

KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN.

MITTEILUNGEN

DER

ERDBEBEN-KOMMISSION

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN.

NEUE FOLGE.

N^o: XXXI.

ÜBER DIE ART DER FORTPFLANZUNG DER ERDBEBEN- WELLEN IM ERDINNEREN

(II. MITTEILUNG)

VON

DR. HANS BENNDORF.

MIT 9 TEXTFIGUREN.

WIEN, 1906.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die »Mitteilungen der Erdbeben-Kommission« erschienen bisher in den Sitzungsberichten der mathem.-naturw. Klasse, Abteilung I. Von nun an werden sie als besondere Ausgabe veröffentlicht werden.

Bisher sind folgende Nummern der »Mitteilungen« ausgegeben worden:

- I. Bericht über die Organisation der Erdbeben-Beobachtung nebst Mitteilungen über während des Jahres 1896 erfolgte Erdbeben, zusammengestellt von Edmund v. Mojsisovics (Sitz. Ber., Bd. 106 [1897], Abt. I, Heft II) — K 60 h.
- II. Bericht über das Erdbeben von Brüx am 3. November 1896, von Friedrich Becke (Sitz. Ber., Bd. 106 [1897], Abt. I, Heft II) — K 50 h.
- III. Bericht über das Erdbeben vom 5. Jänner 1897 im südlichen Böhmerwalde, von Friedrich Becke (Sitz. Ber., Bd. 106 [1897], Abt. I, Heft III) — K 40 h.
- IV. Bericht über die im Triester Gebiete beobachteten Erdbeben am 15. Juli, 3. August und 21. September 1897, von Eduard Mazelle (Sitz. Ber., Bd. 106 [1897], Abt. I, Heft IX) — K 40 h.
- V. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1897 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben, zusammengestellt von Edmund v. Mojsisovics (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft V) 3 K 40 h.
- VI. Die Erderschütterungen Laibachs in den Jahren 1851 bis 1886, vorwiegend nach den handschriftlichen Aufzeichnungen K. Deschmanns, von Ferdinand Seidl (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft VI) — K 50 h.
- VII. Verhalten der Karlsbader Thermen während des voigtländisch-westböhmisches Erdbebens im Oktober—November 1897, von Josef Knett (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft VI) 2 K 60 h.
- VIII. Bericht über das Graslitzer Erdbeben vom 24. Oktober bis 25. November 1897, von Friedrich Becke (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft VII) 5 K 40 h.
- IX. Bericht über die unterirdische Detonation von Melnik in Böhmen vom 8. April 1898, von Johann N. Woldřich (Sitz. Ber., Bd. 107 [1898], Abt. I, Heft X) — K 90 h.
- X. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1898 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben, zusammengestellt von Edmund v. Mojsisovics (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft IV) 3 K 20 h.
- XI. Die Einrichtung der seismischen Station in Triest und die vom Horizontalpendel aufgezeichneten Erdbebenstörungen von Ende August 1898 bis Ende Februar 1899, von Eduard Mazelle (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft V) 1 K — h.
- XII. Übersicht der Laibacher Osterbebenperiode für die Zeit vom 16. April 1895 bis Ende Dezember 1898, von Ferdinand Seidl (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft V) — K 70 h.
- XIII. Bericht über das obersteierische Beben vom 27. November 1898, von Rudolf Hoernes (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft V) 1 K 10 h.
- XIV. Bericht über die obersteierischen Beben des ersten Halbjahres 1899 (zumal über die Erschütterungen vom 1. 7. und 29. April), von Rudolf Hoernes (Sitz. Ber., Bd. 108 [1899], Abt. I, Heft VIII) 2 K 10 h.
- XV. Bericht über Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster, von Josef Schwab (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft II) 1 K 10 h.
- XVI. Bericht über das niederösterreichische Beben vom 11. Juni 1899, von F. Noë (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft II) — K 60 h.
- XVII. Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebur-Ehlert'schen Horizontalpendel vom 1. März bis Ende Dezember 1899, von Eduard Mazelle (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft II) — K 90 h.

- XVIII. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1899 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben, zusammengestellt von Edmund v. Mojsisovics (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft III) 3 K 30 h.
- XIX. Die tägliche periodische Schwankung des Erdbodens nach den Aufzeichnungen eines dreifachen Horizontalpendels zu Triest, von Eduard Mazelle (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft VII) 3 K 20 h.
- XX. Über die Beziehungen zwischen Erdbeben und Detonationen, von Josef Knett (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft IX) — K 80 h.
- XXI. Bericht über das Detonationsphänomen im Duppauer Gebirge am 14. August 1899, von Josef Knett (Sitz. Ber., Bd. 109 [1900], Abt. I, Heft IX) . . 1 K — h.

Neue Folge.

- I. Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Lemberg, von W. Lásk a 1 K 90 h.
- II. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1900 im Beobachtungsgebiete eingetretenen Erdbeben, von Edmund v. Mojsisovics 2 K 30 h.
- III. Bericht über die seismischen Ereignisse des Jahres 1900 in den deutschen Gebieten Böhmens, von V. Uhlig 2 K 50 h.
- IV. Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1900, von P. Franz Schwab — K 60 h.
- V. Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebeur-Ehlerst'schen Horizontalpendel im Jahre 1900, von Eduard Mazelle 1 K — h.
- VI. Das nordostböhmisches Erdbeben vom 10. Jänner 1901, von J. N. Woldřich 1 K 60 h.
- VII. Erdbeben und Stoßlinien Steiermarks, von R. Hoernes 2 K 10 h.
- VIII. Die Erdbeben Polens. Des historischen Teiles I. Abteilung, von W. Lásk a — K 80 h.
- IX. Bericht über die Erdbeben-Beobachtungen in Lemberg während des Jahres 1901, von Prof. Dr. W. Lásk a 1 K 10 h.
- X. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1901 im Beobachtungsgebiete eingetretenen Erdbeben, von Edmund v. Mojsisovics 1 K 10 h.
- XI. Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebeur-Ehlerst'schen Horizontalpendel im Jahre 1901, nebst einem Anhang über die Aufstellung des Vicentini'schen Mikroseismographen, von Eduard Mazelle 1 K 20 h.
- XII. Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1901, von Prof. P. Franz Schwab — K 40 h.
- XIII. Das Erdbeben von Saloniki am 5. Juli 1902 und der Zusammenhang der makedonischen Beben mit den tektonischen Vorgängen in der Rhodopemasse, von R. Hoernes 2 K — h.
- XIV. Über die Berechnung der Fernbeben, von Prof. Dr. W. Lásk a . . . — K 30 h.
- XV. Die mikroseismische Pendelunruhe und ihr Zusammenhang mit Wind und Luftdruck, von Eduard Mazelle 2 K 60 h.
- XVI. Vorläufiger Bericht über das erzgebirgische Schwarmbeben vom 13. Februar bis 25. März 1903, mit einem Anhang über die Nacherschütterungen bis Anfang Mai, von J. Knett — K 80 h.
- XVII. Das Erdbeben von Sinj am 2. Juli 1898, von A. Faidiga 2 K 90 h.
- XVIII. Das Erdbeben am Böhmisches Pfahl am 26. November 1902, von J. Knett — K 80 h.
- XIX. Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1902 im Beobachtungsgebiete eingetretenen Erdbeben, von Edmund v. Mojsisovics. (Mit einem Anhang: Bericht über die Aufstellung zweier Seismographen in Přibram, von Dr. Hans Benndorf.) 2 K 60 h.
- XX. Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebeur-Ehlerst'schen Horizontalpendel im Jahre 1902, von Eduard Mazelle 1 K 40 h.
- XXI. Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1902, von F. Schwab — K 50 h.

- XXII.** Bericht über die seismologischen Aufzeichnungen des Jahres 1902 in Lemberg, von Prof. Dr. W. Lásk a — K 70 h.
- XXIII.** Über die Verwendung der Erdbebenbeobachtungen zur Erforschung des Erdinnern, von Prof. Dr. W. Lásk a — K 40 h.
- XXIV.** Berichte über das makedonische Erdbeben vom 4. April 1904, von Prof. R. Hoernes 1 K — h.
- XXV.** Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1903 im Beobachtungsgebiete eingetretenen Erdbeben, von Edmund v. Mojsisovics 3 K 40 h.
- XXVI.** Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1903, von Prof. P. Franz Schwab — K 40 h.
- XXVII.** Bericht über das Erdbeben in Untersteiermark und Krain am 31. März 1904, von Prof. Dr. R. Hoernes und Prof. F. Seidl 1 K — h.
- XXVIII.** Jahresbericht des Geodynamischen Observatoriums zu Lemberg für das Jahr 1903, nebst Nachträgen zum Katalog der polnischen Erdbeben, von Prof. Dr. W. Lásk a — K 60 h.
- XXIX.** Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinneren (I. Mitteilung), von Dr. Hans Benndorf — K 60 h.
- XXX.** Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebeur-Ehler'schen Horizontalpendel im Jahre 1903, nebst einer Übersicht der bisherigen fünfjährigen Beobachtungsreihe, von Eduard Mazelle — K 90 h.
-

Über die Art der Fortpflanzung der Erdbebenwellen im Erdinneren

(II. Mitteilung)

von

Dr. H. Benndorf.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Graz.

