn ein Term F^{v+1} auftaucht, nennt man das Schema „implizit“. Kommt ein solcher Term nicht vor, dann wird das Schema als „explizit“ bezeichnet. Implizite Schemata sind äußerst schwierig zu lösen, da F^{v+1} noch nicht bekannt ist. Es bedeutet nämlich, dass ein System von simultanen Gleichungen für die U -Werte auf iterativem Weg gelöst werden muss. Die Zahl der simultanen Gleichungen entspricht hiebei genau der Anzahl der Gitterpunkte. Das Lösungsverfahren läuft hiebei auf die Inversion sehr großer Matrizen hinaus, was eine sehr große, zeitaufwendige Rechenarbeit bedeutet. Deshalb haben implizite Methoden zunächst kaum Eingang in die NWP gefunden.

3.) Das „TRAPEZ-Schema“ (Trapezoidal Scheme)

Bei diesem Schema wird der Integrand durch das arithmetische Mittel des Wertes F am Anfang F^v und am Ende des Zeitintervalls mit F^{v+1} angenähert:

$$U^{v+1} = U^v + \frac{\Delta t}{2} \cdot (F^v + F^{v+1}) \text{ mit } F^v = F(U^v, v\Delta t) \text{ und } F^{v+1} = F(U^{v+1}, (v+1)\Delta t) \quad (3.49)$$

Der Truncation-Error ergibt hier $R = O[(\Delta t)^2]$. Auch dieses Schema ist natürlich „implizit“. Man kann implizite Schema aber, wie erwähnt, mit Hilfe eines Iterationsprozesses „explizit“ machen und wir erhalten dann z. B.

4.) Das „MATSUNO-Schema“ (EULER backward scheme)

Man beginnt mit dem EULER- oder Vorwärtsschema als erste Näherung:

$$U_1^{v+1} = U^v + \Delta t F^v \quad (3.50)$$

Aus dieser Näherung U_1^{v+1} berechnet man anschließend $F_1^{v+1} = F(U_1^{v+1}, (v+1)\Delta t)$ und erhält schließlich als zweite Näherung

$$U_2^{v+1} = U^v + \Delta t F_1^{v+1} \quad (3.51)$$

womit wir ein „explizites“ Schema der Genauigkeit $R = O[(\Delta t)]$ erhalten. Neuerdings wird in der Literatur auch von einem „Super-MATSUNO-Schema“ berichtet. Dieses ist nach FOX-RABINOVITZ (1996) bzw. LAZIZ (2004) eine Generalisierung des EULER-Rückwärtsschemas, bei welchem mehr als ein Korrekturschritt eingebaut wird, d.h. es handelt sich um ein Iterationsverfahren mit zusätzlichen Korrekturen. LAZIZ (2000) verwendet das Schema beim „Adjustment“-Prozess in einem ETA-Modell mit einem Rückwärts-Schema für die Coriolisterme. Er unterscheidet hierbei einen sogenannten „Vorhersage- und einen Korrektur-Schritt“. Das Verfahren wird in erster Linie bei Initialisierungs-Methoden verwendet. Darüber sollte im Rahmen der Datenassimilierung noch eingehend die Rede sein.

Auf gleiche Weise kann man auch das Trapez-Schema explizit machen und erhält

5.) Das „HEUN“-Schema mit

$$U_1^{v+1} = U^v + \Delta t F^v \quad \text{und} \quad U_2^{v+1} = U^v + \frac{1}{2} \Delta t [F^v + F_1^{v+1}] \quad (3.52)$$

Nunmehr kann man auch die Information einer zusätzlichen Zeitebene heranziehen. In den meisten Fällen ist ja U^{v-1} bekannt. Es ist dann möglich ein sogenanntes 3-Zeitebenen-Schema zu entwerfen. Wir haben hierbei die exakte Beziehung

$$U^{v+1} = U^{v-1} + \int_{(v-1)\Delta t}^{(v+1)\Delta t} F(U, t) dt$$

entsprechend zu approximieren. Wählt man zur Annäherung des Integranden einen konstanten Wert im Intervall über $2\Delta t$, der mit F^v in der Mitte dieses Intervalls übereinstimmt, dann erhält man:

6.) das „LEAP-FROG“-Schema (Step over scheme) mit

$$U^{v+1} = U^{v-1} + 2\Delta t F^v \quad (3.54)$$

Es ist ein zeitlich zentriertes Schema von der Genauigkeit $R = O[(\Delta t)^2]$ und gehört zu den am häufigsten in der NWP verwendeten zeitlichen Differenzenschemata. Allerdings weist es, wie die meisten Schemata mit 3 Zeitebenen den Nachteil auf, dass physikalisch irrelevante Schwingungen erzeugt werden, welche man als Numerischen Lärm bezeichnet. Man verwendet nach Verwendung des „LEAP-FROG-Schemas“ zum Erhalt einer Lösung zum Zeitpunkt $(v+1)$ deshalb in der Regel eine Glättung mit Hilfe des sogenannten „ROBERT-ASSELIN“-Filters

$$\bar{U} = U^v + \alpha[U^{v+1} - 2U^v + U^{v-1}]$$

wobei α einen Gewichtungsfaktor darstellt. Es handelt sich hierbei um einen zeitlichen Glättungsoperator, der zeitlich zentriert ist [ROBERT (1969), ASSELIN (1972)].

Schließlich kann man einen Vorwärtszeitschritt mit einem zentrierten Zeitschritt über Δt kombinieren und erhält dann

7.) das „LAX-WENDROFF“-Schema mit dem Vorwärtszeitschritt

$$U^{v+\frac{1}{2}} = \bar{U}^v + F^v \frac{\Delta t}{2} \quad (3.55)$$

Numerische Stabilität ist hierbei nur erreichbar [s. EDELMANN (1976)], wenn beim Vorwärtsschritt ein räumlich gemitteltes \bar{U}^v verwendet wird. Gleichzeitig gilt $F^v = F(U^v, v\Delta t)$. Anschließend approximiert man mit Hilfe von

$$F^{v+\frac{1}{2}} = F\left(U^{v+\frac{1}{2}}, \left(v + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$$

schließlich das Integral in (3.46) durch $F^{v+\frac{1}{2}}$ in der Mitte des Zeitintervalls und gelangt zu

$$U^{v+1} = U^v + \Delta t F^{v+\frac{1}{2}} \quad (3.56)$$

Das „LAX-WENDROFF“-Schema ist von der Genauigkeit $R = O[(\Delta t)^2]$ und weist eine Reihe von Vorteilen auf, welche wir später noch besprechen werden.

Schließlich sei hier noch

8.) Das „ADAMS-BASHFORTH“-Schema der Vollständigkeit halber erwähnt, das eine Genauigkeit der Ordnung $R = O[(\Delta t)^4]$ aufweist. Eine vereinfachte Form dieses Schemas erreicht man, wenn man den Integranden in (3.46) durch jenen Wert von $F(U, t)$ approximiert, den man aus einer linearen Interpolation aus den Werten F^{v-1} und F^v im Zentrum des Intervalls Δt erhält.

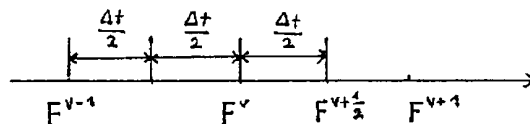


Abb.3.15 Grafische Darstellung der Werte von F im vereinfachten „ADAMS-BASHFORTH“-Schema

Aus der Abb. 3.15 ersieht man sofort, dass bei linearer Interpolation von

$$F^{v+\frac{1}{2}} - F^{v-1} = \frac{3}{2}(F^v - F^{v-1})$$

gelten muss, was unmittelbar zu

$$F^{v+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}F^v - \frac{1}{2}F^{v-1}$$

führt. Verwendet man diese letzte Relation zur Approximation des Integrals (3.46), dann erhält man

$$U^{v+1} = U^v + \Delta t \left(\frac{3}{2}F^v - \frac{1}{2}F^{v-1} \right) \quad (3.57)$$

Dieses vereinfachte „ADAMS-BASHFORD“-Schema ist ebenfalls von der Genauigkeit $R = O[(\Delta t)^2]$.

3.1.7 Eigenschaften zeitlicher Differenzenschemata: Stabilität, Physikalischer Mode und Numerischer Lärm

Wir wenden uns nunmehr den Stabilitätseigenschaften der im vorherigen Abschnitt entworfenen zeitlichen Differenzenschemata zu. Diese Eigenschaften hängen von der Funktion $F(U,t)$ ab. Wir müssen deshalb diese Funktion näher beschreiben. Zur Anwendung auf atmosphärische Modelle eignet sich die Form $F \equiv i\omega U$. Mit Hilfe von (3.45) erhalten wir deshalb mit

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U \quad (3.58)$$

eine Beziehung, welche auch als „Oszillationsgleichung“ bezeichnet wird. Die Größe U können wir auch als komplex in der Form $U = u + iv$ auffassen. Der Parameter ω ist reell und wird als Frequenz bezeichnet. Mit Hilfe der linearen Advektionsgleichung (3.11) lässt sich zeigen, dass (3.58) tatsächlich, trotz der Einfachheit des Ansatzes, auf generelle atmosphärische Bewegungsformen anwendbar ist. Mit Hilfe des Lösungsansatzes

$$u(x, t) = \text{Re}[U(t)\exp(ikx)]$$

kann (3.11) einer Lösung zugeführt werden. Wir erhalten sofort (3.22b) mit

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung führt unmittelbar zurück zu (3.58), wenn wir $\omega = -kc$ setzen. Ein weiteres sehr einfaches Beispiel, dass der einfache Ansatz (3.58) für generelle atmosphärische Bewegungsformen gilt, erhält man, wenn man den Beschleunigungsterm und den Coriolisterm aus den Bewegungsgleichungen mit

$$\frac{du}{dt} = fv \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dt} = -fu$$

heranzieht und $U = u + iv$ in diese Relationen einführt und die v -Komponente mit i multipliziert. Nach Addition der resultierenden Relationen folgt

$$\frac{dU}{dt} = -ifU$$

Auch diese Beziehung führt zu (3.58) zurück, wenn man $\omega = -f$ setzt, womit neuerlich gezeigt wird, dass der Ansatz (3.58) für generelle Bewegungsformen in der Atmosphäre zutreffend ist. Tatsächlich kann gezeigt werden, dass (3.58) aus einem sehr verallgemeinerten System von bestimmenden linearen Modellgleichungen erhalten werden kann. [YOUNG (1968) loc.cit. MESINGER u. ARAKAWA (1976)]. Als allgemeine Lösung von (3.58) kann man für diskrete Werte $t = v\Delta t$ auch

$$u(v\Delta t) = [U(0)\exp(i\omega v\Delta t)] \quad (3.59)$$

einführen. Betrachtet man die Lösung in einer komplexen Ebene, dann rotiert ihr Argument in jedem Zeitschritt gegen den Uhrzeigersinn, wobei sich keine Änderung der Amplitude ergibt (s. Abb. 3.16).

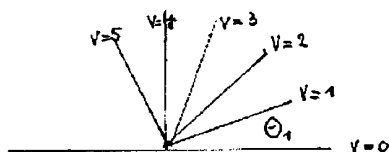


Abb. 3.16 Rotation des Arguments der Lösung in der komplexen Ebene mit $\omega\Delta t$ pro Zeitschritt Δt . $\Theta_1 = \pi/8$ und $u_{im} = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$. $\Theta = \omega\Delta t$.

Entsprechend unseren früheren Überlegungen und im Sinne der Analyse von v. NEUMANN kann man auch ansetzen:

$$U^{v+1} = \lambda U^v \quad (3.60)$$

oder weiters, da λ als komplexe Zahl aufzufassen ist, kann man schreiben (s. Abb. 3.18)

$$\lambda = |\lambda| \exp(i\Theta) \quad (3.61)$$

Die numerische Lösung lässt sich dann durch

$$U^v = |\lambda|^v U(0) \exp(iv\Theta) \quad (3.62)$$

ausdrücken. Aus (3.62) ist leicht zu erkennen, dass $\Theta = -c_N k\Delta t$ die Phasenänderung der numerischen Lösung in jedem Zeitschritt darstellt, da ja $\omega = -kc_N$ mit c_N als numerische Phasengeschwindigkeit angesetzt werden kann. Da sich die Amplitude der „wahren“ bzw. analytischen Lösung nicht ändert, müssen wir für die numerische Lösung aus Stabilitätsgründen

$$\lambda \leq 1$$

fordern. Damit ergibt sich aus (3.62) sofort, dass folgende Bedingungen gelten müssen:

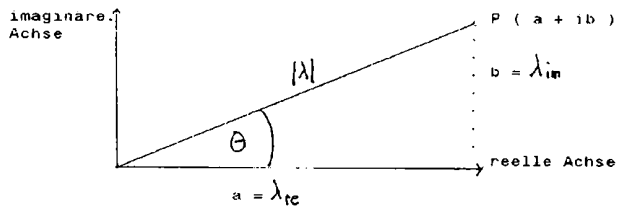


Abb. 3.17 Darstellung einer komplexen Zahl in der GAUSS'schen Zahlenebene.

$|\lambda|$ = der Absolutbetrag und Θ das Argument einer komplexen Zahl

Das Schema erweist sich als

instabil		>	
neutral	wenn	$ \lambda = 1$	
dämpfend		<	

ist. Gleichzeitig können wir auch die Phasenänderung Θ der numerischen Lösung mit der wahren Lösung $\omega\Delta t$ vergleichen. Das Verhältnis beider Änderungen, welches auch als „relative Phasenänderung“ bezeichnet wird, ergibt dann:

Das numerische Schema wirkt

beschleunigend		>	$c_N > c$
neutral	für $\frac{\Theta}{\omega\Delta t}$	= 1	$c_N = c$
verzögernd		<	$c_N < c$

da $\frac{\Theta}{\omega\Delta t} \equiv \frac{c_N}{c}$ ist, wobei hier c_N die Phasengeschwindigkeit der numerischen und c die der „wahren“ Lösung darstellt. Aus Genauigkeitsgründen ist es deshalb wichtig und wünschenswert sowohl den Amplifikationsfaktor als auch die relative Phasengeschwindigkeit c_N/c nahe 1 zu halten. Allerdings ist dies nicht immer wünschenswert, denn in manchen numerischen Schemata entstehen auch Lösungen, die nicht in Richtung der wahren Lösung konvergieren, auch wenn die Raum- und Zeitschritte gegen Null gehen. Existieren solche Lösungen, dann haben sie auch ihren eigenen Amplifikationsfaktor. Sie stellen sich als falsche und „nicht-physikalische“ Lösungen dar, die die realen physikalischen Lösungen sogar überdecken können. Man bezeichnet sie als „Numerischen Lärm“ oder „computational mode“. Hier ist es dann natürlich wünschenswert durch $|\lambda| < 1$ eine entsprechende Dämpfung zu erreichen. Wir kommen später auf dieses Phänomen noch zurück.

Nun kann man zeigen, dass die nicht-iterativen zeitlichen Schemata in eine einzige Differenzgleichung der Form [s. MESINGER u. ARAKAWA (1976)]

$$U^{v+1} = U^v + \Delta t. [\alpha F^v + \beta F_1^{v+1}] \quad (3.63)$$

zusammengefasst werden können, wobei aus Konsistenzgründen $\alpha + \beta = 1$ gelten muss. Es ergibt sich dann die jeweilige Beziehung für die einzelnen Schemata, wenn man

$$\begin{aligned} \alpha = 1, \beta = 0 & \quad \text{für das „EULER“-Schema} \\ \alpha = 0, \beta = 1 & \quad \text{für das „RÜCKWÄRTS“-Schema und} \\ \alpha = 1/2, \beta = 1/2 & \quad \text{für das „TRAPEZ“-Schema} \end{aligned}$$

setzt. Nunmehr wendet man (3.63) auf die „Oszillationsgleichung“ an und erhält

$$U^{v+1} = U^v + i\omega\Delta t [\alpha U^v + \beta U^{v+1}] \quad (3.64)$$

Um jetzt λ zu ermitteln müssen wir (3.64) nach U^{v+1} auflösen und erhalten, wenn $\omega\Delta t = p$ gesetzt wird

$$U^{v+1} = \frac{1 + i\alpha p}{1 - i\beta p} U^v$$

woraus man auf Grund unserer bisherigen Überlegungen [s. Gl. (3.60)] sofort erkennt, dass

$$\lambda = \frac{1 + i\alpha p}{1 - i\beta p} \quad (3.65)$$

ist. λ stellt hier den komplexen Amplifikationsfaktor dar. Komplexe Zahlen dividiert man bekanntlich dadurch, dass man den Zähler und Nenner mit der komplex-konjugierten des Nenners erweitert und sich schließlich

$$\lambda = \frac{1 + i\alpha p}{1 - i\beta p} \frac{1 + i\beta p}{1 + i\beta p} = \frac{1 + i\alpha p + i\beta p - \alpha\beta p^2}{1 - i\beta p + i\beta p + \beta^2 p^2} = \frac{1 + ip(\alpha + \beta) - \alpha\beta p^2}{1 + \beta^2 p^2} = \frac{1 + ip - \alpha\beta p^2}{1 + \beta^2 p^2}$$

ergibt, weil $\alpha + \beta = 1$ ist. Setzt man jetzt die für das jeweilige Schema geltenden Werte für α und β ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} \lambda = 1 + ip & \quad \text{für das „EULER“-Schema} \\ \lambda = \frac{1 + ip}{1 + p^2} & \quad \text{für das „RÜCKWÄRTS“-Schema und} \\ \lambda = \frac{1 - \frac{1}{4} p^2 + ip}{1 + \frac{1}{4} p^2} & \quad \text{für das „TRAPEZ“-Schema} \end{aligned}$$

Nunmehr sind wir in der Lage die Stabilität des jeweiligen Schemas zu testen. Hierzu müssen wir den Absolutbetrag $|\lambda|$ der komplexen Zahl λ bestimmen. Für diesen Absolutwert ergibt sich bekanntlich

$$|\lambda| = |a \pm ib| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

woraus sofort die nachstehenden Ergebnisse folgen:

$|\lambda| = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ für das „EULER“-Schema. Dieses ist immer „instabil“, weil $|\lambda| > 1$ ist.

$$|\lambda| = \frac{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + p^2} = (1 + p^2)^{-\frac{1}{2}}$$
 für das „RÜCKWÄRTS“-Schema.

Dieses letztere Schema ist wegen $|\lambda| < 1$ immer „stabil“, gleichgültig wie groß der Zeitschritt Δt auch gewählt wird. Es handelt sich um ein „unbedingt“ stabiles Schema. Da aber $|\lambda|$ immer kleiner als 1 ist, wirkt dieses Schema stark dämpfend, wobei das Ausmaß dieser Dämpfung mit wachsender Frequenz wegen $p = \omega \Delta t$ zunimmt. Das ist mitunter eine sehr willkommene Eigenschaft, vor allem wenn sich hochfrequente Feldstrukturen im Anfangsfeld zu unrealistischen Amplituden aufschaukeln. Eine selektive Dämpfung gerade solcher hochfrequenter Wellenbewegungen wirkt dann gleichsam wie ein „Filter“. Für das „TRAPEZ“-Schema erhalten wir schließlich

$$|\lambda| = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{p^4}{16} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{4}p^2} = \frac{\left[\left(1 + \frac{p^2}{4}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{4}p^2} = 1$$

d. h. das Trapezschemata verhält sich immer stabil oder neutral. Die Amplitude der „numerischen Lösung“ bleibt ebenso konstant, wie die der „wahren“ Lösung. Sowohl das „Rückwärtsschema“ als auch das „Trapezschemata“ erweisen sich immer stabil. Damit haben wir eine wichtige Eigenschaft „impliziter“ Schemata kennengelernt. Sie sind immer stabil. Wir haben auch schon erwähnt, dass die Lösung solcher „impliziter“ Schemata an dem notwendigen außerordentlichen Rechenaufwand zumeist scheitert. Man hat deshalb in der NWP mit Anwendung der „Primitiven Gleichungen“ sogenannte „semi-implizite“ Schemata entwickelt, bei welchen die rechte Seite der Modellgleichungen in zwei Terme $F = F_1 + F_2$ aufgespalten wird und erhält dann schematisch gesehen

$$U^{v+1} = U^{v-1} + 2\Delta t \cdot [F_1^v + \frac{1}{2}(F_2^{v-1} + F_2^{v+1})]$$

Alle nicht-linearen Transportterme werden hierbei in F_1 zusammengefasst und explizit behandelt. In F_2 vereinigt man hingegen alle jene Terme, welche die Schwerewellen kontrollieren, wie Druckgradient und Divergenz. Diese werden „implizit“ angenähert. Da der implizite Teil aber unbedingt stabil ist, muss der maximal mögliche Zeitschritt Δt in einer Numerischen Integration nicht mehr an den sehr schnellen Schwerewellen, sondern an der viel geringeren Advektionsgeschwindigkeit der Rossby-Prozesse orientiert werden. Der Vorteil des größeren Zeitschrittes, der durch diese Orientierung möglich wird, geht allerdings teilweise bei der Auflösung nach U^{v+1} wieder verloren. Man muss nämlich eine elliptische Differentialgleichung vom Helmholtz-Typ lösen.

Ein iteratives Schema auf zwei Zeitebenen haben wir im „MATSUNO“-Schema kennengelernt. Wenden wir auf die Oszillationsgleichung (3.58) die Relationen (3.50) und (3.51) an, dann ergibt sich

$$U_1^{v+1} = U^v + \Delta t \cdot i\omega U^v \quad \text{und} \quad U_2^{v+1} = U^v + \Delta t \cdot i\omega U_1^{v+1}$$

Eliminiert man U_1^{v+1} durch Einsetzen aus der ersten Gleichung, dann folgt unter Bedachtnahme auf $p = \omega\Delta t$

$$U_2^{v+1} = [1 - p^2 + ip]U^v$$

wobei die eckige Klammer nichts anderes als λ darstellt und sich deshalb für dessen Absolutwert und Stabilitätskriterium

$$|\lambda| = [1 - p^2 + p^4]^{\frac{1}{2}} \tag{3.66}$$

ergibt. Dieses ist demnach stabil, wenn $p \leq 1$ ist. Mit anderen Worten, um Stabilität zu garantieren, muss Δt so klein gewählt werden, dass

$$\Delta t \leq \frac{1}{\omega}$$

gilt. Das MATSUNO-Schema ist also „bedingt“ stabil, wobei zu bedenken ist, dass dieses Stabilitätskriterium umso restriktiver wirkt, je höher die Frequenz ω ist. Differenziert man (3.66) nach p , dann folgt

$$\frac{d|\lambda|}{dp} = p(1 - p^2 + p^4)^{-\frac{1}{2}}(2p^2 - 1)$$

Für $p = 1/\sqrt{2}$ wird $d|\lambda|/dp = 0$ und damit der Amplifikationsfaktor des MATSUNO-Schemas zu einem Minimum. Wenn man mit einem System arbeitet, das viele Frequenzen enthält, wie das in der realen Atmosphäre der Fall ist, so muss man den Zeitschritt so wählen, dass für alle Frequenzen $0 < p < 1/\sqrt{2}$ bzw. $\Delta t < 1/|\omega\sqrt{2}|$ gilt, wodurch wie im impliziten Rückwärtsschema alle Amplituden mit relativ hoher Frequenz durch das Schema gedämpft bzw. reduziert werden. Diese Technik fand auch schon bei „Initialisierungsverfahren“ entsprechende Anwendung, da sie unechte hochfrequente Lärmphänomene, die meist durch die Analysemethoden erzeugt werden, dämpft. Zur Zusammenfassung der Eigenschaften bisher besprochener Zeitdifferenzenschemata sei hier die von MESINGER u. ARAKAWA gegebene Darstellung des Amplifikationsfaktors $|\lambda|$ als Funktion von $p = \omega\Delta t$ in Abb. 3.18 präsentiert. Bevor wir fortfahren, ist es noch wünschenswert, die Phasenänderungen der numerischen Lösungen pro Zeitschritt und die relative Phasenänderung Θ/p für die einzelnen Differenzenschemata zu betrachten. Wir haben in (3.61) den Amplifikationsfaktor durch

$$\lambda = |\lambda| \exp(i\Theta)$$

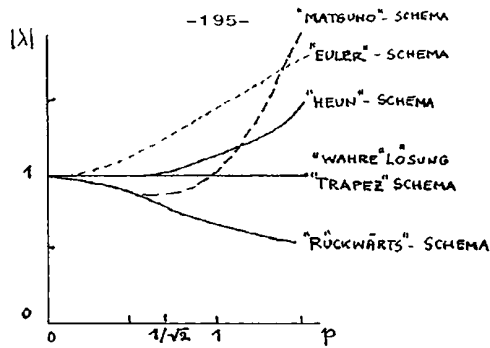


Abb.3.18 Der Amplifikationsfaktor $|\lambda|$ als Funktion von $p = \omega\Delta t$ für verschiedene zeitliche Differenzenschemata und die wahre Lösung. [nach MESINGER u. ARAKAWA (1976)]

definiert. Diese Beziehung kann mit Hilfe der Eulerschen Formel auch

$$\lambda = |\lambda| \exp(i\Theta) = |\lambda| [\cos \Theta + i \sin \Theta] \equiv a + ib = \lambda_{RE} + i\lambda_{IM}$$

geschrieben werden, was nichts anderes als die „goniometrische Form“ einer komplexen Zahl darstellt. Das Argument Θ einer komplexen Zahl, welches hier die Phasenänderung der numerischen Lösung darstellt, kann aus den Beziehungen $a = |\lambda| \cos \Theta = \lambda_{RE}$ und weiters $b = |\lambda| \sin \Theta \equiv \lambda_{IM}$ ermittelt werden. Damit folgt mit

$$\frac{\lambda_{IM}}{\lambda_{RE}} = \frac{|\lambda| \sin \Theta}{|\lambda| \cos \Theta} = \tan \Theta$$

und unter Beachtung der Definition zyklometrischer Funktionen mit $\Theta = \arctan \lambda_{IM} / \lambda_{RE}$ die Relation

$$\frac{\Theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{\lambda_{IM}}{\lambda_{RE}} \quad (3.67)$$

Für das „EULER“-Schema erhielten wir $\lambda = 1 + ip$, d.h. $\lambda_{RE} = 1$ und $\lambda_{IM} = p$ und daher

$$\frac{\Theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan p \quad (3.68)$$

Für das „RÜCKWÄRTS“-Schema ergibt sich mit $\lambda = \frac{1}{(1+p^2)}(1+ip)$, da $\lambda_{RE} = 1/(1+p^2)$ und $\lambda_{IM} = p/(1+p^2)$ ist, schließlich gleichfalls (3.68). Die rechten Seiten von (3.68) sind für beide Schemata immer kleiner als 1 und es wirken daher beide verzögernd. Für $p = 1$ wird $\Theta/p = \pi/4 = 0.78539$. Daher ist $c_N = 0.78 c$.

Im Fall des „MATSUNO“-Schemas mit $\lambda = 1 - p^2 + ip$ und daher $\lambda_{RE} = 1 - p^2$ und $\lambda_{IM} = p$ erhalten wir

$$\frac{\Theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1-p^2} \quad (3.69)$$

Hier kann man nicht ohne weiteres entscheiden, welchen Wert die rechte Seite annimmt. Da wir aber aus Stabilitätsgründen $p < 1$ fordern müssen, können nur kleine Werte von p in Frage kommen. Entwickelt man (3.69) in einer zyklometrischen Reihe, dann folgt, wenn wir nach dem zweiten Glied abbrechen

$$\frac{\Theta}{p} \cong \frac{1}{1-p^2} - \frac{1}{3} \frac{p^2}{(1-p^2)^3} \dots\dots\dots$$

Da aber für kleine p die folgenden Näherungen gelten

$$1/1-p^2 \approx 1+p^2 \text{ und } 1/(1-p^2)^3 \approx 1+3p^3$$

folgt schließlich, wenn wir diese Näherungen in die obige Reihe einsetzen und erneut nach dem zweiten Glied abbrechen

$$\frac{\Theta}{p} \cong 1 + \frac{2p^2}{3} \dots\dots\dots \quad (3.70)$$

Aus dieser Ableitung sehen wir sofort, dass das „MATSUNO“-Schema immer beschleunigend wirkt, da $\Theta/p > 1$ ist. Die Phasenfehler beeinflussen zwar die Stabilität nicht, aber bei Anwendung zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, addiert sich der Phasenfehler durch räumliche Differenzenbildung zu diesem Phasenfehler durch zeitliche Differenzenbildung. Der daraus resultierende „totale Phasenfehler“ verdient deshalb genaue Beachtung. Der Anteil des „räumlichen“ Phasenfehlers erweist sich hierbei aber in der Regel als dominant. Zum Abschluß wollen wir hier noch das wichtige „LEAP-FROG“-Schema auf seine Eigenschaften untersuchen. Wie schon erwähnt handelt es sich hierbei um ein Schema unter Einbezug von drei Zeitebenen. Diskretisiert man die Oszillationsgleichung (3.58) nach diesem Schema, dann ergibt sich

$$U^{v+1} = U^{v-1} + i2pU^v \quad (3.71)$$

Alle Schemata mit drei Zeitebenen benötigen mehr als eine Anfangsbedingung, obwohl physikalisch gesehen nur eine einzige ausreichen müsste. Von sich aus kann das Schema diese zweite Anfangsbedingung nicht ermitteln, wenn sie nicht aus den Beobachtungen abgeleitet werden kann. Man verwendet daher beim Rechenstart ein entsprechendes Zwei-Ebenen-Schema und geht erst nach diesem ersten Schritt zum eigentlichen „LEAP-FROG“-Schema über. Nach der Methode von v. NEUMANN können wir bekanntlich $U^{v+1} = \lambda U^v$ oder auch ebenso gut $U^v = \lambda U^{v-1}$ bzw. $U^{v+1} = \lambda^2 U^{v-1}$ schreiben. Setzt man diese letzteren Beziehung in (3.71) ein, dann erhalten wir sofort

$$\lambda^2 U^{v-1} = U^{v-1} + i2p\lambda U^{v-1}$$

und daraus die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - i2p\lambda - 1 = 0 \quad (3.72)$$

welche die nachstehenden Wurzeln hat

$$\lambda_1 = (1 - p^2)^{\frac{1}{2}} + ip \quad (3.73a)$$

$$\lambda_2 = -(1 - p^2)^{\frac{1}{2}} + ip \quad (3.73b)$$

Wir erhalten somit zwei Lösungen der Form $U^{v+1} = \lambda U^v$. Dieser Umstand ergibt sich aus der Verwendung des Drei-Zeit-Ebenen-Schemas. Im allgemeinen führt ein N-Zeitebenenschema zu $(N - 1)$ Lösungen. Eine Lösung, die einem einzelnen Wert des Amplifikationsfaktors zugehört, wird als „Mode“ bezeichnet. Betrachtet man die λ -Werte in den Gleichungen (3.73a) und (3.73b), dann ergibt sich aus unseren früheren Überlegungen, dass eine Lösung $U^{v+1} = \lambda U^v$ eine Approximation an die „wahre“ Lösung dann darstellt, wenn $\lambda \rightarrow 1$ und $\Delta t \rightarrow 0$ geht. Beide Lösungen des „LEAP-FROG“-Schema erhalten wir, wenn $p = \omega \Delta t \rightarrow 0$ geht und sich daher folgerichtig

$$\lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_2 = -1$$

ergibt. Hierbei bezeichnet man die Lösungen, welche λ_1 zugehören als „Physikalischen Mode“, da wir ja immer nur Gleichungen lösen wollen, die reale physikalische Prozesse beschreiben. Hingegen sind alle mit λ_2 verbundenen Lösungen keine Approximationen an die „wahre“ physikalische Lösung und werden deshalb als „computational mode“ oder auch „Numerischer Lärm“ bezeichnet. Da man den „Numerischen Lärm“ nicht ohne weiteres eliminieren kann, muss man für Stabilität fordern, dass beide Amplifikationsfaktoren nicht größer als 1 sein dürfen. Zur Stabilitätsanalyse des „LEAP-FROG“-Schemas betrachten wir zunächst drei Spezialfälle:

- 1.) $|p| < 1$. In diesem Fall ist $1 - p^2$ positiv und wir erhalten $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, d.h. beide „Modes“ sind neutral und stabil.
- 2.) $|p| = 1$. In diesem Fall gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = ip$ und daher $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Auch hier sind beide „Modes“ neutral und stabil.
- 3.) $|p| > 1$. Jetzt haben die beiden λ - Werte nur noch imaginäre Teile.

$\lambda_1 = i[p + (p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$ und $\lambda_2 = i[p - (p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$, weil der Radikand $(1 - p^2) < 0$ ist und daher $\sqrt{1 - p^2} \equiv \sqrt{-1} \sqrt{p^2 - 1} = i \sqrt{p^2 - 1}$ gilt. Weiters folgt für die Absolutbeträge, da die Klammerwerte reell sind, $|\lambda_1| = [p + (p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$ und $|\lambda_2| = [p - (p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$ und damit für $p > 1$ der Wert $|\lambda_1| > 1$ und für $p < -1$ der Wert $|\lambda_2| > 1$, d.h. das „LEAP-FROG“-Schema wird instabil. Man sieht also, dass dieses Schema nur stabil ist, wenn $|p| = |\omega \Delta t| \leq 1$ eingehalten wird. Aus unseren früheren Überlegungen erhalten wir für die Phasenänderung $\Theta = \arctan \lambda_{IM} / \lambda_{RE}$, was auf das „LEAP-FROG“-Schema angewandt

$$\Theta_1 = \arctan \frac{p}{(1 - p^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.74)$$

für den „Physikalischen Mode“ und

$$\Theta_2 = \arctan \frac{-p}{(1-p^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.75)$$

für den „Numerischen Lärm“ ergibt. Trägt man den Verlauf der beiden letzteren Gleichungen in einem Diagramm mit der x-Achse $x = \pm p/\sqrt{1-p^2}$ und $y = \Theta_1$ bzw. Θ_2 auf, dann erkennt man, dass für $p \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ die Relation

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \pm \pi \quad (3.76)$$

gilt. Speziell wenn $p \rightarrow 0$ geht, dann geht $\Theta_1 \rightarrow p$, während $\Theta_2 \rightarrow \pi - p$ geht. Für kleine Zeitschritte Δt nähert sich deshalb die relative Phasenänderung $\Theta_1/p \rightarrow p/p = 1$, womit sich der „Physikalische Mode“ der „wahren Lösung“ nähert, wogegen der „Numerische Lärm“ wegen $\Theta_2/p \rightarrow (\pi - p)/p$ ein ganz verschiedenes Verhalten aufweist. (s. Abb. 3.19) Das Verhalten der beiden „Modes“ kann leicht mit Hilfe der Ansätze

$$U_1^v = U_1(0) \exp(iv\Theta_1) \text{ und } U_2^v = U_2(0) \exp[iv(\pm \pi - \Theta_1)]$$

analysiert werden. Für Θ_1 haben wir hier den Wert $\pi/8$ angenommen und den Imaginärteil U_{im} der Lösung für $t = 0$ gleich Null gesetzt. Der „Physikalische Mode“ rotiert dann gegen den Uhrzeigersinn mit $\Theta_1 = \pi/8$ pro Zeitschritt Δt und der „Numerische Lärm“ für $p > 0$ mit $\pi - \Theta_1 = 7\pi/8$. In Abb. 3.20 ist die Rotation des „Physikalischen Modes“ und des „Numerischen Lärms“, in einer komplexen Ebene“ dargestellt.

