Allgemeine Ableitung der krystallometrischen Grundgleichungen.

Vom Schulrathe **Dr. J. H. T. Müller** zu Wiesbaden.

Bei krystallometrischen Untersuchungen erscheint es vortheilhaft, von derjenigen Form auszugehen, welche die Grundformen sämmtlicher Krystallsysteme in sich begreift, weil alsdann aus einem, wenn auch etwas verwickelteren Gesetze sich die für alle übrigen untergeordneten Fälle leicht ableiten lassen, und weil man zugleich den inneren Zusammenhang des Ganzen desto leichter und vollständiger übersieht. Diese Erwägung hat mich veranlasst, das sechseckige Achtflach, worin je zwei Gegenflächen einander parallel sind, in Beziehung auf Krystallometrie näher zu betrachten.

Setzt man bei diesem Körper voraus, dass dessen drei Eckenaxen, sowie die Winkel, unter denen diese einander in ihrem gemeinschaftlichen Halbirungspunkte schneiden, beliebig gross und von einander unabhängig sind, so entspricht derselbe in der That jenen Anforderungen völliger Allgemeinheit, indem er selbst die sechsseitige Doppelpyramide involvirt, deren sechs Randecken für irgend eine Flächenaxe jenes Achtflaches in die Halbirungspunkte der sechs zugehörigen Zwischenkanten fallen. — Der Kürze halber werde ich hier dieses allgemeine sechseckige und achtflächige Parallelepipedon ein Oktaeder nennen, also diesen Namen in einer weiteren Bedeutung gebrauchen, als in der Krystallographie gewöhnlich geschieht. Ausserdem nöthiget die nachfolgende Entwickelung, die Kanten von den daranliegenden Flächenwinkeln oder Keilen zu unterscheiden.

Seien in Fig. (1) $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''; \mathfrak{b}', \mathfrak{b}''; \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ die Scheitel der drei Paare von vierflächigen Gegenecken unsers Oktaeders, so sind $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}''$ dessen Eckenaxen, die in ihrem Durchschnittspunkte $\mathfrak{o}$ halbirt werden und die wir mit $2a$, $2b$, $2c$ bezeichnen wollen. Die paarweise einander parallelen und congruenten dreieckigen Oktaederflächen

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}' & , & \mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'' & , & \mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}''\mathfrak{c}' & , & \mathfrak{a}''\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}' \\ \mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\mathfrak{c}'' & , & \mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\mathfrak{c}' & , & \mathfrak{a}''\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'' & , & \mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}''\mathfrak{c}'' \end{matrix}$$

sollen mit

$$D \quad , \quad C \quad , \quad B \quad , \quad A$$

und die paarweise einander parallelen und gleichen Oktaederkanten, so wie die daran liegenden Oktaederkeile

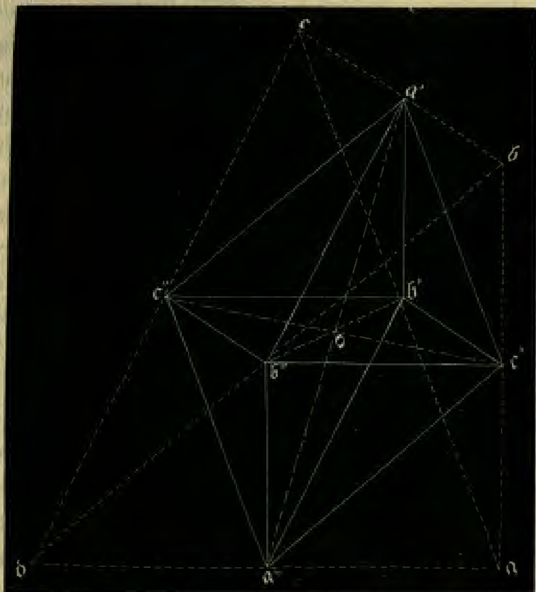
$$b'c' \;,\; c'a' \;,\; a'b' \;;\; b'c'' \;,\; c'a'' \;,\; a'b''$$
$$b''c'' \;,\; c''a'' \;,\; a''b'' \;;\; b''c' \;,\; c''a' \;,\; a''b'$$

mit

$$a_1 \;,\; b_1 \;,\; c_1 \;;\; a_2 \;,\; b_2 \;,\; c_2$$

bezeichnet werden.

Fig. 1.