(Mit 9 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1906.)

Bereits in der ersten Mitteilung habe ich als Ziel der vorliegenden Untersuchungen die ungefähre Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Erdbebenwellen in verschiedenen Tiefen des Erdkörpers bezeichnet und habe zu diesem Zwecke versucht, eine möglichst richtige Laufzeitkurve (Hodograph¹) der ersten Vorläufer eines Bebens zu gewinnen.

Als ein zweites Bestimmungsstück, das zur Ermittlung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dienlich wäre, erschien mir zur Zeit, als ich die erste Mitteilung abschloß, die Emergenzwinkelkurve, d. h. eine Beziehung zwischen dem Emergenzwinkel e eines Strahles und der Epizentraldistanz Δ ; erst als der größere Teil der Resultate der vorliegenden Arbeit gewonnen war, gelangte ich durch Auffinden einer Beziehung zwischen Laufzeitkurve und Emergenzwinkel, die ich weiter unten entwickeln werde, zu der Einsicht, daß, theoretisch wenigstens, eine Bestimmung der Emergenzwinkel nichts Neues bringen kann, da sie sich bei beliebiger Verteilung der Geschwindigkeit im Erdinneren stets aus der Laufzeitkurve berechnen lassen.

¹ Ich vermeide absichtlich den Ausdruck »Hodograph«, weil er in der Physik bereits in anderem Sinne verwendet wird.

Von um so größerer praktischer Bedeutung erscheint aber die experimentelle Bestimmung dieser Winkel, weil sie einmal eine erwünschte Kontrolle der Laufzeitkurve geben, eine Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in der äußersten Erdkruste ermöglichen und zugleich ein Mittel an die Hand geben, geologische Abnormalitäten in der Nähe der Erdoberfläche ausfindig zu machen.

Die folgenden Überlegungen möchte ich mit einer Diskussion des einzigen mir bekannten Beobachtungsmateriales über die Emergenzwinkel beginnen.

1. Experimentelle Bestimmung des Emergenzwinkels.

W. Schlüter hat in seiner bereits genannten Arbeit über Schwingungsart und Weg der Erdbebenwellen¹ mit Hilfe seines als Vertikalseismographen adaptierten Klinographen die ersten einwandfreien Bestimmungen des Emergenzwinkels der Vorläufer einer Reihe von Beben ausgeführt.

Es ist in hohem Grade zu bedauern, daß es Schlüter nicht vergönnt war, seine Untersuchungen fortzusetzen; jedenfalls wäre es aber von sehr großem Interesse, wenn an möglichst vielen Stationen, wo brauchbare Vertikalseismographen aufgestellt sind, Bestimmungen von Horizontal- und Vertikal-komponenten des ersten Einsatzes von Beben ausgeführt würden. Seit Wiechert die eingehende Theorie der Seismographen gegeben hat, liegt kein Hindernis vor, sie mit beliebigen Apparaten auszuführen, wenn sie nur so konstruiert sind, daß sie eine genügend genaue Ermittlung der Konstanten zulassen und die Störungen durch Reibung auf die Größe von Korrektionsgliedern herabgemindert sind.

Die folgende Tabelle I enthält zunächst die Schlüter'schen Zahlen, wobei Δ die Entfernung in Megametern = $10^6 m$, e_0 den Emergenzwinkel, $\alpha = \cos e_0$, β den Sehnenwinkel, d. i. den Winkel, den die Sehne zwischen Beobachtungsort und Epizentrum mit dem Horizont im Beobachtungsorte bildet, bezeichnet.

¹ Beiträge zur Geophysik, Bd. V, p. 401, 1903.

In Fig. 1 sind die Δ als Abszissen und e_0 als Ordinaten aufgetragen; die eingezeichnete Kurve bezieht sich auf ausgeglichene Werte, die weiter unten besprochen werden.

Tabelle I.

Nr.	Datum des Bebens	Δ	e_0	$\alpha = \cos e_0$	β
1	1900, VII. 13.	2·0	29°	0·87	20°
2	VIII. 24.	2·1	39	0·78	29
3	VIII. 28.	2·4	56	0·56	45
4	VIII. 27.	2·8	59	0·52	46
5	VIII. 29.	7·5	64	0·44	30
6	VIII. 29.	8·0	69	0·36	33
7	IX. 1.	8·5	73	0·29	35
8	VIII. 5.	9·0	75	0·26	35
9	VIII. 20.	9·5	78	0·21	35
10	VII. 29.	11·4	78	0·21	27
11	VIII. 27.	14·0	80	0·17	17

Betrachtet man diese Einzelwerte, so kann man sich eines gewissen Zweifels an ihrer Richtigkeit oder, besser gesagt, Allgemeingültigkeit nicht ent schlagen.

Was zunächst die Entfernungen anlangt, so sind sie nach einem Verfahren gewonnen worden, das sich der Autor selbst zurechtgelegt hat, aber nicht mitteilt; da indes die Werte von e_0 sehr regelmäßig liegen, ist nicht anzunehmen, daß hier größere Fehler unterlaufen sind. Die experimentell gefundenen Werte von e_0 können, wie aus den sorgfältigen Konstantenbestimmungen der Apparate hervorgeht, nach meiner Ansicht höchstens um Prozente falsch sein.

Es erübrigt also, zu untersuchen, wie weit wohl diese Zahlen durch Göttinger Untergrundverhältnisse oder besondere Bebenbeschaffenheit, beeinflußt von Mittelwerten an der Erdoberfläche, abweichen.

Das ist ja zunächst klar, daß eine von der mittleren abweichende geologische Beschaffenheit der äußersten Erdrinde sehr wohl die Absolutbeträge der Emergenzwinkel fälschen

kann, indem sie entweder alle zu groß oder alle zu klein ausfallen.¹

Nimmt man als Störungsursache eine horizontale Schicht von größerem oder kleinerem Brechungsvermögen, als sie im Mittel der äußeren Erdkruste zukommt, so müssen die Cosinuse des beobachteten Emergenzwinkels mit einem Faktor multipliziert werden, der kleiner, respektive größer als 1 ist; große Emergenzwinkel nahe 90° werden also wenig, kleine am meisten gestört.

Möglicherweise sind die Göttinger Werte um 20% zu klein; ich unterlasse es aber, so hypothetische Korrekturen anzubringen, so lange die Basis dazu noch so unsicher ist.

Wie dem aber immer sein mag, so könnte eine derartige Annahme das Auffallendste der Emergenzwinkelkurve nicht erklären, nämlich das eigentümlich sekundäre Maximum der Winkel zwischen $\Delta = 3$ und 7, auf das schon Schlüter ausdrücklich hinweist. Die Beantwortung der Frage, ob die Abflachung der Kurve zufälliger Natur, hervorgerufen durch die geringe Anzahl der Beobachtungen, oder ob sie der Ausdruck eigentümlicher Strukturverhältnisse des Erdinneren ist, erheischt eine besondere Untersuchung. Ich glaube im folgenden mit ziemlicher Sicherheit den Nachweis bringen zu können, daß dieser Einsenkung der Emergenzwinkelkurve eine reelle Bedeutung zukommt.

Zu diesem Zweck aber und auch für die weiteren Schlüsse ist es nötig, eine allgemeine Diskussion über den Strahlengang im Erdinneren zu führen.

2. Über gewisse Eigenschaften des Strahlenganges im Erdinneren.

Zunächst wollen wir, wie es ja allgemein geschieht, annehmen, daß für die Fortpflanzung der Erdbebenstöße im Erdinneren dieselben Gesetze gelten, wie für die Wellenbewegung in einem Medium mit variablem Brechungsindex, daß also das

¹ Ganz besonders unregelmäßige Schichtung könnte eventuell auch bewirken, daß der Emergenzwinkel verschieden ausfällt, je nach dem Azimut, aus dem das Beben kommt.