Aus Genauigkeitsgründen muss die Phasenänderung des „Physikalischen Modes“ Θ_1 die Phasenänderung $p = \omega \Delta t$ der „wahren Lösung“ möglichst genau approximieren. Entwickelt man die rechte Seite der Gl. (3.74) in einer zyklometrischen Reihe und bricht erneut nach dem zweiten Glied ab, dann erhält man $\Theta_1 = p / (1 - p^2)^{\frac{1}{2}} - 1/3 [p^3 / (1 - p)^2 (1 - p^2)^{\frac{1}{2}}] \dots\dots$

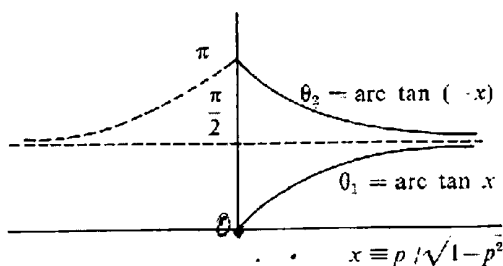


Abb. 3.19 Phasenänderung des „Physikalischen Modes“ und des „Numerischen Lärms“ beim „LEAP-FROG“-Schema

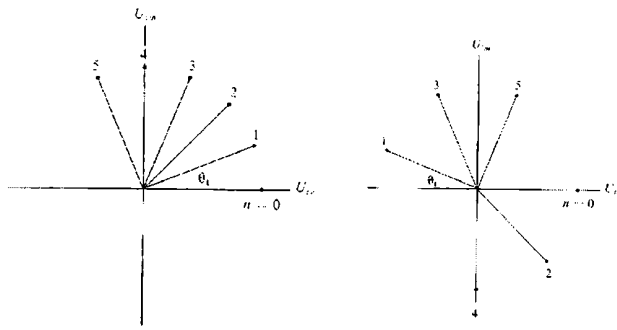


Abb. 3.20 a.) „Physikalischer Mode“ und b.) „Numerischer Lärm“ des „LEAP-FROG“-Schemas für verschiedene Werte von ν

Mit Hilfe der Näherungsformeln bei kleinem p : $(1 - p^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + p^2/2$ und $(1 - p^2)^{-1} \approx 1 + p^2$ folgt weiters

$$\Theta_1 = p + p^3/2 - p^3/3(1 + p^2 + p^2/2 + p^4/2) \dots\dots\dots$$

Bricht man erneut nach dem dritten Glied ab, dann ergibt sich schließlich

$\Theta_1 = p + 1/6 \cdot p^3 \dots\dots\dots$ und wir erhalten dann für die „relative“ Phasenänderung schlussendlich

$$\frac{\Theta_1}{p} = \frac{c_N}{c} = 1 + \frac{1}{6} p^2 \dots\dots\dots$$

d.h. die numerische Phasengeschwindigkeit c_N erfährt gegenüber der „wahren“ Lösung eine leichte Beschleunigung. Vergleicht man mit dem MATSUNO-Schema Gl. (3.70), dann sieht man sofort, dass das letzte Glied in dieser Reihenentwicklung das Vierfache des letzten Gliedes in der Reihenentwicklung des „LEAP-FROG“-Schemas darstellt: $2p^2/3 = 4(1/6 p^2)$ d.h. die Beschleunigung durch das „LEAP-FROG“-Schema ist viermal kleiner als die des „MATSUNO“-Schemas. Dieser günstigen Eigenschaft steht ein großer Nachteil des „LEAP-FROG“-Schemas gegenüber: die Existenz des „Numerischen Lärms“, der sich neutral verhält und nicht ohne weiteres eliminiert werden kann. Bei nicht-linearen Modellgleichungen gibt es, wie die praktische Erfahrung zeigt, eine Tendenz zu leichter Amplifikation des „Numerischen Lärms“. Allerdings ist es möglich, wenn ein System von Schwerewellengleichungen zu lösen ist, Gitter- und Differenzschemata zu entwerfen, welche sehr ähnliche Eigenschaften wie das „LEAP-FROG“-Schema aufweisen und keinen „Numerischen Lärm“ enthalten. Diese Schemata berechnen nur den „Physikalischen Mode“ und es muß nur die halbe Rechenzeit wie beim „LEAP-FROG“-Schema aufgewendet werden. Eine weitere Möglichkeit, den „Numerischen Lärm“ zu unterdrücken, besteht darin, in den Rechengang jeweilig ein Schema auf zwei Zeitebenen zwischenschalten. Nach Anwendung des „LEAP-FROG“-Schemas, um eine Lösung zum Zeitpunkt $t = (n + 1)\Delta t$ zu erlangen, wird in der Regel eine Glättung nach dem sogenannten „ROBERT-ASSELIN“-Filter [ROBERT (1969) und ASSELIN (1972)] zum Zeitpunkt $n \Delta t$ angewendet:

$$\bar{U} = U^v + \alpha(U^{v+1} - 2U^v + U^{v-1})$$

wobei α einen Gewichtungsfaktor darstellt.

3.1.8 Die Advektionsgleichung

In diesem Abschnitt werden wir uns mit einem für die Praxis sehr bedeutungsvollen Teil der atmosphärischen Gleichungen befassen: Zunächst mit der einfachen Form der „linearen“ Advektionsgleichung und anschließend in einem späteren Abschnitt auch mit ihrer „nicht-linearen“ Form. Der Einfachheit und besseren Einsicht halber wollen wir unsere Überlegungen in eindimensionaler Betrachtungsweise fortsetzen, die die Erweiterung auf zwei- und dreidimensionale Betrachtung vorbereiten soll. Diskretisiert man die Gleichung (3.11) räumlich durch ein zentriertes endliches Differenzenschema über $2\Delta x$, dann erhalten wir eine sogenannte „semi-diskrete“ Gleichung, weil links noch ein Differentialquotient steht:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.77)$$

Die zeitliche Ableitung kann nach einem im vorigen Abschnitt dargelegten Zeitschema diskretisiert werden. Wählen wir das „LEAP-FROG“-Schema, dann erhält man

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^{v-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.78)$$

(3.78) ist ein konsistentes, numerisches Schema zur Lösung der eindimensionalen „linearen“ Advektionsgleichung. Nunmehr führen wir in (3.77) die diskrete Versuchslösung

$$u_i = \operatorname{Re}[U(t)\exp(ik\hat{i}\Delta x)]$$

ein, wobei wir hier zur Unterscheidung von $i = \sqrt{-1}$ für den Gitterpunktsindex wieder \hat{i} verwendet haben. Wir erhalten dann

$$\frac{dU}{dt} \exp(ik\hat{i}\Delta x) = -c \frac{U[\exp(ik(\hat{i}+1)\Delta x) - \exp(ik(\hat{i}-1)\Delta x)]}{2\Delta x} \quad \text{oder auch}$$

$$\frac{dU}{dt} = -c \frac{U[\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)]}{2\Delta x} \quad (3.79)$$

Mit Hilfe der Eulerschen Identität $\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x) \equiv 2i \sin k\Delta x$ kann man aus (3.79) sofort

$$\frac{dU}{dt} = iU \left[\frac{-c \sin k\Delta x}{\Delta x} \right] \quad (3.80)$$

erhalten. Wenn man in (3.80) für den eckigen Klammerterm gleich ω setzt, dann ist diese Beziehung mit der Oszillationsgleichung (3.58) ident. Diskretisieren wir (3.80) nach dem „LEAP-FROG“-Schema, dann erhält man

$$U^{v+1} = U^{v-1} + 2i\Delta t \left[-c \frac{\sin k\Delta x}{\Delta x} \right] U^v \quad (3.80a)$$

woraus mit $p = \omega\Delta t = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x$ schließlich

$$U^{v+1} = U^{v-1} + 2ipU^v \quad (3.80b)$$

folgt. Wir haben vorhin gesehen, dass das Schema nur dann stabil ist, wenn für alle Frequenzen $|p| \leq 1$ ist, d.h. es gilt mit (3.80a) auch

$$\left| -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \right| \leq 1$$

Da $|\sin k\Delta x|$ im erlaubten Frequenzbereich als Maximum den Wert 1 erreicht, vereinfacht sich dieses Stabilitätskriterium zu

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad (3.81)$$

was aber nichts anderes als das CFL-Kriterium darstellt. Es ist dem auf Seite 27 unter Gl. (1.60) bereits erwähntem Kriterium sehr ähnlich. Es fehlt hier nur die $\sqrt{2}$, da wir unsere Betrachtungen vorläufig noch auf eine Raumdimension beschränkt haben. MESINGER u. ARAKAWA (1976) zeigen, dass die numerische Lösung für den „Physikalischen Mode“, tatsächlich gegen die „wahre“ Lösung der Advektionsgleichung konvergiert, wenn $\Delta t \rightarrow 0$ und $\Delta x \rightarrow 0$ gehen. Für den „Numerischen Lärm“ konnten sie zeigen, dass er sich mit $c_2 = -c$ in entgegengesetzter Richtung ausbreitet und das Vorzeichen von Zeitschritt zu Zeitschritt ändert. Er ist dabei für gerade Zeitschritte positiv und für ungerade negativ. Erwähnt muss hier auch noch werden, dass das „MATSUNO“-Schema bei Anwendung auf die Advektionsgleichung Dämpfungseffekte zeigt, die von der Wellenzahl k abhängig sind. Maximale Dämpfung ergibt sich hiebei für Wellenlängen $L = 4\Delta x$ während gerade im hochfrequenten Bereich nahe $L = 2\Delta x$ ungenügende bzw. keine Dämpfung stattfindet. Obwohl Dämpfung erwünscht sein kann, ist sie in dieser selektiven Form ungeeignet. Für die Lösung der Advektionsgleichung erweist sich das „MATSUNO“-Schema deshalb als ungünstig. Es verbleibt das Problem des „Numerischen Lärms“, welcher als Fehler der „Numerischen Lösung“ überlagert ist und daher eliminiert oder stark gedämpft werden muss. Hier bietet sich unter anderem das Schema von „LAX-WENDROFF“ an, das als Schema auf zwei Zeitebenen keinen „Numerischen Lärm“ erzeugt. Wir diskretisieren die Advektionsgleichung im „LAX-WENDROFF“-Schema in einem Raum-Zeit-Gitter, wie in der nachstehenden Abb. 3.21 demonstriert. Zunächst werden provisorische Werte im Mittelpunkt zweier Raumzeitgitter gebildet. Dies geschieht durch die Wahl zentrierter Vorwärtsdifferenzen in Raum und Zeit, wobei für

$$u_{i+\frac{1}{2}}^v \text{ und } u_{i-\frac{1}{2}}^v$$

räumliche, arithmetische Mittel u^v aus den zwei am nächsten gelegenen Gitterpunkten im Raum errechnet werden. Man erhält somit für die Advektionsgleichung (3.11) jeweils

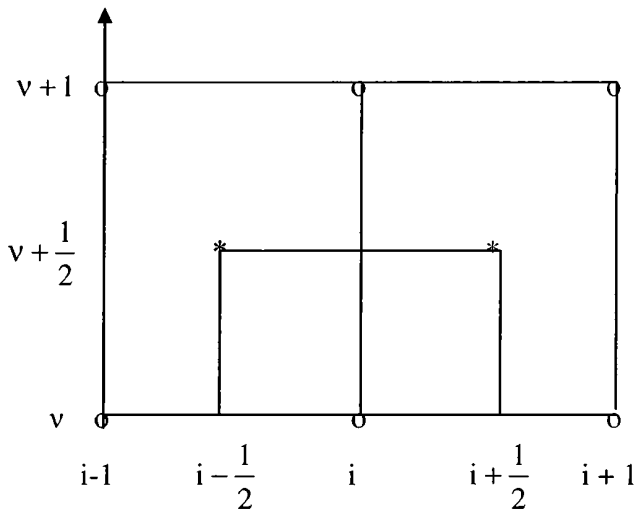


Abb. 3.21: Raumzeitgitter zur Ableitung des „LAX-WENDROFF“-Schemas nach MESINGER u. ARAKAWA (1976)

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{v+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} [u_{i+1}^v + u_i^v]}{\frac{1}{2} \Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^v - u_i^v}{\Delta x} \quad \text{und} \quad \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^{v+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} [u_i^v + u_{i-1}^v]}{\frac{1}{2} \Delta t} = -c \frac{u_i^v - u_{i-1}^v}{\Delta x}$$

Hierauf setzt man diese provisorischen Werte in ein räumlich und zeitlich zentriertes Differenzschema der Advektionsgleichung (3.11) in der Form

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^v}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1/2}^{v+1/2} - u_{i-1/2}^{v+1/2}}{\Delta x}$$

ein und erhält zunächst

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^v}{\Delta t} = -\frac{c}{\Delta x} \left[-\frac{c\Delta t}{2} \left(\frac{u_{i+1}^v - u_i^v}{\Delta x} \right) + \frac{1}{2} (u_{i+1}^v + u_i^v) \right] - \frac{c}{\Delta x} \left[\frac{c\Delta t}{2} \left(\frac{u_i^v - u_{i-1}^v}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2} (u_i^v + u_{i-1}^v) \right]$$

woraus schlussendlich die Relation

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^v}{\Delta t} = -\frac{c}{2\Delta x} [(u_{i+1}^v + u_{i-1}^v)] + \frac{1}{2} \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2} [(u_{i+1}^v - 2u_i^v + u_{i-1}^v)] \quad (3.82)$$

resultiert. Hält man Δt fest und lässt $\Delta x \rightarrow 0$ gehen, dann nähert sich der letzte Term in der Gleichung (3.82) dem Ausdruck $\frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, was nichts anderes als einen „Diffusionsterm“ darstellt, welcher dämpfend wirkt. Sein Dämpfungseffekt ist, wie man zeigen kann, maximal für den hochfrequenten Teil des Wellenspektrums, vor allem für die Welle $L = 2\Delta x$. Da sich gerade mit dieser sehr kurzen Wellenlänge häufig ernste Probleme ergeben, ist diese Eigenschaft höchst willkommen. Das Schema ist von der Genauigkeit $R = O[(\Delta x)^2] + O[(\Delta t)^2]$. Um die Stabilität des „LAX-WENDROFF“-Schemas zu untersuchen, führt man die Lösung (3.26) in (3.82) ein und erhält nach ähnlicher Rechnung wie schon früher

$$|\lambda| = \left[1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.83)$$

wobei $\mu = \frac{|c|\Delta t}{\Delta x}$ ist. Das „LAX-WENDROFF“-Schema ist demnach stabil, wenn $(1 - \mu^2) \geq 0$

ist, was mit dem CFL-Kriterium

$$\mu \equiv \frac{|c|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

ident ist. Durch Ableitung von $|\lambda|$ nach μ ergibt sich sofort

$$\frac{d|\lambda|}{d\mu} = - \frac{4\mu(1 - 2\mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2}}{\left[1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

und damit beim Wert $\mu = 1/\sqrt{2}$ für alle $|\lambda|$ -Kurven als Funktion von μ ein Minimum. [s.a. MESINGER u. ARAKAWA (1976)]. Setzt man diesen Wert für μ in (3.83), dann erhält man unmittelbar

$$|\lambda|_{\text{MIN}} = \left[1 - \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Daraus ersieht man, dass dieser Minimalwert bei der kleinsten gerade noch auflösbaren Wellenlänge $2\Delta x$ bzw. $\pi/\Delta x$ den Wert $|\lambda|_{\text{MIN}} = 0$ annimmt und von da an monoton anwächst und sich mit $L \rightarrow \infty$ dem Wert $|\lambda| = 1$ nähert. In der Abb. 3.22 lässt sich dieses Verhalten eindrucksvoll ablesen. Die Dämpfung ist vor allem für die kurzen Wellenlängen groß, was, wie bereits erwähnt, sehr vorteilhaft sein kann. Allerdings hängt die Dämpfung auch vom Zeitschritt ab, was im Grunde genommen „physikalisch“ nicht ganz einzusehen ist. Außerdem kann über den Zeitschritt Δt nicht nach Belieben verfügt werden, da dieser am CFL-Kriterium zu orientieren ist. Dies stellt zweifellos wiederum einen Nachteil des Schemas dar.

Demgegenüber besitzt es aber den großen Vorteil keinen „Numerischen Lärm“ zu erzeugen. Allerdings besitzt kein Schema, welches aus der Kombination räumlich zentrierter Differenzen und der früher abgeleiteten zeitlichen Differenzenschemata gebildet werden können alle Vorteile des „LAX-WENDROFF“-Schemas. Darüber hinaus ist die Dissipation klein gegenüber den realen physikalischen Dissipationen in der Atmosphäre. Deshalb wurde das „LAX-WENDROFF“-Schema in der NWP mit Erfolg angewendet.

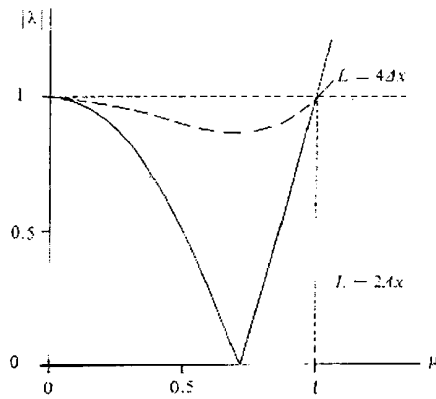


Abb. 3.22 Der Amplifikationsfaktor als Funktion von μ für das „LAX-WENDROFF“-Schema für die Wellenlängen $L = 2\Delta x$ und $L = 4\Delta x$ [nach MESINGER u. ARAKAWA (1976)]

3.1.9 Die „Numerische Dispersion“

Wir haben früher festgestellt, dass die lineare Advektionsgleichung Lösungen der Form

$$u(x, t) = \text{Re}[U(t)\exp(ikx)]$$

hat, vorausgesetzt, dass $\frac{dU}{dt} + ikcU = 0$ gilt. Man sieht, dass sich Wellen aller Wellenlängen mit der gleichen Phasengeschwindigkeit c ausbreiten, d.h. die Funktion $u(x,t)$ wird ohne Änderung ihrer Form mit konstanter Geschwindigkeit c entlang der x -Achse verlagert. Nun ziehen wir die semi-diskrete Gleichung (3.77) heran. Diese „hybride“ Gleichung hat die Eigenschaft, dass die Fehler der numerischen Approximation ausschließlich auf die Fehler der räumlichen Differenzenbildung zurückzuführen sind, da die zeitliche Änderung sich noch in der Form eines Differentialquotienten manifestiert

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.77)$$

Diese Gleichung hat, wie bereits demonstriert die diskrete Lösung $u_i = \text{Re}[U(t)\exp(ik\hat{\Delta}x)]$ vorausgesetzt, dass die Beziehung etwas umgeordnet in der Form

$$\frac{dU}{dt} + ikU \left[\frac{c \sin k\Delta x}{k\Delta x} \right] = 0 \quad (3.84)$$

geschrieben wird. Man kann dies sofort zeigen, wenn man die diskrete Lösung in (3.77) einsetzt und auf die Eulerschen Identitäten Bedacht nimmt. Wenn wir den Klammerterm mit

$$c^* = \left[\frac{c \sin k\Delta x}{k\Delta x} \right] \quad (3.85)$$

bezeichnen, dann wird (3.84) zu

$$\frac{dU}{dt} + ikc^*U = 0 \quad (3.86)$$

Aus dieser Gleichung erkennt man sofort, dass sich die Wellen in der „semi-diskreten“ Beziehung mit der Phasengeschwindigkeit c^* , welche eine Funktion der Wellenzahl k bzw. Wellenlänge L darstellt, ausbreiten. Damit kommt es durch die räumliche Differenzenbildung zu einer Dispersion der Wellenkomponenten, d.h. die einzelnen Wellen laufen abhängig von ihrer Wellenlänge mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten auseinander. Dieses Phänomen nennt man „computational dispersion“ oder „Numerische Dispersion“. Wenn $k\Delta x$ anwächst, dann sinkt die Phasengeschwindigkeit c^* und wird für die Wellenlänge $L = 2\Delta x$ sogar Null. Auf jeden Fall ist aber für alle Wellenlängen die Advektionsgeschwindigkeit kleiner als die Advektionsgeschwindigkeit der „wahren“ Lösung. Durch das damit generierte Auseinanderlaufen der einzelnen Wellenkomponenten kann es zu einer sehr ernst zu nehmenden „Lösungstrennung“ kommen. Besonders gravierend ist dieses Problem für atmosphärische Phänomene, die durch Überlagerung von Wellen mit verschiedener Wellenlänge zustande kommen, wie z. B. Fronten, Scherungslinien etc. Die letzteren werden besonders durch Superposition hochfrequenter Wellenkomponenten generiert und unterliegen deshalb einer sehr raschen Dispersion, die mitunter zu einer völlig irrealen Deformation des Feldes der prognostischen Variablen führen kann.

In diesem Zusammenhang verdient auch die sogenannte Gruppengeschwindigkeit, welche für die Energieausbreitungsprozesse wichtig ist, besondere Beachtung. Die Gruppengeschwindigkeit kann bekanntlich durch die Beziehung

$$c_G = \frac{d}{dk}(kc) = c + k \frac{dc}{dk} \quad (3.87)$$

definiert werden. Daraus sieht man, dass die Gruppengeschwindigkeit, dann mit der Phasengeschwindigkeit übereinstimmt, wenn $dc/dk = 0$ ist, d.h. keine Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von Wellenzahl bzw. Wellenlänge gegeben ist. Im Zuge der Diskretisation von (3.77) haben wir aber die Relationen (3.84) bis (3.86) erhalten, womit für die Gruppengeschwindigkeit der numerischen Lösung offensichtlich

$$c_G^* = \frac{d}{dk}(kc^*) = c^* + k \frac{dc^*}{dk} \quad (3.88)$$

zu gelten hat, was mit (3.85) zu

$$c_G^* = \frac{ck}{\Delta x} \left[\frac{k\Delta x \cos k\Delta x - \sin k\Delta x}{k^2} \right] + c^* = c \cos k\Delta x \quad (3.89)$$

führt. Man erkennt sofort, dass mit wachsendem $k\Delta x$ die „Numerische Gruppengeschwindigkeit“ abfällt und bei $L = 4\Delta x$ ($k\Delta x = \pi/2$) den Wert $c_G^* = 0$ annimmt. Bei noch kleineren Wellenlängen kehrt sich das Vorzeichen um und c_G^* wird negativ, d.h. die Wellenpakete, die von einer dieser sehr kurzen Wellenlängen gebildet werden, breiten sich entgegengesetzt zur Advektionsrichtung der „wahren“ Lösung und anderer individueller Wellen aus. Das steht aber offensichtlich im Gegensatz zu den physikalischen Eigenschaften der Advektionsgleichung und man nennt solche Wellen auch „parasitische“ Wellen. Sie stellen somit eine weitere Fehlerquelle numerischer Lösungen dar. Die Hauptfehler, welche durch die

räumliche Differenzenbildung entstehen, sind somit der „Phasengeschwindigkeitsfehler“ und die „Numerische Dispersion“. Man hat sich deshalb um Approximationen höherer Ordnung bei der räumlichen Diskretisation bemüht, um die erwähnten Fehler klein zu halten.

3.1.10 Approximationen vierter Ordnung für zentrierte räumliche Differenzenbildung in der Advektionsgleichung

Setzen wir nunmehr die Approximation vierter Ordnung (3.37) für die räumliche Differenzenbildung in die lineare Advektionsgleichung (3.11), dann ergibt sich

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c \left[\frac{4}{3} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta x} \right] = 0 \quad (3.90)$$

Mit Hilfe der diskreten Lösung $u_i = \text{Re} \left[U(t) \exp(ik\hat{i}\Delta x) \right]$ haben wir für die hybride Gleichung (3.77) bei räumlicher Differenzenbildung, welche von zweiter Ordnung genau ist, für die Phasengeschwindigkeit die numerische Approximation (3.85) erhalten. In analoger Weise ergibt sich jetzt für Approximationen vierter Ordnung

$$c^{**} = c \left[\frac{4}{3} \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{\sin 2k\Delta x}{2k\Delta x} \right] \quad (3.91)$$

als „Numerische Phasengeschwindigkeit“. Für kleine Wellenzahlen kann man (3.85) und (3.91) in trigonometrische Reihen der Form

$$c^* = c [1 - 1/3!(k\Delta x)^2 + \dots] \text{ bzw. } c^{**} = c [1 - 4/5!(k\Delta x)^4 + \dots]$$

entwickeln. Daraus wird sofort einsichtig, dass zwar in beiden Fällen der Verzögerungseffekt der „numerischen Phasengeschwindigkeit existiert ist, aber für die Approximationen vierter Ordnung bedeutend kleiner ausfällt. Während diese vorteilhafte Eigenschaft vor allem für Wellen des großen und mittleren „Scales“ festzustellen ist, nähert sich die Approximation für kurze Wellenlängen sehr rasch dem Wert c^* und wird schließlich bei $L = 2\Delta x$ ebenfalls Null (s. hierzu Abb. 3.23). Aus der Abbildung erkennt man außerdem, dass ab einer Wellenlänge von $L = 4\Delta x$ die numerische Phasengeschwindigkeit c^{**} stärker mit $k\Delta x$ abfällt als c^* , d.h. die „Numerische Dispersion“ ist in diesem Bereich für Approximationen der vierten Ordnung stärker als für solche zweiter Ordnung. Mit einem Wort, obwohl auch die kurzwelligen Komponenten mit einer größeren Geschwindigkeit c^{**} advektiert werden, ist ihre „Numerische Dispersion“ größer und es erfolgt eine raschere Deformation des Feldes. Gleichzeitig muss man bedenken, dass der Rechenaufwand pro Gitterpunkt für eine Schema vierter Ordnung entsprechend zunimmt. Man ist somit vor die Entscheidung gestellt, die gewünschte größere Genauigkeit mit Hilfe von Schemata von der Genauigkeit vierter Ordnung zu erzielen oder die Gitterdistanz Δx entsprechend zu verkleinern, wobei wiederum auch die Auswirkung auf das CFL-Kriterium Beachtung finden muss. Beide Wege führen auf jeden Fall zu einem bedeutend größeren Rechenaufwand.

Auch der „Truncation-Error“ eines Schemas 4. Ordnung soll hier noch kurz untersucht werden. Setzen wir in (3.37) $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x)$ und für $f(x) = A \sin kx$, dann erhalten wir aus (3.37) die approximative Relation

$$f'(x)_a = \frac{A \sin k\Delta x}{\Delta x} \left[1 + \frac{1}{3}(1 - \cos k\Delta x) \right] \cos kx$$

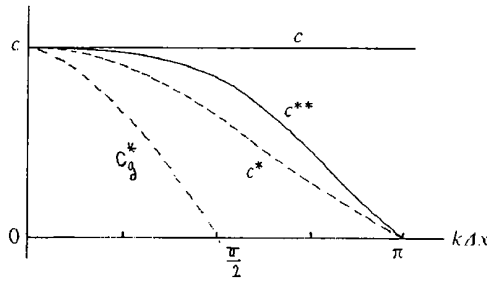


Abb.3.23 Phasengeschwindigkeiten c^* und c^{**} im Vergleich zur Phasengeschwindigkeit c der wahren“ Lösung
 c_G^* = numerische Gruppengeschwindigkeit

Bildet man schließlich das Verhältnis der approximierten zur „wahren“ Ableitung, dann ergibt sich

$$\frac{f'(x)_a}{f'(x)} = \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \left[1 + \frac{1}{3}(1 - \cos k\Delta x) \right] \quad (3.92)$$

Trägt man dieses Verhältnis als Funktion von $k\Delta x$ auf, dann erhält man die gestrichelte Kurve in Abb. 3.1 und erkennt, dass (3.37) tatsächlich eine genauere Approximation darstellt. Sie ist relativ gut bis zur Wellenlänge $L = 4\Delta x$ und fällt für kleinere Wellenlängen rasch ab.

Mit THOMPSON (1961) wollen wir nun fordern, dass der maximale „Truncation-Error“ 10% womöglich nicht übersteigen sollte. Aus Abb. 3.1 ergibt sich dann, dass das Differenzenschema (3.4) diese Forderung nur für $k\Delta x = 0.8$, das Schema (3.37) hingegen bis $k\Delta x = 1.4$ erfüllt. Für ein und dieselbe Wellenzahl k ergibt sich daher $\frac{k\Delta x_2}{k\Delta x_1} = \frac{1.4}{0.8}$ d.h. es

kann ohne Verlust an Genauigkeit die Gitterdistanz mit $\Delta x_2 = 1.75\Delta x_1$ im Fall der Approximation vierter Ordnung, also 1.75 mal größer als für ein Schema zweiter Ordnung, gewählt werden. Da $(I+1)$ Gitterpunkte über die Entfernung L_x und $(J+1)$ Gitterpunkte über die Entfernung L_y in einem zweidimensionalen Gittersystem verteilt sind, ergibt sich

$$I+1 = L_x / \Delta x_2 + 1 \text{ und } J+1 = L_y / \Delta y_2 + 1 \text{ oder auch}$$

$$I+1 = (L_x / 1.75\Delta x_1) + 1 \text{ und } J+1 = (L_y / 1.75\Delta y_1) + 1$$

d.h. es ergibt sich eine Anzahl von

$$(1.75)^2 (I+1)(J+1) = (1/\Delta x_1 \Delta y_1) (L_x + 1.75\Delta x_1) (L_y + 1.75\Delta y_1)$$

Gitterpunkten. Mit $(1.75)^2 = 3.06$ stellen wir daher fest, dass bei gleicher Genauigkeit für das Schema (3.35) etwa die dreifache Anzahl an Gitterpunkten gegenüber dem Schema (3.37) notwendig wäre. Die Anzahl der Rechenoperationen ist natürlich der Gitterpunktzahl proportional, d.h. dreifach größer. Allerdings sind für die Berechnung von (3.37) doppelt so viele Rechenoperationen als für das ursprüngliche Schema (3.35) ohne der Verdreifachung der Gitterpunktzahl erforderlich. Wir können deshalb gemäß (1.62) für die Rechenzeiten bei Verwendung der beiden Differenzenschemata

$$\tau_1 = L3NXRn\Delta t$$

$$\tau_2 = LNX2Rn\Delta t$$

ansetzen, woraus sofort ersichtlich ist, dass das Verhältnis der Rechenzeiten

$$\tau_1 : \tau_2 = 3 : 2$$

beträgt, d.h. bei gleicher Anzahl von n Zeitschritten Δt τ_1 um den Wert $\tau_2/2$ größer ist. Da für das Differenzenschema vierter Ordnung bei gleicher Genauigkeit man die Gitterdistanz $1.75 \Delta x_1$ wählen kann und gleichzeitig für den Prognosezeitraum $T = n\Delta t$ gelten muss, können wir auch

$$n_1\Delta t_1 = n_2\Delta t_2$$

schreiben bzw. mit Hilfe des Stabilitätskriteriums für zweidimensionale Betrachtung (CFL-Kriterium) $c\sqrt{2}\Delta t_1 / \Delta x_1 \leq 1$ und $c\sqrt{2}\Delta t_2 / \Delta x_2 \leq 1$ zu $n_2 / n_1 = \frac{\Delta x_1 c\sqrt{2}}{\Delta x_2 c\sqrt{2}} = \Delta x_1 / 1.75\Delta x_1$ und

weilers schlussendlich zu $n_1 = 1.75n_2$ kommen. Für das Rechenzeitverhältnis ergibt sich deshalb:

$$\tau_1 / \tau_2 = (3/2)1.75 = 2.6$$

d.h. bei Anwendung von (3.37) könnte die Rechenzeit trotz Verdopplung der Anzahl der Rechenoperationen auf etwa 38% der Rechenzeit für das Schema (3.35) verringert werden. Da gleichzeitig der notwendige Speicherplatz für ein zweidimensionales Wertefeld um 1/3 für (3.37) kleiner sein kann, erweist sich dieses Schema als besonders wertvoll. In der Tat ist der Vorteil aber nicht ganz so groß, weil gezeigt werden kann, dass das Stabilitätskriterium für Approximationen der vierten Ordnung etwas restriktiver ist. Diskretisieren wir die semi-diskrete Advektionsgleichung (3.90) zeitlich nach dem „LEAP-FROG“-Schema, dann erhalten wir

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^{v-1}}{2\Delta t} = -c \left[\frac{4}{3} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4\Delta x} \right] = 0 \quad (3.93)$$

In diese Relation (3.93) führen wir die bereits mehrfach verwendete diskrete Lösung

$$u_i = \text{Re} \left[U(t) \exp(ik_i \hat{\Delta} x) \right]$$

ein und erhalten unter Beachtung auf die Eulerschen Identitäten auf ähnliche Weise, wie schon bisher

$$U^{v+1} = U^{v-1} + 2i \left[(-c\Delta t / \Delta x) (4/3 \sin k\Delta x - 1/3 \sin 2k\Delta x/2) \right] U^v \quad (3.94)$$

Von den gleichen Überlegungen wie in (3.80a) ausgehend, kann man dann

$$p = \omega\Delta t \equiv \left[-c\Delta t / \Delta x (4/3 \sin k\Delta x - 1/3 \sin 2k\Delta x/2) \right]$$

ansetzen. Das „LEAP-FROG“-Schema ist generell dann stabil, wenn für alle Frequenzen $|p| \leq 1$ ist, d.h. wenn für alle zulässigen Wellenzahlen k die Bedingung

$$\left[-c\Delta t / \Delta x (4/3 \sin k\Delta x - 1/3 \sin 2k\Delta x/2) \right] \leq 1 \quad (3.95)$$

gilt. Um für alle Wellenlängen Stabilität zu garantieren, muss das Maximum des Klammerterms gefunden werden. Dieses Maximum bestimmt man, indem der Term in der runden Klammer nach $k\Delta x$ abgeleitet und das Ergebnis gleich Null gesetzt wird:

$$4/3 \cos k\Delta x - 1/3 \cos 2k\Delta x = 0$$

Setzt man weiters für $\cos 2k\Delta x = 2\cos^2 k\Delta x - 1$, dann erhält man eine quadratische Gleichung deren reelle Wurzel $\cos k\Delta x = -0.225$ bzw. $k\Delta x = 103^\circ$ ergibt. Daraus folgt für den Maximalwert $4/3 \sin 103^\circ - 1/6 \sin 206^\circ = 1.37$. Mit Hilfe dieser Überlegungen ergibt sich dann sofort aus (3.95)

$$1.37c\Delta t / \Delta x \leq 1 \text{ bzw. } c\Delta t / \Delta x \leq 0.73$$

als Stabilitätskriterium, d.h. für Approximationen vierter Ordnung ergibt sich ein restriktiveres Stabilitätskriterium. Es lässt sich übrigens auch zeigen, dass das Stabilitätskriterium umso restriktiver ist, je höher die Genauigkeit $R = O[(\Delta x)^n]$ wird. Für das Verhältnis der Rechenzeiten erhalten wir nunmehr

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = (3/2)1.75(0.73) = 1.9$$

d.h. trotz des restriktiveren Stabilitätskriteriums kann die Rechenzeit τ_2 immer noch auf nahezu den halben Wert von τ_1 reduziert werden. Die Vorzüge des Schemas (3.37) sind somit offensichtlich. Anschließend muss aber ergänzend festgestellt werden, dass für den hochfrequenten Feldteil, also Scales, die nahe bei der Wellenlänge $L = 2\Delta x$ liegen, keine der endlichen Differenzenmethoden befriedigend sind. Hier kann nur eine Verringerung der Gitterdistanz Abhilfe schaffen. Aus der Abb. 3.23 kann man entnehmen, dass durch eine Halbierung der Gitterdistanz sich die ursprünglich stationäre Welle $L = 2\Delta x$ mit einer Geschwindigkeit von $2/3c$ der „wahren“ Lösung verlagern würde [s.a. MESINGER u. ARAKAWA (1976)]. Gleichzeitig bedeutet dies aber, wenn wir zu zweidimensionaler Betrachtung übergehen, dass sich die Rechenzeit um den Faktor 4 verlängert, wobei das Stabilitätskriterium notwendigerweise eine Halbierung des Zeitschrittes Δt erforderlich macht und daher die Rechenzeit um ein weiteres mal um den Faktor 2 vergrößert wird. Das ist freilich keine prinzipielle Schwierigkeit, sondern eine Frage der Rechentechnologie. Die Approximationen höherer Ordnung erzeugen aber noch ein anderes Problem. Die Verwendung zusätzlicher Gitterpunkte erzeugt ähnlich wie die Verwendung von mehr als zwei Zeitebenen eine Art „räumlichen Numerischen Lärm“. Außerdem wird die Formulierung der Randbedingungen komplizierter. Zu einfache Randbedingungen können aber zu weiteren, mitunter ernststen Schwierigkeiten führen. ROBERT (1974) konnte zeigen, dass die größte Fehlerquelle in den NWP-Modellen durch den Truncation-Error im Advektionsterm hervorgerufen wird. Eine Verbesserung der Ermittlung des Advektionsterms für Systeme des „kleinräumigen“ Scales kann durch Anwendung der Lagrangeschen Methode erreicht werden. Auf diese Methode werden wir später zurückkommen.

