

KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN.

---

MITTEILUNGEN  
DER  
ERDBEBEN-KOMMISSION

DER KAISERLICHEN  
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN.

NEUE FOLGE.

N<sup>o</sup>. XLVI.

ÜBER DIE BESTIMMUNG VON AZIMUT UND SCHEINBAREM  
EMERGENZWINKEL LONGITUDINALER ERDBEBENWELLEN.

VON  
H. BENNDORF.

-----  
MIT 1 TEXTFIGUR.  
-----

WIEN, 1913.  
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

-----  
IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,  
K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,  
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die »Mitteilungen der Erdbeben-Kommission« erschienen bisher in den Sitzungsberichten der mathem.-naturw. Klasse, Abteilung I. Von nun an werden sie als besondere Ausgabe veröffentlicht werden.

Bisher sind folgende Nummern der »Mitteilungen« ausgegeben worden :

- I. Bericht über die Organisation der Erdbeben-Beobachtung nebst Mitteilungen über während des Jahres 1896 erfolgte Erdbeben, zusammengestellt von Edmund v. Mojsisovics (Sitz. Ber., Bd. 106 [1897], Abt. I, Heft II) . . . . . — K 60 h.
- II. Bericht über das Erdbeben von Brük am 3. November 1896, von Friedrich Becke (Sitz. Ber., Bd. 106 [1897], Abt. I, Heft II) . . . . . — K 50 h.
- III. Bericht über das Erdbeben vom 5. Jänner 1897 im südlichen Böhmerwalde, von Friedrich Becke (Sitz. Ber., Bd. 106 [1897], Abt. I, Heft III) . . . . . — K 40 h.
- IV. Bericht über die im Triester Gebiete beobachteten Erdbeben am 15. Juli, 3. August und 21. September 1897, von Eduard Mazelle (Sitz. Ber., Bd. 106 [1897], Abt. I, Heft IX) . . . . . — K 40 h.
- V. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1897 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben, zusammengestellt von Edmund v. Mojsisovics (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft V) . . . . . 3 K 40 h.
- VI. Die Erderschütterungen Laibachs in den Jahren 1851 bis 1886, vorwiegend nach den handschriftlichen Aufzeichnungen K. Deschmanns, von Ferdinand Seidl (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft VI) . . . . . — K 50 h.
- VII. Verhalten der Karlsbader Thermen während des voigtländisch-westböhmisches Erdbebens im Oktober—November 1897, von Josef Knett (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft VI) . . . . . 2 K 60 h.
- VIII. Bericht über das Graslitzer Erdbeben vom 24. Oktober bis 25. November 1897, von Friedrich Becke (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft VII) . . . . . 5 K 40 h.
- IX. Bericht über die unterirdische Detonation von Melnik in Böhmen vom 8. April 1898, von Johann N. Woldfich (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft X) . . . . . — K 90 h.
- X. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1898 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben, zusammengestellt von Edmund v. Mojsisovics (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft. IV) . . . . . 3 K 20 h.
- XI. Die Einrichtung der seismischen Station in Triest und die vom Horizontalpendel aufgezeichneten Erdbebenstörungen von Ende August 1898 bis Ende Februar 1899, von Eduard Mazelle (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft V) . . . . . 1 K — h.
- XII. Übersicht der Laibacher Osterbebenperiode für die Zeit vom 16. April 1895 bis Ende Dezember 1898, von Ferdinand Seidl (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft V) . . . . . — K 70 h.
- XIII. Bericht über das obersteierische Beben vom 27. November 1898, von Rudolf Hoernes (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft V) . . . . . 1 K 10 h.
- XIV. Bericht über die obersteierischen Beben des ersten Halbjahres 1899 (zumal über die Erschütterungen vom 1., 7. und 29. April), von Rudolf Hoernes (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft VIII) . . . . . 2 K 10 h.
- XV. Bericht über Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster, von Franz Schwab (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft II) . . . . . 1 K 10 h.
- XVI. Bericht über das niederösterreichische Beben vom 11. Juni 1899, von F. Noë (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft II) . . . . . — K 60 h.
- XVII. Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebeur-Ehlert'schen Horizontalpendel vom 1. März bis Ende Dezember 1899, von Eduard Mazelle (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft II) . . . . . — K 90 h.

- XVIII. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1899 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben, zusammengestellt von Edmund v. Mojsisovics (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft III) . . . . . 3 K 30 h.
- XIX. Die tägliche periodische Schwankung des Erdbodens nach den Aufzeichnungen eines dreifachen Horizontalpendels zu Triest, von Eduard Mazelle (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft VII) . . . . . 3 K 20 h.
- XX. Über die Beziehungen zwischen Erdbeben und Detonationen, von Josef Knett (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I., Heft IX) . . . . . — K 80 h.
- XXI. Bericht über das Detonationsphänomen im Duppauer Gebirge am 14. August 1899, von Josef Knett (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I., Heft IX) . . . . . 1 K — h.

## Neue Folge.

- I. Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Lemberg, von W. Láska 1 K 90 h.
- II. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1900 im Beobachtungsgebiete eingetretenen Erdbeben, von Edmund v. Mojsisovics . . . . . 2 K 30 h.
- III. Bericht über die seismischen Ereignisse des Jahres 1900 in den deutschen Gebieten Böhmens, von V. Uhlig . . . . . 3 K — h.
- IV. Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1900, von P. Franz Schwab . . . . . — K 60 h.
- V. Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebur-Ehlert'schen Horizontalpendel im Jahre 1900, von Eduard Mazelle . . . . . 1 K — h.
- VI. Das nordostböhmische Erdbeben vom 10. Jänner 1901, von J. N. Wolfřich 1 K 60 h.
- VII. Erdbeben und Stoßlinien Steiermarks, von R. Hoernes . . . . . 2 K 10 h.
- VIII. Die Erdbeben Polens. Des historischen Teiles I. Abteilung, von W. Láska — K 80 h.
- IX. Bericht über die Erdbeben-Beobachtungen in Lemberg während des Jahres 1901, von Prof. Dr. W. Láska . . . . . 1 K 10 h.
- X. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1901 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben von Edmund v. Mojsisovics 3 K 30 h.
- XI. Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebur-Ehlert'schen Horizontalpendel im Jahre 1901, nebst einem Anhang über die Aufstellung des Vicentini'schen Mikroseismographen, von Eduard Mazelle . . . . . 1 K 20 h.
- XII. Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1901, von Prof. P. Franz Schwab . . . . . — K 40 h.
- XIII. Das Erdbeben von Saloniki am 5. Juli 1902 und der Zusammenhang der makedonischen Beben mit den tektonischen Vorgängen in der Rhodopemasse, von R. Hoernes . . . . . 2 K — h.
- XIV. Über die Berechnung der Fernbeben, von Prof. Dr. W. Láska . . . . . — K 30 h.
- XV. Die mikroseismische Pendelunruhe und ihr Zusammenhang mit Wind und Luftdruck, von Eduard Mazelle . . . . . 2 K 60 h.
- XVI. Vorläufiger Bericht über das erzgebirgische Schwarmbeben vom 13. Februar bis 25. März 1903, mit einem Anhang über die Nacherschütterungen bis Anfang Mai, von J. Knett . . . . . — K 80 h.
- XVII. Das Erdbeben von Sinj am 2. Juli 1898, von Adolf Faidiga . . . . . 2 K 90 h.
- XVIII. Das Erdbeben am Böhmischem Pfahl am 26. November 1902, von J. Knett — K 80 h.
- XIX. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1902 im Beobachtungsgebiete eingetretenen Erdbeben, von Edmund v. Mojsisovics. (Mit einem Anhang: Bericht über die Aufstellung zweier Seismographen in Přibram, von Dr. Hans Benndorf) . . . . . 2 K 60 h.
- XX. Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebur-Ehlert'schen Horizontalpendel im Jahre 1902, von Eduard Mazelle . . . . . 1 K 40 h.
- XXI. Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1902, von Prof. P. Franz Schwab . . . . . — K 50 h.