Es ist jetzt für die Krystallographie die Aufgabe:

Aus den sechs gemessenen Oktaederkeilen sowohl das Verhältniss der drei Halbaxen $a, b, c,$ als auch die Grösse der drei Axenwinkel $\hat{bc}, \hat{ca}, \hat{ab}$ zu berechnen,

welche, so viel mir bekannt, bisher noch nicht in dieser Allgemeinheit behandelt worden ist.

Die directe Auflösung derselben führt auf ziemlich weitläufige Rechnungen. Diese werden vermieden, wenn wir, in umgekehrter Weise, wie man sonst in der Krystallkunde verfährt, unser Holoeder auf sein Hemieder zurückführen. Wir erweitern also die abwechselnden Oktaederflächen bis zu deren gegenseitiger Abgrenzung, wodurch ein Tetraeder (dieses Wort ebenfalls im weiteren Sinne genommen) entsteht.

Seien $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$; $\mathfrak{a}''\mathfrak{b}'\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\mathfrak{c}'$ die zu erweiternden Oktaederflächen und begrenzen diese das Tetraeder $\mathfrak{abcd}$, so dass dessen Kanten

$$\mathfrak{bc}, \mathfrak{ca}, \mathfrak{ab}; \mathfrak{da}, \mathfrak{db}, \mathfrak{dc} = a_1', b_1', c_1'; a_2', b_2', c_2'$$

durch

$$\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'; \mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}''$$

gehen.

Werden noch die den Scheiteln

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$$

gegenüber liegenden Tetraederflächen mit

$$A', B', C', D'$$

bezeichnet, so ergeben sich sogleich die Beziehungen:

$$a'_1, b'_1, c'_1; a'_2, b'_2, c'_2 = 2a_1, 2b_1, 2c_1; 2a_2, 2b_2, 2c_2, \tag{1}$$

$$A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 \quad = \quad 4A, 4B, 4C, 4D. \tag{2}$$

Denkt man sich ferner z. B. durch die Axen $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}''$ die Diagonalfläche $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}'' = P_a$ gelegt, so ist wegen der Parallelität der Kanten $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$ in dem zugehörigen dreiseitigen prismatischen Raume die Summe der drei Keile, welche die Flächen $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$ mit einander bilden, $= 180^0$. Da aber, weil die Gegenflächen des Oktaeders parallel sind, der Keil $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}''$, $P_a =$ dem Keile $\mathfrak{a}''\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, P_a ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}', P_a + \mathfrak{a}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}'', P_a = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}', P_a + \mathfrak{a}''\mathfrak{b}'\mathfrak{c}', P_a = \text{dem Oktaederkeile } \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' = a_1.$$

und eben so für alle übrigen. Dies gibt die dritte und zwar die Hauptbeziehung zwischen dem Tetraeder und Oktaeder, nämlich

$$\begin{aligned} a'_1 + a_1 &= b'_1 + b_1 = c'_1 + c_1 = \\ &= a'_2 + a_2 = b'_2 + b_2 = c'_2 + c_2 = 180^\circ, \end{aligned} \tag{3}$$

wornach je ein Tetraeder- und Oktaederkeil, deren Kanten parallel sind, einander zu 180^0 ergänzen.

Hierbei ist nicht zu übersehen, dass, wenn wir das Oktaeder auf eine seiner Flächen, z. B. auf D, stellen, den zugehörigen Grundkeilen a_1, b_1, c_1 im Tetraeder die der Ecke $\mathfrak{d}$ zugehörigen Keile a'_1, b'_1, c'_1; den Zwischenkeilen a_2, b_2, c_2 des Oktaeders aber die der Tetraederfläche D' anliegenden Keile a'_2, b'_2, c'_2 entsprechen.

Sonach reducirt sich die Untersuchung unseres Oktaeders auf die seiner Hemiedrie, so dass wir jetzt aus den Keilen des Tetraeders das Verhältniss und die gegenseitige Lage von dessen drei Kantenaxen zu bestimmen haben.