3.1.11 Die zweidimensionale Advektionsgleichung

Bisher haben wir uns überwiegend nur mit eindimensionalen Problemen beschäftigt. Nunmehr wollen wir uns auch der zweidimensionalen Betrachtung widmen. Die zweidimensionale, lineare Advektionsgleichung lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.96)$$

wobei wieder $c_x, c_y = \text{const.}$ und $u = u(x, y, t)$ ist. Die konstante, vektorielle Advektionsgeschwindigkeit ist deshalb $|\mathbf{c}| = [c_x^2 + c_y^2]^{1/2}$. Als nächstes schreiben wir die Gleichung (3.96) in „semi-diskreter“ Form

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} = -c_x \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - c_y \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

Führen wir in diese Gleichung die Versuchslösung

$$u_{ij} = \text{Re}[U(t) \exp i(k_x \hat{i} \Delta x + k_y \hat{j} \Delta y)] \quad (3.97)$$

ein, wobei hier k_x und k_y die Wellenzahlen in die jeweilige Koordinatenrichtung bedeuten, dann erhält man, ähnlich wie schon im eindimensionalen Fall, nach entsprechender Berücksichtigung der Eulerschen Identitäten

$$\frac{\partial U}{\partial t} = i \left[-\frac{c_x}{\Delta x} \sin k_x \Delta x - \frac{c_y}{\Delta y} \sin k_y \Delta y \right] U \quad (3.98)$$

Diskretisiert man (3.98) zeitlich nach dem „LEAP-FROG“-Schema in der Zeit, dann erhalten wir sofort

$$U^{v+1} = U^{v-1} + 2i\Delta t \left[(-c_x / \Delta x) \sin k_x \Delta x - (c_y / \Delta y) \sin k_y \Delta y \right] U^v \quad (3.99)$$

und mit Hilfe der bereits wohlbekanntenen Relationen $U^v = \lambda U^{v-1}$ bzw. $U^{v+1} = \lambda^2 U^{v-1}$ folgt schließlich aus (3.99) $\lambda^2 U^{v-1} = U^{v-1} + 2ip\lambda U^{v-1}$ oder auch

$$\lambda^2 - 2ip\lambda - 1 = 0$$

was mit (3.72) übereinstimmt und wobei $p \equiv \Delta t \left[(-c_x / \Delta x) \sin k_x \Delta x - (c_y / \Delta y) \sin k_y \Delta y \right]$ ist. Aus unseren früheren Betrachtungen in der eindimensionalen Form wissen wir, dass als notwendige Bedingung für Stabilität im „LEAP-FROG“-Schema

$$|p| \leq 1$$

zu gelten hat. Deshalb muss analog im zweidimensionalen Fall die Relation

$$\left| \Delta t \left[(-c_x / \Delta x) \sin k_x d - (c_y / \Delta y) \sin k_y d \right] \right| \leq 1 \quad (3.100)$$

gelten, wobei für ein regelmäßiges Gitternetz jetzt $\Delta x = \Delta y = d$ gesetzt wurde. Der Maximalwert, den $|\sin k_x d|$ und $|\sin k_y d|$ im Bereich der zulässigen Wellenzahlen annehmen kann, ist auch hier jeweils 1. Das Stabilitätskriterium muß natürlich für alle k_x und k_y erfüllt sein. Betrachtet man ein Diagramm von Wellenzahlen für ein zweidimensionales Gitter, wobei in der x-Richtung die Produkte der Wellenzahl mit der Gitterdistanz $k_x d$ und in der y-Richtung die Produkte $k_y d$ aufgetragen sind, dann liegen die zulässigen Wellenzahlen innerhalb eines quadratischen Gebietes in der Wellenzahlenebene (s. Abb. 3.24). Der maximale Wert der linken Seite von (3.100) kommt innerhalb des zulässigen Wellenbereiches an dem Punkt P mit den Koordinaten $P(k_x d = \pi/2; k_y d = \pi/2)$ zustande. Damit werden die Terme $\sin k_x d = \sin k_y d = 1$, d. h. für den Betrag eines gegebenen Advektionsgeschwindigkeitsvektors $|\mathbf{c}|$ hat die linke Seite von (3.100) dann einen maximalen Wert, wenn die Advektionsgeschwindigkeit einen Winkel $\pi/4$ mit der x- bzw. der y-Achse einschließt. In diesem Fall gilt nämlich

$$c_x = c_y = \sqrt{2} / 2 |\mathbf{c}|$$

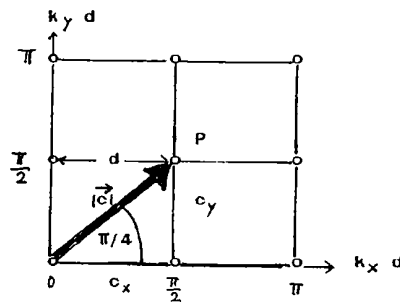


Abb. 3.24 Zulässiges Gebiet der Wellenzahlen k_x und k_y für ein quadratisches Gitternetz mit der Gitterdistanz $d = \Delta x = \Delta y$ [nach MESINGER u. ARAKAWA (1976)]

weil $\sin \pi/4 = c_y / |\mathbf{c}| = \sqrt{2} / 2$ und $\cos \pi/4 = c_x / |\mathbf{c}| = \sqrt{2} / 2$ ist. Mit dieser Überlegung ergibt sich dann aus (3.100) sofort

$$|\mathbf{c}| \sqrt{2} \frac{\Delta t}{d} \leq 1 \quad (3.101)$$

was aber nichts anderes als das bereits öfters erwähnte CFL-Stabilitätskriterium darstellt.

3.1.12 Die nicht-lineare Advektionsgleichung, "Aliasing" und die „nicht-lineare Instabilität“

Bisher haben wir uns nur mit linearen Gleichungen beschäftigt. Als nächsten Schritt wollen wir auch eine möglichst einfache nicht-lineare Gleichung betrachten und werden hierbei auf eine weitere Schwierigkeit stoßen. Wir betrachten die eindimensionale, nicht-lineare Advektionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.102)$$

Hierbei ist wieder $u = u(x,t)$, aber $c = u \neq \text{const}$. Betrachtet man jetzt den multiplikativen Term der Gleichung $u \partial u / \partial x$ dann wird diese Multiplikation (durch die Nichtlinearität des Terms), wenn man diese in endlichen Differenzen ausführt, einen weiteren Fehler erzeugen, der auf die Unfähigkeit des Gitternetzes Wellenlängen kleiner als $L = 2d$ aufzulösen, zurückzuführen ist. Die nicht mehr auflösbaren Wellenlängen bzw. Wellenzahlen sind bekanntlich $k > k_{\text{MAX}} = \pi/d$, da mit $L = 2d$, $k_{\text{MAX}} = 2\pi/L = \pi/d$ wird. Wir betrachten eine Funktion $u(x)$, welche durch Werte an den Gitterpunkten mit den Koordinaten $x = id$ mit Hilfe von $u = \sin kx$ dargestellt werden kann, wobei $k < k_{\text{MAX}}$ ist. Wenn man $u = \sin kx$ in den nicht linearen Term $u \partial u / \partial x$ einsetzt, dann ergibt sich

$$u \partial u / \partial x = k \sin kx \cos kx = (k/2) \sin 2kx$$

Aus dieser Relation erkennt man sofort, dass, wenn k im Interval $1/2 k_{\text{MAX}} < k < k_{\text{MAX}}$ liegt, der nicht-lineare Term neue Wellen mit Wellenzahlen größer als k_{MAX} generiert, d. h. solche die außerhalb des vom Gitter noch auflösbaren Wellenbereichs liegen. Die so erzeugten Wellenzahlen können im numerischen Rechenverfahren nicht entsprechend dargestellt werden. Um einen plakativen Eindruck dieses „numerischen Fehlverhaltens“ zu erlangen, betrachte man die Abb. 3.25. Vergleichen wir z. B. eine Welle mit der Wellenlänge $L = 4d/3$, d.h. $k > k_{\text{MAX}}$ bzw. $L < 2d$, die in der Abb. 3.25 voll ausgezeichnet ist, mit einer Welle $L = 4d$, die gestrichelt eingetragen wurde und die Wellenzahl $k = \pi/2d$ aufweist, dann ist sofort evident, dass mit Hinblick darauf, dass uns nur Werte an den Gitterpunkten bekannt sind, nicht festgestellt werden kann, um welche Welle es sich tatsächlich handelt. Da wir aber nur auflösbare Wellenlängen betrachten können, begehen wir durch die numerische Rechnung einen Fehler, der „Aliasing-Error“ oder auch „Wellenverfälschungsfehler“ genannt wird. Mit MESINGER u. ARAKAWA (1976) kann man dies noch deutlicher machen:

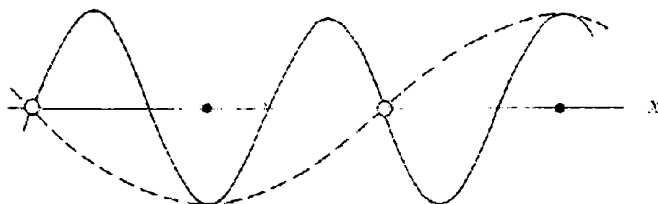


Abb. 3.25 Die Welle mit $L = 4d/3$ ist im Gitter von der Welle $4d$ nicht zu unterscheiden.

Im generellen Fall darf man sich die Funktion u aus einer Zahl von harmonischen Komponenten $u = \sum_n u_n$ zusammengesetzt denken. Der nichtlineare Term enthält dann

Produkte mit verschiedenen Wellen zahlen z. B. $\sin k_1 x \sin k_2 x$. Entsprechend dem trigonometrischen Theorem gilt auch die Identität

$$\sin k_1 x \sin k_2 x \equiv 1/2[\cos(k_1 - k_2)x - \cos(k_1 + k_2)x]$$

Wenn man nunmehr mit einer numerischen Rechnung beginnt, wobei zunächst nur Wellen mit Wellenzahlen $k < k_{MAX}$ vorhanden sind, werden sehr rasch Wellen $k > k_{MAX}$ generiert und es kommt zur bereits besprochenen Fehlinterpretation der Wellenzahlen bzw. Wellenlängen. Nun ist es aber auch möglich $\sin kx = \sin[2k_{MAX} - (2k_{MAX} - k)]x$ zu schreiben. Setzt man für diese Beziehung für die kleinste noch auflösbare Wellenlänge $L = 2d$ die Relation $k_{MAX} = \pi/d$ und verwendet das trigonometrische Theorem

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

dann ergibt sich für $A = 2k_{MAX}x$ und $B = (2k_{MAX} - k)x$ sofort

$$\sin kx = \sin \frac{2\pi x}{d} \cos \left(\frac{2\pi}{d} - k \right) x - \cos \frac{2\pi x}{d} \sin \left(\frac{2\pi}{d} - k \right) x$$

Da an den Gitterpunkten $x = i\Delta x = id$ ist, erhalten wir $\sin 2\pi i d/d = 0$ und $\cos 2\pi i d/d = 1$ und daher gilt auch

$$\sin k id = -\sin(2k_{MAX} - k)id$$

Auf diese Weise ersieht man sofort, dass bei lediglicher Kenntnis der Gitterpunktwerte zwischen Wellen mit der Wellenzahl k und der Wellenzahl $k^* = (2k_{MAX} - k)$ nicht unterschieden werden kann, d.h. wenn $k > k_{MAX}$ ist, wird die Wellenzahl k durch die Wellenzahl k^* fehlinterpretiert. Diese Wellenzahl ist um den gleichen Betrag kleiner als k_{MAX} , um welchen $-k$ größer ist als k_{MAX} . Wir können uns deshalb k^* als das Abbild einer Reflexion (oder Spiegelung) von k über k_{MAX} in den erlaubten Wellenzahlenbereich vorstellen (s. hierzu Abb. 3.26).

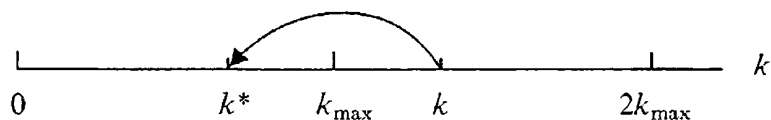


Abb.3.26 Reflexion von k über k_{MAX} . Die „generierte“ Wellenzahl wird als Wellenzahl k^* vorgetäuscht.

Der dargelegte „Aliasing-Error“ bereitet bei der Numerischen Integration der prognostische Gleichungen eine weitere sehr ernste Schwierigkeit. Jede beliebige atmosphärische Variable kann als Funktion der Raumkoordinaten betrachtet werden. Diese Funktionen kann man sich als Summe einer Reihe von harmonischen Komponenten vorstellen. Der Beitrag jeder dieser Komponenten zum mittleren quadratischen Wert der Variablen ist als Funktion der Wellenzahl k zu betrachten. Sind die Variablen Geschwindigkeitskomponenten, dann dürfen wir die Funktion als „kinetisches Energiespektrum“ ansehen. Dieses Spektrum beschreibt die relative Bedeutung der verschiedenen „Scales“ im Variablenfeld. Synoptische Untersuchungen haben gezeigt, dass sich das Gesamtspektrum als Ganzes nur wenig ändert, wenn auch die einzelnen „Scales“ selbst größeren Veränderungen unterliegen können. So

weist das zonale Spektrum der westwärts gerichteten Geschwindigkeitskomponenten für die Wellenzahlen $k = 4$ bis $k = 7$, d.h. also 4 bzw. 7 Wellen entlang einem Breitenkreis ein Energiemaximum auf, während die Energie für $k > 10$ sehr rasch abfällt [s. hierzu MESINGER u. ARAKAWA (1976)]. Im hochfrequenten Bereich nahe k_{MAX} steckt im allgemeinen nur sehr geringe Energie. In einer numerischen Integration wird aber die Form des Energiespektrums zusätzlich zu den relativ kleinen, physikalisch realen Änderungen durch Wellenverfälschung aus dem „Aliasing-Error“ belastet. Mit einem Energiespektrum der hier dargelegten Form und der Tatsache, dass die meisten Kombinationen von Wellenzahlen $(k_1 + k_2)$ größer sind als k_{MAX} , dürfen wir erwarten, dass der Großteil der Energie solcher Kombinationen zu jenen generierten Wellenzahlen gehört, die nicht viel größer sind als $k = k_{MAX}$. Da aber die durch Nicht-Linearität generierten $(k_1 + k_2) > k_{MAX}$, wie wir gesehen haben, durch das „Aliasing“ eine scheinbare Reflexion in den erlaubten Wellenzahlenbereich erfahren bzw. mit den Wellenzahlen etwas kleiner als k_{MAX} verwechselt werden, findet ein „unechter“ Energiefluss in den Nahbereich von k_{MAX} statt. Die Erfahrung zeigt, dass ohne spezielle Vorsorge, vor allem bei längeren Prognosespannen, dieses Phänomen rasch zu einer totalen Rechenkatastrophe führen kann. Da dieses Phänomen durch den nichtlinearen Term $u\partial u/\partial x$ oder allgemein durch $v\cdot\nabla v$ verursacht wird, spricht man auch von „nicht-linearer Instabilität“. Die Erscheinung wurde zuerst von PHILLIPS (1959) beobachtet und beschrieben. Sie tritt vorwiegend bei Langzeitintegrationen auf und wurde ursprünglich fälschlicherweise für einen „exzessiven Truncation-Error“ gehalten. Aber es zeigte sich schon bald, dass selbst bei drastisch verkleinerten Raum- und Zeitschritten, das Phänomen nach einer bestimmten Integrationszeit wiederkehrt. PHILLIPS hat deshalb zu seiner Unterdrückung nach jeweils $n\Delta t = 2$ Stunden Simulationszeit eine harmonische Analyse des prognostischen Vorticityfeldes zwischengeschaltet und hierbei alle Wellenzahlen $k > \frac{1}{2} k_{MAX}$ eliminiert, d.h. bei $k = \frac{1}{2} k_{MAX}$ einen Reihenabbruch in der Fourier-Reihe oder eine „Truncation“ (Abschneidung) der höheren Wellenzahlen durchgeführt. Das Verfahren wirkt gleichsam wie ein „LOW PASS“-Filter, das nur für niedrige Wellenzahlen durchlässig ist. Diese „Truncation“ wird uns in etwas anderer Form bei der Spektralen Methode erneut begegnen. Tatsächlich kann man auf diese Weise „nicht-lineare numerische Instabilität“ vermeiden, da aus Wellenzahlen $k < \frac{1}{2} k$ keine Kombinationen $(k_1 + k_2) > k$ entstehen können, die dann durch den „Aliasing-Effekt“ fehlinterpretiert wird. Man darf auch annehmen, dass einige Zeit verstreicht, bis sich erneut Wellen mit Wellenzahlen $(k_1 + k_2) > k$ bilden. ORSZAG (1971) konnte sogar zeigen, dass es im allgemeinen genügt, alle Wellen $k > 2/3k$ auszufiltern, um den „Aliasing-Error“ zu eliminieren. Noch einfacher ist es a priori ein Differenzenschema zu verwenden, das gerade die hochfrequenten Wellenkomponenten stark dämpft. Wir haben ein solches im „LAX-WENDROFF“-Schema bereits kennengelernt. In der Tat gelingt es diesem Schema „nicht-lineare Instabilität“ zu verhindern. In der Praxis genügt es meistens das „LAX-WENDROFF“-Schema als intermittierenden Schritt zwischen ein anderes im Zuge der Integration verwendetes zeitliches Differenzenschema, z. B. dem „LEAP-FROG“-Schema, zwischenschalten. OLIGER u. KREISS (1973) haben als weitere Methode die Einführung eines dissipativen Terms vorgeschlagen. Man kann auf diese Weise, wenn das Differenzenschema selbst nicht-dissipativ ist, den Grad der Dissipation besser kontrollieren. Eine andere Methode zur Verhinderung der „nicht-linearen Instabilität“ besteht darin, anstatt der Eulerschen eine Lagrangesche Formulierung des Advektionstermes zu verwenden. Auch darauf wird noch zurückzukommen sein. Schließlich ist noch das Verfahren von ARAKAWA (1966) anzuführen. Dieses beruht auf der Idee ein Differenzenschema zu entwerfen, welches von sich aus frei ist von „unechten Energieflüssen“ und damit frei von „nicht-linearer Instabilität“. Dieses Schema wird im nächsten Abschnitt abgeleitet und vorgestellt. Ein weiteres effizientes

Verfahren zur Vermeidung unechter Energieflüsse ist es, Differenzenschemata zu entwickeln, die energiekonservierende Eigenschaften aufweisen. Multipliziert man die „nicht-lineare“ Advektionsgleichung (3.102) mit u und integriert das Ergebnis über die gesamte Modelldomäne, wobei zyklische Randbedingungen angenommen werden, dann erhält man zunächst für die linke Seite

$$u \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

und nach der erwähnten Integration

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad E = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx$$

Nunmehr betrachten wir eine semi-diskrete Form wie Gl. (3.103) in welcher nur der Advektionsterm diskretisiert wurde. Hierbei soll die Energie E konserviert werden, weshalb

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad E = \frac{1}{2} \sum_i u_i^2 dx$$

ist. Diskretisieren wir die rechte Seite von (3.102) in einem zentrierten Schema, dann ergibt sich

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_i \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right) \tag{3.103}$$

Multiplikation mit u_i und Summation über alle relevanten Gitterpunkte ergibt formelmäßig

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{2} (u_i^2 u_{i+1} - u_i^2 u_{i-1}) \tag{3.104}$$

Die Terme haben leider nicht die Form $A_{i+1} - A_i$ und heben sich deshalb nicht gegenseitig auf. Zur Ableitung eines alternativen Differenzenschemas könnte man (3.102) in der Flussform

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) \tag{3.105}$$

darstellen und dann zur semi-diskreten Form

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^2 - u_{i-1}^2}{2\Delta x} \right) \equiv -\left(\frac{u_{i+1} + u_{i-1}}{2} \right) \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right) \tag{3.106}$$

kommen, aber auch dieses Schema ist nicht in der Lage die Energie zu konservieren, da sich keine Terme aufheben. Wählt man hingegen das nachfolgende Schema, dann wird die Energie, wie erwünscht sehr wohl konserviert:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \left(\frac{u_{i+1} + u_i + u_{i-1}}{3} \right) \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right) \quad (3.107)$$

Multipliziert man nämlich beide Seiten von (3.107) mit $u_i \cdot \Delta x$ und summiert anschließend über alle relevanten Gitterpunkte, dann erhält man [s.a. HORTAL/RIDDAWAY (2000)]

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \sum_i \frac{1}{6} (u_{i+1}^2 u_i + u_i^2 u_{i+1} - u_i^2 u_{i-1} - u_{i-1}^2 u_i) \quad (3.108)$$

Die durch die Pfeile markierten Terme heben sich jeweils in der Summe zwischen aufeinanderfolgenden Gitterpunkten auf und es ergibt sich für die Summe von (3.108) der Wert Null, d.h. die Energie ändert sich zeitlich nicht und wird deshalb konserviert. Somit zeigt sich, dass durch entsprechende Mittelung Energie konservierende Differenzenschemata entwickelt werden können, die damit falsche Energieflüsse und „nicht-lineare“ Instabilität verhindern. Eine andere Methodier zur Verhinderung der „nicht-linearen Instabilität“ besteht darin, anstatt der Eulerschen eine Lagrangesche Formulierung des Advektionstermes zu verwenden. Auch darauf wird noch zurückzukommen sein.

3.1.13 Der „ARAKAWA-JACOBI-OPERATOR“

Da sich die Atmosphäre hinsichtlich des Massenflusses überwiegend „nicht-divergent“ verhält, konnten auf Basis der Flachwassergleichungen ARAKAWA (1966) und MESINGER u. ARAKAWA (1972) zeigen, dass für die Erhaltung der potentiellen Enstrophie $\frac{1}{2}(\zeta^*)^2 h$ die Beziehung

$$\iint \zeta^* J(\psi^*, \zeta^*) dx dy = 0 \quad (3.109)$$

und für die Erhaltung der kinetischen Energie die Relation

$$\iint \psi^* J(\psi^*, \zeta^*) dx dy = 0 \quad (3.110)$$

gilt. Hierbei ist die kinetische Energie

$$\left(\frac{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}^*}{2} \right) \equiv \frac{1}{2} (\nabla \psi^* \cdot \nabla \psi^*) \quad \text{wobei } \mathbf{v}^* = h\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \psi^* \text{ ist. Ferner bedeutet } \zeta^* = \left(\frac{\xi + f}{h} \right) \text{ die}$$

absolute potentielle Vorticity und die Stromfunktion $\psi^* = h\psi$.

Die beiden Ausdrücke (3.109) und (3.110) können in endlicher bzw. diskretisierter Schreibweise auch

$$\frac{1}{N} \sum_n^N \zeta_n^* J J_n = 0 \quad (3.111)$$

bzw.

$$\frac{1}{N} \sum_n^N \psi_n^* J J_n = 0 \quad (3.112)$$

geschrieben werden, wobei $J J_n$ einen diskreten Jacobi-Operator darstellt, welcher jeweils noch zu definieren sein wird. Demnach hat man der Idee ARAKAWAs folgend, Jacobi-Operatoren zu konzipieren, die beide Bedingungen (3.109) und (3.110) erfüllen, d.h die Enstrophie und die kinetische Energie konservieren und „falsche“ Energieflüsse verhindern. Es lassen sich verschiedene Formen des analytischen Jacobi-Operators angeben

$$J^I(\psi^*, \zeta^*) = \partial \psi^* / \partial x \partial \zeta^* / \partial y - \partial \psi^* / \partial y \partial \zeta^* / \partial x \quad (3.113)$$

$$J^{II}(\psi^*, \zeta^*) = \partial / \partial x (\psi^* \partial \zeta^* / \partial y) - \partial / \partial y (\psi^* \partial \zeta^* / \partial x) \quad (3.114)$$

$$J^{III}(\psi^*, \zeta^*) = \partial / \partial y (\zeta^* \partial \psi^* / \partial x) - \partial / \partial x (\zeta^* \partial \psi^* / \partial y) \quad (3.115)$$

In diskreter Form, wenn wir von dem Gitterschema der Abb. 3.27 ausgehen, lassen sich die Jacobi-Operatoren (3.113) bis (3.115) durch die nachstehenden diskretisierten Varianten darstellen.

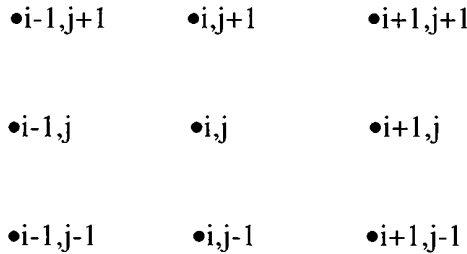


Abb. 3.27 9-Punkt-Gitter mit genereller Indexierung i, j

$$J J_{ij}^I = 1/4d^2 [(\psi_{i+1,j}^* - \psi_{i-1,j}^*)(\zeta_{i,j+1}^* - \zeta_{i,j-1}^*) - (\psi_{i,j+1}^* - \psi_{i,j-1}^*)(\zeta_{i+1,j}^* - \zeta_{i-1,j}^*)] \quad (3.113a)$$

$$J J_{ij}^{II} = 1/4d^2 [\psi_{i+1,j}^* (\zeta_{i+1,j+1}^* - \zeta_{i+1,j-1}^*) - \psi_{i-1,j}^* (\zeta_{i-1,j}^* - \zeta_{i-1,j-1}^*) - \dots \dots \dots \psi_{i,j+1}^* (\zeta_{i+1,j+1}^* - \zeta_{i-1,j+1}^*) + \psi_{i,j-1}^* (\zeta_{i+1,j-1}^* - \zeta_{i-1,j-1}^*)] \quad (3.114a)$$

$$J J_{ij}^{III} = 1/4d^2 [\zeta_{i,j+1}^* (\psi_{i+1,j+1}^* - \psi_{i-1,j+1}^*) - \zeta_{i,j-1}^* (\psi_{i+1,j-1}^* - \psi_{i-1,j-1}^*) - \dots \dots \dots \zeta_{i+1,j}^* (\psi_{i+1,j+1}^* - \psi_{i+1,j-1}^*) + \zeta_{i-1,j}^* (\psi_{i-1,j+1}^* - \psi_{i-1,j-1}^*)] \quad (3.115a)$$

Wir wollen nun an Hand eines etwas größeren 24 Gitterpunkte umfassenden Gitters, wobei wir aus praktischen Gründen jetzt eine fortlaufende Indexierung $n = 1,2,3,\dots,24$ anwenden (s.Abb.3.28) zeigen, dass z.B. die Relation (3.111) mit dem Jacobi-Operator $J J_n^{II}$ tatsächlich die Enstrophie konserviert.