- XXII. Bericht über die seismologischen Aufzeichnungen des Jahres 1902 in Lemberg, von Prof. Dr. W. Láska . . . . . — K 70 h.
- XXIII. Über die Verwendung der Erdbebenbeobachtungen zur Erforschung des Erdinnern, von Prof. Dr. W. Láska . . . . . — K 40 h.
- XXIV. Berichte über das makedonische Erdbeben vom 4. April 1904, von Prof. R. Hoernes . . . . . 1 K — h.
- XXV. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1903 im Beobachtungsgebiete eingetretenen Erdbeben, von Edmund v. Mojsisovics . . . . . 3 K 40 h.
- XXVI. Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1903, von Prof. P. Franz Schwab . . . . . — K 40 h.
- XXVII. Bericht über das Erdbeben in Untersteiermark und Krain am 31. März 1904, von Prof. Dr. R. Hoernes und Prof. F. Seidl . . . . . 1 K — h.
- XXVIII. Jahresbericht des Geodynamischen Observatoriums zu Lemberg für das Jahr 1903, nebst Nachträgen zum Katalog der polnischen Erdbeben, von Prof. Dr. W. Láska . . . . . — K 60 h.
- XXIX. Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinneren (I. Mitteilung), von Dr. Hans Benndorf . . . . . — K 60 h.
- XXX. Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebeur-Ehler'schen Horizontalpendel im Jahre 1903, nebst einer Übersicht der bisherigen fünfjährigen Beobachtungsreihe, von Eduard Mazelle . . . . . — K 90 h.
- XXXI. Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinneren (II. Mitteilung), von Dr. Hans Benndorf . . . . . 1 K 50 h.
- XXXII. Über das Mürztaler Erdbeben vom 1. Mai 1885, von Dr. Franz Heritsch . . . . . 2 K 40 h.
- XXXIII. Beschreibung des seismischen Observatoriums der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien, von Dr. Viktor Conrad 1 K — h.
- XXXIV. Bericht über das Erdbeben vom 19. Februar 1908, von Dr. Franz Noë 1 K — h.
- XXXV. Über die pulsatorischen Oszillationen (mikroseismische Unruhe) des Erdbodens im Winter 1907/1908 in Wien, von Dr. Rudolf Schneider . 1 K 50 h.
- XXXVI. Die zeitliche Verteilung der in den österreichischen Alpen- und Karstländern gefühlten Erdbeben in den Jahren 1897 bis 1907, von Dr. Viktor Conrad . . . . . 1 K — h.
- XXXVII. Die Geschwindigkeit der Erdbebenwellen in verschiedenen Tiefen, von Prof. W. Trabert . . . . . — K 30 h.
- XXXVIII. Über seismische Laufzeiten, von Prof. V. Láska . . . . . — K 40 h.
- XXXIX. Seismische Registrierungen in Wien, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, im Jahre 1909 (mit einigen Hilfstabellen zur Analyse von Bebenogrammen), von Dr. V. Conrad . . . . . 1 K 30 h.
- XL. Das Scheibbs'er Erdbeben vom 17. Juli 1876, von A. Kowatsch . 1 K 70 h.
- XLI. Seismische Registrierungen in Wien, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, im Jahre 1910, von Dr. Rudolf Schneider . . 1 K 20 h.
- XLII. Bericht über das Erdbeben in den Alpen vom 13. Juli 1910, von Dr. Josef Schorn . . . . . 2 K — h.
- XLIII. Das mittelsteirische Erdbeben vom 22. Jänner 1912, von Dr. Franz Heritsch . . . . . — K 80 h.
- XLIV. Die zeitliche Verteilung der in den Jahren 1897 bis 1907 in den österreichischen Alpen- und Karstländern gefühlten Erdbeben (ein Beitrag zum Studium der sekundär auslösenden Ursachen der Erdbeben) (II. Mitteilung), von Prof. V. Conrad . . . . . — K 80 h.
- XLV. Seismische Registrierungen in Wien, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, im Jahre 1911, von Dr. Rudolf Schneider . . 1 K 30 h.

# Über die Bestimmung von Azimut und scheinbarem Emergenzwinkel longitudinaler Erdbebenwellen

von

H. Benndorf.

Mitteilung aus dem physikalischen Institut der Universität Graz, Nr. 10.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Jänner 1913.)

## I. Die Untersuchungen Galitzin's.

B. Galitzin hat in einer Arbeit<sup>1</sup> eine Methode angegeben, wie man aus den Aufzeichnungen dreier Seismographen mit galvanischer Registrierung Azimut und scheinbaren Emergenzwinkel von longitudinalen Bebenwellen berechnen kann, auch wenn über die Beschaffenheit der Erdbodenbewegung keine bestimmten Annahmen gemacht werden, d. h. die Bodenverschiebung als Funktion der Zeit betrachtet, unbekannt bleibt.

Die Formeln, zu denen er gelangt, sind sehr einfach und lauten:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_E}{y_N} \frac{\left(\frac{l}{kA_1}\right)_E}{\left(\frac{l}{kA_1}\right)_N}$$

und

$$\operatorname{tg} \bar{e} = \frac{\left(\frac{l}{kA_1}\right)_z y_z}{\sqrt{\left(\frac{l}{kA_1}\right)_N^2 y_N^2 + \left(\frac{l}{kA_1}\right)_E^2 y_E^2}};$$

---

<sup>1</sup> Beobachtungen über die Vertikalkomponente der Bodenbewegung. Bull. Acad. St. Petersburg 1911, p. 983.

dabei bedeutet  $\alpha$  das Azimut von N über E positiv gerechnet,  $\bar{\epsilon}$  den scheinbaren Emergenzwinkel,  $y_N, y_E, y_z$  die Ordinaten der drei Komponenten des Erdbebendiagrammes, und zwar des ersten aufgezeichneten Maximums, und  $l, k, A_1$  Pendelkonstanten, die für die drei Komponenten verschieden sein dürfen.