Zunächst ergibt sich hieraus, dass die sechs Oktaederkeile von einander abhängig sind, weil die nämliche Eigenschaft auch jedem Tetraeder zukommt. Wir erhalten demnach, wenn die bekannte Carnot'sche Tetraederformel auf das Oktaeder übertragen wird, die quadratische Bedingungsgleichung für die sechs Oktaederkeile:

$$\begin{aligned}
&\cos a_1^2+\cos b_1^2+\cos c_1^2+\cos a_2^2+\cos b_2^2+\cos c_2^2\\
&+2\cos a_1\cos a_2\cos b_1\cos b_2+2\cos a_1\cos a_2\cos c_1\cos c_2\\
&\qquad+2\cos b_1\cos b_2\cos c_1\cos c_2\\
(4)\quad&=1+2\cos a_2\cos b_1\cos c_1+2\cos a_1\cos b_2\cos c_1\\
&\qquad+2\cos a_1\cos b_1\cos c_2+2\cos a_2\cos b_2\cos c_2\\
&\qquad+\cos a_1^2\cos a_2^2+\cos b_1^2\cos b_2^2+\cos c_1^2\cos c_2^2,
\end{aligned}$$

worin

$a_2\, b_1\, c_1$, $a_1\, b_2\, c_1$, $a_1\, b_1\, c_2$, $a_2\, b_2\, c_2$ Zwischenkeile,

$a_1\, a_2\, b_1\, b_2$, $a_1\, a_2\, c_1\, c_2$, $b_1\, b_2\, c_1\, c_2$ Eckenkeile,

und $a_1\, a_2$, $b_1\, b_2$, $c_1\, c_2$ Gegenkeile in den Ecken

des Oktaeders sind. — Diese Gleichung kann zur Prüfung der Schärfe der Messungen angewendet werden.

Aus der Goniometrie ist bekannt, dass für drei ganz beliebige Winkel φ, χ, ψ sets

$$\begin{aligned}
&1-\cos\varphi^2-\cos\chi^2-\cos\psi^2+2\cos\varphi\cos\chi\cos\psi\\
&=+4\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\chi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(-\varphi+\chi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\chi+\psi)\\
&\qquad\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\chi-\psi);
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&1-\cos\varphi^2-\cos\chi^2-\cos\psi^2-2\cos\varphi\cos\chi\cos\psi\\
&=-4\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\chi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(-\varphi+\chi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\chi+\psi)\\
&\qquad\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\chi-\psi)
\end{aligned}$$

ist, und dass diese logarithmischen Werthe beziehungsweise mit $4L^2$ und mit $4\Lambda^2$ bezeichnet werden.

Tragen wir diese Ausdrücke auf unser Tetraeder über, so liegen an dessen Ecken

$$\mathfrak{a} \quad ; \quad \mathfrak{b} \quad ; \quad \mathfrak{c} \quad ; \quad \mathfrak{d}$$

die Keile

$$a'_2, b'_1, c'_1 \; ; \; a'_1, b'_2, c'_1 \; ; \; a'_1, b'_1, c'_2 \; ; \; a'_2, b'_2, c'_2 \,,$$

deren Λ-Functionen demnach mit

$$\Lambda'_\mathfrak{a} \quad ; \quad \Lambda'_\mathfrak{b} \quad ; \quad \Lambda'_\mathfrak{c} \quad ; \quad \Lambda'_\mathfrak{d}$$

zu bezeichnen sein werden.

Nun ist aus der Tetraedrometrie bekannt, dass in jedwedem Tetraeder der Quotient jeder Tetraederfläche durch die Λ-Function ihrer Gegenecke constant, d. h. dass

$$\frac{A'}{\Lambda'_\mathfrak{a}} = \frac{B'}{\Lambda'_\mathfrak{b}} = \frac{C'}{\Lambda'_\mathfrak{c}} = \frac{D'}{\Lambda'_\mathfrak{d}} = K' \tag{5}$$

ist.

Da aber z. B. $a_2 = 180^\circ - a'_2$; $b_2 = 180^\circ - b'_2$; $c_2 = 180^\circ - c'_2$ gefunden war, so geht

$$1 - \cos a'^2_2 - \cos b'^2_2 - \cos c'^2_2 - 2\cos a'_2 \cos b'_2 \cos c'_2$$

in

$$1 - \cos a^2_2 - \cos b^2_2 - \cos c^2_2 + 2\cos a_2 \cos b_2 \cos c_2$$

also überhaupt jede Λ-Function des Tetraeders in die entsprechende L-Function des Oktaeders über, und da zugleich die Tetraederflächen sich wie die entsprechenden Oktaederflächen verhalten, so ist im Oktaeder

$$\frac{A}{L_\mathfrak{a}} = \frac{B}{L_\mathfrak{b}} = \frac{C}{L_\mathfrak{c}} = \frac{D}{L_\mathfrak{d}} = K, \tag{6}$$

d. i. der Quotient jeder Oktaederfläche durch die L-Function der ihr zugehörigen Zwischenkeile ebenfalls constant. Diese Eigenschaft setzt uns in den Stand, aus den Keilen und Flächen des Tetraeders, und somit auch des Oktaeders, die Kanten zu bestimmen.