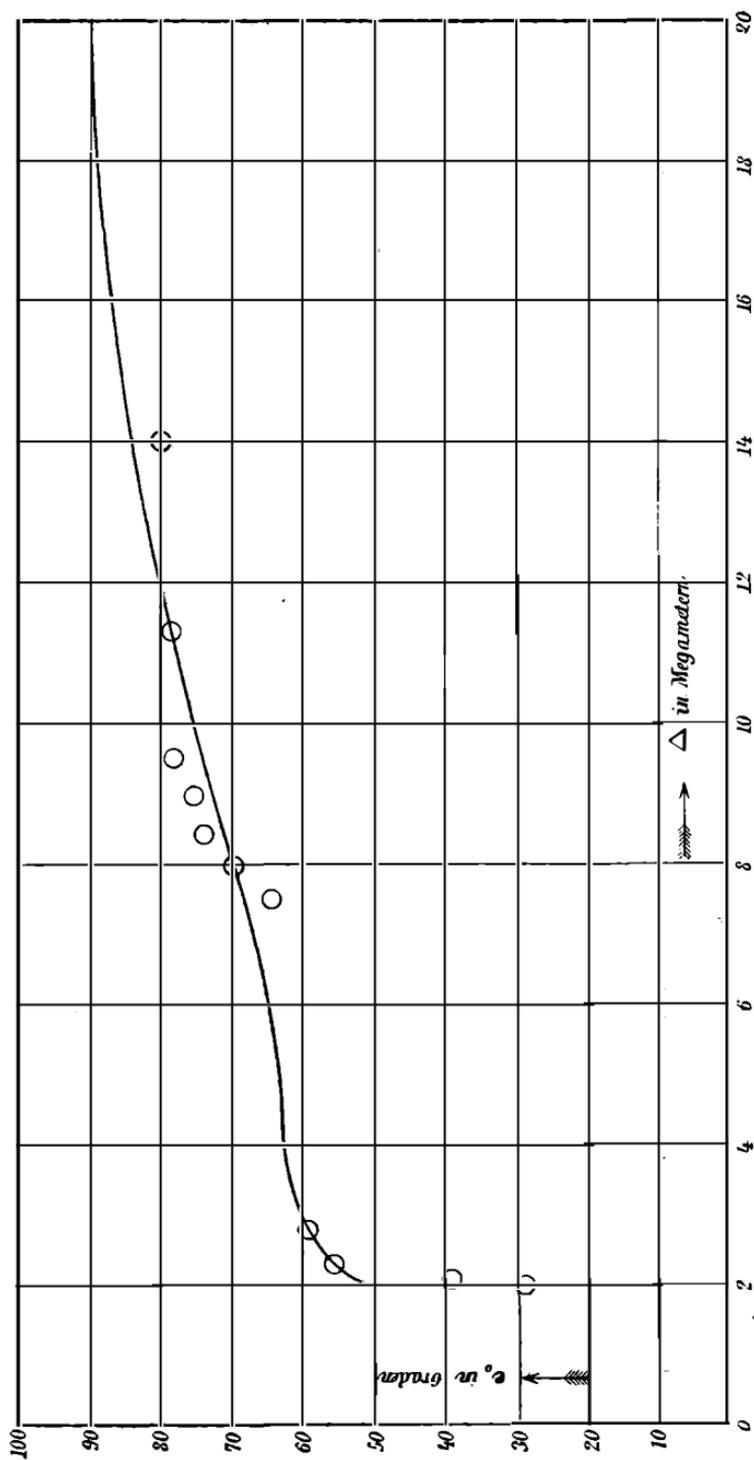


Fig. 1.

Fermat'sche Prinzip gilt, nach dem die Variation der Laufzeit $\delta T = 0$ ist; ferner soll die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Bebenstrahlen in konzentrischen Kugelflächen konstant sein und infolgedessen nur als Funktion der Entfernung r vom Erdmittelpunkt $c = f(r)$ betrachtet werden. Von dieser Funktion können wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß das im ganzen in Betracht kommende Intervall von $r = 0$ bis $r = r_0$ immer stetig ist und nirgends Null oder unendlich wird; das letztere folgt aus der physikalischen Beschaffenheit der Materialien, das erstere daraus, daß sich diskontinuierliche Übergänge, falls sie im Erdinneren vorkommen sollten, immer mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit durch sehr rasch verlaufende stetige ersetzen lassen.

Als Ursprung des Polarkoordinatensystems eines Punktes (r, ϑ) wählen wir den Erdmittelpunkt, als Achse, von der aus die Winkel ϑ gezählt werden, die Gerade, die durch den Bebenherd geht.

Bezeichnen wir mit e den spitzen Winkel, den eine beliebige Tangente in einem Punkte der Bahn des Stoßstrahles mit der durch ihn gehenden Kugelfläche einschließt, mit $n = \frac{1}{c}$ den Brechungsexponenten an dieser Stelle, so findet sich¹ die Gleichung der Bahnkurve aus der Beziehung

$$nr \cos e = n_0 r_0 \cos e_0, \quad 1)$$

wobei sich die Größen mit dem Index 0 hier wie weiterhin immer auf die Erdoberfläche beziehen sollen.

Da nun

$$\cos e = \frac{rd\vartheta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}}$$

ist, so ist die Differentialgleichung der Bahnkurve

1. Vergl. z. B. Straubel, Dioptrik in Medien mit kontinuierlich variablem Brechungsindex; Winkelmann's Handbuch, II. Aufl., Bd. VI. — Rudzki, Beiträge zur Geophysik, III., 1898, p. 495. — v. Kövesligethy, Mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XIII, 1897, p. 418, auch Bd. XXIII, 1905, p. 42. — Láská, Mitteilungen der Erdbeben-Kommission, Nr. XXIII, 1904.

$$d\vartheta = \pm \frac{n_0 r_0 \cos e_0 dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \cos^2 e_0}}; \quad 2)$$

zur Vereinfachung führen wir ein:

$$\cos e_0 = \alpha, \quad \frac{n}{n_0} = \nu = \frac{c_0}{c} \quad \text{und} \quad \frac{r}{r_0} = \rho,$$

es bedeutet also ν und ρ den Brechungsexponenten und Radiusvektor, wenn der Brechungsexponent an der Erdoberfläche n_0 , bezüglich der Erdradius r_0 gleich 1 gesetzt werden. Gleichung 1 und 2 nimmt dann die Form an:

$$\nu \rho \cdot \cos e = \alpha, \quad 3)$$

$$d\vartheta = \pm \frac{\alpha d\rho}{\rho \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad 4)$$

wobei

$$\nu = F(\rho) = \frac{1}{f(r_0 \rho)}$$

als Funktion von ρ aufzufassen ist.

Setzen wir bis auf weiteres voraus, daß der Bebenherd punktförmig ist und in der Erdoberfläche liegt, so ist bei gegebenem $\nu = F(\rho)$ jedem Wert von α ($0 \leq \alpha \leq 1$) als Parameter eine ganz bestimmte Bahnkurve zugeordnet, es können somit alle Größen, die wir betrachten werden, wie Laufzeit, Epizentralentfernung, als Funktionen von α angesehen und untersucht werden.

Bei gegebenem α hängt die Form der Bahn nur ab von dem Produkte $\nu \cdot \rho = \rho \cdot F(\rho) = \varphi(\rho)$, die ich die kritische Funktion nennen will.

Verfolgen wir den Weg eines Strahles, so wird der Winkel e vom Oberflächenwert e_0 an entweder abnehmen oder zunehmen oder abwechselnd beides tun, bis entweder $e = 0$ oder $e = \frac{\pi}{2}$ geworden ist. Ist an irgend einer Stelle, deren Koordinaten ρ_m und $\frac{\theta}{2}$ heißen mögen, $e = 0$ geworden, so ist der weitere Verlauf des Strahles ein Spiegelbild des bisherigen; ist aber irgendwo $e = \frac{\pi}{2}$, so setzt der Strahl seinen Weg

geradlinig bis zum Mittelpunkte fort, um von dort aus symmetrisch zu verlaufen, doch kann dieser Fall nur eintreten, wie aus Gleichung 3 hervorgeht, wenn $\nu\rho$ unendlich wird, kommt also für uns nicht in Betracht, ausgenommen den einzigen Fall, daß $\cos e_0 = 0$ wird; in diesem Grenzfall ist aber die Bahn des Strahles immer ein Durchmesser der Erde.