Diese einfachen Formeln sind jedoch nur unter folgenden Voraussetzungen gültig:

1. Alle drei Seismographen sowie die drei Galvanometer müssen genau auf die Grenze der Aperiodizität gebracht sein.

2. Alle sechs Instrumente (drei Seismographen sowie die drei Galvanometer) müssen gleiche Schwingungsdauer bei ausgeschalteter Dämpfung besitzen.

Da es einerseits von großem theoretischen Interesse ist, ein möglichst reichhaltiges Material von Emergenzwinkelbestimmungen zu erhalten, andererseits nur wenige Stationen in der glücklichen Lage sind, über Galitzin'sche Instrumente zu verfügen, erscheint es nicht ohne Wichtigkeit, zu untersuchen, wie sich die Emergenzwinkelbestimmung bei gewöhnlichen Seismographen ausführen läßt.

Bekanntlich kann man, wenigstens theoretisch, aus den Aufzeichnungen eines Seismographen, wenn die Pendelkonstanten bekannt sind, die Erdbodenverschiebung für beliebige Zeitpunkte berechnen und dadurch auch Azimut und scheinbaren Emergenzwinkel ermitteln; indes ist diese Methode außerordentlich mühsam und zeitraubend, dabei im allgemeinen recht wenig genau.

Ich habe daher im folgenden eine Reihe von Untersuchungen angestellt, die den Zweck haben, Azimut und Emergenzwinkelbestimmungen einfacher zu gestalten und außerdem geeignet sind, gewisse Fragen der Seismometrie zu beantworten.

## II. Über die Anfangsbedingungen in den Pendelgleichungen.

Im folgenden will ich mich im allgemeinen in der Bezeichnungsweise an die Theorie der automatischen Seismographen von Wiechert halten, nur einige Abkürzungen einführen und die Dämpfungskonstanten je nach Bequemlichkeit wählen.

Wir setzen drei Seismographen mit den Arbeitsrichtungen N—S, E—W und in der Vertikalen voraus.

Die Registrierung kann optisch oder mechanisch erfolgen, im letzteren Falle soll aber angenommen werden, daß die Reibung im Ruß und im Gehänge vernachlässigt werden könne. Die auf die einzelnen Pendel bezüglichen Größen sollen, wenn nötig, durch den Index 1, 2, 3 gekennzeichnet werden.

Es bezeichnet daher im folgenden:

$a$  den Ausschlag der Zeigerspitze,

$V$  die Vergrößerung rascher Schwingungen,

$\alpha = \frac{a}{v}$  Ausschlag für die Vergrößerung 1,

$T_0$  die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung,

$T$  die Eigenperiode des Pendels mit Dämpfung,

$n_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  die Eigenfrequenz des Pendels ohne Dämpfung,

$n = \frac{2\pi}{T}$  die Eigenfrequenz des Pendels mit Dämpfung,

$\mathfrak{T}$  die Periode eventueller seismischer Störungen,

$\nu = \frac{2\pi}{\mathfrak{T}}$  die Frequenz derselben,

$\tau$  die Relaxationszeit des Pendels,

$\sigma$  die wirkliche Bodenverschiebung,

$x_1, x_2, x_3$  die Komponenten der Bodenverschiebung positiv nach Norden, Osten und nach dem Zenit gezählt.

$\alpha$  Azimut der Verschiebung (Winkel zwischen Horizontalkomponente und Nordrichtung im Nordostquadranten positiv gerechnet),

$\bar{\epsilon}$  scheinbarer Emergenzwinkel (Winkel, den  $\sigma$  mit der Vertikalen bildet, im N-E-Z-Oktanten positiv gerechnet).

Über die Bezeichnungsweise der Dämpfungskonstanten soll folgende Tabelle I unterrichten, aus der auch die Beziehungen zu den Bezeichnungen von Wiechert und Galitzin entnommen werden können; Tabelle II gibt die zugehörigen Zahlenwerte der Konstanten nach von Galitzin berechneten Tafeln.

Tabelle I.

Dämpfungs konstanten	Ausgedrückt durch					
	$\kappa$	$\Lambda$	$\frac{1}{\tau}$	$\mu$	$h$	$n_0, n, T_0, T$
Dämpfungsverhältnis $\kappa$ $\epsilon$ bei Wiechert $\nu$ bei Galitzin	$\kappa = \kappa$	$\kappa = e\Lambda$	$\kappa = e^{\frac{T}{2\tau}}$	$\kappa = e^{\frac{\pi}{\mu} \sqrt{1-\mu^2}}$	$\kappa = e^{\frac{\pi h}{\sqrt{1-h^2}}}$	$\kappa = e^{\pi \sqrt{\frac{n_0^2}{n^2} - 1}}$
Logarithmisches Dekrement	$\Lambda = \lg \text{nat } \kappa$	$\Lambda = \Lambda$	$\Lambda = \frac{T}{2\tau}$	$\Lambda = \frac{\pi}{\mu} \sqrt{1-\mu^2}$	$\Lambda = \frac{\pi h}{\sqrt{1-h^2}}$	$\Lambda = \pi \sqrt{\frac{n_0^2}{n^2} - 1}$
Reziproke Relaxationszeit $\frac{1}{\tau}$ $\epsilon$ bei Galitzin	$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{T} \lg \kappa$	$\frac{1}{\tau} = \frac{2\Lambda}{T}$	$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\tau} = n_0 \sqrt{1-\mu^2}$	$\frac{1}{\tau} = n_0 h$	$\frac{1}{\tau^2} = n_0^2 - n^2$
Periodenverhältnis $\mu$ $\mu = \frac{T_0}{T}$	$\mu^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lg^2 \kappa}$	$\mu^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \Lambda^2}$	$\mu^2 = 1 - \frac{1}{n_0^2 \tau^2}$	$\mu^2 = \mu^2$	$\mu^2 = 1 - h^2$	$\mu = \frac{n}{n_0} = \frac{T_0}{T}$
Konstante $h$	$h^2 = \frac{\lg^2 \kappa}{\pi^2 + \lg^2 \kappa}$	$h^2 = \frac{\Lambda^2}{\pi^2 + \Lambda^2}$	$h = \frac{1}{n_0 \tau}$	$h = \sqrt{1-\mu^2}$	$h = h$	$h = \sqrt{1 - \frac{n^2}{n_0^2}}$



Tabelle II.