Es ist nämlich z. B.

$$b'_2 c'_2 \sin \mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c} = 2A'$$
$$c'_2 a'_2 \sin \mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a} = 2B$$
$$a'_2 b'_2 \sin \mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{b} = 2C'$$

woraus sich mit Leichtigkeit z. B.

$$a'^2_2 = \frac{2B'C'}{A'} \cdot \frac{\sin \mathfrak{cba} \,.\, \sin \mathfrak{abb}}{\sin \mathfrak{bbc}}$$

ergibt. Nun weiss man aus der sphärischen Trigonometrie, dass $\sin \mathfrak{bbc} = \frac{2\Lambda'_\mathfrak{b}}{\sin b'_1 \,.\, \sin c'_1}$; $\sin \mathfrak{cba} = \frac{2\Lambda'_\mathfrak{b}}{\sin c'_1 \,.\, \sin a'_1}$; ... ist. Man erhält also durch Einsetzung dieser Werthe in die vorige Gleichung

$$\text{(7)} \qquad a'^2_2 = \frac{B'C' \,.\, \sin a'^2_2}{A' \,.\, \Lambda'_\mathfrak{b}} \quad ; \quad a'^2_1 = \frac{A'D' \,.\, \sin a'^2_1}{C' \,.\, \Lambda'_\mathfrak{b}};$$

und nach Substitution der sich aus (5) ergebenden Flächenbeziehungen, welchen zufolge

$$A' = K' \,.\, \Lambda'_\mathfrak{a} \;;\; B' = K' \,.\, \Lambda'_\mathfrak{b} \;;\; C' = K' \,.\, \Lambda'_\mathfrak{c} \;;\; D' = K' \,.\, \Lambda'_\mathfrak{b} \text{ ist,}$$

$$\text{(8)} \qquad a'^2_2 = \frac{\Lambda'_\mathfrak{b}\,\Lambda'_\mathfrak{c}}{\Lambda'_\mathfrak{a}\,\Lambda'_\mathfrak{b}} \cdot \sin a'^2_2 \,.\, K \quad ; \quad a'^2_1 = \frac{\Lambda'_\mathfrak{a}\,\Lambda'_\mathfrak{b}}{\Lambda'_\mathfrak{b}\,\Lambda'_\mathfrak{c}} \cdot \sin a'^2_1 \,.\, K';$$

Weil aber $a_1' = 2a_1, \ldots; D' = 4D \ldots; \Lambda'_\mathfrak{a} = L_\mathfrak{a} \ldots,$ so erhält man hieraus augenblicklich für das Oktaeder:

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} a^2_2 &= \frac{L_\mathfrak{b}\,L_\mathfrak{c}}{L_\mathfrak{a}\,L_\mathfrak{b}} \sin a^2_2 \,.\, K \quad ; \quad a^2_1 = \frac{L_\mathfrak{a}\,L_\mathfrak{b}}{L_\mathfrak{b}\,L_\mathfrak{c}} \sin a^2_2 \,.\, K; \\ b^2_2 &= \frac{L_\mathfrak{a}\,L_\mathfrak{c}}{L_\mathfrak{b}\,L_\mathfrak{b}} \sin b^2_2 \,.\, K \quad ; \quad b^2_1 = \frac{L_\mathfrak{b}\,L_\mathfrak{b}}{L_\mathfrak{a}\,L_\mathfrak{c}} \sin b^2_1 \,.\, K; \\ c^2_2 &= \frac{L_\mathfrak{a}\,L_\mathfrak{b}}{L_\mathfrak{c}\,L_\mathfrak{b}} \sin c^2_2 \,.\, K \quad ; \quad c^2_1 = \frac{L_\mathfrak{c}\,L_\mathfrak{b}}{L_\mathfrak{a}\,L_\mathfrak{b}} \sin c^2_1 \,.\, K. \end{aligned}$$

Um daher das Quadrat einer Oktaederkante zu finden, hat man nur von den dieser Kante anliegenden Flächen, so wie von den ihr nicht anliegenden Flächen die Zwischenkeile zu nehmen, das Product der L-Functionen der beiden ersteren durch das der beiden letzteren zu dividiren, und den Quotienten mit dem Quadrate vom Sinus des der fraglichen Kante zugehörigen Oktaederkeils der Oktaederconstante zu multipliciren.