<u>o16</u>	<u>o15</u>	<u>o14</u>	<u>o13</u>	<u>o12</u>
<u>o17</u>	•5	•4	•3	<u>o11</u>
<u>o18</u>	•6	•1	•2	<u>o10</u>
<u>o19</u>	•7	•8	•9	<u>o25</u>
<u>o20</u>	<u>o21</u>	<u>o22</u>	<u>o23</u>	<u>o24</u>

Abb.3.28 24 Punkte-Gitter mit der Indexierung $n = 1,2,3 \dots 24$. Die unterstrichenen Gitter-Indizes stellen Randwerte dar, die in der Regel gleich Null gesetzt werden

Die einzelnen Jacobi-Operatoren JJ_n^{II} für die Gitterpunkte $n = 1$ bis $n = 9$ lauten entsprechend (3.114a), wobei wir der einfacheren Schreibweise halber jetzt das Sternsymbol weglassen

$$JJ_1^{II} = 1/4d^2[\psi_2(\zeta_3 - \zeta_9) - \psi_5(\zeta_5 - \zeta_7) - \psi_4(\zeta_3 - \zeta_5) + \psi_8(\zeta_9 - \zeta_7)]$$

$$JJ_2^{II} = 1/4d^2[\tilde{\psi}_{10}(\tilde{\zeta}_{11} - \tilde{\zeta}_9) - \psi_1(\zeta_4 - \zeta_8) - \psi_3(\tilde{\zeta}_{11} - \zeta_4) + \psi_9(\tilde{\zeta}_{25} - \zeta_8)]$$

$$JJ_3^{II} = 1/4d^2[\tilde{\psi}_{11}(\tilde{\zeta}_{12} - \tilde{\zeta}_{10}) - \psi_4(\tilde{\zeta}_{14} - \zeta_8) - \tilde{\psi}_{13}(\tilde{\zeta}_{12} - \tilde{\zeta}_{14}) + \psi_2(\tilde{\zeta}_{10} - \zeta_1)]$$

$$JJ_4^{II} = 1/4d^2[\psi_3(\tilde{\zeta}_{13} - \zeta_2) - \psi_5(\tilde{\zeta}_{15} - \zeta_6) - \tilde{\psi}_{14}(\tilde{\zeta}_{13} - \tilde{\zeta}_{15}) + \psi_1(\zeta_2 - \zeta_6)]$$

$$JJ_5^{II} = 1/4d^2[\psi_4(\tilde{\zeta}_{14} - \zeta_1) - \tilde{\psi}_{17}(\tilde{\zeta}_{16} - \tilde{\zeta}_{18}) - \psi_{15}(\tilde{\zeta}_{14} - \tilde{\zeta}_{16}) + \psi_6(\zeta_1 - \tilde{\zeta}_{18})]$$

$$JJ_6^{II} = 1/4d^2[\psi_1(\zeta_4 - \zeta_8) - \tilde{\psi}_{18}(\tilde{\zeta}_{17} - \tilde{\zeta}_{19}) - \psi_5(\zeta_4 - \tilde{\zeta}_{17}) + \psi_7(\zeta_8 - \tilde{\zeta}_{19})]$$

$$JJ_7^{II} = 1/4d^2[\psi_8(\zeta_1 - \tilde{\zeta}_{22}) - \tilde{\psi}_{19}(\tilde{\zeta}_{18} - \tilde{\zeta}_{20}) - \psi_6(\zeta_1 - \tilde{\zeta}_{18}) + \tilde{\psi}_{21}(\tilde{\zeta}_{22} - \tilde{\zeta}_{20})]$$

$$JJ_8^{II} = 1/4d^2[\psi_9(\zeta_2 - \tilde{\zeta}_{23}) - \psi_7(\zeta_6 - \tilde{\zeta}_{21}) - \psi_1(\zeta_2 - \zeta_6) + \tilde{\psi}_{22}(\tilde{\zeta}_{23} - \tilde{\zeta}_{21})]$$

$$JJ_9^{II} = 1/4d^2[\tilde{\psi}_{25}(\tilde{\zeta}_{10} - \tilde{\zeta}_{24}) - \psi_8(\zeta_1 - \tilde{\zeta}_{22}) - \psi_2(\tilde{\zeta}_{10} - \zeta_1) + \tilde{\psi}_{23}(\tilde{\zeta}_{24} - \tilde{\zeta}_{22})]$$

Entsprechend unserer Festlegung verschwinden alle Randwerte (= alle Werte, die mit dem Wellen-Zeichen wie $\tilde{\psi}$ bzw. $\tilde{\zeta}$ gekennzeichnet sind und an einem Randwertgitterpunkt des 24 Punkte-Gitters, wie z.B. o16 auftreten. Nunmehr summieren wir über alle Jacobi-Operatoren an den „voll ausgefüllten“ Gitterpunkten mit den Indizes 1 bis 9 ähnlich Gl.(3.111):

$$\frac{1}{N} \sum_n^N \zeta_n JJ_n^{II} = 1/N[\zeta_1 JJ_1^{II} + \zeta_2 JJ_2^{II} + \zeta_3 JJ_3^{II} + \zeta_4 JJ_4^{II} + \zeta_5 JJ_5^{II} + \dots + \zeta_6 JJ_6^{II} + \zeta_7 JJ_7^{II} + \zeta_8 JJ_8^{II} + \zeta_9 JJ_9^{II}] = 0 \quad (3.116)$$

Die Summe ergibt, wenn man die Jacobi-Operatoren JJ_1^{II} bis JJ_9^{II} in (3.116) einsetzt und bedenkt, dass die mit dem Wellenzeichen gekennzeichneten Randwerte wegfallen:

$$JJ_{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_n^N \zeta_n JJ_n =$$

$$1/4d^2 [\Psi_2 \zeta_1 \zeta_3 - \Psi_2 \zeta_1 \zeta_9 - \Psi_6 \zeta_1 \zeta_5 + \Psi_6 \zeta_1 \zeta_7 - \Psi_4 \zeta_1 \zeta_3 + \Psi_4 \zeta_1 \zeta_5 + \Psi_8 \zeta_1 \zeta_9 - \Psi_8 \zeta_1 \zeta_7 - \dots$$

$$\dots - \Psi_1 \zeta_2 \zeta_4 + \Psi_1 \zeta_2 \zeta_8 + \Psi_3 \zeta_2 \zeta_4 - \Psi_9 \zeta_2 \zeta_8 + \Psi_4 \zeta_3 \zeta_1 - \Psi_2 \zeta_3 \zeta_1 - \Psi_3 \zeta_4 \zeta_2 + \Psi_5 \zeta_4 \zeta_6 + \dots$$

$$\dots + \Psi_1 \zeta_4 \zeta_2 - \Psi_1 \zeta_4 \zeta_6 - \Psi_4 \zeta_5 \zeta_1 + \Psi_6 \zeta_5 \zeta_1 + \Psi_1 \zeta_6 \zeta_4 - \Psi_1 \zeta_6 \zeta_8 - \Psi_5 \zeta_6 \zeta_4 + \Psi_7 \zeta_6 \zeta_8 - \dots$$

$$\dots + \Psi_8 \zeta_7 \zeta_1 - \Psi_6 \zeta_7 \zeta_1 + \Psi_9 \zeta_8 \zeta_2 - \Psi_7 \zeta_8 \zeta_6 - \Psi_1 \zeta_8 \zeta_2 + \Psi_1 \zeta_8 \zeta_6 - \Psi_8 \zeta_9 \zeta_1 + \Psi_2 \zeta_9 \zeta_1] = 0$$

Alle Terme dieses langen Klammerausdruckes heben sich gegenseitig auf, wie man sich überzeugen kann. Somit wird demonstriert, dass die Enstrophie tatsächlich von dem Numerischen Schema JJ_{ζ} konserviert wird. Eine ähnliche Beziehung JJ_{κ} lässt sich auch für die kinetische Energie K entsprechend (3.112) ableiten. Hingegen ist aber mit Verwendung von JJ_n^{III} , wie sich durch ähnliche Betrachtung zeigt, allein keineswegs die Enstrophie, wohl aber die kinetische Energie zu konservieren. Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass ein Jacobi-Operator JJ_{ζ} durch die Relation

$$JJ_{\zeta} = \alpha \left(\frac{1}{N} \sum_n^N \zeta_n JJ_n^{\text{I}} \right) + \gamma \left(\frac{1}{N} \sum_n^N \zeta_n JJ_n^{\text{III}} \right) = 0 \quad (3.117)$$

gefunden werden kann, welcher die Enstrophie durch die obige Kombination konserviert. Hierbei wird $\alpha + \gamma = 1$ gesetzt, was daher zu $\alpha = \gamma = 1/2$ führt. Ebenso gelingt der Nachweis, dass die Kombination

$$JJ_{\kappa} = \alpha \left(\frac{1}{N} \sum_n^N \Psi_n JJ_n^{\text{I}} \right) + \beta \left(\frac{1}{N} \sum_n^N \Psi_n JJ_n^{\text{II}} \right) = 0 \quad (3.118)$$

mit $\alpha + \beta = 1$ und daher $\alpha = \beta = 1/2$ die kinetische Energie zu konservieren in der Lage ist. Diese Überlegungen erweiternd hatte ARAKAWA die Idee die Operatoren (3.117) und (3.118) zu der Alternative zusammenzufassen, welche hier in spezieller Form für unser 24-Punkte-Gitter geschrieben

$$JJ_{\Lambda} = JJ_{\zeta} + JJ_{\kappa} = \alpha \left(\frac{1}{N} \sum_n^N JJ_n^{\text{I}} \right) + \beta \left(\frac{1}{N} \sum_n^N JJ_n^{\text{II}} \right) + \gamma \left(\frac{1}{N} \sum_n^N JJ_n^{\text{III}} \right) = 0 \quad (3.119)$$

lautet, wobei die Konsistenzrelation $\alpha + \beta + \gamma = 3$ gilt und daher $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ ist. Es ergibt sich schlussendlich für unser Gitter

$$JJ_{\Lambda} = 1/3 \left[\frac{1}{N} \sum_n^N (JJ_n^{\text{I}} + JJ_n^{\text{II}} + JJ_n^{\text{III}}) \right] = 0 \quad (3.120)$$

Somit können wir ein numerisches Schema erhalten, das geeignet ist, sowohl die Enstrophie als auch die kinetische Energie gleichzeitig zu konservieren, die mittlere Wellenzahl zu

erhalten und damit „nicht-lineare“ Instabilität zu verhindern. (3.119) bzw. (3.120) werden in der Literatur deshalb auch als ARAKAWA-Jakobi-Operator bezeichnet.

Zusammenfassung der Maßnahmen zur Verhinderung „nicht-linearer“ Instabilität (nach RIDDAWAY/HORTAL (2000):

- a.) Elimination aller Wellen, die nicht-lineare Instabilität verursachen durch Fourier-Analyse des Feldes. Entfernung aller Wellenlängen kleiner als $4\Delta x$ bzw. $3\Delta x$.
- b.) Anwendung von Glättungsoperatoren, die die Amplituden der kurzen Wellen reduzieren, während sie auf große Wellen kaum Einfluss haben.
- c.) Einführung von expliziten Diffusionstermen.
- d.) Verwendung eines Integrationschemas mit eingebautem Diffusionseffekt (z.B. das LAX-WENDROFF-Schema)
- e.) Einführung von Glättung direkt in die endlichen Differenzenschemata, um Energiekonservierung zu gewährleisten.
- f.) Verwendung von GALERKIN-Methoden (z.B. der Spektralen Methode oder der Methode der finiten Elemente)
- g.) Verwendung eines Semi-Lagrangeschen Schemas für die Advektion

Auf die letzteren Methoden f) und g) wird später noch einzugehen sein.

3.1.14 Grundlagen zur Lösung der „Primitiven Gleichungen“: Ein- und mehrdimensionale Lösungsschemata

Bei der numerischen Integration der primitiven Gleichungen (PE-Modellen) haben wir es mit den sogenannten „ungefilterten“ Gleichungen zu tun. Sie enthalten Lösungen für Schwere- und Trägheitsschwerewellen. Mathematisch gesehen handelt es sich um ein Modellgleichungssystem von zwei bis drei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Das System dieser Gleichungen kann auch in eine einzelne Differentialgleichung höherer Ordnung zusammengefasst werden. Eine solche Gleichung kommt durch entsprechende Elimination der abhängigen Variablen zustande. Schon ARAKAWA (1970) hat gezeigt, dass sich bei der Integration der atmosphärischen Gleichungen zwei Hauptprobleme ergeben:

- 1.) Eine zutreffende Simulation des sogenannten „geostrophischen Anpassungs – prozesses“ (geostrophic adjustment), d.h. jenes Prozesses, durch welchen die Atmosphäre ständig in Richtung eines „quasi-nichtdivergenten“ Zustandes strebt, der sich in erster Linie als Resultat der Dispersion von Trägheitsschwerewellen einstellt.
- 2.) Die entsprechende Simulation bzw. Vorhersage dieser nahezu nicht-divergenten Strömung, wenn sie sich einmal eingestellt hat. Die numerische Rechenproblematik haben wir an Hand der Advektionsgleichung bereits „in extenso“ dargestellt.

Nach dem Misserfolg von RICHARDSON (1922) haben CHARNEY, FJØRTOFT und v. NEUMANN (1950) durch Ausfilterung der Schall- und Trägheitsschwerewellen mit Hilfe der geostrophischen Approximation in der Vorticitygleichung den ersten großen Durchbruch in der Numerischen Wettervorhersage erzielt. Diese gefilterten Modellgleichungen haben wir im Abschnitt 1.6.4 bereits besprochen. Sie umgehen allerdings das unter 1.) genannte Problem der Numerischen Integration: das „geostrophische Adjustment“. Die Anstrengungen und

Untersuchungen zur Verbesserung der NWP haben aber schon sehr bald gezeigt, dass auch nicht-geostrophische Effekte in die Gleichungen unbedingt miteinbezogen werden müssen. Im Abschnitt 2.3 haben wir dargelegt, weshalb dies sehr plausibel ist. Andererseits bringt der Einbezug der nicht-geostrophischen Effekte aber große Schwierigkeiten mit sich, wenn dies im Rahmen der gefilterten Modellgleichungen (Balancegleichung) geschieht, sodass der rechentechnische Vorteil des längeren Zeitschritts restlos verloren geht. Deshalb hat man sich, nach ersten erfolgreichen Versuchen von HINKELMANN (1959), entschlossen, zu den „Primitiven Gleichungen“ zurückzukehren und verwendet heute ausschließlich solche PE-Modelle. Eine eingehende Darstellung der PE durch HINKELMANN (1969) wurde schon im Abschnitt 2.4. gegeben. Der Ausdruck „Primitive Gleichungen PE“ sollte nicht missverstanden werden, denn im Grunde handelt es sich hier ja um die wesentlich komplizierteren Gleichungen und das Adjektiv „primitiv“ soll nur andeuten, dass es sich hier um die „ursprünglichen“ Gleichungen handelt. Die hohe Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schwere- und Trägheitsschwerewellen sowie die große Empfindlichkeit der PE gegenüber den Fehlern im Anfangsfeld, erfordert bei ihrer numerischen Integration besondere Sorgfalt. Zum besseren Verständnis behandeln wir zunächst den einfachsten Typ von Schwerewellen, wobei die abhängigen Variablen Funktionen von nur einer räumlich abhängigen Variablen sind. Auch jetzt verwenden wir ein linearisiertes Gleichungssystem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.122)$$

Die beiden Relationen stellen eine besonders einfache Form von Flachwassergleichungen dar, wobei h die „freie“ Höhe des homogenen Mediums darstellt sowie g und $H = \text{const.}$ gilt. H ist hier die Höhe der homogenen Atmosphäre. Wir untersuchen somit ein System von zwei unabhängigen und zwei abhängigen Variablen. Man kann für (3.121) und (3.122) die Lösungsansätze

$$u(x, t) = \text{Re}\{u^* \exp[i(k_x - vt)]\} \quad \text{und} \quad h(x, t) = \text{Re}\{h^* \exp[i(k_x - vt)]\}$$

machen, wobei u^* und h^* Amplituden und v die Frequenz der Wellenlösung darstellen. Setzt man diese Lösungen in die obigen Gleichungen ein, dann folgt

$$u^* v = gh^* k_x \quad \text{und} \quad h^* v = Hu^* k_x$$

Nach Eliminierung von u^* ergibt sich aus diesen Beziehungen die Frequenzgleichung

$$v^2 = gk_x^2 H \quad \text{oder auch} \quad \frac{v}{k_x} = \pm (gH)^{\frac{1}{2}}$$

was gleichbedeutend mit $c = \pm (gH)^{\frac{1}{2}}$ ist. Daraus ersieht man, dass sich Schwerewellen in beide Richtungen mit der Geschwindigkeit $c = \pm \sqrt{gH}$ ausbreiten. Diese Geschwindigkeit c ist keine Funktion der Wellenzahl und es findet auch keine Wellendispersion statt, da es sich hier ja um eine exakte Lösung für Schwerewellenprozesse handelt. Diskretisiert man die Gl. (3.121) und (3.122) durch zentrierte Differenzen auf der rechten Seite, dann erhält man die beiden „semi-diskreten“ Relationen

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -g \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.121a)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = -H \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.122a)$$

Führt man jetzt diskrete Lösungen der Form

$$u(t) = \operatorname{Re} \left\{ u^* \exp \left[i \left(k_x \hat{i} \Delta x - vt \right) \right] \right\} \text{ und } h(t) = \operatorname{Re} \left\{ h^* \exp \left[i \left(k_x \hat{i} \Delta x - vt \right) \right] \right\}$$

in diese Gleichungen ein, dann erhält man unter Beachtung auf die Eulerschen Identitäten und ähnlichem Rechengang, wie schon bisher, die Frequenzgleichung

$$v^2 = gH \left[\frac{\sin k_x \Delta x}{\Delta x} \right]^2$$

d.h. anstatt der konstanten Phasengeschwindigkeit c erhält man jetzt für die Schwerewellen im numerischen Rechengang eine von der Wellenzahl abhängige Phasengeschwindigkeit

$$c^* = \frac{v}{k_x} = \pm \sqrt{gH} \left(\frac{1}{k_x \Delta x} \right) [\sin k_x \Delta x] \quad (3.123)$$

Die Phasengeschwindigkeit ist hier erneut eine Funktion der Wellenzahl und nimmt mit zunehmender Wellenzahl ab bis sie bei $k = \pi/d$ ($L = 2d$) stationär wird. Somit sind wir auch bei den Schwerewellen mit der „Numerischen Dispersion“ konfrontiert.

Im gegensatz zum Advektionsproblem, das wir an Hand der Advektionsgleichung bereits zur Genüge studiert haben, haben wir es hier mit zwei abhängigen Variablen zu tun. Zunächst wollen wir davon ausgehen, dass beide Variablen an jedem Gitterpunkt gegeben sind.

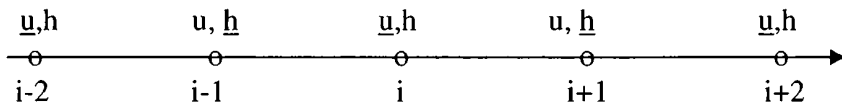


Abb. 3.29 Gitterpunktsschema mit 2 abhängigen Variablen, welche an jedem Gitterpunkt gegeben sind

Mit Hinblick auf (3.121a) und (3.122a) hängen die unterstrichenen Variablen in der Abbildung 3.29 jeweils nur von den anderen unterstrichenen Variablen ab, also z. B. u_i von h_{i-1} und h_{i+1} , hingegen die anderen nicht unterstrichenen ebenfalls von anderen nicht unterstrichenen, z.B. h_i von u_{i-1} und u_{i+1} , d.h. das Gitter in Abb. 3.29 setzt sich eigentlich aus zwei elementaren „Subgittern“ zusammen. Die Lösungen, welche an dem einen „Subgitter“ auftreten, sind von den Lösungen des anderen Subgitters faktisch völlig abgekoppelt. Es ist daher viel ökonomischer nur eine der Lösungen zu berechnen und hierbei ein Gitter wie in Abb. 3.30 zu verwenden. Ein solches Gitter mit alternierender Variablenbelegung der Gitterpunkte wird „Versetztes Gitter“ oder englisch „staggered grid“ bezeichnet. Die Rechenzeit,

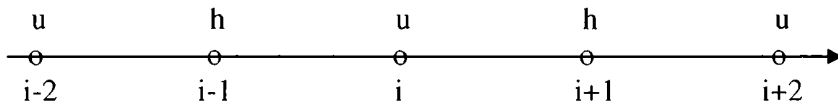


Abb.3.30 Ein Wechselgitter oder gestaffeltes Gitter (engl. „staggered grid“), bei welchem die abhängigen Variablen alternierend an den Gitterpunkten mitgeführt werden

welche notwendig ist, um das System (3.121a) und (3.122a) zu lösen, wird mit Hilfe dieses Gitters halbiert, wobei der „Truncation-Error“ unverändert bleibt. Außerdem werden jetzt alle Wellenlängen $L < 4d$, welche große Fehler in der Phasengeschwindigkeit aufweisen und negative Gruppengeschwindigkeiten zeigen, eliminiert. Erinnern wir uns an die Abb. 3.23, dann kann man sofort einsehen, dass jetzt nur die linke Hälfte des Diagrammes den zulässigen Wellenbereich überdeckt, d.h. die Gruppengeschwindigkeit ist schlechterdings $c_G = 0$ und die numerische Phasengeschwindigkeit $c^* = 2/3c$. Das bedeutet natürlich eine außerordentliche Verbesserung der numerischen Approximation. Will man die Genauigkeit noch weiter steigern, dann genügt es, dass die Gitterdistanz um den Faktor 2 reduziert wird, womit auch die Wellenlängen $4d > L > 2d$ in die Betrachtung einbezogen werden. Hiedurch kann man eine genauere numerische Integration in der gleichen Rechenzeit durchführen, die man in einem „nicht-gestaggerten“ Gitter aufwenden müsste. Die Entwicklung solcher gestaggerter Grids sowohl in der Raum- als auch in der Zeitdimension hat sich deshalb als sehr zweckmäßig erwiesen.

Die bisher angestellten Überlegungen lassen sich leicht auch auf zweidimensionale Betrachtungsweise verallgemeinern. Bedient man sich des einfachen, linearen System

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

in welche die Lösungsansätze

$$u(x, t) = \text{Re} \left\{ u * \exp[i(k_x x + k_y y - vt)] \right\}$$

$$v(x, t) = \text{Re} \left\{ v * \exp[i(k_x x + k_y y - vt)] \right\}$$

$$h(x, t) = \text{Re} \left\{ h * \exp[i(k_x x + k_y y - vt)] \right\}$$

eingesetzt werden, dann erhält man nach analogem Rechengang, wie schon wiederholt bisher durchgeführt, die Frequenzgleichung $v^2 = gH(k_x^2 + k_y^2)$ bzw. als Ausbreitungsgeschwindigkeit der „wahren“ Lösung

$$c = \pm v(k_x^2 + k_y^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm (gH)^{\frac{1}{2}}$$

Diskretisiert man die rechten Seiten obiger Gleichungen, dann erhält man das nachstehende „semi-diskrete“ System

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -g \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -g \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = -H \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right] \quad (3.126)$$

in welches wir die nachfolgenden diskreten Lösungen

$$\begin{bmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \\ h_i(t) \end{bmatrix} = \text{Re} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ h^* \end{bmatrix} \exp[i(k_x \hat{i}\Delta x + k_y j\Delta y - vt)]$$

eingeführen können. Man erhält nach Durchführung der Rechnung und Eliminierung von u^* und v^* sofort die Frequenzgleichung

$$v^2 = gH \frac{\sin^2 k_x d + \sin^2 k_y d}{d^2}$$

woraus sich für die numerische Phasengeschwindigkeit die Relation

$$c^* = v(k_x^2 + k_y^2)^{-\frac{1}{2}} = \left[gH \frac{\sin^2 k_x d + \sin^2 k_y d}{d^2 (k_x^2 + k_y^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.127)$$

d. h. wir sind auch hier mit einer von der Wellenzahl abhängigen Phasengeschwindigkeit konfrontiert. Es lässt sich nunmehr zeigen, dass die Art der räumlichen Belegung der Gitterpunkte mit den verschiedenen Variablen die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sehr wesentlich beeinflussen kann. Wir werden uns daher mit den verschiedenen Gitterformen befassen müssen. Wenn wir die großräumigen Vorgänge in der Atmosphäre studieren wollen, dann müssen wir den Einfluss der Corioliskraft einbeziehen und haben es dann mit den sogenannten „Trägheitsschwerewellen“ zu tun. In der Praxis der NWP werden in der Regel außerdem zwei- und dreidimensionale Gitter zu verwenden sein. Zunächst wollen wir uns mit den zweidimensionalen Gittern beschäftigen, um ihren Einfluss auf die numerischen Lösungen zu studieren und zu analysieren, in welcher Güte das numerische Gitter in der Lage ist den „geostrophischen Anpassungsprozess“ zu simulieren. Dies hängt zweifellos davon ab, welche Werte der Gruppengeschwindigkeit ein numerisches Schema in einem bestimmten Gitter liefert. Zur besseren Einsicht bedienen wir uns erneut eines einfachen, linearisierten Flachwassermodells in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + fv \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - fu \quad (3.129)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.130)$$

Das Gleichungssystem stellt ein sehr einfaches Modell dar, welches wir aber als Teil des kompletten Systems der PE betrachten können. Im großräumigen Scale lassen diese Gleichungen zwei Bewegungsformen zu:

- 1.) die langwellige quasi-geostrophische und quasi-nichtdivergente Strömung (Rossby-Prozesse) und die
- 2.) hochfrequenten und kurzwelligen Trägheitsschwerewellen.

Trägheitsschwerewellen werden in der Atmosphäre permanent angeregt. Diese Wellen zeigen ein „dispersives“ Verhalten, d. h. die lokale Anhäufung von Wellenergie unterliegt einer zeitlichen Dispersion (Zerstreuung). Die nach der Zerstreuung verbleibende Bewegung zeigt nahezu geostrophisches Verhalten und ändert sich zeitlich relativ geringfügig. Diesen Prozess haben wir bereits wiederholt als „geostrophisches Adjustment“ angesprochen. Seine korrekte Simulation ist von entscheidender Bedeutung für die NWP. Unser Interesse wendet sich daher mit PE-Modellen jenen Wellenvorgängen zu, welche durch physikalische Prozesse und durch Unangepasstheit der Anfangsbedingungen und der numerischen „Rechenprozeduren“ angeregt werden. Das Problem der Anfangsbedingungen wäre im Rahmen einer weiteren Monographie, betreffend die Datenassimilisation zu besprechen. Im Abschnitt 3.1.17 werden wir uns mit den verschiedenen Möglichkeiten der räumlichen Verteilung der abhängigen Variablen in den verschiedenen Gittersystemen und deren Auswirkungen auf die numerische Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Gegensatz zur „wahren“ Lösung befassen. Vorher soll aber nochmals zusammenfassend der Unterschied zwischen „expliziten“ und „impliziten“ Schemata angesprochen werden.

Wir haben schon bisher gesehen, dass z.B. ein räumlich und zeitlich zentriertes Schema, wie das LEAP-FROG-Schema ein explizites Schema darstellt. In diesem Fall ergibt sich analog für Schwerewellengleichungen analog zu Gl.(3.80b)

$$p = -\sqrt{gH} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \quad \text{und dieses Schema ist stabil, wenn die Bedingung}$$

$$\left| -\sqrt{gH} \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \right| \leq 1$$

erfüllt ist.

Bei Besprechung der Stabilitätsverhältnisse von zeitlichen Schemata haben wir im Abschnitt 3.1.7 haben wir bereits erwähnt, dass „implizite“ Schemata (wie z.B. das Rückwärtsschema oder das Trapezschemata) immer stabil sind. Das ist eine sehr wichtige und günstige Eigenschaft. Der große Vorteil der ständigen Stabilität wird aber durch den enormen Rechenaufwand, der für die Lösung „impliziter“ Schemata erforderlich ist, weitgehend

aufgehoben. Wir wollen hier ein implizites Schema für die eindimensionale Form von Schwerewellengleichungen [s. Gl. (3.121) und (3.122)] kurz vorstellen. Nach entsprechender Diskretisation mit zentrierten Raum- und Zeitdifferenzen [s.a. RIDDAWAY/HORTAL (2000)] erhält man

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^{v-1}}{2\Delta t} = -g \left[\frac{\delta h_i^{v+1} + \delta h_i^{v-1}}{2} \right] \quad (3.131)$$

$$\frac{h_i^{v+1} - h_i^{v-1}}{2\Delta t} = -H \left[\frac{\delta u_i^{v+1} + \delta u_i^{v-1}}{2} \right] \quad (3.132)$$

wobei δ hier einen zentrierten, räumlichen Differenzen-Operator übereinstimmend mit der ersten Ableitung darstellt. Wendet man diesen Operator auf die Gl. (3.131) an, dann erhält man eine Beziehung für δu_i^{v+1} , welche Relation man anschließend in die Gleichung (3.132) einsetzt und somit

$$gH(\Delta t)^2 \delta^2 h_i^{v+1} - h_i^{v+1} = F[h^{v-1}, u^{v-1}] \quad (3.133)$$

erhält. Da die rechte Seite der Gl.(133) bekannt ist, haben wir es mit einer elliptischen Differentialgleichung zu tun, die für h_i^{v+1} gelöst werden kann, wenn entsprechende Randbedingungen gegeben sind. Das System ist zwar absolut stabil, aber die (elliptische) Helmholtz-Gleichung muss für jeden einzelnen Zeitschritt Δt extra gelöst werden und dies ist extrem rechenaufwendig. Ein implizites Schema kann auch unter Verwendung von zeitlich vorwärts gerichteten Differenzen mit Hilfe der CRANK-NICOLSON-Näherung gefunden werden

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^{v-1}}{2\Delta t} = -g [\beta_v \delta h_i^v + \beta_{v+1} \delta h_i^{v+1}] \quad (3.134)$$

$$\frac{h_i^{v+1} - h_i^{v-1}}{2\Delta t} = -H [\beta_v \delta u_i^v + \beta_{v+1} \delta u_i^{v+1}] \quad (3.135)$$

wobei für die Gewichte $\beta_v + \beta_{v+1} = 1$ gilt. Sind die Werte $\beta_v = 1$ und $\beta_{v+1} = 0$ entspricht dies einem zeitlichen Vorwärts- und einem zentrierten Raumschema. Diese Variante ist komplett instabil. Die Instabilität ist auch für $\beta_v > 1/2$ gegeben. Für $\beta_v \leq 1/2$ erhält man hingegen absolute Stabilität.

Während implizite Schemata hinsichtlich der schnellen Schwerewellen bedeutende Vorteile mit Hinblick auf die Stabilität erbringen, ist dieser Vorteil für die Transport- und Coriolisterme nicht so bedeutend, da diese durch die langsamen Rossby-Prozesse bestimmt werden. Außerdem haben implizite Schemata den Nachteil die Phasengeschwindigkeiten dieser Prozesse unrichtig zu simulieren. Man hat daher die Idee aufgegriffen, die Vorteile beider Schemata, der expliziten mit guter Simulation der Phasengeschwindigkeit und impliziter mit ihrer optimalen Stabilitätseigenschaft, durch eine entsprechende Kombination zu vereinen. KWIZAK und ROBERT (1971) haben eine solche Kombination seinerzeit

konzipiert und „semi-implizite“ Methode genannt. Wir haben dieses Schema bereits im Abschnitt 3.1.7 erwähnt und schreiben es hier nochmals an

$$U^{v+1} = U^{v-1} + 2\Delta t.[F_1^v + \frac{1}{2}(F_2^{v-1} + F_2^{v+1})] \quad (3.136)$$

wobei alle nicht-linearen Transport- und übrigen Terme in F_1 und alle Schwerewellentерme in F_2 zusammengefasst werden. Gleichzeitig werden die in F_1 zusammengefassten Terme explizit und die in F_2 enthaltenen implizit numerisch angenähert. Der Einfachheit halber benutzen wir hier zur Demonstration wieder ein System von Flachwassergleichungen, das sich aus (2.42a), (2.43a) und (2.46) herleiten lässt, wenn man entsprechend der Perturbationsmethode mit \bar{v} und $H = \text{const.}$ von der Identität

$$h\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv (h' + H)\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')$$

Gebrauch macht. Dies ergibt weiters explizit und da der erste und zweite Term der linken Seite dieser Relation verschwinden bzw. aus Gründen der Größenordnung gestrichen werden kann

$$h'\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} + h'\nabla \cdot \mathbf{v}' + H\nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') = H\nabla \cdot \mathbf{v}$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses und den nachfolgenden Definitionen

$$A_u = -\mathbf{v} \cdot \nabla u + fv, \quad A_v = -\mathbf{v} \cdot \nabla v - fu \quad \text{und} \quad A_h = -\mathbf{v} \cdot \nabla h$$

können dann die Gleichungen in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + A_u \quad (3.137)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial y} + A_v \quad (3.138)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\nabla \cdot \mathbf{v} + A_h \quad (3.138)$$

geschrieben werden. Wenn man jetzt gemäß (3.136) und den numerischen Differenzenoperatoren

$$\delta_x \psi_{ij} = 1/d[\psi_{i+1/2,j} - \psi_{i-1/2,j}] \quad \text{und} \quad \delta_y \psi_{ij} = 1/d[\psi_{i,j+1/2} - \psi_{i,j-1/2}] \quad (3.139a,b)$$

wobei ψ hier eine beliebige Variable und d die Gitterdistanz bedeutet, diskretisiert, dann ergibt sich

$$u_{ij}^{v+1} = u_{ij}^{v-1} - g\Delta t[\delta_x h^{v-1} + \delta_x h^{v+1}]_{ij} + 2\Delta t.A_u^v \quad (3.140)$$

$$v_{ij}^{v+1} = v_{ij}^{v-1} - g\Delta t[\delta_y h^{v-1} + \delta_y h^{v+1}]_{ij} + 2\Delta t.A_v^v \quad (3.141)$$

$$h^{v+1} = h^{v-1} - H\Delta t \{ [\delta_x u + \delta_y v]^{v-1} + [\delta_x u + \delta_y v]^{v+1} \}_{ij} + 2\Delta t \cdot A_h^v \quad (3.142)$$

Als nächstes wenden wir den δ_x - Operator auf die Gleichung (3.140) und den δ_y - Operator auf die Gleichung (3.141) an, wobei wir die nachstehende Schreibweise vereinbaren:

$$\delta_x(\delta_x h) = \delta_{xx} h_{ij} = 1/d [\delta_x h_{i+1/2,j} - \delta_x h_{i-1/2,j}] \equiv 1/d [1/d(h_{i+1,j} - h_{i,j}) - 1/d(h_{i,j} - h_{i-1,j})] = 1/d^2 [h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}]$$

$$\delta_y(\delta_y h) = \delta_{yy} h_{ij} = 1/d [\delta_y h_{i,j+1/2} - \delta_y h_{i,j-1/2}] \equiv 1/d [1/d(h_{i,j+1} - h_{i,j}) - 1/d(h_{i,j} - h_{i,j-1})] = 1/d^2 [h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}]$$

und erhalten somit

$$\delta_x u_{ij}^{v+1} = \delta_x u_{ij}^{v-1} - g\Delta t [\delta_{xx} h_{ij}^{v-1} + \delta_{xx} h_{ij}^{v+1}] + 2\Delta t \cdot \delta_x A_u^v \quad (3.143)$$

$$\delta_y v_{ij}^{v+1} = \delta_y v_{ij}^{v-1} - g\Delta t [\delta_{yy} h_{ij}^{v-1} + \delta_{yy} h_{ij}^{v+1}] + 2\Delta t \cdot \delta_y A_v^v \quad (3.144)$$

Addieren wir diese Gleichungen dann ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} (\delta_x u_{ij} + \delta_y v_{ij})^{v+1} &= (\delta_x u_{ij} + \delta_y v_{ij})^{v-1} - \dots \\ \dots - g\Delta t [(\delta_{xx} + \delta_{yy}) h_{ij}^{v-1} + (\delta_{xx} + \delta_{yy}) h_{ij}^{v+1}] &+ 2\Delta t \cdot (\delta_x A_u + \delta_y A_v)_{ij}^v \end{aligned} \quad (3.145)$$

Wenn wir nunmehr den Laplace-Operator in Differenzenform mit (s.a. Abb. 3.31)

$$(\delta_{xx} + \delta_{yy}) h_{ij} = \frac{1}{d^2} \nabla_{\text{Num}}^2 h_{ij} = \frac{1}{d^2} [h_{i+1,j} + h_{i,j+1} + h_{i-1,j} + h_{i,j-1} - 4h_{i,j}]$$

definieren, dann kann nach Einsetzen von (3.145) in (3.142)

$$\begin{aligned} h_{ij}^{v+1} &= h_{ij}^{v-1} - 2H\Delta t [\delta_x u_{ij} + \delta_y v_{ij}]^{v-1} + \frac{gH\Delta t^2}{d^2} (\nabla_{\text{Num}}^2 h_{ij}^{v-1} + \nabla_{\text{Num}}^2 h_{ij}^{v+1}) + \dots \\ \dots &+ 2\Delta t \cdot [A_h - H\Delta t (\delta_x A_u + \delta_y A_v)]_{ij}^v \end{aligned} \quad (3.146)$$

geschrieben werden. Nunmehr kann man folgende Definitionen einführen:

$$\tilde{F}_{2ij}^{v-1} = h_{ij}^{v-1} - 2H\Delta t [\delta_x u + \delta_y v]_{ij}^{v-1} + \frac{gH\Delta t^2}{d^2} (\nabla_{\text{Num}}^2 h_{ij}^{v-1}) \text{ und}$$

$$\tilde{F}_{1ij}^v = 2\Delta t [A_h - H\Delta t (\delta_x A_u + \delta_y A_v)]_{ij}^v$$

Mit diesen Definitionen lässt sich (3.146) nach entsprechender Umformung schließlich in die Relation

$$\nabla_{\text{Num}}^2 h_{i,j}^{v+1} - \varepsilon_{i,j}^2 h_{i,j}^{v+1} = F_{i,j} \quad (3.147)$$

umschreiben, wobei $\varepsilon_{i,j}^2 = \frac{d^2}{gH\Delta t^2}$ ist und

$$F_{i,j} = -\varepsilon_{i,j}^2 [\tilde{F}_1^v + \tilde{F}_2^{v-1}]_{i,j} \quad (3.148)$$

bedeutet. Die Gleichung (3.147) stellt die endliche Differenzenapproximation einer elliptischen Differentialgleichung dar. Die Terme sind nunmehr so arrangiert, dass zum Zeitpunkt $v - 1$ die rechte Seite von (3.148) an allen Gitterpunkten bekannt ist. Kann die Gleichung (3.147) gelöst werden, dann ist es jederzeit möglich aus (3.140) und (3.141) die Windkomponenten u^{v+1} und v^{v+1} zu berechnen. Lösungsmethoden für Gleichungen dieser Art werden wir später in einem eigenen Abschnitt noch behandeln. Auf jeden Fall sei hier nochmals hingewiesen, dass die „impliziten“ und „semi-impliziten“ Schemata zu den sehr effizienten Varianten, welche in der NWP verwendet werden, gehören.