$\alpha$	$\Lambda$	$h$	$\mu$
1.00	$-\infty$	0.000	1.000
2.06	0.72	0.224	0.950
3.02	1.11	0.332	0.890
4.14	1.42	0.412	0.830
5.05	1.62	0.458	0.790
10.0	2.30	0.592	0.650
23.1	3.14	0.707	0.500
46.9	3.85	0.775	0.400
121	4.80	0.837	0.300
536	6.28	0.894	0.200
12400	9.43	0.949	0.100
$\infty$	$\infty$	1.000	0.000

Die Differentialgleichung der Pendelbewegung lautet dann

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} + n_0^2 a = -V \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad (1)$$

für den Fall, daß das Pendel nicht aperiodisch ist, läßt sich das vollständige Integral in folgender Weise ausdrücken [W., p. 72],<sup>1</sup> wenn die Zeit von einem beliebigen Nullpunkt  $t_0 = 0$  an gerechnet wird:

$$a = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos nt + \frac{1}{n\tau} a_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin nt + \frac{1}{n} \left( \frac{da}{dt} \right)_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin nt - \frac{V}{n} \int_0^t \frac{d^2 x}{dt'^2} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \sin n(t-t') dt', \quad (2a)$$

wobei in  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  für  $t$   $t'$  zu setzen ist.

Durch partielle Integration ergibt sich ein zweiter Ausdruck:

<sup>1</sup> Hinweise auf Wiechert, Theorie der automatischen Seismographen, sollen im folgenden durch »W.« mit Angabe der Seitenzahlen durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}
 a = & a_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos nt + \frac{1}{n\tau} a_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin nt + \\
 & + \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{da}{dt} \right)_0 + V \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \sin nt + \\
 & + \frac{V}{n\tau} \int_0^t \frac{dx}{dt'} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \sin n(t-t') dt' - \\
 & - V \int_0^t \frac{dx}{dt'} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \cos n(t-t') dt' \quad (2b)
 \end{aligned}$$

und durch nochmalige partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 a + Vx = & (a_0 + Vx_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \cos nt + \frac{1}{n\tau} (a_0 + Vx_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \sin nt + \\
 & + \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{da}{dt} \right)_0 + V \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 - \frac{2}{\tau} Vx_0 \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \sin nt + \\
 & + n_0 \frac{(2\mu^2 - 1)}{\mu} V \int_0^t x e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \sin n(t-t') dt' + \\
 & + \frac{2V}{\tau} \int_0^t x e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \cos n(t-t') dt'. \quad (2c)
 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen beziehen sich die mit dem Index 0 versehenen Glieder auf die Werte der Größen zur Zeit  $t = 0$ .

Im Falle zur Zeit  $t = 0$  sich keine Unstetigkeiten einstellen, sind bei der Bestimmung dieser Anfangswerte keine Schwierigkeiten vorhanden, im anderen Falle jedoch können Zweifel auftreten, zu deren Beseitigung die nachfolgenden Ausführungen dienen mögen.

Solange  $x$  und  $\frac{dx}{dt}$  ( $\frac{d^2x}{dt^2}$  kann unstetig sein) stetig sind, ist auch  $a$ ,  $\frac{da}{dt}$ ,  $\frac{d^2a}{dt^2}$  stetig und infolgedessen sind in obige Gleichungen einfach die Werte von  $a$ ,  $\frac{da}{dt}$ ,  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$  zur Zeit Null einzusetzen.

Setzt eine seismische Störung zur Zeit  $t = 0$  so ein, daß  $x_0 = 0$  und  $\left( \frac{dx}{dt} \right)_0 = 0$  sind (Emersio), dann bedeuten  $a_0$  und

$\left(\frac{da}{dt}\right)_0$  die Lage und Geschwindigkeit der Zeigerspitze, wie sie in diesem Augenblick etwa infolge früher erzeugter Störungen des Pendels noch andauern. War das Pendel vor Eintreffen der seismischen Störung in Ruhe, dann sind in diesem Falle auch  $a_0 = 0$  und  $\left(\frac{da}{dt}\right)_0 = 0$  und die rechten Seiten der Gleichungen (2) reduzieren sich auf die Ausdrücke mit den Integralzeichen.

Tritt aber zur Zeit  $t = 0$  eine seismische Störung so ein, daß entweder  $x_0$  oder  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$  oder beide von Null verschieden sind (Impetus) oder erleidet eine schon vorhandene seismische Störung bezüglich  $x$  und  $\frac{dx}{dt}$  einen Sprung zur Zeit  $t = 0$ , dann wird auch  $a$  und  $\frac{da}{dt}$  unstetig und es gibt zur Zeit  $t = 0$  je zwei Werte dieser Größen, die wir zweckmäßig durch  $x_{+0}$ ,  $x_{-0}$ ,  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{+0}$ ,  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{-0}$  etc. bezeichnen wollen, und es könnte fraglich sein, welcher dieser Werte in die obigen Gleichungen eingesetzt werden muß; in der Tat könnte man z. B., wenn plötzliche Störungen ein bis dahin ruhendes Pendel treffen, meinen, daß  $a_0 = 0$  und  $\left(\frac{da}{dt}\right)_0 = 0$  gesetzt werden müßte; daß dies nicht richtig ist, wird sich aus folgendem ergeben.

Ich nehme an, zur Zeit  $t = -0$  sei  $x = x_{-0}$ ,  $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{-0}$  und zur Zeit  $t = +0$   $x = x_{+0}$ ,  $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{+0}$ ; da die Differentialgleichungen (2) nur vom Punkte  $t = +0$  an gelten, da der Sprung der Funktion  $x$  gewöhnlich nicht analytisch ausgedrückt ist, müssen für die Anfangswerte von  $a$  und  $\frac{da}{dt}$  auch die Werte zur Zeit  $t = +0$  eingesetzt werden; freilich sind diese Werte zunächst nicht gegeben, sondern das, was man gewöhnlich als Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet, bezieht sich auf den Zeitpunkt  $t = -0$ .

Es muß daher ein Weg angegeben werden, wie man von den bekannten Werten  $(a)_{-0}$ ,  $\left(\frac{da}{dt}\right)_{-0}$  zu den gesuchten  $(a)_{+0}$ ,  $\left(\frac{da}{dt}\right)_{+0}$  gelangen kann.