Der Winkel e wird gleich Null, wenn $\nu\rho = \alpha$ wird.¹ Die größte reelle Wurzel ρ_m der Gleichung

$$\nu\rho - \alpha = \varphi(\rho) - \alpha = 0 \quad 5)$$

im Intervalle $0 \leq \rho \leq 1$ gibt also die Tiefe an, bis zu der ein bestimmter (dem entsprechenden α zugeordneter) Bebenstrahl ins Innere der Erde dringt.

Wir wollen nun dazu übergehen, zu untersuchen, welchen Bedingungen die kritische Funktion $\varphi(\rho)$ genügen muß, um Anwendungen auf das Erdinnere zu gestatten.

Zunächst muß φ im ganzen Intervall $0 \leq \rho \leq 1$ stetig und an den Grenzen $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(0) = 0$ sein, da wir angenommen haben, daß ν nicht unendlich wird.

Ferner wissen wir aus der Messung der Emergenzwinkel, die sich durchwegs größer² als die betreffenden Sehnwinkel erwiesen haben, daß c von der Oberfläche nach dem Erdinneren im allgemeinen zunehmen, d. h. ν abnehmen muß; infolgedessen wird auch $\varphi(\rho)$ in der Nähe von $\varphi = 1$ abnehmen müssen. Um die allgemeine Diskussion nicht zu weitschweifig werden zu lassen, wollen wir annehmen, daß die Geschwindigkeitsverteilung im Erdinneren eine derartige ist, daß die sphärische

¹ Den Fall, daß e nie Null oder $\frac{\pi}{2}$ wird, brauchen wir nicht zu betrachten, da in diesem Falle spiralförmig unendlich lange Bahnen resultieren, die für unsere Anwendung nicht in Frage kommen.

² Aus dieser experimentell zweifellos sichergestellten Tatsache folgt auch, daß die Grundannahme, die v. Kövesligethy in seiner »Neuen geometrischen Theorie seismischer Erscheinungen« (mathem. und naturw. Berichte aus Ungarn, Bd. XIII, 1897, p. 418) und in »Die Berechnung seismischer Elemente« (ibid. XXIII., 1905, p. 42) macht, daß die Geschwindigkeit der Bebenwellen nach dem Erdinneren zu abnimmt, nicht mehr gerechtfertigt ist, wodurch seine interessanten Ausführungen nur mehr theoretische Bedeutung haben.

Distanz zwischen dem Ausgangspunkt eines Strahles (der Bebenherd wird hier immer als an der Oberfläche befindlich angenommen) und dem Auftreffpunkte, sowie die Laufzeit T dieses Strahles mit wachsendem Winkel e_0 immer größer oder

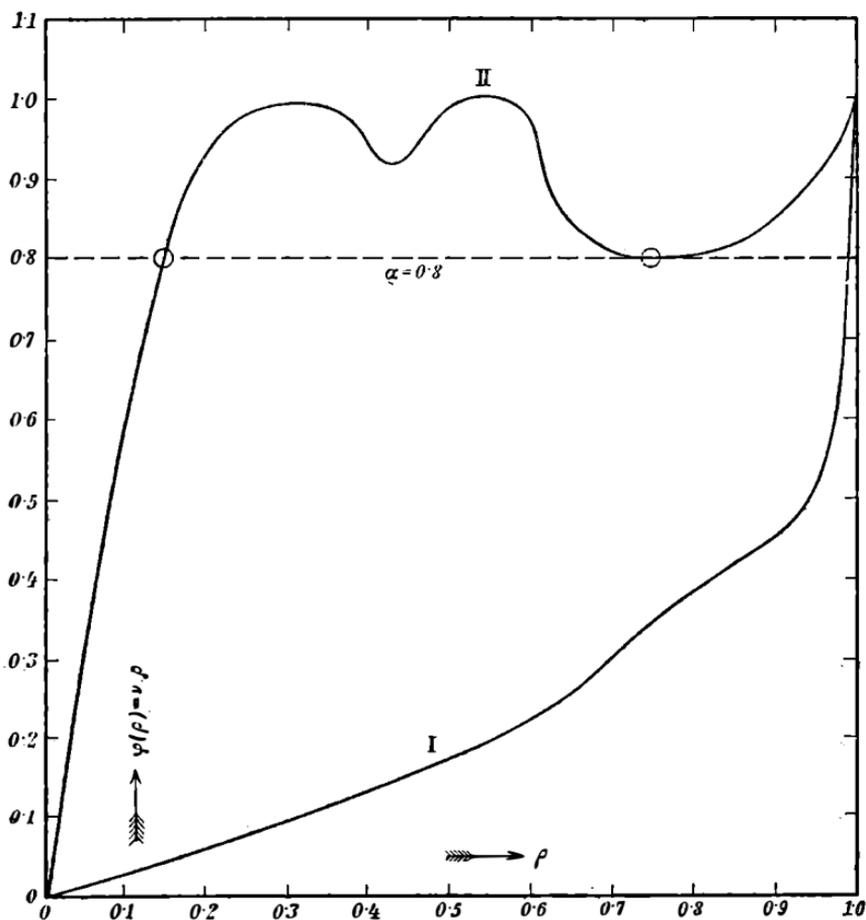


Fig. 2.

wenigstens nicht kleiner wird. Soweit die Beobachtungen reichen, ist diese Voraussetzung in der Wirklichkeit erfüllt.

Bei der weiteren Untersuchung wollen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Gleichung 5 für beliebige Werte von $0 \leq \alpha \leq 1$ nur eine reelle Wurzel im Intervalle $0 \leq \rho \leq 1$ besitzt oder mehrere. Fall 1 ist durch Kurve I, Fall 2 durch Kurve II in Fig. 2 veranschaulicht.

Betrachten wir zunächst den Fall 2. Die Schnittpunkte einer mit der Abszissenachse parallelen Linie in der Höhe α mit Kurve II stellen die Wurzeln der Gleichung $\varphi(\rho) - \alpha = 0$ dar. Fassen wir die jeweilig größte dieser Wurzeln, ρ_m , als Funktion von α auf, so sieht man, daß in dem durch Kurve II dargestellten Fall ρ_m mit α stetig abnimmt, wenn wir von $\alpha = 1$ abwärts gehen. Beim Werte $\alpha_1 = 0.8$ findet jedoch ein plötzlicher Sprung der Werte von $\rho_m = 0.75$ auf $\rho_m = 0.15$ statt; ρ_m ist also keine stetige Funktion von α mehr. Physikalisch gesprochen würde das heißen: Verfolgt man den Gang der einzelnen Strahlen, in den man bei niedrigen Emergenzwinkeln beginnt und zu größeren fortschreitet, so dringt jeder folgende Strahl immer tiefer ins Erdinnere ein, bei einem bestimmten Emergenzwinkel aber tritt ein plötzlicher Sprung auf, so daß einer unendlich kleinen Änderung von α oder e_0 eine endliche Änderung von ρ_m entspricht; das würde unter Beibehaltung unserer einschränkenden Voraussetzungen über die Beschaffenheit von $\varphi(\rho)$ bedeuten, daß die sphärische Entfernung Δ_{α_1} des Strahlenendpunktes vom Bebenherd, die zum Wert α_1 gehört, um ein endliches Stück kleiner wäre als die Entfernung $\Delta_{\alpha_1 - d\alpha_1}$, die zum Wert $\alpha_1 - d\alpha_1$ gehört, wenn $d\alpha_1$ beliebig klein wird.

Es würde also in diesem Fall ein ganzer Gürtel der Erdoberfläche zwischen den Kreisen, die zu Δ_{α_1} und $\Delta_{\alpha_1 - d\alpha_1}$ gehören, überhaupt nicht von einem Bebenvorläufer getroffen werden.

Analoges würde natürlich gelten, wenn mehrere solcher Diskontinuitätsstellen beständen; es würde auch weiter daraus folgen, daß die Laufzeitkurve $T = f(\Delta)$ aus zwei oder mehreren getrennten Stücken bestehen müßte.

Ob derartiges wirklich bei der Erde vorkommt, ist vorläufig nicht mit Sicherheit zu entscheiden. Gewisse auffallende Erdbebendiagramme ohne Vorläufer könnten wenigstens in einer lokalen derartigen Beschaffenheit von $\varphi(\rho)$ ihre Ursache haben. Jedesfalls können es nur relativ schmale Gürtel der Erdoberfläche sein, die vor den Vorläufern geschützt sind.

So lange nicht das recht unwahrscheinliche Gegenteil sicher bewiesen ist, wollen wir für das Folgende annehmen,

daß derartige Diskontinuitäten nicht auftreten, d. h. daß die kritische Funktion immer nur eine reelle Wurzel für jeden Wert von α hat.