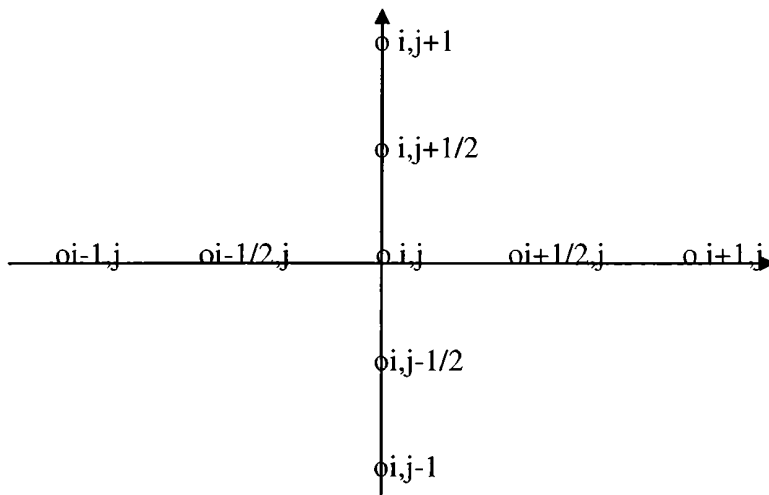


Abb.3.31 Gitterschablone für den Laplace-Operator und die Operatoren $\delta_x \psi_{ij}$ und $\delta_y \psi_{ij}$

Sie gewähren einerseits zwar absolute Stabilität, sind andererseits aber sehr rechenaufwendig, vor allem was das „implizite“ Schema betrifft. Damit wollen wir es mit einem Hinweis auf die entsprechende Literatur bewenden lassen [z.B. GERRITY u. McPHERSON (1971), MARCHUK (1974), BURRIDGE u. HAYES (1974)].

Als nächstes wollen wir noch einige weitere günstige Lösungsschemata besprechen. Wir verwenden hier wieder vereinfachte Flachwassergleichungen der nachstehenden Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Phi \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.150)$$

wobei wir alle y-abhängigen Terme und den Coriolis-term gestrichen und $gh = \phi$ sowie $gH = \Phi$ gesetzt haben. Bei unseren bisherigen Betrachtungen haben wir gesehen, dass sowohl die Schwerewellen als auch die LAMB-Wellen hinsichtlich der Stabilität sehr restriktive Zeitschritte erforderlich machen. Diese Zeitschritte sind viel kleiner als es die Genauigkeit für meteorologische Wellenprozesse hinsichtlich des zeitlichen „Truncation-Errors“ erfordern würde. Der größte „Truncation-Error“ für meteorologische Wellen resultiert aus der räumlichen Differenzenbildung. Das Verhältnis des zeitlichen zum räumlichen „Truncation-Error“ beträgt laut ROBERT (1974) etwa 1 : 40. Implizite Schemata, die sich immer als absolut stabil erweisen, würden sich daher immer im besonderen als günstig erweisen, haben aber den Nachteil, wie wir bereits wiederholt erwähnt haben, rechnerisch extrem aufwendig zu sein oder mitunter überhaupt keine Lösung zuzulassen. Dennoch hat man versucht rechenökonomische Schemata zu entwerfen, in dem man teilweise implizite Schemata einführt. Ein solches haben wir mit dem semi-impliziten Schema bereits vorgestellt. Ein weiteres solches teilweise implizites Schema liegt im sogenannten „VORWÄRTS-RÜCKWÄRTS“-Schema vor [s. MESINGER (1977)]. Man behandelt die Terme, welche die schnellen Schwerewellenprozesse beschreiben, das sind die Druckgradientkraft in den Bewegungsgleichungen und der Divergenzterm in der Kontinuitätsgleichung implizit, während man die anderen Terme, z. B. den Advektionsterm explizit behandelt. Man könnte auch den Advektionsterm implizit behandeln, es zeigt sich aber dann, dass inakzeptable Phasengeschwindigkeitsfehler resultieren. Diskretisiert man das Gleichungssystem (3.149) und (3.150), dann erhält man die nachfolgenden Relationen, wenn man zuerst das ϕ -Feld durch eine Vorwärtsdifferenz prognostiziert und anschließend die u-Komponente aus einer Rückwärtsdifferenz ermittelt

$$\phi_i^{v+1} = \phi_i^v - \frac{\Phi \Delta t}{2d} (u_{i+1}^v - u_{i-1}^v) \quad (3.151)$$

$$u_i^{v+1} = u_i^v - \frac{\Delta t}{2d} (\phi_{i+1}^{v+1} - \phi_{i-1}^{v+1}) \quad (3.152)$$

aus. In diese Gleichungen führen wir nun Lösungen der Form

$$\begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} = \text{Re} \begin{bmatrix} u^{*v} \\ \phi^{*v} \end{bmatrix} \exp i(k_x \hat{i} \Delta x) \quad (3.153)$$

ein. Daraus erhält man das Gleichungspaar

$$\phi^{*v+1} = \phi^{*v} - \Phi n i u^{*v} \quad (3.154)$$

$$u^{*v+1} = u^{*v} - n i \phi^{*v+1} \quad (3.155)$$

bzw.

$$u^{*v+1} = u^{*v} - n i (\phi^{*v} - \Phi n i u^{*v}) \quad (3.155a)$$

wenn man aus (3.154) für ϕ^{*v+1} einsetzt. Gleichzeitig bedeutet hier

$$n = \Delta t / d (\sin k_x d)$$

In Matrixform lassen sich die Gleichungen (3.154) und (3.155a) in der Form

$$\begin{bmatrix} 1 - \Phi n^2 & -ni \\ -\Phi ni & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{*v} \\ \phi^{*v} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u^{*v} \\ \phi^{*v} \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

schreiben, wenn wir gleichzeitig von den v. NEUMANNschen Beziehungen

$$\begin{bmatrix} u^{*v+1} \\ \phi^{*v+1} \end{bmatrix} \equiv \lambda \begin{bmatrix} u^{*v} \\ \phi^{*v} \end{bmatrix}$$

Gebrauch machen. Die Matrixgleichung (3.156) lässt sich nunmehr leicht in die homogene Form

$$(1 - \lambda - \Phi n^2)u^{*v} - ni\phi^{*v} = 0$$

$$(-\phi ni)u^{*v} + (1 - \lambda)\phi^{*v} = 0$$

umwandeln. Für eine nicht-triviale Lösung dieses homogenen Gleichungssystems muss die Determinante der Koeffizienten verschwinden, d.h. es muss

$$\begin{vmatrix} (1 - \lambda - \Phi n^2) & -ni \\ (-\phi ni) & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

sein. Nach Auflösung der Koeffizienten-Determinante erhalten wir eine quadratische Gleichung für die Eigenwerte in der Form

$$(1 - \lambda)^2 - \Phi n^2(1 - \lambda) + \Phi n^2 = 0$$

deren Lösungen sich mit

$$\lambda = 1/2 \left\{ 2 - \Phi n^2 \pm [\Phi n^2(\Phi n^2 - 4)]^{1/2} \right\} \quad (3.157)$$

ergeben. Ist $\Phi n \leq 4$ dann ist der Wert unter der Wurzel entweder Null oder negativ. Entsprechend unserem früheren Vorgehen kann man λ als komplexe Zahl auffassen. Für den Absolutbetrag dieser bzw. den Amplifikationsfaktor ergibt sich deshalb

$$|\lambda| = [a^2 + b^2]^{1/2}$$

was stets mit $\Phi n^2 \leq 4$ zu $|\lambda| = 1$ und damit zu Stabilität führt. Ist hingegen $\Phi n^2 > 4$ bzw. $\sqrt{\Phi n^2} > 2$ dann ergibt sich Instabilität, da $|\lambda| > 1$ wird. Für Stabilität muß daher, wie leicht einzusehen ist, die Relation

$$\left| \Phi^{1/2} n \right| \equiv \left| \frac{\Delta t}{d} \Phi^{1/2} \sin k_x d \right| \leq 2 \quad (3.158)$$

gelten. Im Bereich der zulässigen Wellenzahlen erreicht $\sin k_x d$ maximal 1, weshalb (3.158) auch durch

$$\left| \frac{1}{\Phi^2} \right| \Delta t / d \equiv |c| \Delta t / d \leq 2$$

formuliert werden kann, wobei c als ein Äquivalent zur Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schwerewellen betrachtet werden kann. Somit zeigt sich, dass mit dem vorliegenden Differenzenschema ein zweifach größerer Zeitschritt verwendet werden darf als bei einem „LEAP-FROG“-Schema. Schließt man die Advektionsterme mit zentrierter Differenzenbildung in die Betrachtung ein, dann wird das Schema erneut instabil. Man muss sich dann mit einer weiteren Modifikation in den Advektionstermen, wie GADD (1978) unter Zuhilfenahme des „LAX-WENDROFF“-Schemas zeigen konnte, behelfen.

3.1.15 Das « RUNGE-KUTTA »-SCHEMA

Wir haben bisher schon eine Reihe von Methoden zur möglichst genauen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen kennengelernt und wollen diesen noch weitere Methoden hinzufügen. Diese sind so angelegt, dass sie die Approximationen von Differenzen nach dem Konzept „Taylorscher Reihen“ durchführen, wobei sie den Vorteil aufweisen, keine expliziten Ableitungen der Funktion $f(\psi, t)$ vornehmen zu müssen. Die Grundidee besteht darin, eine lineare Kombination von Werten $f(\psi, t)$, wobei ψ eine beliebige Variable ist, zu verwenden, um die Funktion $\psi(t)$ zu approximieren. Eine lineare Kombination ist so nahe als möglich einer Taylor-Reihe für $\psi(t)$ anzupassen, um eine Methode zu erhalten, die einen höchstmöglichen Genauigkeitsgrad R erreicht. Mit Hilfe dieser Methode können die sogenannten „RUNGE-KUTTA“-Schemata gewonnen werden, wobei man z.B. zwei Ermittlungen der Funktion $\psi(x, t)$ pro Zeitschritt anwendet. Diese Vorgangsweise kann auf die generelle Entwicklung von RUNGE-KUTTA-Formeln erweitert werden, wenn man die Information über die Steigung der Funktion an mehr als einem Zeitpunkt im Funktionsverlauf $\psi(t)$ zur Extrapolation der Lösung verwendet. Angenommen, es soll ψ^{v+1} aus der Funktion $f(\psi^v, t^v)$ durch

$$\psi^{v+1} = \psi^v + \Delta t f(\psi^v, t^v) \quad (3.159)$$

bestimmt werden. Für eine Lösung von der Ordnung $R = O(\Delta t^2)$ können wir die Relation

$$\psi^{v+1} = \psi^v + a k_1 \quad (3.160)$$

ansetzen, wobei a eine relevante Konstante zur Erreichung des Ordnungsgrades R darstellt. Ist $a = 1$, dann degeneriert (3.159) zum „EULERSchen Vorwärtsschema“. Für eine Lösung von der Ordnung $R = O(\Delta t^3)$ kann man hingegen

$$\psi^{v+1} = \psi^v + a k_1 + b k_2 \quad (3.161)$$

ansetzen, wobei $k_2 = \Delta t f(\psi^v + \beta k_1, t^v + \alpha \Delta t)$ bedeutet und α, β, a und b wieder so zu ermitteln sind, dass die Lösung von der Ordnung $R = O(\Delta t^3)$ ist. Nunmehr schreiben wir die Reihenentwicklung von ψ in der Nachbarschaft von t^v mit

$$\psi^{v+1} = \psi^v + \Delta t \left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t^v} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2\psi}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

Es ist offensichtlich, dass $\frac{d\psi}{dt} = f(\psi, t)$ gilt, sodass sich

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{df(\psi, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial \psi} \text{ ergibt. Somit resultiert für die Lösung schließlich}$$

$$\psi^{v+1} = \psi^v + \Delta t f(\psi^v, t^v) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial \psi} \right]_{(\psi^v, t^v)} + O(\Delta t^3) \quad (3.162)$$

Der Term k_2 in der Gleichung (3.161) kann explizit auch

$$k_2 = \Delta t f(\psi^v + \beta k_1, t^v + \alpha \Delta t) = \dots \\ \dots \Delta t \left[f(\psi^v, t^v) + \alpha \Delta t \frac{\partial f(\psi^v, t^v)}{\partial t} + \beta k_1 \frac{\partial f(\psi^v, t^v)}{\partial \psi} \right] + O(\Delta t^3) \quad (3.163)$$

geschrieben werden. Setzt man nunmehr von (3.163) in (3.161) ein, dann erhält man

$$\psi^{v+1} = \psi^v + (a+b)\Delta t f(\psi^v, t^v) + b\Delta t^2 \left[\alpha \frac{\partial f}{\partial t} + \beta f \frac{\partial f}{\partial \psi} \right]_{(\psi^v, t^v)} + O(\Delta t^3) \quad (3.164)$$

Der Vergleich der Terme mit identischen Koeffizienten in (3.164) und (3.162) ergibt die nachstehenden Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten

$$a + b = 1, \quad \alpha b = \frac{1}{2}, \quad \beta b = \frac{1}{2} \quad (3.165 \text{ a,b,c})$$

Allerdings gibt es unbeschränkt viele Möglichkeiten für die Konstanten a, b, α, β , welche die Relationen (3.165 a,b,c) erfüllen, z. B. auch $a = b = \frac{1}{2}$ oder $\alpha = \beta = 1$. Mit dieser Wahl erhalten wir die klassische „RUNGE-KUTTA-Methode“ zweiter Ordnung (RK 2), welche sich zusammengefasst mit

$$\psi^{v+1} = \psi^v + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (3.166)$$

ergibt. Hierbei ist

$$k_1 = \Delta t f(\psi^v, t^v) \text{ und}$$

$$k_2 = \Delta t f(\psi^v + k_1, t^v + \Delta t)$$

Auf ähnliche Weise können auch „RUNGE-KUTTA-Methoden“ höherer Ordnung, z. B. vierter Ordnung (RK 4) entwickelt werden. Hierbei ist

$$\psi^{v+1} = \psi^v + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.167)$$

und

$$k_1 = \Delta t f(\psi^v, t^v)$$

$$k_2 = \Delta t f\left(\psi^v + \frac{k_1}{2}, t^v + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta t f\left(\psi^v + \frac{k_2}{2}, t^v + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$k_4 = \Delta t f(\psi^v + k_3, t^v + \Delta t)$$

Es sei hier erwähnt, dass sich in der Literatur noch weitere „RUNGE-KUTTA-Methoden“ mit noch höherer Ordnung finden lassen [s. SHU u. OSHER (1988) oder SIGAL u. SHU (1995)]. An dieser Stelle sei auch darauf hingewiesen, dass die „RUNGE-KUTTA-Methoden“ explizite Verfahren darstellen und daher nur bedingt stabil sind.

Inzwischen hat sich herausgestellt, dass sich bei der Lösung des Advektionsproblems

$$u_t = L(u) \quad (3.168)$$

mitunter Diskontinuitäten (Schockwellen, Kontakt-Diskontinuitäten etc.) einstellen können, auch wenn die Anfangsbedingungen $u(x,0)$ eine glatte Funktion darstellen. Die traditionellen, endlichen Differenzenmethoden, auch wenn sie linear stabil sind, liefern in diesem Fall schlechte Ergebnisse. Deshalb wurden neuerdings noch effizientere Diskretisierungsmethoden entwickelt. Diese schließen die sogenannten „TVD (Total-Variation-Diminishing)-Methoden“ ein. Die totale Variation einer diskreten skalaren Lösung ist in der Regel durch

$$TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$$

definiert. TV ist die totale Variation. Man sagt dann, dass ein Schema TVD ist, wenn die Relation

$$TV(u^{v+1}) \leq TV(u^v) \quad (3.169)$$

für einen EULER-Vorwärtsschritt von erster Ordnung in der Zeit, d.h.

$$u^{v+1} = u^v + \Delta t L(u^v)$$

wobei $L(u)$ einen räumlichen Differential-Operator darstellt, der aus der Gleichung (3.168) resultiert, erfüllt ist. Hierbei ist natürlich durch entsprechende Einschränkung des Zeitschritts $\Delta t \leq \Delta t_1$ Stabilität zu gewährleisten. Das Ziel der TVD-RUNGE-KUTTA-Zeitdiskretisation besteht darin, die TVD-Eigenschaften (3.169) zu erhalten bei gleichzeitiger Erhaltung der zeitlichen Genauigkeit mit stabilitätserhaltender Einschränkung des Zeitschritts durch

$$\Delta t \leq C \Delta t_1$$

wobei C ein CFL-Koeffizient für Zeitdiskretisation höherer Ordnung ist. Man geht also von der generellen, expliziten RUNGE-KUTTA-Methode aus

$$u^{(i)} = u^{(0)} + \Delta t \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik} L(u^{(k)}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.170)$$

wobei hier die einzelnen Näherungen durch die Superskripte (i) und (k) dargestellt werden und gleichzeitig $u^{(0)} = u^v$ und $u^{(m)} = u^{v+1}$ ist. Hierbei bedeutet L , wie bereits erwähnt, einen räumlichen Differentialoperator. Um TVD-Bedingungen zu gewährleisten, wird die Gleichung (3.170), wie folgt, umformuliert. Für

$$\alpha_{ik} \geq 0 \text{ und } k = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} = 1$$

erhalten wir [s. SHU u. OSHER (1988)] die nachstehende Identität

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} u^{(k)} + \Delta t \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik} L(u^{(k)}) \equiv \alpha_{i0} u^0 + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} \left(u^{(k)} - \Delta t \sum_{l=0}^{k-1} c_{kl} L(u^{(l)}) \right) + \Delta t \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik} L(u^{(k)}) = \dots \\ &\dots = \sum_{k=0}^{i-1} \left[\alpha_{ik} u^{(k)} + \left(c_{ik} - \sum_{l=k+1}^{i-1} c_{il} \alpha_{il} \right) \Delta t L(u^{(k)}) \right] \end{aligned} \quad (3.171)$$

wobei die letzte Summation $\sum_{l=k+1}^{i-1} c_{il} \alpha_{il}$ für $k = i - 1$ nicht durchgeführt wird. Wenn man für den Ausdruck in der runden Klammer des letzten Terms von (3.171) gleich β_{ik} setzt, dann erhält man schließlich die TVD-Beziehung in der Form

$$u^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} u^{(k)} + \beta_{ik} \Delta t L(u^{(k)}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.172)$$

Dieses Schema ist TVD unter der Einschränkung des CFL-Kriteriums

$$\lambda \leq \lambda_0 \min_{i,k} \frac{\alpha_{ik}}{|\beta_{ik}|} \quad (3.173)$$

Nunmehr ist das notwendige Ziel die Koeffizienten α_{ik} und β_{ik} so zu wählen, dass (3.172) die höchstmögliche Ordnung an Genauigkeit bietet und somit optimal ist. Ein einfacher Weg besteht darin eine „Standard-RUNGE-KUTTA-Methode“ zu erwählen und anschließend in die Form (3.172) zu bringen, um die Koeffizienten α_{ik} und β_{ik} zu bestimmen. Ein Schema zweiter Ordnung ($m = 1$) lässt sich leicht darstellen. Für die Genauigkeit werden die nachstehenden Koeffizientenbeziehungen formuliert [s. SHU u. OSHER (1988)]:

$$\alpha_{20} = 1 - \alpha_{21} \quad \beta_{20} = 1 - \frac{1}{2\beta_{10}} - \alpha_{21}\beta_{10} \quad \beta_{21} = \frac{1}{2\beta_{10}} \quad (3.174)$$

und als freie Parameter: $\beta_{10} = 1 \quad \alpha_{21} = \frac{1}{2}$.

Ausgehend von der Gleichung (3.172) für „TVD RUNGE-KUTTA –Zeitdiskretisation“ zweiter Ordnung ($m = 1$) ergibt sich

$$u^{(1)} = \alpha_{10}u^{(0)} + \Delta t \beta_{10}L(u^{(0)})$$

wobei offensichtlich $\alpha_{10} = \beta_{10} = 1$ sein muss. Deshalb folgt aber weiters das System

$$u^{(1)} = u^{(0)} + \Delta t L(u^{(0)})$$

$$u^{(2)} = \alpha_{20}u^{(0)} + \Delta t\beta_{20}L(u^{(0)}) + \alpha_{21}u^{(1)} + \Delta t\beta_{21}L(u^{(1)})$$

Der CFL-Koeffizient ist für stabile Verhältnisse $C \leq 1$. Die Koeffizienten ergeben sich aus (3.174), weshalb schließlich das nachstehende Schema

$$u^{(1)} = u^{(0)} + \Delta t L(u^{(0)})$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{2}u^{(0)} + \frac{1}{2}u^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t L(u^{(1)})$$

folgt. Man kann sich weiters leicht überzeugen, dass dieses Schema mit

$$u^{(1)} = u^{(0)} + \Delta t L(u^{(0)})$$

(3.175a,b)

$$u^{(2)} = u^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t L(u^{(0)}) + \frac{1}{2}\Delta t L(u^{(1)})$$

ident ist. Dieses Schema entspricht im Grunde dem klassischen HEUN-Schema oder auch der modifizierten EULER-Methode. Eine Methode höherer Ordnung, z.B. dritter Ordnung ($m = 2$) führt [bezügl. der Ableitung siehe SHU u. OSHER (1988)] zu dem nachstehenden Schema:

$$u^{(1)} = u^{(0)} + \Delta t L(u^{(0)})$$

$$u^{(2)} = u^{(0)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(0)}) + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)}) \quad (3.176a,b,c)$$

$$u^{(3)} = u^{(0)} + \frac{1}{6} \Delta t L(u^{(0)}) + \frac{1}{6} \Delta t L(u^{(1)}) + \frac{2}{3} \Delta t L(u^{(2)})$$

Bezüglich Methoden noch höherer Ordnung sei hier ebenfalls auf SHU u. OSHER (1988) und SIGAL u. SHU (1995) verwiesen.

3.1.16 Zeit-Splitting-Methoden

Als weitere zeitliche Diskretisationsschemata, die im Rahmen der PE verwendet werden, sollen hier auch die seinerzeit von MARCHUK (1974) vorgeschlagenen „Zeit-SPLITTING“ – Schemata noch eingehend besprochen werden [s.a. MESINGER u. ARAKAWA (1976)]. Die Idee dieser Methoden besteht darin, für ein komplexes System von Gleichungen ein Schema zu entwerfen, bei welchem innerhalb eines jeden Zeitschrittes das System in zwei einfacheren Subsystemen, die aufeinanderfolgen, gelöst werden. Zur Demonstration spalten wir hier die Flachwassergleichungen in den advektiven Teil

System a.)

$$\frac{g\tau}{g\eta} + c \frac{g\chi}{g\eta} = 0 \quad (3.177 \text{ a,b})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

und in den Schwerewellenteil

System b.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3.178 \text{ a,b})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

auf. Nunmehr werden die numerischen Lösungen des Systems a.) u^{v+1} und h^{v+1} als provisorisch betrachtet und mit u^* bzw. h^* bezeichnet. Diese Werte werden an dem Beginn des Zeitschrittes zur Lösung des zweiten Subsystems b.) (3.178 a,b) verwendet. Aus diesem System b.) resultieren dann erneut Werte u^{v+1} und h^{v+1} , die dann als die aktuelle Approximation auf dem Zeitniveau $(v+1)$ betrachtet werden. Hierbei wird bei dem advektiven System ein großer und bei dem Schwerewellenteil ein kleiner Zeitschritt verwendet. Die Lösung, die durch dieses Zeit-SPLITTING erreicht wird, stellt eine konsistente Approximation an die „wahre“ Lösung dar. Dies kann man für die Subsysteme a.) und b.) beweisen, wenn man bestimmte Schemata für ihre Lösung wählt. Die Näherungswerte der abhängigen Variablen müssen sich dann dem „wahren“ Wert annähern, wenn der

Zeitschritt gegen Null geht. Zum Studium der Stabilität der „Zeit-SPLITTING“-Methode verwenden wir erneut die Lösungsansätze

$$\begin{aligned} u_i^{v+1} &= \operatorname{Re}[\lambda^v u(t) \exp(ikx_i)] \\ h_i^{v+1} &= \operatorname{Re}[\lambda^v h(t) \exp(ikx_i)] \end{aligned} \quad (3.179 \text{ a,b})$$

Für das Subsysteme a.) lautet dann die relevante Beziehung

$$\begin{aligned} u_i^* &= \operatorname{Re}[\lambda_a \lambda^v u(t) \exp(ikx_i)] \\ h_i^* &= \operatorname{Re}[\lambda_a \lambda^v h(t) \exp(ikx_i)] \end{aligned} \quad (3.180\text{a,b})$$

und schließlich für das Subsystem b.)

$$\begin{aligned} u_i^{**} &= \operatorname{Re}[\lambda_b \lambda^v u(t) \exp(ikx_i)] \\ h_i^{**} &= \operatorname{Re}[\lambda_b \lambda^v h(t) \exp(ikx_i)] \end{aligned} \quad (3.181\text{a,b})$$

und weiters für die Kombination beider Systeme

$$\begin{aligned} u_i^{v+1} &= \operatorname{Re}[\lambda_a \lambda_b \lambda^v u(t) \exp(ikx_i)] \\ h_i^{v+1} &= \operatorname{Re}[\lambda_a \lambda_b \lambda^v h(t) \exp(ikx_i)] \end{aligned} \quad (3.182 \text{ a,b})$$

Wir haben hier also einen Amplifikationsfaktor für dessen Absolutwert

$$|\lambda| = |\lambda_a| |\lambda_b| \quad (3.182)$$

gilt. Somit ist zu folgern, dass, wenn die Schemata (3.180 a,b) und (3.181 a,b) stabil sind, auch die Kombination beider Schemata stabil sein muss. Diese Schlussfolgerung kann für beliebige Systeme von Gleichungen und verschiedene Mengen von Subsystemen verallgemeinert werden. Der besondere Vorteil der „Zeit-SPLITTING“ – Methode ist, dass man unterschiedliche Zeitschritte anwenden kann: lange Zeitschritte für das Subsystem, welches die langsamen Prozesse beschreibt, wie z. B. den advektiven Teil (3.177 a,b) und kurze Zeitschritte für die schnellen Prozesse. Auf Basis dieser Idee von MARCHUK (1974) hat sich deshalb eine neue Strategie entwickelt, durch welche die Recheneffizienz sehr gesteigert werden kann, wenn man explizite numerische Schemata für hochfrequente Modes mit kleinen und für niederfrequente Modes mit längeren Zeitschritten integriert. Eine sehr einfache Methode stellt nach BALDAUF (2004) das sogenannte additive Zeit-Splitting dar. Man berechnet zuerst die langsamen Prozesse in einem großen Zeitschritt, aktualisiert die Felder und berechnet in n_s kleinen Zeitschritten die schnellen Prozesse.

Anschließend aktualisiert man erneut mit Hilfe dieses Rechenergebnisses das relevante Feld. In Abb.3.32 ist diese Methode nach BALDAUF (2004) graphisch illustrativ dar- und dem Verfahren von KLEMP-WILHELMSON mit dem EULER-VORWÄRTS-Schema gegenübergestellt. Es existieren in der Zwischenzeit eine Reihe solcher Verfahren [s. hiezu KLEMP u. WILHELMSON (1978), SKAMAROCK u. KLEMP (1992), WICKER u.

SKAMAROCK (1997, 2001) oder SKAMAROCK (2004)]. Die hauptsächlich verwendete „SPLITTING“-Methode für kompressible, nichthydrostatische Gleichungen wurde von KLEMP u. WILHELMSON (1978) eingeführt. Diese verwendeten eine zeitliche Diskretisation nach dem „LEAP-FROG“-Schema für alle Terme, welche die niederfrequenten Modes repräsentieren und ein „VORWÄRTS-RÜCKWÄRTS“-Schema nach MESINGER (1977) für die Terme, welche für die Verlagerung der hochfrequenten Modes verantwortlich sind. SKAMAROCK u. KLEMP (1992) stellten fest, dass dieses System eine sehr gute Kombination von Stabilität, Genauigkeit und minimaler Filternotwendigkeit gegenüber anderen Schemata aufwies. Weiters führten SKAMAROCK und KLEMP (1992) ein explizites „Zeit-SPLITTING“-System ein, das auf der Methode von KLEMP u. WILLIAMSON aufbaute, aber ein „VORWÄRTS in der Zeit-Methode“ für die langsamen Modes und das „VORWÄRTS-RÜCKWÄRTS“-Schema für die schnellen Prozesse anwendet. Ihre Analyse dieser Methode ergab zunächst mitunter signifikante Instabilitäten und ließen das Schema trotz Filterung ungeeignet erscheinen. SMOLARKIEWICZ (1984) und TREMBACH et al. (1987) konnten aber zeigen, dass die Vorwärtsmethoden für den Advektionsterm der Bewegungsgleichungen gute Näherungen erbringen, wenn ein entsprechendes „Zeit-SPLITTING“ zur Anwendung kommt. Solche vorwärts gerichteten Schemata müssen „up-wind biased“ (stromaufwärts) formuliert werden. Sie reduzieren dann sowohl den Phasenfehler als auch künstliche Oszillationen durch unaufgelöste Gradienten. Außerdem haben reine Vorwärtsschemata den attraktiven Vorteil, dass die Zahl der kleinen Zeitschritte, die zur Integration der hochfrequenten Modes notwendig sind, halb so umfangreich ist als für die Methode von KLEMP u. WILHELMSON notwendig wäre, wenn gleichzeitig das VORWÄRTS-RÜCKWÄRTS“-Schema von MESINGER verwendet wird, da die schnellen Modes von t bis $t + \Delta t$ im Gegensatz zu $t - \Delta t$ bis $t + \Delta t$ integriert werden. Deshalb stellt das Schema von SKAMAROCK u. KLEMP mit seiner Kombination des „VORWÄRTS-Zeitschemas“ für die advektiven Terme mit dem „VORWÄRTS-RÜCKWÄRTS“-Schema für die hochfrequenten Modes eine attraktive Alternative zu der an sich sehr guten Methode von KLEMP u. WILHELMSON dar.

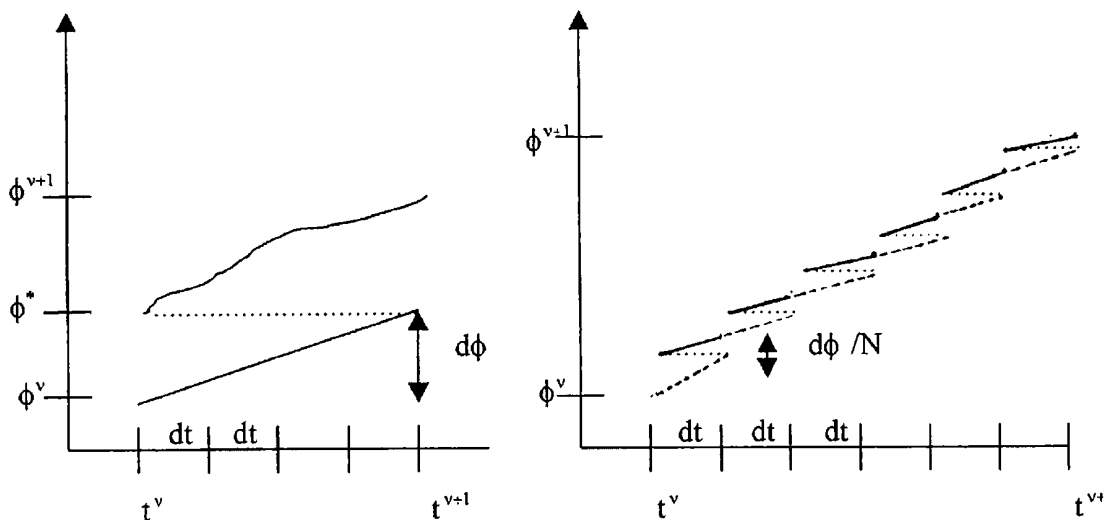


Abb.3.32 Schematische Darstellung des additiven Zeit-Splittings (links) und des KLEMM-WILLIAMSON-EULER-Vorwärts-Zeitsplittings (rechts). [(nach BALDAUF (2004))]

Zusammenfassend kann man mit BALDAUF (2004) feststellen, dass sich drei verschiedene Integrationsmethoden anbieten:

- 1.) Man integriert alle einzelnen Prozesse mit einem so kleinen Zeitschritt $\Delta\tau$, dass alle Prozesse in stabiler Weise integriert werden können. Dieses Verfahren kann man mit einem einfachen Operator-Splitting kombinieren. Hierbei wird ein Prozess berechnet und die Felder

werden anschließend aktualisiert, dann kalkuliert man den nächsten Prozess mit Hilfe des aktualisierten Variablenfeldes und fährt so weiter fort. Diese Rechnung sollte in der Regel stabil sein.