In jenen Formeln ist demnach

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} L_\mathfrak{a} &= \sqrt{\sin \tfrac{1}{2}(a_2 + b_1 + c_1) \sin \tfrac{1}{2}(-a_2 + b_1 + c_2) \sin \tfrac{1}{2}(a_2 - b_1 + c_1)} \\ &\quad \overline{\sin \tfrac{1}{2}(a_2 + b_1 - c_1)}; \\ L_\mathfrak{b} &= \sqrt{\sin \tfrac{1}{2}(a_1 + b_2 + c_1) \sin \tfrac{1}{2}(-a_1 + b_2 + c_1) \sin \tfrac{1}{2}(a_1 - b_2 + c_1)} \\ &\quad \overline{\sin \tfrac{1}{2}(a_1 + b_2 - c_1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_c &= \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(a_1+b_1+c_2)\sin\tfrac{1}{2}(-a_1+b_1+c_2)\sin\tfrac{1}{2}(a_1-b_1+c_2)} \\ &\quad \overline{\sin\tfrac{1}{2}(a_1+b_1-c_2)}; \qquad (10) \\ L_b &= \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(a_2+b_2+c_2)\sin\tfrac{1}{2}(-a_2+b_2+c_2)\sin\tfrac{1}{2}(a_2-b_2+c_2)} \\ &\quad \overline{\sin\tfrac{1}{2}(a_2+b_2-c_2)}; \end{aligned}$$

wesshalb dieselbe eine ununterbrochene logarithmische Berechnung der Kanten zulassen, was für die Anwendung von Werth ist.

Auch folgt beiläufig noch aus (9), dass in unserem Oktaeder

$$\frac{a_1\,a_2}{\sin a_1 \sin a_2} = \frac{b_1\,b_2}{\sin b_1 \sin b_2} = \frac{c_1\,c_2}{\sin c_1 \sin c_2} = K \qquad (11)$$

sein muss, welche Beziehung für andere Zwecke als die gegenwärtigen vielfache Brauchbarkeit hat.

Nachdem jetzt die Oktaederkanten durch die Keile bestimmt sind, ist es leicht, hieraus die **Axen** zu finden. In den drei Diagonalparallelogrammen

$$\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}'',\quad \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\mathfrak{c}''\mathfrak{a}'',\quad \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{a}''\mathfrak{b}''$$

nämlich ist nach einem bekannten planimetrischen Satze

$$\begin{aligned} 4b^2 + 4c^2 &= 2a_1^2 + 2a_2^2; \\ 4c^2 + 4a^2 &= 2b_1^2 + 2b_2^2; \\ 4a^2 + 4b^2 &= 2c_1^2 + 2c_2^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben sofort die Werthe der drei **Oktaederaxen** durch dessen **Kanten**, nämlich:

$$\begin{aligned} 4a^2 &= -a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2; \\ 4b^2 &= +a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 + c_2^2; \qquad (12) \\ 4c^2 &= +a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - c_1^2 - c_2^2; \end{aligned}$$

in welche Gleichungen man nur die in (9) enthaltenen Ausdrücke einzusetzen hat, um die **Axen unmittelbar** durch die **Keile** auszudrücken.

Nachdem jetzt ausser den Kanten $a_1, a_2, \ldots$ auch die Axen a, b, c des Oktaeders gefunden sind, lassen sich eben so leicht auch die **Axenwinkel** bestimmen. Legt man hierbei diejenige Ecke in $\mathfrak{o}$ zu Grunde, welche der Fläche D gegenüber liegt, und bezeichnet die Winkel

$$\mathfrak{b}'\mathfrak{o}\mathfrak{c}',\quad \mathfrak{c}'\mathfrak{o}\mathfrak{a}',\quad \mathfrak{a}'\mathfrak{o}\mathfrak{b}'$$

mit

$$\hat{bc},\quad \hat{ca},\quad \hat{ab},$$

so hat man

$$\cos \widehat{bc} = \frac{-a_1^2 + b^2 + c^2}{2bc},$$

und weil nach (12)

$$b^2 + c^2 = \tfrac{1}{2} a_1^2 + \tfrac{1}{2} a_2^2$$

ist,

$$(13) \quad \cos \widehat{bc} = \frac{-a_1^2 + a_2^2}{4bc}; \cos \widehat{ca} = \frac{-b_1^2 + b_2^2}{4ac}; \cos \widehat{ab} = \frac{-c_1^2 + c_2^2}{4ab}.$$