Zu diesem Zweck schreiben wir das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) statt in der Form (2c) so, wie Wiechert es tut [W., p. 72, Formel (206)],

$$a_1 + Vx_1 = (a_0 + Vx_0)e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \cos n(t_1-t_0) + A + B,$$

wobei  $A$  Glieder mit  $\sin n(t_1-t_0)$  und  $B$  die beiden Integrale bedeuten; der Index 1 bezieht sich auf die Zeit  $t = t_1$  und der Index 0 auf die Zeit  $t_0$ ; wählen wir nun  $t_0 < 0$  und  $t_1 > 0$  und lassen gleichzeitig  $t_0$  und  $t_1$  nach Null zu konvergieren, so wird  $A = 0$  und  $B = 0$  und wir erhalten die Beziehung

$$(3) \quad a_{+0} + Vx_{+0} = a_{-0} + Vx_{-0},$$

welche gestattet,  $a_{+0}$  aus  $x_{+0}$ ,  $x_{-0}$  und  $a_{-0}$  zu berechnen. Gleichung (3) ist ein Ausdruck dafür, daß die absolute Lage der Pendelmassse für  $t = 0$  keinen Sprung erleidet, sondern nur die relative, bezogen auf das bewegte Gestell.

Die analogen Beziehungen für  $\frac{da}{dt}$  erhalten wir am einfachsten, wenn wir Gleichung (1) zwischen  $-\tau$  und  $+\tau$  integrieren und dann zur Grenze  $\tau = 0$  übergehen; es ergibt sich da zunächst

$$\begin{aligned} & \left(\frac{da}{dt}\right)_{+0} + \frac{2}{\tau} a_{+0} + V\left(\frac{dx}{dt}\right)_{+0} = \\ & = \left(\frac{da}{dt}\right)_{-0} + \frac{2}{\tau} a_{-0} + V\left(\frac{dx}{dt}\right)_{-0} \end{aligned}$$

und wenn wir aus Gleichung (3) den Wert für  $a_{+0}$  einführen

$$\begin{aligned} & \left(\frac{da}{dt}\right)_{+0} + V\left(\frac{dx}{dt}\right)_{+0} - \frac{2}{\tau} Vx_{+0} = \\ & = \left(\frac{da}{dt}\right)_{-0} + V\left(\frac{dx}{dt}\right)_{-0} - \frac{2}{\tau} Vx_0. \quad (4) \end{aligned}$$

Um also zu richtigen Resultaten zu gelangen, haben wir uns in den Gleichungen (2) für  $0 + 0$  geschrieben zu denken und darin für  $a_{+0}$  und  $\left(\frac{da}{dt}\right)_{+0}$  die Werte aus (3) und (4) einzusetzen.

Für gewöhnlich wird nur der Fall interessieren, daß bei ruhendem Pendel  $a_{-0} = 0$  und  $\left(\frac{da}{dt}\right)_{-0} = 0$  und seismischer Ruhe  $x_{-0} = 0$  und  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{-0} = 0$  plötzlich eine Störung mit  $x_{+0}$  und  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{+0}$  einsetzt; da überdies der Fall, daß  $x_{+0}$  von Null verschieden ist, nur in Fällen vorzukommen scheint, wo sich in unmittelbarer Nähe des Seismographen plötzliche Rucke, etwa infolge von unterirdischen Einstürzen ereignen, können wir ohne den Geltungsbereich unserer Formeln praktisch einzuschränken, auch  $x_{+0} = 0$  setzen.

Die Formeln (2) nehmen dann folgende Gestalt an:

$$a = -\frac{V}{n} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{+0} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin nt - \frac{V}{n} \int_0^t \frac{d^2x}{dt'^2} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \sin n(t-t') dt', \quad (5a)$$

$$a = \frac{V}{n\tau} \int_0^t \frac{dx}{dt'} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} [\sin n(t-t') - n\tau \cos n(t-t')] dt', \quad (5b)$$

$$a = -Vx + n_0 \frac{2\mu^2 - 1}{\mu} V \int_0^t x e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \sin n(t-t') dt' + \frac{2V}{\tau} \int_0^t x e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \cos n(t-t') dt', \quad (5c)$$

in welcher wir sie im folgenden benützen wollen.

### III. Bestimmung von Azimut und Emergenzwinkel für Pendel mit gleicher Schwingungsdauer und Dämpfung.

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß die drei Seismographen, welche die drei Komponenten der Erdbewegung aufzeichnen, gleiche Schwingungsdauern  $T_0$  und gleiche Dämpfung besitzen, die Vergrößerung  $V$  kann verschieden sein.

Da die Vergrößerung  $V$  bei den folgenden Untersuchungen überhaupt keine Rolle spielt, denken wir uns die Gleichung (5) durch  $V$  dividiert und bezeichnen  $\frac{a}{V}$  mit  $\alpha$ , d. h. die am Seismogramm abgemessenen Ordinaten sind durch  $V$  zu dividieren, um die Zahlen für  $\alpha$  zu erhalten.

Bezeichnen wir mit  $\sigma$  die Verschiebung, hervorgerufen durch die longitudinalen Wellen, dann sind die drei Komponenten

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sigma \cos \bar{e} \cos \alpha, \\ x_2 &= \sigma \cos \bar{e} \sin \alpha, \\ x_3 &= \sigma \sin \bar{e}. \end{aligned} \right\} (6)$$

Es ist vielleicht nicht überflüssig, zu bemerken, daß die Beziehungen (6) schon die Reflexion der Wellen an der Erdoberfläche berücksichtigen dadurch, daß der scheinbare Emergenzwinkel  $\bar{e}$  und nicht der wahre  $e$  in den Formeln auftritt. Den Gleichungen (6) analoge gelten für die Geschwindigkeiten

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d\sigma}{dt} \cos \bar{e} \cos \alpha, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{d\sigma}{dt} \cos \bar{e} \sin \alpha, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{d\sigma}{dt} \sin \bar{e}. \end{aligned} \right\} (7)$$

Führen wir die Werte aus (7) in Gleichung (5 b) ein, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \cos \bar{e} \cos \alpha F(t, \tau, n_0), \\ a_2 &= \cos \bar{e} \sin \alpha F(t, \tau, n_0), \\ a_3 &= \sin \bar{e} F(t, \tau, n_0), \end{aligned} \right\} (8)$$

weil die Ausdrücke unter dem Integral für identische Konstanten identische Funktionen der Zeit werden.

Wir erhalten somit aus (8)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_2}{a_1} \quad (9)$$

und

$$\operatorname{tg}^2 \bar{e} = \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2}. \quad (10)$$

Dieselben Formeln gelten auch für aperiodische und überaperiodische Pendel und lassen sich in Worten folgendermaßen interpretieren:

Sind drei Seismographen gegeben mit den Vergrößerungen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  mit übereinstimmenden Perioden  $T_0$  und gleichen Dämpfungskonstanten, so erhält man das Azimut und den Emergenzwinkel aus drei denselben Zeitpunkten entsprechenden, auf die Vergrößerung 1 reduzierten Ordinaten der Seismogramme nach den Formeln (9) und (10).