2.) Die zweite Methode besteht darin, implizite Schemata zu verwenden. Diese sind, wie wir wissen, rechentechnisch sehr aufwendig, aber dafür immer absolut stabil. Auch hier kann man ein Operator-Splitting einführen und die Prozesse mit einem Zeitschritt Δt integrieren, der nur von den langsamen Prozessen bestimmt wird. Die Fortschritte in der Computertechnik machen ein solches Verfahren zunehmend attraktiver.

3.) Der dritte Weg der Zeit-Splitting-Technik besteht darin, die langsamen Prozesse mit einem großen Zeitschritt Δt und die schnellen Prozesse mit einem kleinen Zeitschritt $\Delta \tau$ zu berechnen. Die ist ein viel effizienterer Weg, als der unter 1.) genannte.

Wir wollen daher in der Folge eine solche Alternative für die Integration nicht hydrostatischer, kompressibler Gleichungen beschreiben. Eine „RUNGE-KUTTA“-Methode zweiter Ordnung (RK2) wird für die zeitliche Integration der advektiven Terme und ein „VORWÄRTS-RÜCKWÄRTS“-Schema für die akustischen Terme verwendet. Die „RUNGE-KUTTA“-Methode erhält die Vorteile des „VORWÄRTS“-Schemas, weil es eine „upwind-Diskretisation“ für die räumlichen Differenzen gewährleistet und nur $\frac{3}{4}$ der kleinen Zeitschritte der KLEMP-WILHELMSON – Methode benötigt. Außerdem erweist sich dieses Schema sowohl für zwei-dimensionale wie drei-dimensionale nicht-hydrostatische Modelle als stabil und genau. Zur Demonstration gehen wir mit WICKER u. SKAMAROCK (1998) von einem eindimensionalen Gleichungssystem, das sowohl die Advektion als die Verlagerung akustischer Wellen aus

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \pi}{\partial x} = -u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.183)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + c_s^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -u \frac{\partial \pi}{\partial x} \quad (3.184)$$

beschreibt. Hierbei ist u die Geschwindigkeit des Fluids in der x -Richtung und π ist die Perturbations-Exner-Funktion, t ist die Zeit und c_s die Schallgeschwindigkeit. WICKER u. SKAMAROCK integrieren die Terme, die für den advektiven Teil verantwortlich sind mit einem einzigen langen Zeitschritt und die schnellen, akustischen Prozesse mit mehreren kleinen Zeitschritten. Es wird hierbei das „RUNGE-KUTTA“-Schema zweiter Ordnung für den großen Zeitschritt verwendet, um die Variablen der Gleichungen (3.183) und (3.184) von t nach $t + \Delta t$ zu integrieren. Dieses RK 2-Schema wird in der Literatur als „verbesserte Polygon-Methode“ bezeichnet und wird in nachstehender Weise formuliert

$$\phi^* = \phi^t + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}(\phi^t) \quad (3.185)$$

$$\phi^{t+\Delta t} = \phi^t + \Delta t \mathbf{F}(\phi^*) \quad (3.186)$$

wobei \mathbf{F} einen Antriebsvektor darstellt, welcher von den relevanten Feldvariablen abhängig ist. Φ steht jeweils für u oder π . Die Superskripts bezeichnen hier das jeweilige Zeitniveau und * die jeweilige erste Näherung.

Diese RK2-Methode ist nur dann stabil, wenn sie mit einer räumlichen Diskretisation „upwind-biased“ (stromaufwärts) gerichtet ist. Demgegenüber ist das RK2-Schema immer instabil, wenn die räumlichen Ableitungen zentriert ermittelt werden. Obwohl WICKER u.

SKAMAROCK (1997) feststellen konnten, dass verschiedene stromaufwärts gerichtete Diskretisationschemata verwendet werden können, fanden sie, dass das stromaufwärts gerichtete RK2 einen sehr guten Kompromiss zwischen Effizienz und Genauigkeit darstellt. Für eine positive Strömung, d. h. $u > 0$ kann dieses Schema durch

$$\phi^* = \phi^t - \frac{u\Delta t}{12\Delta x} R(\phi^t) \quad (3.187)$$

$$\phi^{t+\Delta t} = \phi^t - \frac{u\Delta t}{6\Delta x} R(\phi^*) \quad (3.188)$$

formuliert werden. Hierbei ist R ein Differenzenoperator, der durch

$$R(\phi) = \phi_{i-2} - 6\phi_{i-1} + 3\phi_i + 2\phi_{i+2} \quad (3.189)$$

gegeben ist. Dieser resultiert aus der numerischen Differentiations-Formel

$$\left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=x_j} = \frac{k!}{m!h^k} \sum_{i=0}^m A_i f(x_i)$$

wobei die Faktoren A_i in ABRAMOWITZ u. STEGUN (1965) zu finden sind. Das Schema ist stabil für alle Wellenzahlen, wenn die COURANT-Zahl für die Advektion kleiner als 0.88 ist. Für alle Wellenlängen kleiner als $L = 4 \Delta x$ erfolgt eine starke Dämpfung. Zur Integration des π - Gradient- und des Divergenzterms in (3.183) und (3.184) wird ein „VORWÄRTS-RÜCKWÄRTS“-Schema mit räumlich zentrierter Ableitung verwendet.

Nunmehr wird das Schema in die zwei Hauptschritte

$$f_u^t = -\frac{u_i^t}{6\Delta x} R(u^t) \quad (3.190)$$

$$f_\pi^t = -\frac{\overline{u_i^t}^x}{6\Delta x} R(\pi^t) \quad (3.191)$$

wobei $\overline{\phi}^x = \frac{1}{2} \left(\phi_{i+\frac{\Delta x}{2}} + \phi_{i-\frac{\Delta x}{2}} \right)$ ist, geteilt berechnet. Die relevanten Variablen für den Prädiktor am mittleren Zeitniveau werden durch Integration der schnellen und langsamen Prozesse zum Mittelpunkt $\frac{\Delta t}{2}$ des Zeitschritts Δt hin unter Verwendung kleiner Zeitschritte, aber mit über den Schritt $\frac{\Delta t}{2}$ fixgehaltenen Tendenzen (3.190) und (3.191) berechnet. Der Algorithmus für die schnellen Modes ist das „VORWÄRTS-RÜCKWÄRTS“-Schema nach MESINGER (1977) und die Gleichungen für die kleinen Zeitschritte werden mit

$$u_i^{\tau+\Delta\tau} = u_i^\tau - \frac{\Delta\tau}{\Delta x} \delta_x \pi^\tau + \Delta\tau f_u^t \quad (3.192)$$

$$\pi_i^{t+\Delta t} = \pi_i^t - \frac{c_s^2 \Delta \tau}{\Delta x} \delta_x u^{t+\Delta t} + \Delta \tau f_\pi^t \quad (3.193)$$

wobei $\delta_x \phi = \frac{1}{\Delta x} \left[\phi_{x+\frac{\Delta x}{2}} - \phi_{x-\frac{\Delta x}{2}} \right]$ ist, angegeben. In (3.192) und (3.193) sind die kleinen Zeitschritte $\Delta \tau$

durch die Beziehung $\Delta \tau = \frac{\Delta t}{n_s}$ festgelegt, wobei $\frac{n_s}{2}$ kleine Zeitschritte verwendet werden, um zum Mittelpunkt $\frac{\Delta t}{2}$ des großen Zeitschrittes Δt zu gelangen.

Zur Verdeutlichung siehe Abb. 3.33. Im nächsten Schritt wird der große Zeitschritt komplettiert und die advektiven Tendenzen $f_u^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ und $f_\pi^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ werden neu aus den am Mittelpunkt $\frac{\Delta t}{2}$ berechneten Variablenwerten ermittelt. Die diesbezüglichen Tendenzen lauten:

$$f_u^{t+\frac{\Delta t}{2}} = -\frac{u_i^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{6\Delta x} R \left(u^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \quad (3.194)$$

und

$$f_\pi^{t+\frac{\Delta t}{2}} = -\frac{u_i^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{6\Delta x} R \left(\pi^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \quad (3.195)$$

d.h. der R-Operator lautet nunmehr $R \left(\phi_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) = [\phi_{i-2} - 6\phi_{i-1} + 3\phi_i + 2\phi_{i+2}]^{t+\frac{\Delta t}{2}}$, wobei wieder ϕ für u oder π steht.

Die Integration mit den kleinen Zeitschritten und der über den weiteren Zeitschritt $\frac{\Delta t}{2}$ festgehaltenen Tendenzen $f_\phi^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ startet vom ursprünglichen Zeitniveau t , um zum Zeitniveau $t + \Delta t$ zu gelangen, indem die Relationen

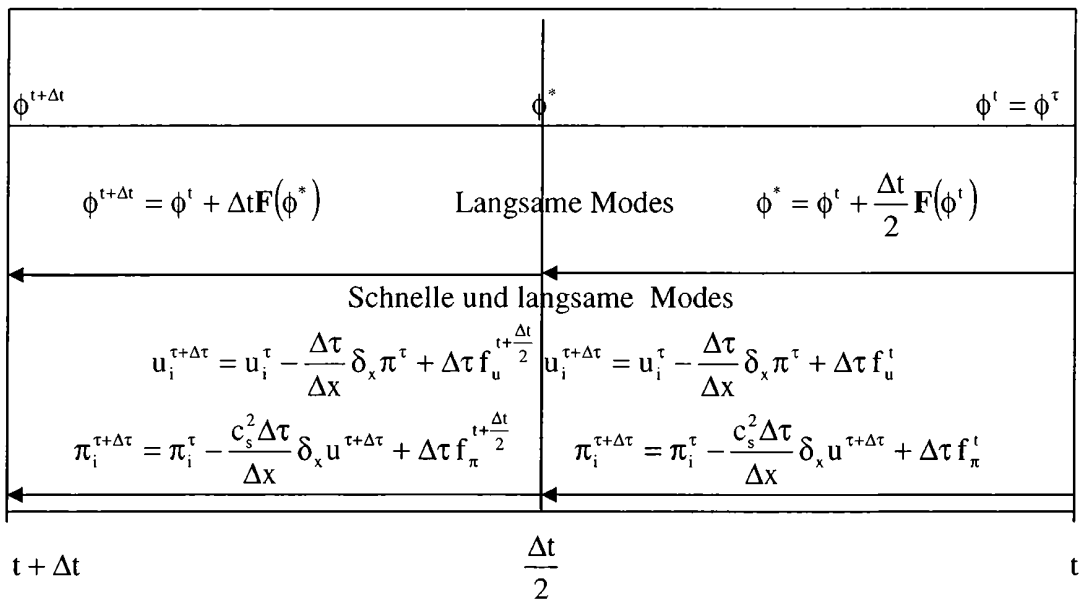


Abb.3.33 Das Time-Splitting Schema nach WICKER und SKAMAROCK (1997)

$$u_i^{\tau+\Delta\tau} = u_i^\tau - \frac{\Delta\tau}{\Delta x} \delta_x \pi^\tau + \Delta\tau f_u^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.196)$$

$$\pi_i^{\tau+\Delta\tau} = \pi_i^\tau - \frac{c_s^2 \Delta\tau}{\Delta x} \delta_x u^{\tau+\Delta\tau} + \Delta\tau f_\pi^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.197)$$

über n_s kleine Zeitschritte berechnet werden. SKAMAROCK und KLEMP (1992) haben auch eine Stabilitätsanalyse vorgestellt, welche von WICKER u. SKAMAROCK (1997) für das vorliegende „TIME-SPLITTING“-System verwendet wurde. Sie gehen hierbei von einer vereinfachten, linearisierten Variante der Gleichungen (3.183) und (3.184) aus, welche

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_s \frac{\partial \pi}{\partial x} = -U \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.198)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + c_s \frac{\partial u}{\partial x} = -U \frac{\partial \pi}{\partial x} \quad (3.199)$$

lauten. Hierbei ist U die mittlere Advektionsgeschwindigkeit, c_s eine konstante Schallgeschwindigkeit und π wird mit π/c_s redefiniert. Die Analyse geht hierbei von einer räumlichen FOURIER-Zerlegung der Gleichungen (3.198) und (3.199) aus, d.h. wir setzen für ϕ^t den Ansatz

$$\phi_{i\pm n}^t = (\lambda)^t C \exp(ikx_i \pm n\Delta x_i) \quad \text{mit } n=0,1,2,\dots \text{ an, um } \delta_x \phi \text{ und den R-Operator}$$

$$\mathbf{R}(\phi^t) = [\phi_{i-2} - 6\phi_{i-1} + 3\phi_i + 2\phi_{i+2}]^t$$

in entsprechender Weise in den Gleichungen (3.192) und (3.193) bzw. (3.196) und (3.197) ein, um zu diskretisieren. Man erhält dann für das erstere Gleichungspaar die Relationen

$$\mathbf{u}^{\tau+\Delta\tau} = \mathbf{u}^\tau - i\lambda_{cx} \boldsymbol{\pi}^\tau + \frac{i}{n_s} \lambda_u \mathbf{u}^\tau \quad (3.200)$$

und

$$\boldsymbol{\pi}^{\tau+\Delta\tau} = \boldsymbol{\pi}^\tau - i\lambda_{cx} \mathbf{u}^{\tau+\Delta\tau} - \frac{i}{n_s} \lambda_u \boldsymbol{\pi}^\tau \quad (3.201)$$

wobei die nachstehenden Amplifikationsfaktoren aus $\delta_x \phi$ mit

$$\lambda_{cx} = \frac{2c_s \Delta\tau}{\Delta x} \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \quad (3.202)$$

und aus dem R-Operator mit

$$\lambda_u = \frac{U\Delta t}{6\Delta x} \{i[\cos(2k\Delta x) - 4\cos(k\Delta x)] + [\sin(2k\Delta x) - 8\sin(k\Delta x)]\} \quad (3.203)$$

resultieren. Zur Stabilitätsanalyse kann man die Gleichungen (3.200) und (3.201) in die Matrixform

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}^{\tau+\Delta\tau} = \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\phi}}^\tau \quad (3.204)$$

umschreiben. Hierbei ist \mathbf{A} eine Amplifikationsmatrix. Für den Eigenwert der Matrix \mathbf{A} muss, damit Stabilität gegeben ist

$$|\lambda_A| \leq 1$$

gelten. Die Analyse der Kopplung großer mit kleinen Zeitschritten verlangt nach SKAMAROCK u. KLEMP (1992), dass der volle Zeitschritt in der Matrix \mathbf{A} enthalten ist, d.h. sowohl der große Zeitschritt, alle n_s kleinen Zeitschritte und jede Art der Filterung. Ein voller Zeitschritt des Systems (3.200) und (3.201) mit einer ROBERT-Filterung kann z.B. durch die Matrix-Relation

$$\boldsymbol{\phi}^{\tau+\Delta\tau} = \mathbf{F} \mathbf{S}^{n_s} \mathbf{L}(\boldsymbol{\phi}^\tau)^\top \quad (3.205)$$

angesetzt werden, wobei $(\boldsymbol{\phi}^\tau)^\top$ einen Vektor $[u^\tau, \boldsymbol{\pi}^\tau, u^\tau, \boldsymbol{\pi}^\tau, u^{\tau-\Delta\tau}, \boldsymbol{\pi}^{\tau-\Delta\tau}]$ darstellt. In der Beziehung (3.205) stellt \mathbf{L} die Matrix für die großen Zeitschritte und \mathbf{S}^{n_s} die Matrix für die kleinen Zeitschritte dar. \mathbf{F} ist hingegen eine Filterungsmatrix. Für die Stabilitätsanalyse nach v. NEUMANN ist, wie schon erwähnt

$$\mathbf{A} = \mathbf{F} \mathbf{S}^{n_s} \mathbf{L}$$

als Amplifikationsmatrix zu betrachten. Für diese Matrix \mathbf{A} sind somit die Eigenwerte zu finden. Es muss darauf hingewiesen werden, dass in Fällen, in welchen \mathbf{A} mehrere Eigenwerte gleich 1 hat, die Stabilitätsbedingung resultiert, dass alle Eigenwerte von \mathbf{A} den Absolutwert $|\lambda_A| \leq 1$ notwendiger Weise haben müssen. Obwohl diese Bedingung einerseits notwendig ist, ist sie aber nicht hinreichend, vielmehr [s. SKAMAROCK u. KLEMP (1992)] soll die „Spektrale Norm“ der Matrix $\mathbf{A} \leq 1$ sein. WICKER u. SKAMAROCK (1998, 2002) haben

viele Stabilitätsanalysen durchgeführt und festgestellt, dass der „Spektrale Radius“ (= der größte Eigenwert der Matrix A) eine gute Approximation der „Spektralen Norm“ darstellt. In den nachstehenden Abbildungen werden Ergebnisse der Stabilitätsanalyse graphisch dargestellt, wobei der maximale, absolute Eigenwert als Funktion der advektiven

$$\text{COURANT-Zahl } C_u = \frac{U\Delta t}{\Delta x} \text{ und der akustischen COURANT-Zahl } C_{cs} = c_s \frac{\Delta \tau}{\Delta x}$$

wird. Gleichzeitig wurde eine Variante mit $n_s = 4$ bzw. $n_s = 12$ kleinen Zeitschritten untersucht. Die Schemata sind stabil, wenn der absolute Eigenwert geringer oder gleich 1 ist. Hier wird ein räumlicher Wellenlängenbereich von $L = 2\Delta x$ bis $L = 20\Delta x$ betrachtet. Mit $n_s = 4$ kleinen Zeitschritten pro großem Zeitschritt zeigt sich eine große Region wo die Amplifikationsmatrix kleiner oder gleich 1 ist. Der Stabilitätsbereich von Interesse ist jeweils rechts und unterhalb der Linien AB, welche unter Voraussetzung $\frac{U}{c_s} = \frac{1}{12}$ eingezeichnet sind

(s. Abb.3.35). Wenn die Anzahl der kleinen Zeitschritte auf $n_s = 12$ erhöht wird, dann schrumpft der Stabilitätsbereich sichtbar. SKAMAROCK u. KLEMP (1992) haben seinerzeit gezeigt, dass das ungefilterte KLEMP-WILLIAMSON-Schema ähnliche Instabilitäten aufweist. Man konnte hier mit dem ASSELIN-Filter Abhilfe schaffen. Unter Verwendung eines von der Divergenz bestimmten Dämpfungsterms konnte ebenfalls eine stabilisierende Wirkung erzielt werden. Divergenz-Dämpfung hat den Vorteil, dass sie sich nur auf die akustischen Terme auswirkt und die nicht-divergenten Modes nicht beeinflusst. Der Einschluss eines solchen Divergenzfilters in der eindimensionalen Gleichung führt zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_s \frac{\partial \pi}{\partial x} = -U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial x}$$

wobei $D = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $v = \frac{0.025\Delta x^2}{\Delta \tau}$ ist und reduziert im Rahmen des RK2-Schemas den Instabilitätsbereich signifikant (s. hierzu Abb. 3.35 und Abb. 3.36).

WICKER u. SKAMAROCK (2002) beschreiben auch ein RUNGE-KUTTA-Schema dritter Ordnung (RK3) und das sogenannte CROWLEY-Advektionsschema. Beide Schemata gehen von einer Flussform der skalaren Advektionsgleichung aus, welche

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u\phi)$$

lautet. Bezüglich vieler Details sei der Leser auf WICKER u. SKAMAROCK (2001), TREMBACK et al. (1987) und CROWLEY (1968) verwiesen. Im ersten Schritt des CROWLEY-Schemas werden die Tendenzen des großen Zeitschritts berechnet. Die kleinen Zeitschritte werden dann über $n_s/2$ bis $t + \Delta t/2$ ermittelt und die Ergebnisse mit u^* und π^* bezeichnet. Für den zweiten Schritt werden die Zwischenwerte u^* und π^* modifiziert, in dem die ursprünglichen Advektionstendenzen mit Hilfe der Relationen $u^{**} = u^* - \frac{\Delta t}{2} f_u^t$ und

$$\pi^{**} = \pi^* - \frac{\Delta t}{2} f_\pi^t \text{ wieder abgezogen werden}$$

a.) $n_s = 4 \quad v = 0.0$ b.) $n_s = 12 \quad v = 0.0$

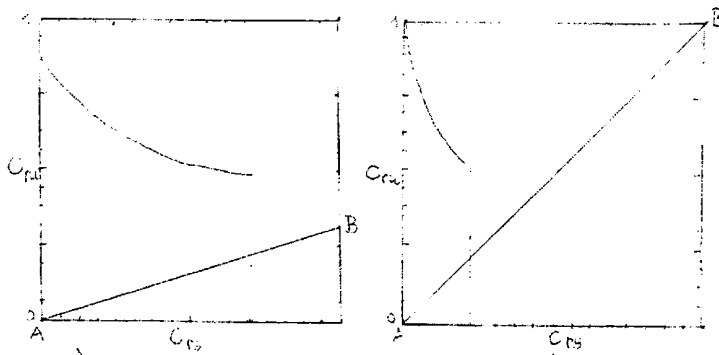


Abb.3.35 Der maximale Amplifikationsfaktor für das „Split-Explizit“-Schema dritter Ordnung mit a.) $n_s = 4$ und b.) $n_s = 12$. Die schraffierten Flächen liegen im instabilen Bereich. $C_{ru} = U\Delta t/\Delta x$ (Courant-Zahl für die advektiven Prozesse). $C_{cs} = c_s \Delta\tau/\Delta x$ (COURANT-Zahl für die akustischen Prozesse)
[nach WICKER u. SKAMAROCK (1998)]

c.) $n_s = 12 \quad v = 0.025$

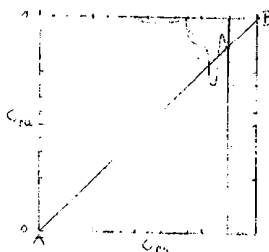


Abb. 3.36 Der maximale Amplifikationsfaktor für das « Split-Explizit »-Schema dritter Ordnung mit c.) $n_s = 12$. Die schraffierten Flächen liegen im instabilen Bereich. $C_m = U\Delta t/\Delta x$ (COURANT-Zahl für die advektiven Prozesse). $C_{cs} = c_s\Delta\tau/\Delta x$ (COURANT-Zahl für akustische Prozesse).
[nach WICKER u. SKAMAROCK (1998)].

Schema	Differenzgleichung	Zeitlevel	Stabilität
<u>Explizite Schemata</u>			
EULER - Vorwärts-Schema	$U_1^{v+1} = U^v + \Delta t \cdot F^v$	2	immer instabil
LEAP-FROG	$U^{v+1} = U^{v-1} + 2\Delta t F^v$	3	bedingt stabil
Adam Bashfort	$U^{v+1} = U^{v-1} + \Delta t \left(\frac{3}{2} F^v - \frac{1}{2} F^{v-1} \right)$	3	bedingt stabil
<u>Implizite Schemata</u>			
Rückwärts-Schema	$U^{v+1} = U^{v-1} + 2\Delta t F^{v+1}$	2	unbedingt stabil
Trapez-Schema	$U^{v+1} = U^{v-1} + \frac{\Delta t}{2} (F^v + F^{v+1})$	2	unbedingt stabil oder neutral
<u>Semi-Implizites Schema</u>			
Kwizak u. Robert	$U^{v+1} = U^{v-1} + 2\Delta t [F_1^v + \frac{1}{2} (F^{v-1} + F^{v+1})]$	3	bedingt stabil
<u>Iterative Schemata</u>			
Matsuno-Schema	$U_1^{v+1} = U^v + \Delta t F^v$ $U_2^{v+1} = U^v + \Delta t F^{v+1}$	2	bedingt stabil
Heun-Schema	$U_1^{v+1} = U^v + \Delta t F^v$ $U^{v+1} = U^v + \frac{1}{2} \Delta t (F^v + F^{v+1})$	2	schwach stabil
Lax-Wendroff-Schema	$U^{v+\frac{1}{2}} = \overline{U^v} + \frac{1}{2} \Delta t F^v$ $U^{v+1} = U^v + \Delta t F^{v+\frac{1}{2}}$	2	bedingt stabil

Tab. 3.2 Differenzenschemata: explizit, implizit, semi-implizit und iterativ

Schema	Differenzgleichung	Zeitlevel	Stabilität
RUNGE -KUTTA			
RK 2	$\psi^{v+1} = \psi^v + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	2	bedingt stabil
RK 4	$\psi^{v+1} = \psi^v + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	2	bedingt stabil
TVD-RUNGE-KUTTA	$u^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} u^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} L(u^{(k)})$		bedingt stabil
TIME-SPLITTING			bedingt stabil
Schritt 1			
Langsame Modes	$f_u^t = -\frac{u_i^t}{6\Delta x} R(u^t)$ $f_\pi^t = -\frac{u_i^t}{6\Delta x} R(\pi^t)$		
Schnelle Modes	$u_i^{\tau+\Delta\tau} = u_i^\tau - \frac{\Delta\tau}{\Delta x} \delta_x \pi^\tau + \Delta\tau f_u^t$ $\pi_i^{\tau+\Delta\tau} = \pi_i^\tau - \frac{c_s^2 \Delta\tau}{\Delta x} \delta_x u^{\tau+\Delta\tau} + \Delta\tau f_\pi^t$		
Schritt 2			
Langsame Modes	$f_u^{t+\frac{\Delta t}{2}} = -\frac{u_i^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{6\Delta x} R\left(u^{t+\frac{\Delta t}{2}}\right)$ $f_\pi^t = -\frac{u_i^{t+\frac{\Delta t}{2}}}{6\Delta x} R\left(\pi^{t+\frac{\Delta t}{2}}\right)$		
Schnelle Modes	$u_i^{\tau+\Delta\tau} = u_i^\tau - \frac{\Delta\tau}{\Delta x} \delta_x \pi^\tau + \Delta\tau f_u^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ $\pi_i^{\tau+\Delta\tau} = \pi_i^\tau - \frac{c_s^2 \Delta\tau}{\Delta x} \delta_x u^{\tau+\Delta\tau} + \Delta\tau f_\pi^{t+\frac{\Delta t}{2}}$		

Tab.3.3 Runge-Kutta- und Time-Splitting-Schemata

Ausgehend von diesen neuen Werten u^{**} und π^{**} werden anschließend die neuen advektiven Tendenzen über Δt und die n_s kleinen Zeitschritte von t bis $t + \Delta t$ berechnet, womit schließlich die gesuchten Werte $u^{t+\Delta t}$ und $\pi^{t+\Delta t}$ erhalten werden.

Zum Abschluss dieses Abschnittes fügen wir noch zwei Tabellen a.) und b.) hinzu, in welchen die wichtigen Differenzenschemata nochmals im Überblick zusammengefasst sind. Mit Hinblick auf die große Anzahl von endlichen Differenzenschemata ist es sehr wichtig, welche Faktoren überlegt werden müssen, wenn man ein bestimmtes Schema auswählen soll.

- a.) Zunächst ist es besonders wünschenswert den Truncation-Error für die räumlichen wie die zeitlichen Differenzen möglichst gering zu halten, und
- b.) sollte man anstreben, den Phasen und Dämpfungsfehler so klein als nur möglich zu halten.
- c.) Es ist sehr einfach ein explizites Schema zu programmieren. Allerdings ist es nur bedingt stabil und die Wahl des Zeitschritts ist limitiert. Implizite Schemata hingegen sind absolut stabil, aber es ist ein größerer Preis hierfür zu bezahlen. Dieser besteht darin, dass zur Lösung des Systems bei jedem Zeitschritt ein System simultaner Gleichungen gelöst werden muß.
- d.) Wenn das Schema mehr als zwei Zeitebenen hat, dann tritt in der Regel ein Rechenmode (computational mode) auf und es kann unter Umständen zu einer Lösungstrennung bei geraden und ungeraden Zeitschritten kommen. Außerdem bedingt ein Schema mit drei Zeitebenen auch einen höheren Speicherbedarf.

3.1.17 Zeit-Splitting für multidimensionale Systeme

Wir haben bisher überwiegend nur eindimensionale Schemata behandelt. In der Praxis der NWP müssen diese natürlich zumindest auf zwei Dimensionen erweitert werden. Nach SKAMAROCK (2004) sind aber zwei signifikante Splitting-Fehler mit der Symmetrie des Zeit-Splitting-Operators und der Konsistenz zwischen dem Transport-Schema (Advektions-Schema) und der diskretisierten Kontinuitätsgleichung verbunden. Die Problematik soll hier nach SKAMAROCK (2004) an Hand eines sogenannten skalaren Transportschemas, welches für ein geophysikalisches Fluid mit Hilfe der generellen, skalaren Konservierungsgleichung

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \phi = 0 \tag{3.206}$$

dargestellt wird, aufgezeigt bzw. mit einer diskreten Lösung der Gl. (3.206) geklärt werden. Hierbei ist ϕ ein skalares Mischungsverhältnis, ρ die Luftdichte und \mathbf{v} der Geschwindigkeitsvektor im Fluid. $\nabla \cdot$ bedeutet den Operator einer mehrdimensionalen Flussdivergenz. Zusätzlich erfüllt der Massenfluss $\rho \mathbf{v}$ die entsprechende Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \tag{3.207}$$

Diskrete Solver für skalare Transportgleichungen sind bei vielen wichtigen Anwendungen in geophysikalischen Fluiden, z. B. bei der Klima-, Wetter- und Ozean-Modellierung, aber auch bei Problemen der Luftqualität und Luftchemie von Bedeutung. Uns interessiert hier in erster Linie deren Beziehung zur NWP. In der bisherigen Entwicklung bei den großskaligen Modellen hat man sich in erster Linie mit zweidimensionalen Lösungen befasst. Dort erfährt die dritte Dimension eine gesonderte Behandlung, was generell berechtigt ist, da die vertikalen COURANT-Zahlen in diesen Anwendungen gewöhnlich sehr klein sind. Mit der gegenwärtig aber verbreitet einsetzenden Entwicklung hochauflösender Modelle, müssen die Bewegungen in der weiteren Zukunft aber voll dreidimensional betrachtet werden. In dem kleinen Scale haben die vertikalen Geschwindigkeiten eine den horizontalen Bewegungen sehr ähnliche Größenordnung. Hierbei muss auf die konvektiven Vorgänge hingewiesen werden. Horizontale Gitter in diesen hochauflösenden Modellen mit Gitterdistanzen bis $d \cong 2$ km haben z. B. in simulierten Gewittern Vertikalgeschwindigkeiten bis zu $w = 50 \text{ m sek}^{-1}$. Transport- oder Advektionsschemata in diesem Scale müssen voll dreidimensional ausgelegt sein, um den Transport dieser Größenordnung richtig zu simulieren. Mit Hinblick auf die höhere Komplexität mehrdimensionaler Schemata gibt es solche viel weniger als für eindimensionale Verhältnisse. Wir haben bisher der Einfachheit halber vorwiegend letztere in unseren Betrachtungen verwendet. Natürlich müssen auch mehrdimensionale Systeme die nachstehenden Eigenschaften besitzen:

- 1.) Konservierung: Die Gl. (3.206) ist eine Konservierungsgleichung und sollte auch in ihrer diskreten Form globale und lokale Konservierung gewährleisten.
- 2.) Konsistenz: Die diskrete Konservierungsgleichung (3.206) sollte auf die Gl. (3.207) zu rückführen, wenn das skalare Mischungsverhältnis ϕ eine Konstante ist.
- 3.) Stabilität: Die Stabilität im mehrdimensionalen System sollte gleich wie im eindimensionalen System sein.

Die Eigenschaften 1.) und 2.) folgen nach SKAMAROCK direkt aus den Gleichungen (3.206) und (3.207). Die Stabilität ergibt sich gemäß dem CFL-Kriterium und ist mit Hinblick auf ihre Effizienz mit möglichst großem Zeitschritt relativ zur Gitterdistanz einzurichten bzw. anzustreben.