Würde, jedoch ohne Vortheil für die Rechnung, ein von den Axen gänzlich freier Ausdruck für die Axenwinkel verlangt, so wäre noch $1 - \cos \widehat{bc}^2 = \sin \widehat{bc}^2$ zu berechnen, und $\frac{\cos bc^2}{\sin bc^2} = \tang \widehat{bc}^2$ zu suchen. Dann erhielte man nach gehöriger Vereinfachung und Umformung

$$(14) \quad \begin{aligned} \tang \widehat{bc} &= \frac{\sqrt{(2a_1 a_2 + b_1^2 + b_2^2 - c_1^2 - c_2^2)(2a_1 a_2 - b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 + c_2^2)}}{-a_1^2 + a_2^2}; \\ \tang \widehat{ca} &= \frac{\sqrt{(2b_1 b_2 + c_1^2 + c_2^2 - a_1^2 - a_2^2)(2b_1 b_2 - c_1^2 - c_2^2 + a_1^2 + a_2^2)}}{-b_1^2 + b_2^2}; \\ \tang \widehat{ab} &= \frac{\sqrt{(2c_1 c_2 + a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2)(2c_1 c_2 - a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)}}{-c_1^2 + c_2^2}; \end{aligned}$$

Sonach sind aus den sechs Oktaederkeilen sowohl die Axenverhältnisse, als die Axenwinkel, und zwar ohne Hülfe von Coordinaten, auf völlig elementarem Wege durch Rechnung abgeleitet worden, wobei es sich von selbst versteht, dass, weil es in der Krystallographie blos auf die Gestalt ankommt, die Oktaederconstante = 1 zu setzen ist.

Es werden nun noch die obigen allgemeinen Formeln auf die verschiedenen Krystallsysteme anzuwenden sein.

Werden alle Oktaederkeile einander gleich,

$$a_1 = a_2 = b_1 = .. = m,$$

so erhält man aus der Bedingungsgleichung (4)

$$1 - 6 \cos m^2 + 8 \cos m^3 - 3 \cos m^4 = 0.$$

Hier lässt sich die linke Seite in Factoren zerlegen, indem

$$1 - 6 \cos m^2 + 8 \cos m^3 - 3 \cos m^4 = (1 - \cos m)^3 (1 + 3 \cos m)$$

ist. Die Wurzeln der Gleichung sind demnach

$$\cos m = 1; \cos m = -\tfrac{1}{3}$$

deren erstere auf $m = o$ führt, also hier unbrauchbar ist, während die letztere den Cosinus des Keils vom regulären Oktaeder gibt.

Findet sich erstens

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_2 \;;\; \hat{b}_1 = \hat{b}_2 \;;\; \hat{c}_1 = \hat{c}_2,$$

so wird

$$L_a = L_b = L_c = L_b,$$

folglich auch

$$a_1 = a_2 \;;\; b_1 = b_2 \;;\; c_1 = c_2,$$

wegen (9), und wegen (13)

$$\cos \widehat{bc} = \cos \widehat{ca} = \cos \widehat{ab} = 0,$$

also

$$\widehat{bc} = \widehat{ca} = \widehat{ab} = 90^\circ.$$

Sind je zwei Oktaederkeile, deren Kanten in einer und derselben Diagonalfläche liegen, einander gleich, so sind die Axen des Oktaeders aklinisch, indem sie auf einander senkrecht stehen, und die Diagonalflächen sind gleichseitige Parallelogramme.