Das hier erhaltene Resultat geht insofern über die Aufstellung Galitzin's für seine Pendel hinaus, als es zeigt, daß die Beziehungen (9) und (10) für beliebige Dämpfungen und beliebige Zeitpunkte (natürlich nur so lange, als nur longitudinale Wellen auftreten) gültig bleiben, daß man sich also bei den Ausmessungen der Seismogramme nicht auf die ersten Maxima zu beschränken braucht; im Gegenteil kann auf diese Weise einfach untersucht werden, wie weit im Seismogramm die ersten Vorläufer reichen.

#### **IV. Bestimmung von Azimut und Emergenzwinkel für Pendel mit verschiedenen Konstanten.**

So bestechend die Formeln (9) und (10) des vorigen Abschnittes in ihrer Einfachheit sind, so darf man sich doch darüber keinen Illusionen hingeben, daß sie praktisch von Bedeutung sind, da es außerordentlich schwierig ist, drei Seismographen mit gleichen Schwingungsperioden und gleichen Dämpfungskonstanten herzustellen und dabei zu erhalten.

Gelingt dies noch für die Dämpfungskonstanten innerhalb relativ enger Grenzen, so geht es bei den Eigenperioden kaum mehr; besonders ist es bei Vertikalseismographen bis jetzt noch nicht gelungen, dauernd so große Eigenperioden zu erhalten, wie man sie bei den Horizontalseismographen im Interesse der Empfindlichkeit verwenden muß.

Die praktisch wichtige Arbeit ist daher noch zu leisten, nämlich Formeln zu entwickeln, die für Seismographen mit verschiedenen Konstanten gelten.

Wenn wir die durch  $V$  dividierte Gleichung (1) zweimal zwischen 0 und  $t$  integrieren, ergibt sich (W., p. 118):

$$x = (a_{+\sigma} + x_{+0}) + \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)_{+0} + \left( \frac{da}{dt} \right)_{+0} + \frac{2}{\tau} a_0 \right] t - \left[ a + \frac{2}{\tau} \int_0^t a dt + n_0^2 \int_0^t dt \int_0^t a dt \right]. \quad (11)$$

Für die von uns angenommenen Anfangsbedingungen

$$a_{-0} = x_{-0} = x_{+0} = 0$$

und

$$\left( \frac{da}{dt} \right)_{-0} = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{-0} = 0$$

verschwinden bei Benützung von Gleichung (4) die beiden ersten Glieder von Gleichung (11) und wir erhalten:

$$-x = a + \frac{2}{\tau} \int_0^t a dt + n_0^2 \int_0^t dt \int_0^t a dt. \quad (12)$$

Ist der Ausschlag  $a = \frac{a}{V}$ , den wir den reduzierten Ausschlag nennen wollen, in Form eines vorliegenden Seismogrammes als Funktion der Zeit gegeben, so läßt sich etwa durch numerische Quadratur  $x$  und damit indirekt  $\alpha$  und  $\bar{e}$  ermitteln; dies ist aber der bereits oben als sehr mühsam und dabei relativ ungenau charakterisierte Weg.

In vielen Fällen wird es bei der überhaupt geringen erreichbaren Genauigkeit beim Auswerten der Seismogramme (Kleinheit der Ausschläge, Einfluß der Reibung, Fehler in den Konstantenbestimmungen) genügen Annäherungsverfahren einzuschlagen, über die im folgenden gehandelt werden soll.

Zuvor wollen wir jedoch noch eine Berechnung darüber anstellen, mit welcher relativen Genauigkeit die Komponenten der Verrückung des Erdbodens bestimmt werden müssen, um eine bestimmte vorgeschriebene absolute Genauigkeit des Azimut und Emergenzwinkels zu gewährleisten.



Aus den Gleichungen (6) folgt zunächst

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_2}{x_1} \quad (13)$$

und

$$\operatorname{tg}^2 \bar{e} = \frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad (14)$$

und

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \quad \text{und} \quad \bar{e} = \operatorname{arctg} \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Bezeichnen  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta \alpha, \Delta \bar{e}$  die mittleren Fehler der betreffenden Größen, so ist bekanntlich

$$\Delta \alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\right)^2 \Delta^2 x_1 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)^2 \Delta^2 x_2}$$

und

$$\Delta \bar{e} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial x_1}\right)^2 \Delta^2 x_1 + \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial x_2}\right)^2 \Delta^2 x_2 + \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial x_3}\right)^2 \Delta^2 x_3}.$$

Führt man die Rechnung durch, so ergibt sich

$$\Delta \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2} \quad (15)$$

und

$$\Delta \bar{e} = \frac{\sin 2\bar{e}}{2} \sqrt{\cos^2 \alpha \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \sin^2 \alpha \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3}{x_3}\right)^2}. \quad (16)$$

Bezeichnen wir den relativen Fehler derjenigen Komponente, die am ungenauesten bestimmt ist, mit  $\frac{\Delta x}{x}$ , so ergibt sich als obere Grenze für

$$\Delta \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} \cdot \frac{dx}{x} \sqrt{2}$$

und für

$$\Delta \bar{e} = \frac{\sin 2\bar{e}}{2} \frac{dx}{x} \sqrt{3},$$

als untere

$$\frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{dx}{x}\right)_\alpha \quad \text{und} \quad \frac{\sin 2\bar{e}}{2} \left(\frac{dx}{x}\right)_e.$$

Soll daher  $\Delta\alpha$  oder  $\Delta\bar{\epsilon}$  unter  $\frac{1}{m}$  bleiben, so muß für

$\alpha$ oder $\bar{\epsilon} =$	10°	20°	30°	40°	45°
	80°	70°	60°	50°	
$m \left( \frac{dx}{x} \right)_\alpha =$	4·13	2·20	1·64	1·44	1·42
$m \left( \frac{dx}{x} \right)_\epsilon =$	3·37	1·79	1·33	1·17	1·15

werden; soll also z. B.  $\Delta\alpha$  oder  $\Delta\bar{\epsilon}$  nicht mehr als 1° ( $m = 57$ ) betragen, so ergibt sich aus obiger Tabelle eine Genauigkeitsgrenze von rund 2% für  $x$ .

Wir haben also jetzt Kriterien für die zu erwartenden Fehler gewonnen und kehren zu unserem Problem, der Ermittlung von  $x$  aus dem Diagramm, zurück.

Gleichung 12 läßt sich auch schreiben:

$$-x = a + 2hn_0J_1 + n_0^2J_2, \quad (16)$$

wo

$$J_1 = \int_0^t a dt$$

und

$$J_2 = \int_0^t J_1 dt$$

gesetzt ist.