Eine Reihe von mehrdimensionalen Schemata wurden inzwischen entwickelt. An dieser Stelle sei auf die diesbezügliche Literaturliste in SKAMAROCK (2004) besonders hingewiesen. Zunächst wollen wir uns zur besseren Unterscheidung mit Schemata befassen, die kein Zeitsplitting einsetzen und verwenden hier ein „Vorwärts-in der Zeit“-Schema (FIT-Schema), d.h. es wird von t bis $t + dt$ integriert. Es sei hier erwähnt, dass Schemata, welche auf der zeitlichen Diskretisierung der Gl. (3.206), gekoppelt mit einer Darstellung der Flussdivergenz (3.207) in jeder Koordinatenrichtung, häufig in Modellen geophysikalischer Fluide verwendet werden. Die hierbei entwickelten Schemata weisen aber nicht unbedingt günstige Stabilitätsverhältnisse auf. Die Stabilitäts-Limits sind mitunter sehr streng und

ergeben COURANT-Zahlen für das „LEAP-FROG“-Schema z.B. $C_r = \frac{U\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ für

eindimensionale, $C_r \leq 1/\sqrt{2}$ für zweidimensionale und $C_r \leq 1/\sqrt{3}$ für dreidimensionale Advektion. Als nächstes wollen wir uns mit der „inkompressiblen Näherung“ der Transportgleichung (Advektionsgleichung) und der Massenkonservierungsgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \phi \mathbf{v} = 0 ; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.208)$$

befassen. Eine exakte Lösung von (3.208) kann mit

$$\phi(t) = \phi(0)\exp(t\mathbf{L}) \quad (3.209)$$

angegeben werden, wobei der kontinuierliche Operator $\mathbf{L} = (\nabla \cdot \mathbf{v})$ bedeutet. Für einen einzelnen großen Zeitschritt ergibt die exakte Lösung

$$\phi(t + \Delta t) = \phi(t)\exp(\Delta t\mathbf{L}) \quad (3.210)$$

Wir beschränken uns hier auf eine zweidimensionale Betrachtung mit zeitlich konstanten Geschwindigkeitskomponenten u und v und dem Operator

$$\mathbf{L} = -\left[u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] \equiv L_x + L_y \quad (3.211)$$

Man kann dann die exakte Lösung in einer Taylor-Reihe entwickeln und erhält

$$\phi(t + \Delta t) = \left[I + \Delta t(L_x + L_y) + \frac{\Delta t^2}{2}(L_x^2 + L_x L_y + L_y L_x + L_y^2) + O(\Delta t^3) \right] \phi(t) \quad (3.212)$$

Die korrekte Erfüllung der Kreuz-Terme auf der rechten Seite in einem diskreten Operator ist für eine zeitliche Genauigkeit zweiter Ordnung und für die Stabilitätsbedingung von Bedeutung. SKAMAROCK (2004) weist auf die Arbeiten von LIN u. ROOD (1996) und LEONARD et al. (1996) hin, welche von eindimensionalen Advektions-Operatoren und Flussform-Operatoren Gebrauch machen, um Lösungen für (3.225) und (3.226) zu erreichen. Betrachtet man den inkompressiblen Fall (3.227), dann kann man in die jeweilige Koordinatenrichtung die Advektions-Operatoren

$$A_x \equiv -u \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{und} \quad A_y \equiv -v \frac{\partial}{\partial y}$$

definieren. Man erhält dann für die jeweilige advektive Tendenz aus

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \phi^{t+\Delta t} = (I + A_x)\phi^t \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \phi^{t+\Delta t} = (I + A_y)\phi^t$$

Wobei I den Einheitsoperator $I = 1$ darstellt. Ebenso ergibt sich der diskrete Operator F für eine zweidimensionale Flussform in die jeweilige Koordinatenrichtung mit

$$\phi^{t+\Delta t} = (I + F_x)\phi^t \quad \text{mit} \quad F_x = -\frac{\partial}{\partial x}(u\phi^t) \quad \text{und} \quad \phi^{t+\Delta t} = (I + F_y)\phi^t \quad \text{mit} \quad F_y = -\frac{\partial}{\partial y}(v\phi^t)$$

Unter Verwendung dieser Definitionen kann man das nachfolgende FIT-Schema in ein zweidimensionales von zweiter Ordnung genaues Schema entwickeln. Wir folgen hier den Ausführungen von SKAMAROCK (2004) und LEONARD et al. (1996). Das konventionelle Operator-Splitting des Advektionsoperators A besteht bei zweidimensionaler Betrachtung aus den folgenden Schritten: Zuerst formt man einen ersten eindimensionalen Schritt, der als erste prognostische Annäherung zu betrachten ist. Dies soll hier in der x -Richtung erfolgen:

$$\bar{\phi}_{Ax} = \bar{\phi} + c_x^z (\phi_{i+1} - \phi_i) \bar{\phi} \quad (3.213)$$

Hierbei ist $\bar{\phi}$ das aktuelle Mittel über die auf der x -Achse senkrecht stehenden Seitenfläche der betrachteten Gitterbox, c_x^z bedeutet die Geschwindigkeitskomponente in der Gitterbox bzw. Gitterzelle in die x -Richtung. Es ist wichtig festzuhalten, dass der zweite Term auf der rechten Seite der Gl. (3.231) als die Differenz der Flüsse durch die Seitenflächen mit der Zellgeschwindigkeit c_x^z zu betrachten ist. Allerdings beeinträchtigt dies die Eindeutigkeit des Flusses durch die Seitenflächen und damit die Konservierung. Als nächstes erfolgt eine weitere prognostische Annäherung, welche in der y -Richtung vorgenommen wird und

$$\bar{\phi}_{Axy}^{v+1} = \bar{\phi}_{Ax} + c_y^z (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) \bar{\phi}_{Ax} \quad (3.214)$$

lautet, wobei jetzt die in der ersten Annäherung gewonnenen Werte $\bar{\phi}_{Ax}$ in der Gleichung (3.214) und die Zell-Geschwindigkeit in der y -Richtung verwendet werden. Somit wird ein neuer Näherungswert $\bar{\phi}^{v+1}$ gewonnen. Beim Operator-Splitting werden die Zwischennäherungen, wie hier z.B. $\bar{\phi}_{Ax}$ auf die Werte $\bar{\phi}$ aufaddiert und anschließend der Rechenprozess auf Grund dieser neuen Werte, wie in den Gl. (3.213) und (3.214) sequentiell fortgesetzt. Nunmehr kann man die Gl. (2.213) in Operatorform umschreiben. Mit Hilfe des Advektionsoperators erhält man dann

$$\bar{\phi}_{Ax} = \bar{\phi} + A_x \bar{\phi} \equiv (I + A_x) \bar{\phi} \quad (3.215)$$

Die gleiche Definition gilt auch für die y -Richtung

$$\bar{\phi}_{Axy}^{v+1} = \bar{\phi}_{Ax} + A_y \bar{\phi}_{Ax} \equiv (I + A_y) \bar{\phi}_{Ax} \quad (3.216)$$

oder mit Hilfe von (3.215)

$$\bar{\phi}_{Axy}^{v+1} = (I + A_y)(I + A_x) \bar{\phi}$$

Nunmehr betrachten wir einen eindimensionalen Flussdifferenz-Operator der konservierenden Form und bezeichnen diesen bzw. dessen Komponenten mit F_{Cx} und F_{Cy}

$$\bar{\phi}_{Cx} = (I + F_{Cx}) \bar{\phi} = \bar{\phi} + c_{x,i+1,j}^z \phi_{i+1,j}(\bar{\phi}) - c_{x,i,j}^z \phi_{i,j}(\bar{\phi}) \quad (3.217)$$

$$\bar{\phi}_{Cy} = (I + F_{Cy}) \bar{\phi} = \bar{\phi} + c_{y,i,j+1}^z \phi_{i,j+1}(\bar{\phi}) - c_{y,i,j}^z \phi_{i,j}(\bar{\phi}) \quad (3.218)$$

Der Unterschied zur advektiven Form besteht in den beiden Relationen darin, dass die hier verwendeten Geschwindigkeitskomponenten zu jeder Zellfläche eindeutig zugeordnet sind und deshalb nicht an zwei Flächen gleich sein müssen. Die konservierende Form des Operator-Splittings entspricht daher der Beziehung

$$\bar{\phi}_{Cxy}^{v+1} = \bar{\phi} + F_{Cx}(\bar{\phi}) + F_{Cy}(\bar{\phi}_{Cx}) \quad (3.219)$$

und bei umgekehrter Reihenfolge

$$\bar{\phi}_{Cyx}^{v+1} = \bar{\phi} + F_{Cx}(\bar{\phi}_{Cy}) + F_{Cy}(\bar{\phi}) \quad (3.220)$$

Nun besteht auch die Möglichkeit mit einer Advektiv-Form in der x-Richtung zu starten und eine Zwischennäherung der Form (3.215) durchzuführen. Dann berechnet man in der Folge eine konservierende Flussform-Differenz in der y-Richtung unter Einbezug der stabilisierenden Kreuzterme kombiniert mit einer zusätzlichen, separaten konservierenden Flussform-Differenz in der x-Richtung, basierend auf den ursprünglichen $\bar{\phi}$ - Werten. Dies ergibt eine äquivalente Form der Näherung mit

$$\bar{\phi}_{xy}^{v+1} = \bar{\phi}^t + F_{Cx}(\bar{\phi}^t) + F_{Cy}(\bar{\phi}_{Ax}) \quad (3.221)$$

Jede Flussdifferenz-Rechnung ist eindimensional und bedingt Konservierung und Konsistenzerhaltung sowie Stabilität [s.a. LEONARD et al. (1996)]. Im nächsten Schritt wird die Sequenz der Koordinatenrichtung umgekehrt und man erhält

$$\bar{\phi}_{yx}^{v+1} = \bar{\phi}^t + F_{Cx}(\bar{\phi}_{Ay}) + F_{Cy}(\bar{\phi}^t) \quad (3.222)$$

Der Algorithmus alterniert zwischen den Gl. (2.221) und (2.222) in der weiteren Rechnung. Dieses Verfahren heißt MACHO-Methode. (MACHO = Multidimensional advective conservative hybrid operator). Nimmt man an, dass die Flussdifferenz-Operatoren in (3.221) und (3.222) linear sind, dann erhält man nach Mittelung der beiden Gleichungen zunächst

$$\bar{\phi}^{v+1} = \bar{\phi}^t + F_{Cx} \left[\frac{1}{2} (\bar{\phi}^t + \bar{\phi}_{Ay}^t) \right] + F_{Cy} \left[\frac{1}{2} (\bar{\phi}^t + \bar{\phi}_{Ax}^t) \right] \quad (3.223)$$

Führt man in diese Gleichung die Relationen (3.215) und (3.216) ein resultiert schließlich die von SKAMAROCK (2004) angegebene Formelvariante, wobei hier F_x und F_y den konservierenden Flussform-Differenzen F_{Cx} und F_{Cy} entsprechen

$$\phi^{t+\Delta t} = \left\{ I + F_x \left(I + \frac{1}{2} A_y \right) + F_y \left(I + \frac{1}{2} A_x \right) \right\} \phi^t \quad (3.224)$$

Die Operator-Komponenten des Flussvektors ergeben sich mit

$$(I + F_x) \phi^t = \left[I + \Delta t L_x + \frac{\Delta t^2}{2} (L_x^2) + O(\Delta^3) \right] \phi^t \quad (3.225 \text{ a,b})$$

$$(I + F_y) \phi^t = \left[I + \Delta t L_y + \frac{\Delta t^2}{2} (L_y^2) + O(\Delta^3) \right] \phi^t$$

In (3.225 a,b) wird die Beziehung (3.224) nahezu vollständig angenähert, obwohl der Term $\left[\frac{\Delta t^2}{2} (L_x L_y + L_y L_x) \right]$ nicht enthalten ist. F_x und F_y garantieren die Konservierung und die Verwendung des inneren Advektions-Operators A mit dem äußeren Fluss-Operator F die

Konsistenz. Multidimensionale Stabilität ist garantiert, wenn die individuellen, eindimensionalen Operatoren-Schemata A und F mit $C_r \leq 1$ für sich stabil sind. Die Rechenschritte zur Implementierung des Schemas (3.224) ergeben sich direkt in folgender Weise:

Die Operatoren-Komponenten des advektiven Schemas A_x und A_y werden zunächst unabhängig auf ϕ^t angewendet und die daraus resultierenden Feldgrößen

$$\phi^t \left(I + \frac{1}{2} A_y(\phi^t) \right) \text{ und } \phi^t \left(I + \frac{1}{2} A_x(\phi^t) \right)$$

werden ermittelt. Auf diese Feldgrößen werden anschließend die Fluss-Operatoren F_x und F_y angewandt und die sich ergebenden Werte auf ϕ^t aufaddiert, womit das endgültige Ergebnis $\phi^{t+\Delta t}$ erhalten und der Zeitschritt somit komplettiert wird. Der rechentechnisch aufwendigste Teil ist natürlich die Ermittlung der Operatoren F und A . Im Gegensatz zu den eindimensionalen Schemata benötigt der zweidimensionale Algorithmus zwei Anwendungen von F und zwei Anwendungen von A . Sind die Rechenkosten für beide Operatoren gleich groß, dann benötigt das zweidimensionale System den vierfachen Rechenaufwand gegenüber einem eindimensionalen Schema. Gegenüber dem eindimensionalen Schema müssen A_x, A_y und ϕ^t bzw. $\phi^{t+\Delta t}$ gespeichert werden, d.h. der Speicherbedarf ist dreifach größer. Entsprechend können nun auch dreidimensionale Schemata abgeleitet werden (s. hierzu SKAMAROCK (2004)).

Als nächstes wollen wir nunmehr ein Schema mit Zeit-Splitting vorstellen:

Eine einfache Form für die zweidimensionale Betrachtungsweise stellt die Beziehung

$$\phi^{t+\Delta t} = (I + F_y)(I + F_x)\phi^t \tag{3.226}$$

dar. Diese Formulierung leidet an zwei Problemen:

- 1.) Das Schema ist nur von 1. Ordnung in der Zeit genau, da die Flussdivergenz-Operatoren nicht kommutativ sind: $F_x F_y \neq F_y F_x$. Während die Operatoren $(I + F_y)$ und $(I + F_x)$ die eindimensionalen Taylor-Reihen von zweiter Ordnung genau entwickeln, ist dies in der zweidimensionalen Variante nicht komplett der Fall. Der Term fehlt und wird bestenfalls nur durch $\Delta t^2 L_x L_y$ ersetzt. Im wesentlichen reduziert die diskrete Lösung im zweidimensionalen Fall die Symmetrie des kontinuierlichen Operators nicht.
- 2.) Die Beziehung (3.226) garantiert die Konsistenz nicht, wenn die Massenkonservierungsgleichung (3.208) nicht berücksichtigt wird.

Als eine sehr populäre Lösung des Systems (3.226) und seiner Probleme bietet sich die Veränderung der Operator-Sequenz an. Es werden sukzessive Schritte in der Form

$$\phi^{t+\Delta t} = (I + F_x)(I + F_y)\phi^t \quad \text{und}$$

$$\phi^{t+2\Delta t} = (I + F_y)(I + F_x)\phi^{t+\Delta t}$$

durchgeführt. Die Kombination dieser beiden Schritte führt schließlich zu

$$\phi^{t+2\Delta t} = (I + F_y)(I + F_x)(I + F_x)(I + F_y)\phi^t \quad (3.227)$$

Dieses System ist von zweiter Ordnung genau. $[I + F_x(\Delta t)][I + F_x(\Delta t)]$ und $[I + F_x(2\Delta t)]$ sind beide von zweiter Ordnung genaue Approximationen für einen $2\Delta t$ -Schritt.

3.1.18 Trägheitsschwerewellen und verschiedene Gittersysteme

Wir wollen fünf verschiedene, häufig in der Numerischen Wettervorhersage verwendete Gittersysteme untersuchen (s. dazu Abb. 3.37) und auch ARAKAWA (1997). Da in allen Gittersystemen die Gitterdistanz den gleichen Wert einnehmen soll, erhalten wir pro Flächeneinheit die gleiche Anzahl von Variablen und damit etwa die gleiche Rechenzeit. Allerdings werden wir sehen, dass die numerischen Lösungen für verschiedene Raumverteilung der Variablen differente Ergebnisse liefern. Zunächst wollen wir folgende numerische Differenzenoperatoren definieren:

$$\delta_x \psi_{ij} = \frac{1}{d} \left[\psi_{i+\frac{1}{2},j} - \psi_{i-\frac{1}{2},j} \right] \quad \delta_y \psi_{ij} = \frac{1}{d} \left[\psi_{i,j+\frac{1}{2}} - \psi_{i,j-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.228 \text{ a,b})$$

ψ bedeutet hier eine beliebige Variable und d die Gitterdistanz zwischen jenen Punkten über welche die endlichen Differenzen gebildet werden sollen. Für die Gitter A bis D werden diese Differenzen jeweils über d , im E-Gitter über die Distanz $\sqrt{2}d$ gebildet.

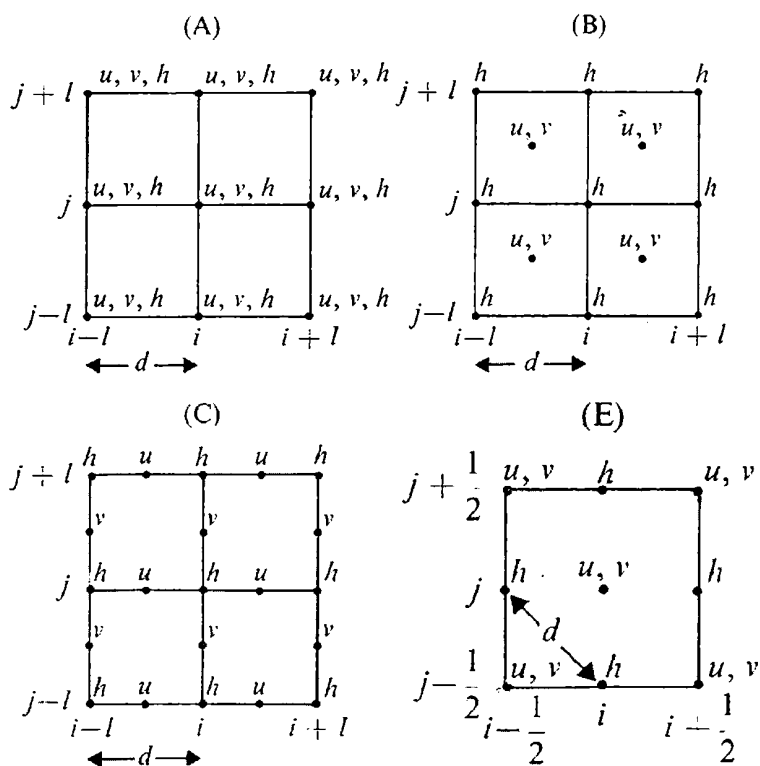


Abb. 3.37. Verschiedene Gittertypen mit differenter Variablenbelegung zur Lösung des Gleichungssystems (3.249 a,b,c)

Der Gittertyp D wird erhalten, wenn man in der Abbildung des Gittertyps C einfach u und v vertauscht.

Gleichzeitig definieren wir als Mittel über die gleichen Punkte

$$\bar{\Psi}_{ij}^x = \frac{1}{2} \left[\Psi_{i+\frac{1}{2},j} + \Psi_{i-\frac{1}{2},j} \right] \quad (3.229 \text{ a,b})$$

$$\bar{\Psi}_{ij}^y = \frac{1}{2} \left[\Psi_{i,j+\frac{1}{2}} + \Psi_{i,j-\frac{1}{2}} \right]$$

und schließlich das Mittel über x und y mit

$$\bar{\Psi}_{ij}^{xy} \equiv \bar{\Psi}_{ij}^x = \frac{1}{4} \left[\Psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \Psi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \Psi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \Psi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.230)$$

Mit Hilfe dieser Operatoren (3.228a,b), (3.229a,b) und (3.230) kann man das Gleichungssystem (3.128) bis (3.130) eine entsprechende Diskretisation durchführen, wenn man der Einfachheit halber davon ausgeht, dass u, v und h keine Variation mit y aufweisen und dieses vereinfachte System

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu \quad (3.231 \text{ a,b,c})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = H \frac{\partial u}{\partial x}$$

lautet. Vorher müssen wir aber auch die „wahre“ analytische Lösung ableiten, um die Ergebnisse der numerischen Lösung mit dieser vergleichen zu können. Naturgemäß betrachten wir auch hier ein eindimensionales System. Mit Hilfe der Lösungsansätze

$$\begin{bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \\ h(x, t) \end{bmatrix} = \text{Re} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ h^* \end{bmatrix} \exp[i(k_x x - vt)] \quad (3.232)$$

erhalten wir aus (3.231 a,b,c)

$$-iu^*v = -igk_x h^* + fv^*$$

$$-iv^*v = -fu^*$$

$$-ih^*v = -iHu^*k_x$$

Nun ermitteln wir aus den letzten beiden Gleichungen $v^* = -if \frac{u^*}{v}$ und $h^* = Hu^* \frac{k_x}{v}$ und setzen diese Beziehungen in die erste Gleichung ein. Daraus folgt

$$-iu^*v = -\left(\frac{1}{v}\right)igk_x^2Hu^* - \left(\frac{1}{v}if^2u^*\right)$$

bzw. nach Multiplikation mit $-\frac{v}{if^2u^*}$ und Umformung die „Frequenzgleichung“ der „wahren“ Lösung mit

$$\frac{1}{f^2}v^2 = \frac{1}{f^2}(gHk_x^2) + 1 \quad (3.233)$$

Die Größe gH/f^2 stellt das Quadrat des sogenannten Rossby-Deformationsradius, welcher mit

$$\lambda = \frac{\sqrt{gH}}{f}$$

definiert wird, dar. Diese Größe ist niemals Null und v daher eine monoton anwachsende Funktion der Wellenzahl k_x , d. h. die Gruppengeschwindigkeit

$$c_G = \frac{\partial v}{\partial k_x} = \frac{\partial k_x c}{\partial k_x}$$

ist ebenfalls niemals Null, sondern, wenn man (3.233) nach k_x differenziert

$$c_G = \left(\frac{1}{v}\right)k_x gH$$

Dieser Umstand ist von größter Bedeutung für den geostrophischen Anpassungsprozess, da keine lokale Anhäufung von Wellenenergie stattfinden kann.

Als nächstes wollen wir uns der numerischen Lösung zuwenden. Wir diskretisieren die Gleichungen (3.231 a,b,c) und erhalten

1.) Im A-Gitter:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\overline{\delta_x h^x} + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\overline{\delta_x u^x}$$

In expliziter Form schreibt sich dies

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} = -\frac{g}{2d} [\delta_{x,i+1/2,j} + \delta_{x,i-1/2,j}] + fv_{ij} \text{ bzw.}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} = -\frac{g}{2d} [h_{i+1,j} - h_{i,j} + h_{i,j} - h_{i-1,j}] - +fv_{ij}$$

womit die Gleichungen schließlich die Form

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} = -\frac{g}{2d} [h_{i+1,j} - h_{i-1,j}] + fv_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{ij} = -fu_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{ij} = -\frac{H}{2d} [u_{i+1,j} - u_{i-1,j}]$$

annehmen. In den obigen Gleichungen bedeutet d die Gitterdistanz Δx . Setzen wir nunmehr in diese Gleichungen die diskreten Lösungen

$$\begin{bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \\ h(x, t) \end{bmatrix} = \text{Re} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ h^* \end{bmatrix} \exp[i(k_x \hat{i} \Delta x - vt)] \quad (3.234)$$

ein, dann erhalten wir nach sehr ähnlicher Rechnung wie bei der „wahren“ Lösung und Verwendung der Eulerschen Identitätsformel die Frequenzgleichung

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 (\sin^2 k_x d) + 1 \quad (3.235)$$

wobei $\lambda^2 = gH/f^2$ ist. Für die Gruppengeschwindigkeit erhalten wir schließlich

$$c_G = gH/vd(\cos k_x d \sin k_x d)$$

2.) Im B-Gitter:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\delta_x h + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\delta_x u$$

erhält man nach ähnlicher Rechnung mit Hilfe der diskreten Lösungen (3.234) für die Frequenzgleichung

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 4\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 (\sin^2 k_x d/2) + 1$$

und für die Gruppengeschwindigkeit

$$c_G = 2gH/vd(\cos k_x d/2 \sin k_x d/2)$$

3.) Im C-Gitter:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\delta_x h + f\bar{v}^x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -f\bar{u}^x$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\delta_x u$$

erhält man als Frequenzgleichung

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = \cos^2 k_x d/2 + 4\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 (\sin^2 k_x d/2)$$

und für die Gruppengeschwindigkeit

$$c_G = \left[\frac{2gH}{f^2 d^2} - \frac{1}{2} \right] \left(\frac{f^2 d}{v} \right) \sin k_x d/2 \cos k_x d/2$$

4.) Im D-Gitter:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\overline{\delta_x h}^x + f\bar{v}^x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -f\bar{u}^x$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\overline{\delta_x u}^x$$

erhält man als Frequenzgleichung

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = \cos^2 k_x d / 2 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 (\sin^2 k_x d)$$

und für die Gruppengeschwindigkeit

$$c_G = 2gH/vd(\cos k_x d \sin k_x d) - f^2 d / 2v(\cos k_x d / 2 \sin k_x d / 2)$$

und

5.) im E-Gitter:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\delta_x h + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\delta_x u$$

woraus man für die Frequenzgleichung

$$\left(\frac{v}{f}\right)^2 = 2\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 (\sin^2 k_x d / \sqrt{2}) + 1$$

und für die Gruppengeschwindigkeit

$$c_G = 2\frac{gH}{vd}\sqrt{2}(\cos k_x d / \sqrt{2} \sin k_x d / \sqrt{2})$$

erhält. Man kann nunmehr die für die Gitter A bis E gewonnenen Frequenzgleichungen in eine generelle Relation der Form

$$v^2 = f^2\beta^2 + \alpha^2gH \tag{3.236}$$

zusammenfassen, wobei offensichtlich folgende Koeffizienten für die Werte α und β gelten:

A-Gitter: $\beta = 1$ $\alpha = (\sin k_x d)l / d$

B-Gitter: $\beta = 1$ $\alpha = (\sin k_x d / 2)(d / 2)^{-1}$

C-Gitter: $\beta = \cos k_x d / 2$ $\alpha = \sin k_x d / 2(d / 2)^{-1}$

D-Gitter: $\beta = \cos k_x d / 2$ $\alpha = \sin k_x d(1 / d)$

E-Gitter: $\beta = 1$ $\alpha = \sin k_x d / \sqrt{2}(d / \sqrt{2})$

Als generelle Beziehung ergibt sich für die Phasengeschwindigkeiten

$$\frac{v}{k_x} = c = \pm \left[\frac{1}{k_x} \right] \left[f^2 \beta^2 + \alpha^2 gH \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.237)$$

und für die Gruppengeschwindigkeit die generelle Formel

$$c_G = \frac{1}{v} \left[f^2 \beta \frac{\partial \beta}{\partial k_x} + \alpha gH \frac{\partial \alpha}{\partial k_x} \right] \quad (3.238)$$

Man sieht sofort, dass die Phasengeschwindigkeit für alle Gitter kleiner ist als die der analytischen oder „wahren“ Lösung. Die größte Abweichung ergibt sich für die kürzeste Wellenlänge $L = 2d$ in den Gittern A und D. Die Gruppengeschwindigkeiten sind vor allem für die kleinen Wellenlängen sehr niedrig und werden für Wellenlängen $2d < L < 4d$ in den

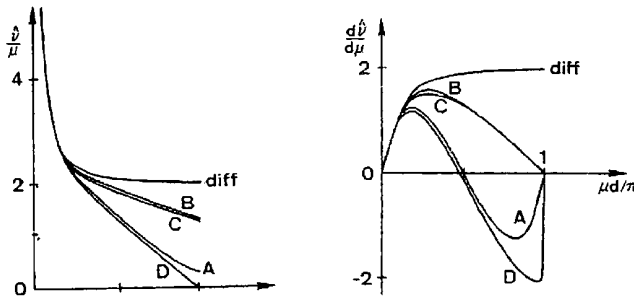


Abb.3.38 Phasengeschwindigkeit c und Gruppengeschwindigkeit c_G als Funktion von $\frac{k_x d}{\pi}$ für die Gitter A – D und für die „wahre“ Lösung. In der Abbildung gilt $\mu = k_x$.

$gH = 10^4 \text{ m}^2 \text{ sek}^{-2}$; $f = 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$; $d = 500 \text{ km}$ [nach HALTNER u. WILLIAMS (1980)]

Gittern A und D sogar negativ. In den Gittern B und C wird sowohl die Phasen- als auch die Gruppengeschwindigkeit am besten mit Hinblick auf die „wahre“ Lösung angenähert. Da die Energie sich mit Gruppengeschwindigkeit ausbreitet, müssen die Gitter B und C die besten Dispersionseigenschaften aufweisen, d. h. das schnellste „geostrophic adjustment“ unter den untersuchten Gittern anbieten. Die schlechtesten diesbezüglichen Dispersionseigenschaften weisen die Gitter A und D auf. In ihnen kann sich die Energie mit den kurzen Wellenlängen in die falsche Richtung ausbreiten und damit beachtliche „Lärmphänomene“ erzeugen. Wir sehen daraus, dass die Wahl des Gittersystems beim Entwurf eines numerischen Modells ebenfalls sehr sorgfältig überlegt werden muss.

3.1.19 Schwerewellen und Stabilität in „nicht-gestagerten“ und „gestagerten“ Gittersystemen

Um die Stabilität des Gleichungssystems, welches Schwerewellen enthält, bei „nicht-gestagerten“ und „gestagerten“ Gittern zu untersuchen, gehen wir erneut von einfachen, linearisierten und eindimensionalen Flachwassergleichungen in der Form (3.149) und (3.150)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Phi \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

aus. Zunächst diskretisieren wir die beiden Gleichungen für das „nicht-gestaggerte“ Gitter, welches in Abb.3.39 zu sehen ist:

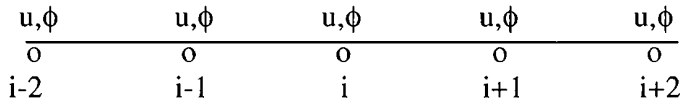


Abb.3.39 Ein "nicht-gestagertes" Gitter

$$\frac{u_i^{v+1} - u_i^{v-1}}{2\Delta t} + U \frac{u_{i+1}^v - u_{i-1}^v}{2d} + \frac{\phi_{i+1}^v - \phi_{i-1}^v}{2d} = 0 \quad (3.239)$$

$$\frac{\phi_i^{v+1} - \phi_i^{v-1}}{2\Delta t} + U \frac{\phi_{i+1}^v - \phi_{i-1}^v}{2d} + \Phi \frac{u_{i+1}^v - u_{i-1}^v}{2d} = 0 \quad (3.240)$$

Hier wurde wieder $\Delta x = d$ gesetzt. In diese Gleichungen führen wir die Lösungen

$$\begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} = \text{Re} \begin{bmatrix} u^* \\ \phi^* \end{bmatrix} \exp \left[i \left(k_x \hat{i} d + \omega v \Delta t \right) \right] \quad (3.241)$$

ein, wobei $\omega = -k_x c$ die Frequenz bedeutet. Es wird für die Frequenz ω und für den Gitterindex \hat{i} verwendet, um von dem Zeitindex v bzw. $i = \sqrt{-1}$ zu unterscheiden. Man erhält dann folgendes Paar homogener Gleichungen:

$$u^* \left[\frac{\sin \omega \Delta t}{\Delta t} + U \frac{\sin k_x d}{d} \right] + \phi^* \frac{\sin k_x d}{d} = 0$$

$$\phi^* \left[\frac{\sin \omega \Delta t}{\Delta t} + U \frac{\sin k_x d}{d} \right] + u^* \Phi \frac{\sin k_x d}{d} = 0$$

Für eine nicht-triviale Lösung muß die Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{\sin \omega \Delta t}{\Delta t} + U \frac{\sin k_x d}{d} \right] & \frac{\sin k_x d}{d} \\ \Phi \frac{\sin k_x d}{d} & \left[\frac{\sin \omega \Delta t}{\Delta t} + U \frac{\sin k_x d}{d} \right] \end{vmatrix} = 0$$

sein, was nach Auflösung letzterer schließlich zu der Frequenzgleichung

$$\sin \omega \Delta t = -\Delta t / d \left(U \pm \Phi^{\frac{1}{2}} \right) \sin k_x d \quad (3.242)$$

führt. Für eine neutrale Lösung des Gleichungssystems muss ω reell sein. Da für die Frequenz die Beziehung

$$\omega = \omega_{RE} + i\omega_{IM}$$

gilt, folgt deshalb $\omega_{IM} = 0$. Damit gilt aber $\sin \omega \Delta t \leq 1$ und es ergibt sich für die rechte Seite von (3.219)

$$\left| \Delta t / d \left(U \pm \Phi^{\frac{1}{2}} \right) \sin k_x d \right| \leq 1$$

Da im Bereich der zulässigen Wellenzahlen k_x der Term $\sin k_x d$ maximal den Wert 1 annehmen kann, ergibt sich, da

$$c = \left(U \pm \Phi^{\frac{1}{2}} \right)$$

die Phasengeschwindigkeit externer Schwerewellen ist, schließlich

$$|c| \Delta t / d \leq 1$$

für „nicht-gestaggerte“ Gitter. Dehnt man die vorliegende Analyse auf zweidimensionale Verhältnisse aus, dann erhält man

$$|c| \sqrt{2} \Delta t / d \leq 1 \text{ bzw. } |c| \Delta t / d \leq 0.707 \quad (3.240a)$$

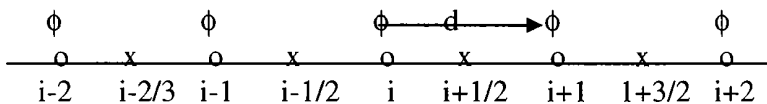


Abb.3.40 Ein „gestaggertes“ Gitter.

Betrachten wir nunmehr ein „gestaggertes“ Gitter, bei welchem wir die Distanz $\Delta x = d$ beibehalten, aber eine der Variablen um eine halbe Gitterdistanz $d/2$ in der x – Richtung verschoben, mitführen, dann erhält man, wie aus der Abb.3.40 sofort einsichtig wird, die nachstehenden diskretisierten Relationen

$$\frac{u_{i+1/2}^{v+1} - u_{i+1/2}^{v-1}}{2\Delta t} + U \frac{u_{i+3/2}^v - u_{i-1/2}^v}{2d} + \frac{\phi_{i+1}^v - \phi_{i-1}^v}{2d} = 0 \quad (3.243)$$

$$\frac{\phi_i^{v+1} - \phi_i^{v-1}}{2\Delta t} + U \frac{\phi_{i+1}^v - \phi_{i-1}^v}{2d} + \Phi \frac{u_{i+3/2}^v - u_{i-1/2}^v}{2d} = 0 \quad (3.244)$$

In das System werden nunmehr die Lösungen (3.241) mit der Modifikation $\Delta x = d/2$ eingeführt. Nach ähnlicher Rechnung wie bei dem „nicht-gestaggerten“ Gitter erhält man die Frequenzgleichung

$$\sin \omega \Delta t = -2\Delta t / d (\sin k_x d / 2) \left(U \cos k_x d / 2 \pm \Phi^{\frac{1}{2}} \right)$$

was für neutrale Lösungen, d. h. mit reellem ω zu

$$\left| \Delta t / d (\sin k_x d / 2) \left(U \cos k_x d / 2 \pm \Phi^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq 1/2$$

führt. Für den zulässigen Wellenbereich folgt deshalb als Stabilitätskriterium

$$|c| \Delta t / d \leq 1/2$$

d.h. für ein „gestaggertes“ Gitter in der vorliegenden Form ist der Zeitschritt Δt auf die Hälfte zu reduzieren, damit die Rechnung stabil bleibt, was natürlich zu einer Verdopplung der Rechenzeit führt. Auf der anderen Seite kann man aber zeigen, dass in einem „gestaggerten“ Gitter der vorliegenden Form (s. Abb. 3.40) die Phasengeschwindigkeit besser approximiert wird.