Ist ausserdem

$$1)\;\; \hat{a}_1 = \hat{b}_1 = \hat{c}_1,$$
$$2)\;\; \hat{a}_1 (=) \hat{b}_1 \;;\; \hat{b}_1 = \hat{c}_1,$$
$$3)\;\; \hat{a}_1 (=) \hat{b}_1 \;;\; \hat{b}_1 (=) \hat{c}_1 \;;\; \hat{c}_1 (=) \hat{a}_1,$$

so wird auch beziehungsweise

$$a_1 = b_1 = c_1,$$
$$a_1 (=) b_1 \;;\; b_1 = c_1,$$
$$a_1 (=) b_1 \;;\; b_1 (=) c_1 \;;\; c_1 (=) a_1;$$

und daher auch

$$a = b = c;$$
$$a (=) b \;;\; b = c;$$
$$a (=) b \;;\; b (=) c \;;\; c (=) a;$$

wo $m \,(=)\, n$ bedeutet, dass m ungleich n sei.

Wenn zweitens

$$\hat{a}_1 (=) \hat{a}_2 \;;\; \hat{b}_1 = \hat{b}_2 \;;\; \hat{c}_1 = \hat{c}_2$$

gefunden wird, so ergibt sich

$$\cos \widehat{bc} (=) 0 \;;\; \cos \widehat{ca} = \cos \widehat{ab} = 0,$$

also $$\widehat{bc} (=) 90^\circ \;;\; \widehat{ca} = \widehat{ab} \quad 90^\circ,$$

wesshalb dann die Axen **monoklinisch** sind.

Wird **drittens**

$$\hat{a}_1 (=) \hat{a}_2 \;;\; \hat{b}_1 (=) \hat{b}_2 \;;\; \hat{c}_1 = \hat{c}_2$$

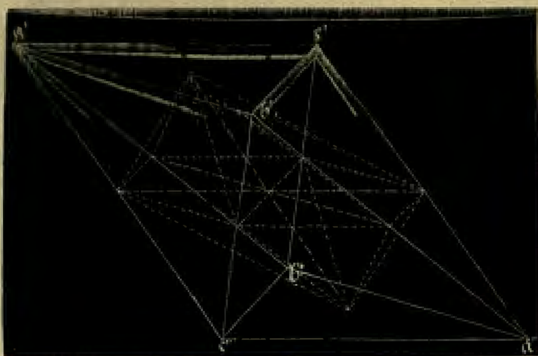
gefunden, so zeigt sich, dass

$$\widehat{bc}(=)90^\circ \;;\; \widehat{ac}(=)90^\circ \;;\; \widehat{ab} = 90^\circ,$$

dass also die Axen **diklinisch** sind.

Die Ungleichheit **viertens** aller **drei** Paare von Keilen gibt das **triklinische** Axensystem, womit dann die Grundformen aller Krystallsysteme erschöpft sind.

Fig. 2.



Schliesslich soll hier noch die **sechsseitige Doppelpyramide** aus dem Oktaeder abgeleitet werden. Durch ein Oktaeder mit beliebig grossen und beliebig geneigten Axen sind vier verschiedene solche Doppelpyramiden bestimmt, welche ihre Spitzen in den Schwerpunkten zweier Gegenflächen und ihre Randecken in den Halbirungspunkten der zugehörigen sechs Zwischenkanten haben. Wir wollen diese Pyramiden, je nachdem sie zu den Oktaederflächen

	$D,\ C,\ B,\ A$
gehören, mit	$\mathfrak{D},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{A}$
und die Sechsecke mit	$S_d,\ S_c,\ S_b,\ S_a$

bezeichnen.

Dann sind z. B. in Fig. (2) in $\mathfrak{D}$ die drei Nebenaxen parallel und gleich den Kanten a_1, b_1, c_1 des Dreiecks D, wesshalb sie einander unter denselben Winkeln halbiren, welche die Seiten a_1, b_1, c_1

mit einander bilden, und in einem mit den Oktaederflächen D parallelen Sechsecke, hier S_b, liegen.

Die Hauptaxe von $\mathfrak{D}$ fällt, wie man sich augenblicklich überzeugt, längs der Verbindungslinie des Scheitels $\mathfrak{b}$ mit der Fläche D' in dem zum Oktaeder gehörigen Tetraeder. Sie ist daher halb so gross als diese Tetraederschwerlinie und hat gegen das Sechseck S_b dieselbe Neigung, als diese Schwerlinie gegen die Tetraederfläche D', so dass sich die Hauptaxe von $\mathfrak{D}$ wie deren Neigung gegen S_b aus den entsprechenden Eigenschaften des Tetraeders vollständig bestimmen, und zuletzt durch die Oktaederkanten oder Oktaederkeile ausdrücken liesse.