Nach dem Mittelwertsatz läßt sich auch schreiben:

$$J_1 = \bar{a}t,$$

wo  $\bar{a}$  einen Mittelwert von  $a$  bedeutet; ebenso ist

$$J_2 = (\overline{\bar{a}t}) \cdot t.$$

Beschränken wir uns auf das erste Maximum im Seismogramm, so wird  $a$  von 0 bis  $a_m$  zur Zeit  $t_m$  stetig zunehmen und für diesen Fall ist dann, wenn  $\eta'$  und  $\eta''$  ( $\eta'' < \eta'$ ) echte Brüche bedeuten,

$$J_{1m} = \eta' a_m t_m \quad (17)$$

und

$$J_{2m} = \eta'' a_m t_m^2. \quad (18)$$

Wir erhalten somit

$$-\frac{x_m}{a_m} = 1 + 2\eta' h n_0 t_m + \eta'' h_0^2 t_m^2 = 1 + 2\eta' h \xi_m + \eta'' \xi_m^2, \quad (19)$$

wenn  $n_0 t = \xi$  gesetzt wird, d. h. nicht die Sekunde, sondern  $\frac{T_0}{2\pi}$  als Zeiteinheit gewählt wird. Da  $\eta'$ ,  $\eta''$  und die Dämpfungs-konstante  $h$ , deren Werte für verschiedene Dämpfungsverhält-nisse aus Tabelle II entnommen werden können, echte Brüche sind, wird die Größe von  $\xi_m$  ausschlaggebend für die Größe der beiden letzten Glieder von Gleichung (19) sein. Wir können uns jedenfalls in sehr einfacher Weise über die Größenordnung von  $\frac{x_m}{a_m}$  orientieren.

Da  $h$ ,  $n_0$  als Pendelkonstanten bekannt sind,  $a_m$  und  $t_m$  aus der Kurve entnommen werden, handelt es sich nur mehr um die Bestimmung von  $\eta'$  und  $\eta''$ .

Um Näherungswerte für diese Größen zu erhalten, approximieren wir die Seismographenkurve im Intervall 0 bis  $t_m$  durch eine Funktion um so genauer, je genauere Werte von  $\eta$  ge-braucht werden. Diese Approximation kann auf die ver-schiedenste Weise geschehen und wird sich nach dem Aussehen der  $\alpha$ -Kurve richten.

Da einer meiner Schüler sich mit dem eingehenderen Studium dieser Frage beschäftigt, seien hier nur zwei Fälle behandelt, die für die Mehrzahl der Bestimmungen ausreichen werden.

1. Wir approximieren die  $\alpha$ -Kurve im Intervall 0 bis  $t_m$  durch die Funktion

$$\alpha = a_m \sin \frac{2\pi}{4t_m} t,$$

so daß für  $t = 0$   $\alpha = \alpha_0 = 0$  und für  $t = t_m$   $\alpha = a_m$  und  $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=t_m} = 0$  wird; durch diese Annahme ist

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = \frac{2\pi}{4} \frac{a_m}{t_m} = 1.57 \frac{a_m}{t_m}$$

festgelegt.

Es wird dann

$$J_1 = a_m \frac{4t_m}{2\pi} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{4t_m} t \right),$$

$$J_2 = a_m \frac{4t_m}{2\pi} \left( t - \frac{4t_m}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{4t_m} t \right),$$

$$J_{1m} = \frac{4}{2\pi} a_m t_m, \quad J_{2m} = \frac{4}{2\pi} \left( 1 - \frac{4}{2\pi} \right) a_m t_m^2$$

und infolgedessen

$$\eta'_1 = \frac{4}{2\pi} = 0.637, \quad \eta''_1 = \frac{4}{2\pi} - \left( \frac{4}{2\pi} \right)^2 = 0.231.$$

2. Wir approximieren die  $\alpha$ -Kurve im Intervall 0 bis  $t_m$  durch die Funktion

$$\alpha = a_m \left( \frac{2}{t_m} t - \frac{1}{t_m^2} t^2 \right),$$

so daß für  $t = 0$   $\alpha = \alpha_0 = 0$ , für  $t = t_m$   $\alpha = a_m$  und  $\left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_{t=t_m} = 0$  wird; durch diese Annahme ist

$$\left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_0 = 2 \frac{a_m}{t_m}$$

festgelegt.

Es wird dann

$$J_1 = a_m \left( \frac{1}{t_m} t^2 - \frac{1}{3t_m^2} t^3 \right),$$

$$J_2 = a_m \left( \frac{1}{3t_m} t^3 - \frac{1}{12t_m^2} t^4 \right),$$

$$J_{1m} = \frac{2}{3} a_m t_m \quad \text{und} \quad J_{2m} = \frac{1}{4} a_m t_m^2$$

und infolgedessen

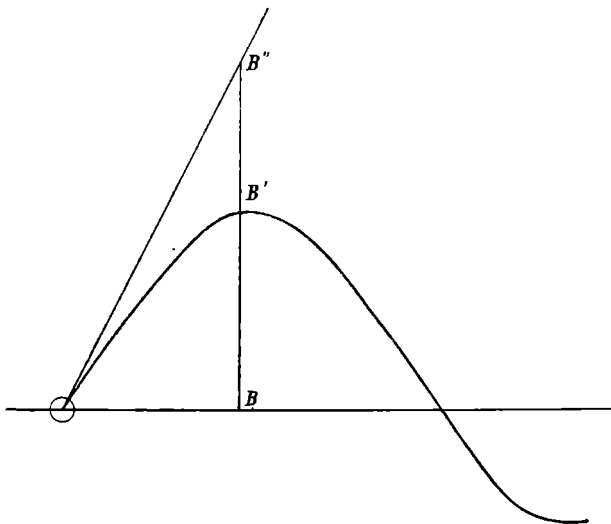
$$\eta'_1 = 0.667, \quad \eta''_1 = 0.250.$$

Welche von beiden Approximationen wir wählen, oder ob wir die Mittel von  $\eta'_1$  und  $\eta''_1$  verwenden, wird davon abhängen, ob der wirkliche, aus der  $\alpha$ -Kurve zu entnehmende Wert von

$\left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_0$  mehr sich  $1.57 \frac{a_m}{t_m}$  oder  $2.00 \frac{a_m}{t_m}$  annähert.

Genügt diese Annäherung nicht, dann geht man zu Formeln mit drei Konstanten über, indem man etwa  $\alpha = Ae^{-\alpha t} \sin \beta t$  oder  $\alpha = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$  setzt und die drei Konstanten durch die bekannten Größen  $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ ,  $(\alpha)_{t=t_m} = \alpha_m$  und die Bedingung  $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=t_m} = 0$  ausdrückt.

Weitere Annäherungen können durch Einschieben von Zwischenordinaten gewonnen werden.