Aus (3.239) und (3.240) erhalten wir für „nicht-gestaggerte“ Gitter die Identität:

$$\arcsin \omega \Delta t \equiv \omega \Delta t = -\arcsin \left[\Delta t / d \left(U \pm \Phi^{\frac{1}{2}} \right) \sin k_x d \right]$$

und da auch im diskreten Fall $\omega = -c * k_x$ ist, schließlich

$$\begin{aligned} c^* (\text{nicht-gestaggert}) &= \frac{1}{k_x \Delta t} \arcsin \left[\Delta t / d \left(U \pm \Phi^{\frac{1}{2}} \right) \sin k_x d \right] \equiv \\ &\equiv (1/k_x d) \left(U \pm \Phi^{\frac{1}{2}} \right) \sin k_x d = c (1/k_x d) \sin k_x d \end{aligned} \quad (3.243)$$

Analog ergibt sich für „gestaggerte“ Gitter

$$\omega \Delta t = -\arcsin \left[2\Delta t / d (\sin k_x d / 2) \left(U \cos k_x d / 2 \pm \Phi^{\frac{1}{2}} \right) \right]$$

was sofort zu

$$c^* (\text{gestaggert}) = (1/k_x d) \arcsin \left[(U \sin k_x d) \pm 2\Phi^{\frac{1}{2}} \sin k_x d / 2 \right]$$

umgeformt werden kann, weil $\sin k_x d = 2 \cos k_x d / 2 \sin k_x d / 2$ ist. Auch hier gilt $U \ll \Phi^{\frac{1}{2}}$ und damit kommen wir schließlich zu

$$c^* (\text{gestaggert}) = c (1/k_x d) 2 \sin k_x d / 2 \quad (3.264)$$

Aus den Relationen (3.243) und (3.244) geht aber unmittelbar hervor, dass die nachstehende Bedingung $c^*(\text{nicht-gestagert}) < c^*(\text{gestagert}) < c$ stets erfüllt ist. Deshalb stellt bei gleichem „Truncation-Error“ im Advektionsterm, da die Differenzen in diesem Term in beiden Gittersystemen über den gleichen Abstand $2d$ gebildet werden, $c^*(\text{gestagert})$ eine bessere numerische Approximation der Phasengeschwindigkeit dar als $c^*(\text{nicht-gestagert})$. Diese Eigenschaft ist mit Hinblick auf den geostrophischen Anpassungsprozess von großer Bedeutung und belegt einmal mehr den Vorteil gestaggerter Gitter. Deshalb ist es sinnvoll, mitunter auch größeren Rechenumfang in Kauf zu nehmen. Jedenfalls zeigen unsere bisherigen Betrachtungen, dass die jeweiligen Vor- und Nachteile numerischer Schemata stets mit Hinblick auf die gesetzten Ziele sorgfältig analysiert werden müssen.

3.1.20 Ein ökonomisches Gitterschema für Rossby- und Schwerewellen

Bei der numerischen Integration eines dreidimensionalen PE-Modells muss mit dem Nebeneinander von Trägheitsschwerewellen und Rossby-Wellen gerechnet werden. Von den erstern wissen wir, dass sie für den geostrophischen Anpassungsprozess, mit dessen Hilfe nicht nur die realen, sondern auch die „künstlichen“, durch Analysefehler generierten Ungleichgewichte im Anfangsfeld beseitigt werden, sehr wichtig sind. Man kann externe Schwerewellen dadurch eliminieren, dass man am oberen Rand des Integrationsgebiets keine Vertikalgeschwindigkeiten zulässt. Die höchste, erlaubte Phasengeschwindigkeit des Systems entspricht dann der der sogenannten LAMB-Wellen, welche wir im Abschnitt über atmosphärische Wellen mit

$$c = U + (\gamma R \bar{T} + f^2 / k^2)^{\frac{1}{2}}$$

bereits kennengelernt haben. Da U gegenüber dem Klammerausdruck sehr klein und $f^2 / k^2 < \gamma R \bar{T}$ ist, kann auch wegen $\gamma = (c_p / c_v)$ und $H = R \bar{T} / g$ schließlich

$$c \cong \pm (c_p / c_v) (gH)^{\frac{1}{2}} \tag{3.245}$$

geschrieben werden, woraus zu ersehen ist, dass die Phasengeschwindigkeit der LAMB-Welle ungefähr der Phasengeschwindigkeit von Schwerewellen gleich ist. Mit Hinblick auf die

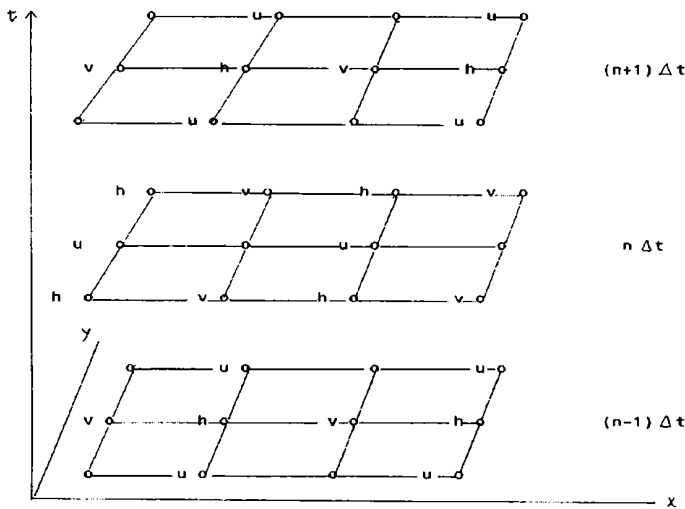


Abb.3.41 „Gestagertes“ Raumzeitgitter (ELIASSEN-Gitter) geeignet für das LEAP-FROG-Schema

notwendige Rechenstabilität ist also die Phasengeschwindigkeit in (3.245) mit der in (3.240a) in etwa ident. Bei einer maximalen Phasengeschwindigkeit von $c = 300 \text{ m sek}^{-1}$ und einer Gitterdistanz von $d = 100 \text{ km}$ ergibt dies für zweidimensionale Betrachtung Zeitschritte von etwa 4 Minuten. Das CFL-Kriterium zwingt also zu sehr kurzen Zeitschritten und bedingt hiemit längere Rechenzeiten. Aus diesem Grund ist es verständlich, dass man zur Erreichung einer ökonomischen Rechenzeit nach teilweise oder „unbedingt“ stabilen Differenzenschemata Ausschau hielt. Solche Schemata haben wir mit den impliziten bereits kennengelernt, die sich allerdings, wie schon wiederholt erwähnt, als sehr rechenaufwendig erweisen. An dieser Stelle sei auch darauf hingewiesen, dass man nicht nur räumlich, sondern auch „raumzeitlich gestaggerte Gitter“ entwerfen kann. Ein solches Gitter wurde schon 1956 von ELIASSEN vorgeschlagen (s. Abb. 3.41). Ein solches Gitter ist zur Lösung des Gleichungssystems (3.128), (3.129) und (3.130) besonders geeignet. Würde man alle Variablen auf jeder Zeitebene mitführen, dann müsste man zwei voneinander unabhängige Lösungen erhalten. Die Lösungen sind jeweils von jenen Variablen unabhängig, welche auf der jeweiligen Zeitebene in Abb.3.41 ausgelassen sind. Das Gitter der jeweiligen Zeitebene wird durch eine Verschiebung des Gitters der vorhergehenden Zeitebene entlang der Linie $x = y$ um den Betrag $\sqrt{2}d$ erzeugt. Das hiebei entstehende Gitter erweist sich als raumzeitliches E-Gitter, welches durch Superposition der Subgitter jeweils benachbarter Zeitebenen gebildet werden kann. Die Lösung des Systems (3.128), (3.129) und (3.130) erfordert deshalb nur die halbe Rechenzeit bei gleichbleibendem „Truncation-Error“ gegenüber einem „ungestaggerten“ Gitter. Außerdem kann das Auftreten des „Numerischen Lärms“ vermieden werden, da die Variablen wechselweise nur auf jeder zweiten Ebene mitgeführt werden.

4. Literatur

- ABRAMOWITZ, M., u. I.A. STEGUN, 1995: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc. New York, p. 914
- ARAKAWA, A., 1966: Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion. J. Comp. Phys., 1, 119-143
- ARAKAWA, A., 1970: Numerical simulation of large-scale atmospheric motions. Numerical Solution of Field Problems in Continuum Physics, Proc.Symp.Appl.Math., Durham, N.C. 1968, SIAM-AMS Proc., 2, 24-40
- ARAKAWA, A., 1972: Design of the UCLA general circulation model. Numerical Simulation of Weather and Climate, Dept. of Meteorology, University of California, Los Angeles, Tech. Rept. 7, 116 pp
- ARAKAWA, A., 1997: Adjustment mechanisms in atmospheric models. J.Meteor.Soc.Jap. 75(1B), 155-179
- ASSELIN, R.A., 1972: Frequency Filter for time integrations. Mon.Wea.Rev., 100, 487-490
- BAER, F., u. J. TRIBBIA, 1977: A complete filtering of gravity modes through nonlinear initialisation. Mon.Wea.Rev., 105, 1536
- BALDAUF, M., 2004: The Local Modell of DWD/COSMO, Cosmo-Newsletter, 41-52
- BENGTSSON, L., 1981: Current problems in four-dimensional data assimilation. ECMWF-Seminar on data Assimilation Methods. 195-218
- BJERKNES, V., 1904: Das Problem der Wettervorhersage betrachtet vom Standpunkt der Mechanik und Physik. Meteorol.Z., 21, 1-7
- BURRIDGE, D.M., u. F.R. HAYES, 1974: Development of the British operational model. The GARP Program on Numerical Experimentation. Rept. 4, 102-104
- BURRIDGE, D.M., J. STEPPELER u. R. STRUEFING, 1986: Finite Element Schemes for the Vertical Discretization of the ECMWF Forecast Model using linear Elements. ECMWF, Techn. Report 54
- CHARNEY, J., 1948: On the Scale of Atmospheric Motions. Geofysiske Publikasjoner 17 (2), 17 pp.
- CHARNEY, J., 1949: On a physical basis for numerical prediction of large scale motions in the atmosphere. J.Meteor., 6, 371-385
- CHARNEY, J., 1955: Numerical Prediction of Cyclogenesis. Proc. Nat.Acad.Sci., 40, 99-110
- CHARNEY, J., A. ELIASSEN, 1949: A numerical method for predicting the perturbations on the middle latitude westerlies. Tellus 1, 38-54
- CHARNEY, J., N. PHILLIPS, 1953: Numerical Integration of the quasi-geostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows. J.Meteor., 10, 71 - 99
- CHARNEY, J., FJØRTOFT, R., J. v. NEUMANN, 1950: Numerical Integration of the barotropic Vorticity Equation. Tellus II, 237 - 257
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K., H. LEWY, 1922: Über partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik. Math. Ann. 100, 32 (1928)
- CROWLEY, W.P. 1968: Numerical advection experiments. Mon. Wea. Rev., 96, 1-11
- EDELMANN, W., 1976: Zur Numerischen Behandlung von Vorhersagemodellen. Promet 3/76-4, pp14
- ELIASSEN, A., 1956: A procedure of numerical integration of the primitive equations of the two-parameter model of the atmosphere. Large-Scale Synoptic Processes. Dept. Of Meteorology. Univ. of California, Los Angeles, Sci. Rept. 4, 53 pp
- ERTEL, H., 1941: Die Unmöglichkeit einer exakten Wetterprognose auf Grund von Luftdruckkarten von Teilgebieten der Erde. Meteorol.Z., 58, 309 - 313
- ERTEL, H., 1954: *Kausalität, Teleologie und Willensfreiheit als Problemkomplex der Naturphilosophie*. Berlin, Akademie Verlag

- EXNER, F.M., 1908: Über eine erste Annäherung zur Vorausberechnung Synoptischer Wetterkarten. Meteorol. Z., 25, 457 – 467
- ESTOQUE, M., 1957: A Graphically Integrabel Prediction Model Incorporating Orographic Influences. J.Met., 14, 293
- FORTAK, H., 191982 : *Meteorologie*. Dietrich Reimer-Verlag, Berlin
- FORTAK, H., 1985: Prinzipielle Grenzen der Vorhersagbarkeit atmosphärischer Prozesse. Vortrag im Rahmen der Ringsvorlesung: Die Dynamische Erde. Freie Universität Berlin, Sommersemester 1985
- FOX-RABINOVITZ, M.S., 1996: Diabatic dynamic initialization with an iterative time integration scheme as a filter. Mon.Wea.Rev., 124, 121-130
- FJØRTOFT, R., 1952 : On a Numerical Methode of Integratings the Barotropic Vorticity Equation. Tellus 4, 179-194
- GANDIN, L. S., 1965: *Objective analysis of meteorological fields*. Engl. Übersetzung durch Israeli Program for Scientific Translations, Jerusalem 1965
- GADD, A.J., 1978: A split explicit integration scheme for numerical weather prediction. Quart.J.Roy.Meteor.Soc., 104, 569-582
- GERRITY, J.P. Jr., u. R.D. McPHERSON, 1971 On an efficient scheme for the numerical integration of a primitive-equation barotropic model. J.Appl.Meteor., 10, 353 - 363
- HALTINER, G.J., F.L. MARTIN, 1957: *Dynamical and Physical Meteorology*. Mc Graw-Hill Book Company. Inc., New York-Toronto-London
- HALTINER, G.J., 1971: *Numerical Weather Prediction*. John Wiley & Sons, Inc. New York-London-Sydney-Toronto
- HALTINER, G.J., u. R.T. WILLIAMS, 1980: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. Second Edition*. John Wqiuley & Sons, New York-Chichester-Brisbane Toronto
- HINKELMANN, K., 1951: Über den Mechanismus des Meteorologischen Lärms. Tellus 3, 285
- HINKELMANN, K., 1959: Ein numerisches Experiment mit den Primitiven Gleichungen. In „The atmosphere and the sea in motion“ Rockefeller Institute Press. New York.
- HINKELMANN, K., 1969: Primitive Equations. In Lectures on Numerical Short Range Weather Prediction. WMO Training Seminar in Moskau 1965. Hydrometeoizdat, Leningrad 1969
- HINKELMANN, K., 1972: Das Kurzfristmodell. Promet 1/2/72/DWD
- HINKELMANN, K., 1976: Der Begriff “Baroklines Modell”. Promet 3/1/76/DWD
- HINKELMANN, K., G. KORB, 1973: Die physikalische Bedeutung der Barotropie-Annahme. Promet 1/1/73/DWD
- HINKELMANN, K., H. REISER, 1973: Hydrostatische Approximation und Barotropiebedingung. Promet 1/2/73/DWD
- HUBER-POCK, F., 1959: Ein statistisches Verfahren zur Verbesserung und Beschleunigung der graphischen Integration der barotropen Wirbelgleichung. Arch.Met.Geoph.Biokl. Serie A, 11, 38-47
- HUBER-POCK, F., 2003: *Die atmosphärischen Gleichungen in den meteorologischen Koordinatensystemen*. Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Heft 30, Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien, Publ.Nr. 411, ISSN 1016-6254
- ILLARI, L., 1987: The „Spin-up“-problem. ECMWF Tech.Mem. 137
- KIBEL, I.A., 1940: Meteorological applications of the mechanic equations of a baroclinic fluid. In: Proc. If the USSR Academy of Sciences. No.5, 627-638
- KALNAY, E., 2003: *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. Cambridge University Press
- KLEMP, J.B., u. R. WILHELMSON, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. J. Atmos.Sci. 35, 1070-1096

- KWIZAK, M., u. A.J. ROBERT, 1971: A semi-implicit scheme for gridpoint atmospheric models of the primitive equations. *Mon. Wea. Rev.*, 99, 32 – 36
- KURIHARA, Y., 1965: Numerical integration of the primitive equations on a spherical grid. *Mon. Wea. Rev.*, 93, 3998
- LAPRISE, R., 1991: The Euler equations of motion with hydrostatic pressure as independent variable. *Mon. Wea. Rev.* 120, 185 – 197
- LEONARD, P.P. et al., 1996 : Conservative explicit unrestricted-time-step multi-dimensional constancy preserving advection schemes. *Mon. Wea. Rev.*, 124, 2588 - 2606
- LIU, S.-J., u. R.B. ROOD, 1996: Multidimensional flux-form semi-Lagrangian transport schemes. *Mon. Wea. Rev.*, 124, 2046-2070
- LORENZ, E. N., 1969: The predictability of a flow, which possesses many scale of motion. *Tellus*, 21, 289-307
- LYNCH, P., u. X.Y. HUANG, 1992: Initialization of the Hirlam Model using a digital filter. *Mon. Wea. Rev.*, 120, 1019-1034
- LYNCH, P., u. X.Y. HUANG, 1994: Diabatic initialisation using recursive filters. *Tellus*, 46A, 583 – 597
- LYNCH, P., 1997: The Dolph-Chebyshev window: a simple optimal filter. *Mon. Wea. Rev.*, 125, 1976-1982
- MACHENAUER, B., 1977: On the dynamics of gravity oscillations in a shallow water model with applications to normal mode initialisation. *Contrib. Atmos. Phys.*, 50, 253 – 271
- MAJEWSKI, D., 1998 : The new global isosahedral-hexagonal grid point model GME of the Deutscher Wetterdienst. *Proc. ECMWF Seminar on Recent Developments in Numerical Methods for Atmospheric Modelling*. ECMWF, Reading, United Kingdom, 173 – 201
- MAJEWSKI, D., et al., 2002 : The Operational Global Icosahedral-hexagonal Gridpoint Model GME : Description and High-Resolution Tests. *Mon. Wea. Rev.*, 130, 319-338
- MARCHUK, G., 1974: *Numerical solutions of the problems of the dynamics of the atmosphere and ocean*. Gidrometeoizdat, Leningrad
- MESINGER, F., 1977: Forward-backward scheme and its use in a limited area model. *Beitr. Phys. Atmos.*, 40, 200-210
- MESINGER, F., u. A. ARAKAWA, 1976: Numerical Methods used in Atmospheric Models. Vol. I, GARP Publications Series No. 17, WMO-ICSU Joint Organizing Committee
- OLIGER, J., u. H.-O. KREISS, 1973: Methods for approximate solution of time dependent problems. GARP Publication Series No. 10, WMO/ICSU, Joint Organizing Committee, 107 pp
- ORSZAG, S., 1971: On the elimination of aliasing in finite-difference schemes by filtering high wave number components. *J. Atmos. Sci.*, 18, 1974
- PHILLIPS, N.A., 1959: An example of nonlinear computational instability. In “The atmosphere and the sea in motion”, Rossby Memorial Volume. Rockefeller Institute Press. New York. 501 - 504
- PHILLIPS, N., 2000: The Start of Numerical Weather Prediction in the United States. 50th Anniversary of Numerical Weather Prediction Commemorative Symposium, Potsdam, Deutsche Meteorologische Gesellschaft ISBN 3-928903-22-5
- PICHLER, H., 1959: Zusammenhang zwischen dem räumlichen und zeitlichen Mittel eines Geschwindigkeitsfeldes in einer autobarotropen Strömung. *Arch. Met. Geoph. Biokl. Serie A*, 11, 18-28
- PICHLER, H., 1961: Theorie der räumlichen und zeitlichen Mittelbildung einer beliebigen Feldfunktion und ihre Anwendung in der Meteorologie. *Arch. Met. Geoph. Biokl. Serie A*, 12, 302-338
- PICHLER, H., 1997: *Dynamik der Atmosphäre*. 3. Aufl. Spectrum Akadem. Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford

PICHLER, H., 2001: 150 Jahre Meteorologische Forschung in Österreich: Highlights auf dem Gebiet der Synoptischen und Dynamischen Meteorologie. Vortrag bei der DACH-Tagung 2001 in Wien.

PICHLER, H., H. REUTER, 1960: Zur graphischen Integration der Wirbelgleichung mit Berücksichtigung orographischer Effekte. Arch. Met. Geoph. Biokl. Serie A, 11, 413- 426

PRIGOGINE, J., 1979: *Vom Sein zum Werden. Zeit und Komplexität in den Naturwissenschaften*. R. PIPER & Co. Verlag, München-Zürich

REUTER, H., 1958: Über die Konstruktion von Vorhersagekarten auf synoptisch-statistischer Grundlage. Ber. d. Deutschen Wetterdienstes No. 51, 96 – 99

REUTER, H., 1976: *Die Wettervorhersage*. Springer-Verlag, Wien-New York

RIDDAWAY, R.W. (Revised by M. HORTAL), 2001: *Numerical Methods*. Meteorological Trainings Course, Lecture Series, ECMWF 2002, 1- 98

RICHARDSON, L., 1922: *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press.
Reprint 1965 by Dover Publication, Inc., New York with

CHAPMAN, S., 1965: A New Introduction to the Dover Publication in the reprint.

ROBERT, A.J., 1969: The integration of a spectral model of the atmosphere by the implicit method. Proc. WMO/IUGG Symposium on NWP. Japan Meteorological Society. Tokyo, Japan, pp 19-24

ROBERT, A.J., 1974: Computational resolution requirements for accurate medium range numerical predictions. Difference and Spectral Methods for Atmosphere and Ocean Dynamics Problems. Proc. Symp., Novosibirsk, Part I, 82-102

SADOKOV, V. P., 1969: On some quasi-geostrophic and quasi solenoidal forecast models. Allowances for orography effects, friction and heat sources in forecast models. In "Lectures on Numerical Short-Range Weather Prediction. WMO Regional Training Seminar, Hydrometeoizdat, Leningrad

SADOURNY, R., A. ARAKAWA u. Y. MINTZ, 1968: Integration of the nondivergent barotropic vorticity equation with an icosahedral-hexagonal grid for the sphere. Mon. Wea Rev., 96, 351-356

SCHERHAG, R., 1948: *Wetteranalyse und Wetterprognose*. Springer Verlag, Berlin

SHU, Ch., u. S. OSHER, 1988: Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes. J. Comp. Phys., 77, 439 – 471

SIGAL, G., u. Ch.-W. SHU, Internet: Total Variation Diminishing Runge-Kutta-Schemes. Div. of Mathematics. Brown University, Providence, Ri 02912

SIMMONS, A.J. u. D.M. BURRIDGE, 1981: An energy and angular momentum conserving vertical finite difference scheme on hybrid vertical coordinates. Mon. Wea. Rev., 109, 758-766

SKAMAROCK, W.C. 2004: Time-Splitting Techniques for Multidimensional Transports. Submitted to JGR Atmospheres. Aus Internet.

SKAMAROCK, W.C. u. J.C. KLEMP, 1992: The stability of time-split numerical methods for the hydrostatic and nonhydrostatic elastic equations. Mon. Wea. Rev., 120, 2109-2127

SMOLARKIEWICZ, P.K., 1984: A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. J. Comp. Phys., 86, 355-375

STEPPELER, J., 1987: Galerkin and Finite Element Methods in Numerical Weather Prediction. Bonner Meteorologische Abhandlungen. Dümmler, Bonn

TREMBACH, C.J., et al., 1987: The forward-in-time upstream advection scheme: Extension to higher orders. Mon. Wea. Rev., 115, 540-555

THOMPSON, Ph.D., 1961: *Numerical Weather Analysis and Prediction*. McMillan Comp., New York

WERGEN, W., 1987: Diabatic nonlinear normal mode initialisation for a spectral model with a hybrid vertical coordinate. ECMWF, Tech. Rep. No. 59

- WICKER, L.J., u. W.C. SKAMAROCK, 1997: A Time-Splitting Scheme for the Elastic Equations Incorporating Second Order Runge-Kutta Time Differencing. *Mon. Wea. Rev.*, 126., 1992-1999
- WICKER, L.J., u. W.C. SKAMAROCK, 2002: Time-Splitting Methods for Elastic Models using Forward Time Schemes. *Mon. Wea. Rev.*, 130,2088-2097
- WILLIAMSON, D.L.,1970: Integration of the primitive barotropic model over a spherical geodesic grid. *Mon. Wea. Rev.*,98,512-520
- YOUNG, J.A.,1968: Comparative properties of some time differencing schemes for linear and non-linear oscillations. *Mon. Wea. Rev.*,96, 357 - 364
-

Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik

bisher erschienen:

Heft	Publ.Nr.	Fachgebiet	Autor	Titel und Umfang	Preis in Euro
1	329	Meteorologie		<i>Tagungsbericht EURASAP, Wien, 14.-16. Nov. 1988, Evaluation of Atmospheric Dispersion Models Applied to the Release from Chernobyl.</i> Wien 1989, 20 Beiträge, 198 S., 100 Abb., 17 Tab.	14,53
2	332	Geophysik		<i>Tagungsbericht über das 5. Internationale Alpengravimetrie Kolloquium - Graz 1989.</i> Herausgeber: H. LICHTENEGGER, P. STEINHAUSER und H. SÜNKEL, Wien 1989, 256 S., 100 Abb., 17 Tab.	18,17
3	336	Geophysik		<i>Schwerpunktprojekt S47-GEO: Präalpidische Kruste in Österreich, Erster Bericht.</i> Herausgeber: V. HÖCK und P. STEINHAUSER, Wien 1990, 15 Beiträge, 257 S., 104 Abb., 17 Tab., 23 Fotos	20,35
4	338	Meteorologie	LANZINGER, A. et al:	<i>Alpex-Atlas.</i> FWF-Projekt P6302 GEO, Wien 1991, 234 S., 23 Abb., 2 Tab., 200 Karten	18,17
5	341	Meteorologie	BÖHM, R.:	<i>Lufttemperaturschwankungen in Österreich seit 1775.</i> Wien 1992, 95 S., 34 Abb., 24 Tab.	21,80
6	343	Geophysik	MEURERS, B.:	<i>Untersuchungen zur Bestimmung und Analyse des Schwerefeldes im Hochgebirge am Beispiel der Ostalpen.</i> Wien 1992, 146 S., 72 Abb., 9 Tab.	11,63
7	351	Meteorologie	AUER, I.:	<i>Niederschlagsschwankungen in Österreich seit Beginn der instrumentellen Beobachtungen durch die Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.</i> Wien 1993, 73 S., 18 Abb., 5 Tab., 6 Farbkarten	23,98
8	353	Meteorologie	STOHL, A., H. KROMP-KOLB:	<i>Analyse der Ozonsituation im Großraum Wien.</i> Wien 1994, 135 Seiten, 73 Abb., 8 Tabellen	23,98
9	356	Geophysik		<i>Tagungsbericht über das 6. Internationale Alpengravimetrie-Kolloquium, Leoben 1993.</i> Herausgeber: P. STEINHAUSER und G. WALACH, Wien 1993, 251 Seiten, 146 Abb.	23,98
10	357	Meteorologie	ZWATZ-MEISE, V.:	<i>Contributions to Satellite and Radar Meteorology in Central Europe.</i> Wien 1994, 169 Seiten, 25 Farbb., 42 SW-Abb., 13 Tab.	23,98
11	359	Geophysik	LENHARDT W. A.:	<i>Induzierte Seismizität unter besonderer Berücksichtigung des tiefen Bergbaus.</i> Wien 1995, 91 S., 53 Abb.	23,98
12	361	Meteorologie	AUER, I., R. BÖHM, N. HAMMER †, W. SCHÖNER., WIESINGER W., WINIWARTER W.:	<i>Glaziologische Untersuchungen im Sonnblickgebiet: Forschungsprogramm Wurtenkees.</i> Wien 1995, 143 S., 59 SW-Abb., 13 Farbb., 9 SW-Fotos, 47 Tab.	23,98
13	372	Meteorologie	PIRINGER, M.:	<i>Results of the Sodar Intercomparison Experiment at Dürnrrohr, Austria.</i> Wien 1996	23,98
14	373	Geophysik	MEURERS, B.:	<i>Proceedings of the 7th International Meeting on Alpine Gravimetry, Vienna 1996.</i> Wien 1996	23,98
15	374	Meteorologie	RUBEL, F.:	<i>PIDCAP - Quick Look Precipitation Atlas.</i> Wien 1996	23,98

Heft	Publ.Nr.	Fachgebiet	Autor	Titel und Umfang	Preis in Euro
16	378	Meteorologie	DOBESCH, H., KURY G.:	<i>Wind Atlas for the Central European Countries Austria, Croatia, Czech Republic, Hungary, Slovak Republic and Slovenia</i> , Wien 1997	23,98
17	382	Meteorologie		<i>Proceedings of the 9th International Symposium on Acoustic Remote Sensing and Associated Techniques of the Atmosphere and Oceans</i> , Vienna 1998, 329 Seiten, Wien 1998	23,98
18	383	Meteorologie	RUBEL, F.:	<i>PIDCAP - Ground Truth Precipitation Atlas</i> . 84 Seiten, 99 Farbkarten, Wien 1998	36,34
19	384	Meteorologie		<i>Proceedings of the 2nd European Conference on Applied Climatology</i> , 19 to 23 Oct. 1998, Vienna. CD-ROM, Wien 1998	23,98
20	387	Meteorologie		<i>Proceedings of the 2nd International Conference on Experiences with Automatic Weather Stations</i> , 27 to 29 Sept. 1999, Vienna. CD-ROM, Wien 1999	23,98
21	388	Meteorologie		<i>Bericht über den Workshop Umweltforschung im Hochgebirge - Ergebnisse von GAW-Dach und verwandten Projekten</i> , 05. bis 06. Okt. 1999, Wien. 147 Seiten, Wien 1999	23,98
22	389	Meteorologie	DOBESCH, H., H. V. TRAN:	<i>The Diagnostic Wind Field Model ZAWIMOD2</i> . 47 Seiten, 8 Farbabb., Wien 1999	23,98
23	392	Meteorologie		<i>Proceedings of the 26th International Conference on Alpine Meteorology</i> ; 11 to 15 Sept. 2000, Innsbruck. CD-ROM, Wien 2000	23,98
24	395	Meteorologie	SABO, P.:	<i>Hochnebelprognose mittels eines objektiven Inversionsindexes für die synoptische Praxis</i> , 80 Seiten, Wien 2000	23,98
25	397	Meteorologie	AUER, I., R. BÖHM, W. SCHÖNER:	<i>Austrian long-term climate 1767-2000 - Multiple instrumental climate time series from central Europe</i> , 160 Seiten, 31 Farbseiten, CD-ROM, Wien 2001	25,00
26	398	Geophysik	MEURERS, B.:	<i>Proceedings of the 8th International Meeting on Alpine Gravimetry</i> , Leoben 2000, 240 Seiten, 4 Farbseiten, Wien 2001	25,00
27	399	Meteorologie		<i>Proceedings of the Deutsch-Österreichisch-Schweizerische Meteorologentagung</i> ; 18 to 21 Sept. 2001, Vienna. CD-ROM, Wien 2001	25,00
28	408	Meteorologie	AUER, I., R. BÖHM, M. LEYMÜLLER, W. SCHÖNER:	<i>Das Klima des Sonnblicks - Klimaatlas und Klimatographie der GAW Station Sonnblick einschliesslich der umgebenden Gebirgsregion</i> , 305 Seiten, 130 Farbabbildungen, CD-ROM, Wien 2002	50,00
29	409	Meteorologie		<i>Scientific Contributions of Austria to the Mesoscale Alpine Programme (MAP)</i> , 74 Seiten, 38 Farbseiten, Wien 2003	25,00
30	411	Meteorologie	HUBER-POCK, F.:	<i>Die atmosphärischen Gleichungen in den meteorologischen Koordinatensystemen</i> , 160 Seiten, 1 Farbseite, Wien 2003	25,00

Heft	Publ.Nr.	Fachgebiet	Autor	Titel und Umfang	Preis in Euro
31	412	Geophysik	MEURERS, B., R. PAIL:	<i>Proceedings of the 1st Workshop on International Gravity Field Research, Graz 2003</i> , 204 Seiten, 3 Farbseiten, Wien 2004	25,00
32	413	Meteorologie	BAUMANN-STANZER, K.:	<i>Qualitätsprüfung, Verifikation und Anwendung von Windprofilerdaten in Österreich</i> , 133 Seiten, 29 Farbseiten, Wien 2004	25,00
33	414	Meteorologie	SPAN, N., A. FISCHER, M. KUHN, M. MASSIMO, M. BUTSCHEK:	<i>Radarmessungen der Eisdicke österreichischer Gletscher, Band I: Messungen 1995 bis 1998</i> , 154 Seiten, Wien 2005	25,00
34	415	Meteorologie	DOBESCH, H., D. NIKOLOV, L. MAKONEN:	<i>Physical Processes, Modelling and Measuring of Icing Effects in Europe</i> , 75 Seiten, 18 Farbseiten, Wien 2005	25,00
35	416	Meteorologie	KAISER, A., E. PETZ, I. CUHALEV:	<i>Ermittlung der Gesamtbelastung durch Luftschadstoffe im Kurzzeitmittel anhand von Zeitreihen der Vor- und Zusatzbelastung; Vergleich mit statistischen Methoden Das zur Berechnung von Zeitreihen der Zusatzbelastung adaptierte ÖNORM M 9440 Modell ONGAUSSplus</i> ; 61 Seiten, 6 Farbseiten, Wien 2005	25,00
36	417	Meteorologie	SVABIK, O., A. HOLZER:	<i>Kleinräumige, konvektiv verursachte Stürme und Wirbelstürme (Tornados) in Österreich</i> , 97 Seiten, 14 Farbseiten, Wien 2005	25,00
37	418	Meteorologie	WANG Y., T. HAIDEN, A. KANN:	<i>The operational Limited Area Modelling system at ZAMG: ALADIN-AUSTRIA</i> , 39 Seiten, 9 Farbseiten, Wien 2006	25,00
38	419	Meteorologie	DOBESCH H., G. KURY:	<i>Basic meteorological concepts and recommendations for the exploitation of wind energy in the atmospheric boundary layer</i> , 128 Seiten, Wien 2006	25,00
39	420	Meteorologie	FISCHER, A., N. SPAN, M. KUHN, M. BUTSCHEK:	<i>Radarmessungen der Eisdicke österreichischer Gletscher, Band II: Messungen 1999 bis 2006</i> , 151 Seiten, Wien 2007	25,00
40	421	Meteorologie	Eduard Brückner	<i>Die Geschichte unseres Klimas: Klimaschwankungen und Klimafolgen.</i> Herausgegeben und eingeleitet von N. STEHR und H. VON STORCH, 277 Seiten, Wien 2008	25,00
41	422	Meteorologie	HUBER-POCK, F.:	<i>Numerische Methoden in der Wettervorhersage, Eine Übersicht über Methoden und Probleme, Teil I: Grundlagen, Atmosphärische Wellen, Die Gitterpunkt-methode</i> , 203 Seiten, Wien 2008	25,00