Da aber in der Krystallkunde nur solche sechsseitige Doppelpyramiden in Betracht kommen, deren Hauptaxe auf den drei Nebenaxen senkrecht steht, und worin zugleich die Nebenaxen unter einander gleiche Grösse und Neigung haben: so bedarf es hier nicht jener allgemeinen Untersuchung, indem wir blos zu ermitteln haben, aus welchen Oktaedern sich diese besonderen Doppelpyramiden hervorbringen lassen.

Weil die Nebenaxen einander gleich sein sollen, so müssen den obigen allgemeinen Erörterungen zufolge die Seiten des Dreiecks D einander gleich sein, woraus dann von selbst folgt, dass die drei Axen auch gleiche Winkel mit einander bilden. Damit ferner die Hauptaxe von $\mathfrak{D}$ auf S_b senkrecht stehe, so muss auch die mit ihr zusammenfallende Tetraederschwerlinie auf der Tetraederfläche D' senkrecht stehen. Nun ist D' ein gleichseitiges Dreieck, weil D ein solches war. Es steht daher der Schwerpunkt von D' von dessen drei Ecken gleich weit ab. Demnach müssen auch die der Ecke $\mathfrak{b}$ anliegenden Tetraederkanten a'_2, b'_2, c'_2 einander gleich sein. Tragen wir diese Bedingungen auf das Oktaeder über, so ergibt sich für unser $\mathfrak{D}$, dass von dessen Kanten $a_1 = b_1 = c_1 = m_1$, so wie $a_2 = b_2 = c_2 = m_2$ sein muss. Ausserdem sind in dem zugehörigen Tetraeder sowohl die der Fläche D', als auch die der Gegenecke $\mathfrak{b}$ anliegenden Keile einander gleich, wesshalb auch im Oktaeder

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_1 = \hat{c}_1 = \hat{m}_1;$$
$$\hat{a}_2 = \hat{b}_2 = \hat{c}_2 = \hat{m}_2$$

und demnach auch

$$L_a = L_b = L_c$$

ist, während L einen hiervon verschiedenen Werth haben kann, weil letztere Function blos von m_2 abhängt. Hieraus geht hervor,

dass eine sechsseitige Doppelpyramide mit drei gleichen und gleich geneigten Nebenaxen und mit senkrechter Hauptaxe sich immer aus einem Oktaeder hervorbringen lässt, worin die einem Flächenpaare anliegenden, so wie die zugehörigen Zwischenkeile jede für sich einander gleich sind.

Die Hauptaxe der Doppelpyramide ist gleich der halben zugehörigen Schwerlinie des Tetraeders, also $= \sqrt{(m_2^2 - \frac{1}{3} m_1^2)}$, während jede Nebenaxe $= m_1$ ist, welche beiden Werthe sich endlich nach (9) durch die Oktraederkeile ausdrücken lassen. Hiermit ist daher auch das Axenverhältniss unserer Pyramide aus den Oktaederkeilen bestimmt.

Bezeichnet φ den Keil, welchen eine Seitenfläche unserer Doppelpyramide mit dem Sechseck S_6 macht, so ist, wie man durch eine leichte Rechnung findet,

$$\cos\varphi^2 = \frac{9m_1^2}{5m_1^2 + 12m_2^2};$$

$$\sin\varphi^2 = \frac{-4m_1^2 + 12m_2^2}{5m_1^2 + 12m_2^2};$$

$$\operatorname{tang}\varphi^2 = \frac{-4m_1^2 + 12m_2^2}{9m_1^2}$$

und weil $\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2 = \cos 2\varphi$, so wird

$$\cos 2\varphi = \frac{13m_1^2 - 12m_2^2}{5m_1^2 + 12m_2^2}$$

wodurch der an einer Randkante der Doppelpyramide liegende Keil bestimmt ist, dessen Cosinus im regulären Oktaeder $= \frac{1}{17}$ wird.

Ist endlich χ der an einer Seitenkante liegende Keil der Doppelpyramide, so wird wegen $\cos\chi = \cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 . \cos 120^\circ$, nach Einsetzung der so eben angegebenen Werthe

$$\cos\chi = -\frac{7m_1^2 + 6m_2^2}{5m_1^2 + 12m_2^2}$$

womit sonach auch der Seitenkeil der Pyramide gefunden ist.