Nebenbei bemerkt, werden sich Folgerungen auch auf den Fall der eventuellen Diskontinuität anwenden lassen.

Wir gehen nun zur Behandlung des Falles I über, bei dem $\varphi(\rho)$ nur eine Wurzel hat.

Das kann ersichtlich nur dann eintreten, wenn $\varphi(\rho)$ mit wachsendem ρ immer wächst,

$$\frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} > 0;$$

da nun $\varphi(\rho) = \nu\rho$, so ergibt sich für ν die Bedingung

$$-\frac{d\nu}{d\rho} < \frac{\nu}{\rho}, \quad 6)$$

d. h. die relative Abnahme von ν mit wachsendem ρ muß immer kleiner sein als $\frac{\nu}{\rho}$.

Sollte es also irgendwo im Erdinneren Stellen geben, in denen c mit abnehmendem ρ oder ν mit wachsendem ρ abnimmt, so ist diese Abnahme durch Gleichung 6 begrenzt.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Größen über, die für die Beben von Interesse sind.

Wir wollen unter Stoßdistanz, respektive Stoßwinkel die sphärische Distanz (BB' , siehe Fig. 3) der beiden Enden einer Stoßkurve, respektive den Winkel (BOB') zwischen den zu ihnen gezogenen Erdradien verstehen und sie mit Δ und Θ oder Δ_{α_1} , respektive Θ_{α_1} bezeichnen, wenn insbesondere hervorgehoben werden soll, daß sie einem bestimmten Wert α_1 zugeordnet sind.

Die zum Durchlaufen eines Strahles BB' nötige Zeit sei T (T_{α_1}), die Länge der Kurve L (L_{α_1}), ihre Gesamtkrümmung Φ (Φ_{α_1}). In Fig. 3 ist der Bebenherd mit H , das Epizentrum mit E bezeichnet.

Die sphärische Distanz zwischen Beobachtungsort B und dem Epizentrum sei $\Delta^{(w)}$, der Winkel BOE $\Theta^{(w)}$, die Zeit, die der Stoßstrahl vom Herd zum Beobachtungsort braucht, $T^{(w)}$, die entsprechende Strahlänge $L^{(w)}$. Die Distanz EB' heiße Δ' , der Winkel EOB' Θ' und analog die Zeit, die der Stoß von H bis B' braucht, T' , die Länge HB' L' .

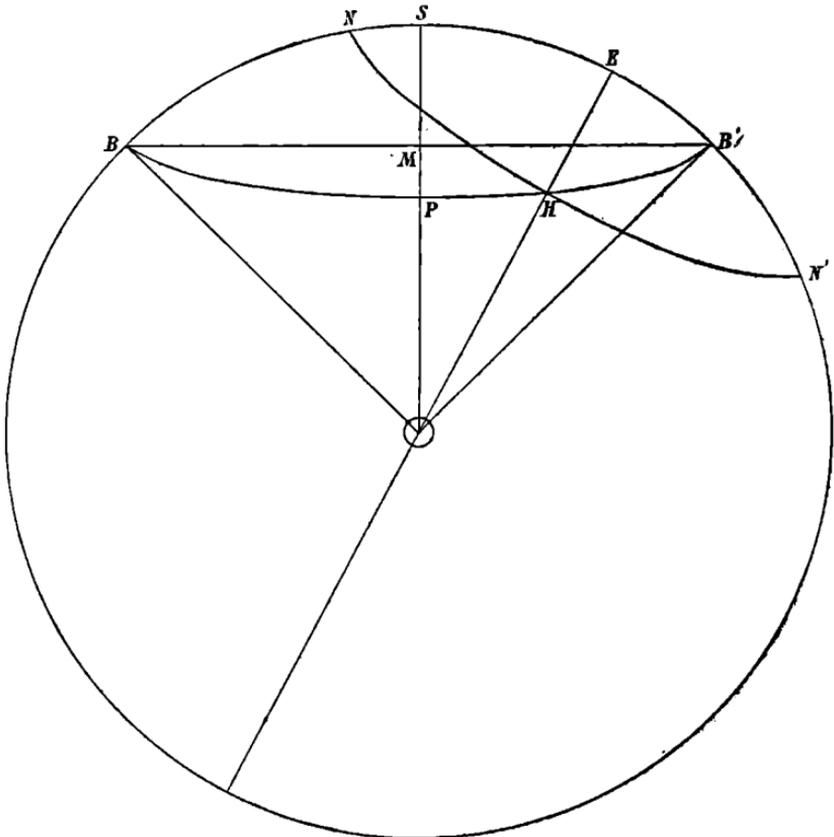


Fig. 3.

Es bestehen daher die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \Delta^{(w)} + \Delta', \\ \Theta &= \Theta^{(w)} + \Theta', \\ T &= T^{(w)} + T', \\ L &= L^{(w)} + L', \\ \Phi &= \Phi^{(w)} + \Phi'. \end{aligned} \right\} 7)$$

Da der Bebenherd immer im Vergleiche mit dem Erdradius nahe der Erdoberfläche liegt, sind die gestrichelten Werte klein gegen die mit dem Index n , wenn der Beobachtungsort B weit genug vom Epizentrum entfernt ist. Für solche Distanzen ist dann genügend genau

$$\Delta = \Delta^{(w)}, \quad \Theta = \Theta^{(w)}, \quad T = T^{(w)}, \quad L = L^{(n)}. \quad (8)$$

Alle diese Größen lassen sich nun durch bestimmte Integrale darstellen.

Man erhält unter Benutzung der Gleichung 3 und 4:

$$\Theta = \int d\vartheta = 2\alpha \int_{\rho_m}^1 \frac{d\rho}{\rho \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (9)$$

$$\Theta' = \alpha \int_{\rho_h}^1 \frac{d\rho}{\rho \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (10)$$

$$\Delta = r_0 \Theta = 2r_0 \alpha \int_{\rho_m}^1 \frac{d\rho}{\rho \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (11)$$

$$\Delta' = r_0 \Theta' = r_0 \alpha \int_{\rho_h}^1 \frac{d\rho}{\rho \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (12)$$

$$L = \int ds = \int \frac{r d\vartheta}{\cos e} = 2r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{v \rho d\rho}{\sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (13)$$

$$L' = r_0 \int_{\rho_h}^1 \frac{v \rho d\rho}{\sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (14)$$

$$T = \int n ds = 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{v^2 \rho d\rho}{\sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (15)$$

$$T' = n_0 r_0 \int_{\rho_h}^1 \frac{v^2 \rho d\rho}{\sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (16)$$

$$\Phi = \int \frac{ds}{R} = 2\alpha \int_{\rho_m}^1 \frac{\frac{dv}{d\rho} \cdot d\rho}{v \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}} \quad (17)$$

und schließlich

$$\Phi' = \alpha \int_{\rho_h}^1 \frac{\frac{dv}{d\rho} \cdot d\rho}{v \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (18)$$

da der Krümmungsradius R durch die Gleichung¹

$$\frac{1}{R} = \frac{n_0 r_0 \alpha}{r} \frac{dc}{dr} = \frac{\alpha}{r_0} \cdot \frac{1}{\rho v^2} \cdot \frac{dv}{d\rho}$$

gegeben ist.

Die unteren Grenzen der Integrale sind ρ_m und ρ_h . ρ_h ist die Entfernung des Bebenherdes vom Erdmittelpunkt ($r_0 = 1$ gesetzt), also konstant, während ρ_m die Wurzel der Gleichung 5,

$$\varphi(\rho) - \alpha = v\rho - \alpha = 0$$

ist und daher eine unbekannte Funktion von α ist. Die Integrale ergeben die Größen Θ , Δ , L , T , Φ als Funktion von α , respektive von ρ_h .

Wie man sieht, werden die Funktionen unter dem Integralzeichen unendlich für die untere Grenze, ein Umstand, der die Diskussion der Integrale außerordentlich erschwert, auch wenn man voraussetzt oder der Erfahrung entnimmt, daß die kritische Funktion immer so beschaffen ist, daß die Integrale selbst endlich bleiben.