Die Resultate, zu denen unsere Betrachtung geführt hat, werden vielleicht am einfachsten durch die Angabe des Weges dargestellt, der einzuschlagen ist, um aus dem Diagramm die Erdbodenverrückung zu finden.

1. Wir bestimmen die Pendelkonstanten  $V$ ,  $h$ ,  $T_0$  und die Registriergeschwindigkeit  $v$ .

2. Wir messen an einem aufgezeichneten Diagramm, dessen Beginn durch die Textfigur dargestellt sein möge, die Strecken  $OB$ ,  $BB'$  und  $BB''$  und erhalten

$$a_m = BB', \quad A_m = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t_m} = BB'' \quad \text{und} \quad t_m = \frac{OB}{v}$$

und durch Division mit  $V$  die reduzierten Werte

$$a_m = \frac{\dot{a}_m}{V}, \quad \mathfrak{A}_m = \left( \frac{d\mathfrak{a}}{dt} \right)_0 t_m = \frac{A_m}{V};$$

$\xi_m$  ergibt sich aus  $\xi_m = n_0 t_m$ ; ferner bilden wir  $\frac{\mathfrak{A}_m}{a_m}$  (in unserer Zeichnung ergibt sich dafür der Wert 1·73).

3. Je nach der Größe dieses gefundenen Wertes  $\frac{\mathfrak{A}_m}{a_m}$  entscheiden wir uns über die Größe der zu verwendeten  $\eta$  (in dem oben gezeichneten Falle ist 1·73 zufällig nahe das Mittel von 2·00 und 1·57, weshalb wir zweckmäßig die Mittelwerte der  $\eta$  verwenden, also

$$\eta_1' = \frac{0\cdot637 + 0\cdot667}{2} = 0\cdot652,$$

$$\eta_1'' = \frac{0\cdot231 + 0\cdot250}{2} = 0\cdot240$$

setzen müßten).

4. Schließlich wird  $x_m$  nach der Formel

$$x_m = -a_m(1 + 2\eta_1' h \xi_m + \eta_1'' \xi_m^2)$$

berechnet.

5. Das analoge Verfahren wird auf die beiden anderen Komponenten angewendet, wobei zu bemerken ist, daß, wenn infolge stark verschiedener Pendelkonstanten sich für die Eintrittszeiten der ersten Maxima merklich verschiedene Zeiten  $t_m$  ergeben sollten, der Ausmessung bei allen drei Komponenten dieselbe Zeit (am besten wohl das Mittel  $\frac{t_{m1} + t_{m2} + t_{m3}}{3} = t_m$ )

zugrunde gelegt werden muß und daß dann nicht die Ordinaten der Maxima, sondern die der Zeit  $t_m$  zugeordneten Ordinaten auszumessen sind.

6. Hat man so  $x_{m1}$ ,  $x_{m2}$ ,  $x_{m3}$  berechnet, so findet sich  $\alpha$  und  $\bar{e}$  aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_{m2}}{x_{m1}}, \quad \operatorname{tg}^2 \bar{e} = \frac{x_{m3}}{x_{m1}^2 + x_{m2}^2}.$$

Zum Schlusse sei noch das Diagramm der Textfigur numerisch ausgewertet.

Es sei z. B.  $BB' = 26 \text{ mm}$ ,  $BB'' = 46 \text{ mm}$ ,  $OB = 24 \text{ mm}$ ,  
 $V = 200$ ,  $h = 0.458$  entsprechend einem Dämpfungsverhältnis  
 $\kappa = 5.05$ ,  $v = 4 \frac{\text{mm}}{\text{sec}}$ ; dann wird

$$a_m = 130 \mu, \quad t_m = 6 \text{ sec}, \quad \eta' = 0.652, \quad \eta'' = 0.240.$$

Es ist dann

$$x_m = -130(1 + 0.60 \xi_m + 0.24 \xi_m^2).$$

Je nach der Größe der Eigenperiode  $T_0$  des Pendels ergeben sich dann verschiedene Werte von  $\xi_m$  und  $x_m$ ; z. B. für

$T_0 =$	0.628	6.28	12.56	18.84	37.68	75.36 sec
$n_0 =$	10	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\xi_m =$	60	6	3	2	1	0.5
$x_m =$	117.0	1.71	0.64	0.41	0.24	0.18 mm

Da

$$a_m = -x_m \frac{V}{1 + 2\eta' h \xi_m + \eta'' \xi_m^2}$$

ist, kann man den Ausdruck

$$\mathfrak{B}_e = \frac{V}{1 + 2\eta' h \xi_m + \eta'' \xi_m^2}$$

auch als »Einsatzvergrößerung« bezeichnen. Für den Fall, daß die  $\alpha$ -Kurve genügend genau zwischen 0 und  $t_m$  als Teil einer Sinuskurve mit der Periode  $\mathfrak{T} = 4t_m$  angesehen werden kann,

wird, wenn wir  $\frac{\mathfrak{T}}{T_0} = u$  setzen,

$$\mathfrak{B}_e = \frac{V}{1 + 2hu + \left(\frac{2\pi}{4} - 1\right)u^2} = \frac{V}{1 + 2hu + 0.57u^2}.$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem bekannten Ausdruck für die Vergrößerung periodischer Verschiebungen, wie er sich für die erzwungenen Schwingungen bei Außerachtlassung der überlagerten Eigenschwingungen ergibt,

$$\mathfrak{B} = \frac{V}{(1+u^2) \sqrt{1 - \mu^2 \frac{4u^2}{(1+u^2)^2}}} = \frac{V}{\sqrt{1 + (2h^2 - 2)u^2 + u^4}},$$

so sieht man, daß die Anwendung von  $\mathfrak{B}$  für den Einsatz, wie es häufig geschieht, zu ganz falschen Werten der Bodenverschiebung führen kann.

### V. Resultate der Untersuchung.

Treffen in einem Beobachtungsorte longitudinale Erdbebenwellen ein und werden die drei Komponenten der Bodenbewegung von drei Seismographen mit gleicher Eigenperiode und gleicher Dämpfung bei beliebiger Vergrößerung registriert, so läßt sich Azimut und scheinbarer Emergenzwinkel in einfacher Weise aus den Formeln (9) und (10) berechnen; diese Formeln gelten nicht nur für das erste Maximum der Diagramme, sondern für beliebige Zeiten, sofern es sich nur um longitudinale Wellen desselben Ursprungs handelt.

Sind die Pendelkonstanten für die drei Seismographen verschieden, so lassen sich Näherungsformeln verwenden, die gestatten, Azimut und Emergenzwinkel zu ermitteln, auch wenn das Gesetz, nach der sich die Erdbodenverschiebung mit der Zeit ändert, unbekannt sind.

---