Der Gang der Untersuchung, den ich ursprünglich befolgen wollte, war der folgende:

Gesetzt, wir kennten den zu jeder Stoßdistanz gehörigen Emergenzwinkel (wir beschränken uns wieder auf so große Distanzen, daß der Bebenherd mit dem Epizentrum zusammenfallend gedacht werden kann), Δ also als Funktion von α , so

¹ Siehe z. B. Rudzki, l. c.

könnte man, da die Laufzeitkurve T als Funktion von Δ gibt, auch T als Funktion von α bestimmen, so daß man die Gleichungen erhielte:

$$\psi_1(\alpha) = 2r_0\alpha \int_{\rho_m}^1 \frac{d\rho}{\rho \sqrt{v^2\rho^2 - \alpha^2}} = \Delta \quad (19)$$

und

$$\psi_2(\alpha) = 2n_0r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{v^2\rho d\rho}{\sqrt{v^2\rho^2 - \alpha^2}} = T, \quad (20)$$

von denen die linke Seite als empirisch gegeben zu betrachten wären.

Ist durch diese Gleichungen die kritische Funktion $\varphi(\rho) = v \cdot \rho$ und damit natürlich auch v eindeutig bestimmt? Und wenn das der Fall ist, welche Schlüsse lassen sich aus dem Verhalten der Funktionen $\psi_1(\alpha)$ und $\psi_2(\alpha)$ auf die Beschaffenheit von $\varphi(\rho)$ ziehen?

Eine funktionentheoretisch strenge Behandlung dieser Fragen scheint besondere Schwierigkeiten zu bieten;¹ wozu vielleicht wesentlich mit beiträgt, daß es sich um uneigentliche Integrale handelt, die sich nicht nach α differenzieren lassen, so lange über den Verlauf der kritischen Funktion in der Nähe der unteren Grenze nichts bekannt ist.

Ich habe daher bald von Versuchen auf rein analytischen Weg eine Lösung zu finden absehen und einen mehr empirischen Weg einschlagen müssen, der im 5. Abschnitt auseinandergesetzt wird.

Dagegen ist es mir beim Studium der ersten Frage gelungen, nachzuweisen, daß die Gleichungen 19 und 20 nicht voneinander unabhängig sind, weil zwischen ihnen die Beziehung bestehen muß:

$$\frac{d\psi_2(\alpha)}{d\alpha} = n_0\alpha \frac{d\psi_1(\alpha)}{d\alpha}, \quad (21)$$

so daß, wenn $\Delta = \psi_1(\alpha)$ bekannt ist, sich die Zeit T berechnen läßt (n_0 als bekannt vorausgesetzt), die ein Bebenstrahl zum Durchlaufen seines Weges braucht.

¹ Herrn Prof. v. Dantscher bin ich für mannigfache Belehrung zu besonderem Danke verpflichtet.

Daraus scheint mir zu folgen (einen exakten Beweis vermag ich allerdings nicht zu geben), daß $\varphi(\rho)$ und damit v als Funktion von ρ im allgemeinen durch $\psi_1(\alpha)$ oder $\psi_2(\alpha)$ wenigstens im reellen Ast eindeutig bestimmt ist.

Der Ableitung und Besprechung der Beziehung 21 ist der nächste Abschnitt gewidmet.

3. Über den Zusammenhang zwischen der scheinbaren Oberflächengeschwindigkeit und dem Emergenzwinkel.

Um die Beziehung Gleichung 21 nachzuweisen, bilden wir zunächst den Ausdruck $T - n_0 \alpha \Delta$ aus der Gleichung 15 und 11 und erhalten

$$\begin{aligned} T - n_0 \alpha \Delta &= 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{v^2 \rho d\rho}{\sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}} - 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{\alpha^2 d\rho}{\rho \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}} = \\ &= 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{d\rho}{\rho} \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}, \quad (22) \end{aligned}$$

ein Integral, das den Vorzug besitzt, daß die zu integrierende Funktion im Integrationsintervall nicht mehr unendlich wird; wir können daher nach α differenzieren und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (T - n_0 \alpha \Delta) &= -2n_0 r_0 \alpha \int_{\rho_m}^1 \frac{d\rho}{\rho \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}} + \\ &+ \left[\frac{2n_0 r_0}{\rho} \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2} \right]_{\rho=\rho_m} \cdot \frac{d\rho_m}{d\alpha}; \quad (23) \end{aligned}$$

der zweite Term rechts verschwindet für $\rho = \rho_m$, während der andere nichts anderes ist als $-n_0 \Delta$.

Führt man auch links die Differentiation aus, so ergibt sich

$$\frac{dT}{d\alpha} = n_0 \alpha \frac{d\Delta}{d\alpha} \quad (24)$$

die Beziehung von Gleichung 21.

Es läßt sich in analoger Weise zeigen, daß dieselbe Beziehung zwischen $T^{(w)}$ und $\Delta^{(w)}$ besteht, so daß man ganz

allgemein für eine beliebige Lage des Bebenherdes sagen kann, zwischen Laufzeit und Epizentraldistanz besteht die Gleichung

$$\frac{dT^{(w)}}{d\alpha} = n_0 \alpha \frac{d\Delta^{(w)}}{d\alpha}. \quad (25)$$

Gleichung 25 läßt sich auch in der Form schreiben:

$$\frac{dT^{(w)}}{d\Delta^{(w)}} = n_0 \alpha; \quad (26)$$

nun ist aber

$$\frac{d\Delta^{(w)}}{dT^{(w)}} = v^{(s)}$$

die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit der Bebenwellen, somit besteht eine für jedes Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gültige Beziehung

$$\frac{c_0}{v^{(s)}} = \alpha = \cos e_0. \quad (27)$$

In Worten ausgedrückt: Das Verhältnis der wirklichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_0 longitudinaler Wellen an der Erdoberfläche zur scheinbaren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v^{(s)} = \frac{d\Delta}{dT}$ ist gleich dem Cosinus des Emergenzwinkels in dem betreffenden Punkte.¹

Diese Beziehung scheint mir nun sehr interessant; sie zeigt, daß die Kenntnis der Emergenzwinkel theoretisch nichts Neues kennen lehrt, da, wenn die Laufzeitkurve bekannt ist, für jedes Δ der Cosinus des entsprechenden Emergenzwinkels als das c_0 -fache der Tangente des Neigungswinkels der T -Kurve gegen die Abszissenachse sich berechnen läßt.

Umgekehrt erscheint sie aber praktisch von großer Bedeutung; einmal ermöglicht die experimentelle Bestimmung der

¹ Nachträglich finde ich, daß bereits v. Kövesligethy, l. c., auf diese Beziehung gestoßen ist, allerdings nur unter Zugrundelegung des von ihm speziell angenommenen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes, während oben die allgemeine Gültigkeit dieses Gesetzes nachgewiesen ist.

Emergenzwinkel eine unabhängige und noch sehr wünschenswerte Kontrolle der Laufzeitkurve; zweitens gestattet sie eine direkte Bestimmung von n_0 , respektive c_0 , wenn gleichzeitig die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit gemessen wird. Man ist daher nicht nur in der Lage, einen Mittelwert von c_0 für die Erdoberfläche zu gewinnen, sondern kann eventuell auch größere geologische Abnormalitäten in der Nähe eines Beobachtungsortes erschließen.

Ist c_0 einmal genügend genau für einen Ort bekannt, so gibt ferner Gleichung 27 oftmals ein Mittel an die Hand, wenn die Zeit des Eintreffens des ersten Stoßes in einer Nachbarstation bekannt ist, die Richtung, in der das Epizentrum liegt, genauer zu bestimmen, als dies aus den zwei Horizontalkomponenten des Stoßes geschehen kann.

Schließlich aber, und das scheint mir nicht unwichtig zu sein, gilt Gleichung 27 auch für den Fall, daß Scherungswellen (Torsionswellen) das Erdinnere durchziehen. Sollte es sich als richtig herausstellen, daß die zweiten Vorläufer solche Scherungswellen sind, dann könnte man auch für diese Wellen nach der weiter unten zu besprechenden Methode die Geschwindigkeit in verschiedenen Tiefen der Erde berechnen, aus den Geschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen unter Annahme eines Dichtigkeitsgesetzes die zwei Elastizitätskonstanten für die verschiedenen Erdschichten bestimmen und so zur Lösung eines wichtigen geophysikalischen Problems gelangen.

4. Experimentelle Prüfung der Beziehung zwischen Emergenzwinkel und Laufzeitkurve.

Um die Anwendbarkeit der Theorie zu prüfen und um zu untersuchen, wie weit die von Schlüter bestimmten Emergenzwinkel den zu erwartenden mittleren entsprechen und daher für weitergehende Schlüsse zu verwenden sind, und um schließlich eine eventuelle Korrektur der von mir in der ersten Abhandlung aufgestellten Laufzeitkurve zu gewinnen, habe ich folgenden Weg eingeschlagen.

Es wurden zunächst die von Schlüter gefundenen $\cos e_0$ zu den entsprechenden Epizentralentfernungen Δ als Abszissen

aufgetragen, diese Werte sind in Fig. 4 durch kleine Kreise gekennzeichnet; dann wurde die eingezeichnete Kurve hindurchgelegt. Der Zug dieser Kurve ist natürlich mit einer gewissen Willkür behaftet, die durch die geringe Anzahl der Beobachtungen bedingt ist. Mir kam es aber zunächst nur darauf an, zu untersuchen, ob die auffallende Einbiegung der Kurve eine reelle Grundlage hat.

Hierauf wurden durch mechanische Quadratur die Werte

$$1000 \int_2^{\Delta} \cos e_0 d\Delta$$

gebildet (der Faktor 1000 ist durch die Entfernungsmessung in Megametern bedingt).

Da, wie wir gesehen haben, allgemein die Gleichung besteht:

$$\frac{dT}{d\Delta} = n_0 \cos e_0,$$

ergibt sich:

$$T = n_0 \int_2^{\Delta} \cos e_0 d\Delta + C. \quad (28)$$

Es handelt sich also nur um die Annahme eines Wertes für $n_0 = \frac{1}{c_0}$, den reziproken Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in der äußersten Erdrinde; c_0 muß jedenfalls größer sein als 3.3 km/Sek. , da dieser Wert den Oberflächenwellen entspricht und kleiner als 7.5 km/Sek.

Den Wert von zirka 7.5 km/Sek. findet Imamura¹ bei Untersuchung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\left(\frac{\Delta}{T}\right)$ der ersten Vorläufer bei Nahebeben für Epizentraldistanzen bis zirka einen Megameter; da wir berechtigt sind, anzunehmen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Nähe der Oberfläche gegen das Erdinnere zunimmt, ist der Wert von 7.5 km/Sek. als ein Mittelwert zwischen c_0 und c_h anzusehen ($c_h =$ Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Herdtiefe).

¹ Publ. Earthquake Inv. Com. No 18, 1904, p. 102.

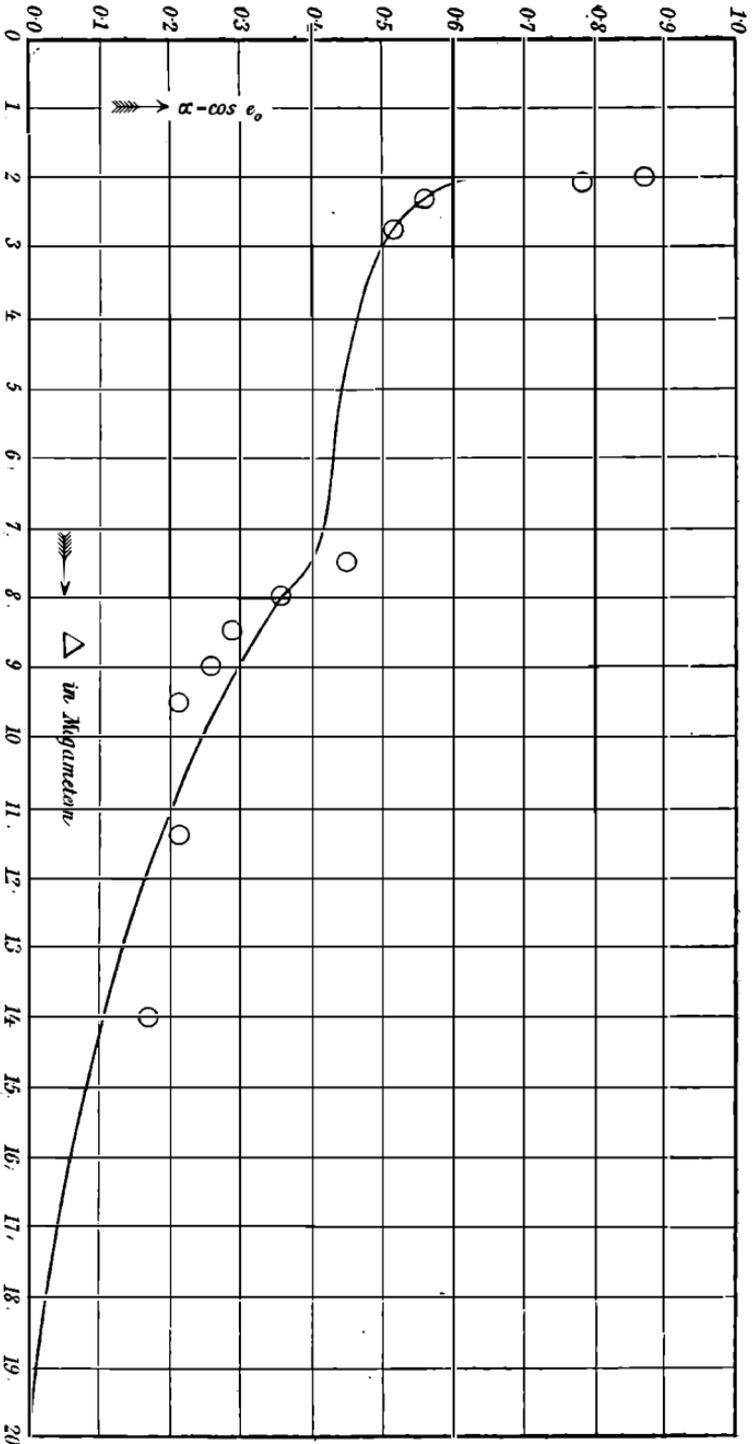


Fig. 4.

Ich habe mich nach einigen Versuchen für die Werte

$$c_0 = 5.5 \text{ km/Sek.},$$

$$n_0 = \frac{1}{5.5} = 0.18 \text{ Sek./km}$$

entschieden und behalte ihn im Laufe dieser Untersuchung bei. Ich will damit natürlich nicht behaupten, daß dies schon der richtige Wert sei, erst ein viel ausgedehnteres Beobachtungsmaterial über Emergenzwinkel kann hier die Entscheidung bringen. Für das Wesentliche meiner Ausführungen ist es übrigens irrelevant, ob dieser Wert genau richtig ist oder nicht.

Zur Bestimmung der Integrationskonstante C muß ein Wert für T als bekannt angenommen werden; ich habe dafür den Wert $T = 732$ Sek. bei einer Distanz $\Delta = 9.0$ Megameter angenommen, weil dies der sicherste Punkt der Laufzeitkurve ist. Auf Grund dieser Zahl ergibt sich für $C = 174$ Sek.

Wir erhalten somit aus der Emergenzwinkelkurve eine neue Laufzeitkurve; die entsprechenden Zahlen sind in nachstehender Tabelle II zusammengestellt.

Um nun davon ein Bild zu geben, wie diese Kurve mit den Beobachtungen stimmt, habe ich in Fig. 1 meiner ersten Abhandlung die neue T -Kurve eingetragen; in Fig. 5 sind die Beobachtungswerte sowie die mit T_1 bezeichnete Kurve eine Kopie der alten, die mit T bezeichnete untere Kurve die neu berechnete.

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung im allgemeinen eine überraschend gute, woraus man wohl schließen darf, daß die Voraussetzungen der Theorie erfüllt und die Emergenzwinkelbestimmungen Schlüter's den Mittelwerten nahekommen.

Im speziellen ergeben sich für große Werte von Δ kleinere Zeiten als ich sie ursprünglich angenommen habe; wieweit das richtig ist, kann erst die Erfahrung lehren. Jedesfalls ist aber die neue T -Kurve für große Werte von Δ besser begründet, wie die alte, die mangels an Beobachtungen nach Gutdünken gezogen werden mußte, während die neue sich als Integralkurve der Emergenzwinkellinie ergibt.

Tabelle II.

	Δ															
	2·0	3·0	4·0	5·0	6·0	7·0	8·0	9·0	10·0	11·0	12·0	14·0	16·0	18·0	20·0	
$\cos \epsilon_0 \dots \dots \dots$	0·64	0·51	0·47	0·44	0·43	0·42	0·36	0·30	0·25	0·21	0·17	0·11	0·06	0·025	0·00	
$\epsilon_0 \dots \dots \dots$	50°	60°	62°	63°	65°	67°	69°	72°	74·5°	77°	80°	84°	87°	89°	90°	
$1000 \int_2^{\Delta} \cos \epsilon_0 d\Delta \dots \dots$		554	1040	1490	1930	2350	2750	3070	3340	3570	3760	4030	4200	4286	4311	
$T = 174 + 1000 \times 5 \cdot 5 \int_2^{\Delta} \cos \epsilon_0 d\Delta$ in Sekunden $\dots \dots \dots$	174	275	363	445	525	601	674	732	781	823	857	907	939	953	960	
T in Minuten $\dots \dots \dots$	2·9	4·58	6·05	7·42	8·75	10·0	11·2	12·2	13·0	13·7	14·3	15·1	15·6	15·9	16·0	

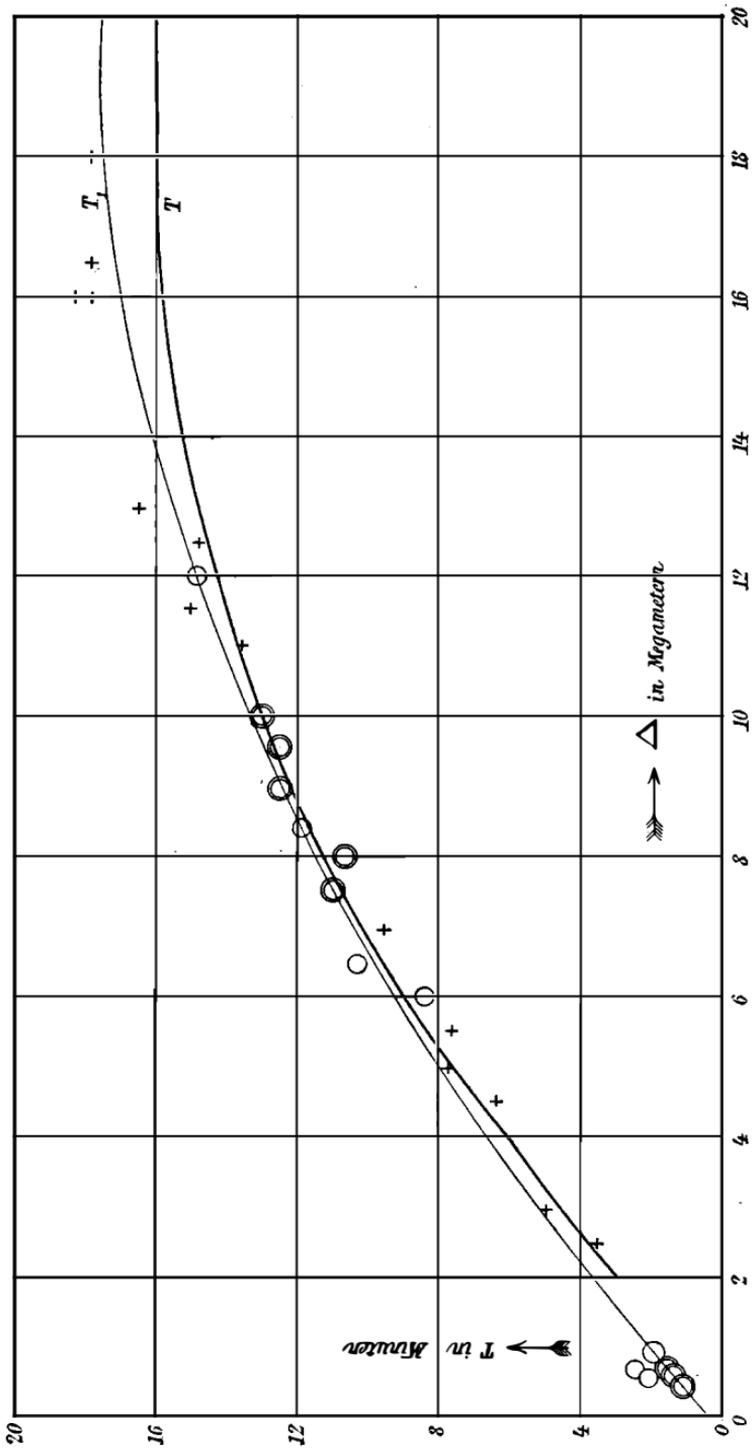


Fig. 5.

Wenn nun auch die Emergenzwinkel für Distanzen, die größer als 12 Megameter sind, nicht bestimmt sind, so weiß man doch aus der Theorie, daß sie mit wachsender Distanz dem Grenzwerte von 90° zustreben müssen, wodurch man über den ungefähren Verlauf der $\cos e$ -Kurve orientiert ist.

Was mir aber bei der neuen T -Kurve gegenüber der alten besonders bemerkenswert scheint, ist, daß sie sich im Intervalle von $\Delta = 2$ bis 8 Megameter viel besser den Beobachtungen anschließt.

In meiner ersten Abhandlung schrieb ich darüber: »Bedenklicher könnte erscheinen, daß zwischen $\Delta = 3$ und $\Delta = 6$ alle Punkte unterhalb der berechneten Kurve liegen, obgleich diesen Daten kein großes Gewicht zukommt; und es erscheint mir in der Tat möglich, daß ein reichlicheres Beobachtungsmaterial im angegebenen Intervall eine Einsenkung der Kurve erfordern wird. . . «; damals war mir die Beziehung zwischen Laufzeitkurve und Emergenzwinkel unbekannt.

Die neu berechnete T -Kurve zeigt nun in der Tat diese Einsenkung, und zwar ist sie hervorgerufen durch das sekundäre Maximum im Emergenzwinkelgraph. Ich glaube daher, ohne zu weit zu gehen, sagen zu können, wie immer es sich auch mit dem Absolutbetrage der Emergenzwinkel verhalten mag, jedenfalls ist im Intervalle zwischen $\Delta = 3$ und $\Delta = 7$ $\frac{d \cos e_0}{d\Delta}$ relativ klein und infolgedessen

$$\frac{d^2 T}{d\Delta^2} = n_0 \frac{d \cos e_0}{d\Delta}$$

auch klein, woraus folgt, daß die T -Kurve in diesem Intervalle nahe geradlinig verläuft.

Aus dieser Tatsache werden sich dann weiterhin wichtige Schlüsse über den Verlauf der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Erdinneren ergeben.

Über den Verlauf der T -Kurve im Intervalle $\Delta = 0$ bis $\Delta = 2$ bestimmte Annahmen zu machen, halte ich noch für verfrüht. Bei diesen Distanzen spielt die bei verschiedenen Beben variable Herdtiefe schon eine beträchtliche Rolle, so daß es sich als notwendig erweisen wird, das Beobachtungsmaterial

nach Größenklassen von Herdtiefen zu sondern, wozu jetzt noch zu wenig Daten vorliegen.

Den folgenden Untersuchungen habe ich die neue T -Kurve, respektive deren Werte in Tabelle II und die entsprechenden Werte von $\cos e_0$ zu Grunde gelegt.

5. Methode zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Erdinneren.

Als bekannt setzen wir voraus den Wert von $n_0 = \frac{1}{c_0}$ und eine genügend genaue Laufzeitkurve der ersten Vorläufer; in Ermangelung besserer Werte wollen wir

$$n_0 = \frac{1}{5.5} = 0.18 \text{ Sek./km}$$

und die Laufzeitkurve auf Fig. 5, respektive die Werte von T der Tabelle II unseren Rechnungen zu Grunde legen.

Wir beginnen zunächst mit so großen Distanzen, daß die Tiefe des Bebenherdes zu vernachlässigen, also genügend genau $T^{(w)} = T$ und $\Delta^{(w)} = \Delta$ zu setzen ist. Greifen wir nun ein beliebiges $\Delta = \Delta_{\alpha_1}$ heraus, suchen dazu das betreffende $T = T_{\alpha_1}$, so finden wir den dazugehörigen Parameter $\alpha_1 = \cos e_0$ aus der Laufzeitkurve durch die Gleichung

$$\alpha_1 = \frac{1}{n_0} \left(\frac{dT}{d\Delta} \right)_{\Delta = \Delta_{\alpha_1}}$$

Wir können uns also zwei Kurven zeichnen, wo α als Abszisse und Δ , respektive T als Ordinaten aufgetragen sind (die Funktionen $\psi_1(\alpha)$ und $\psi_2(\alpha)$ des zweiten Abschnittes).

Fig. 6 gibt ein Bild des Verlaufes dieser beiden Kurven und Tabelle III enthält die entsprechenden Werte.

Betrachten wir nun den Stoßstrahl, der zum Parameter α_1 gehört, so wird er bis zu einer gewissen maximalen Tiefe ρ_m in die Erde eindringen; kennen wir ρ_m , so findet sich der Wert des Brechungsexponenten v_m aus der Gleichung $v_m \rho_m = \alpha_1$. Kennt man nun z. B. ρ_m für jedes α , so ließe sich dann das v_m berechnen und umgekehrt; wir hätten dann für jedes α das dazugehörige Wertepaar v_m und ρ_m .

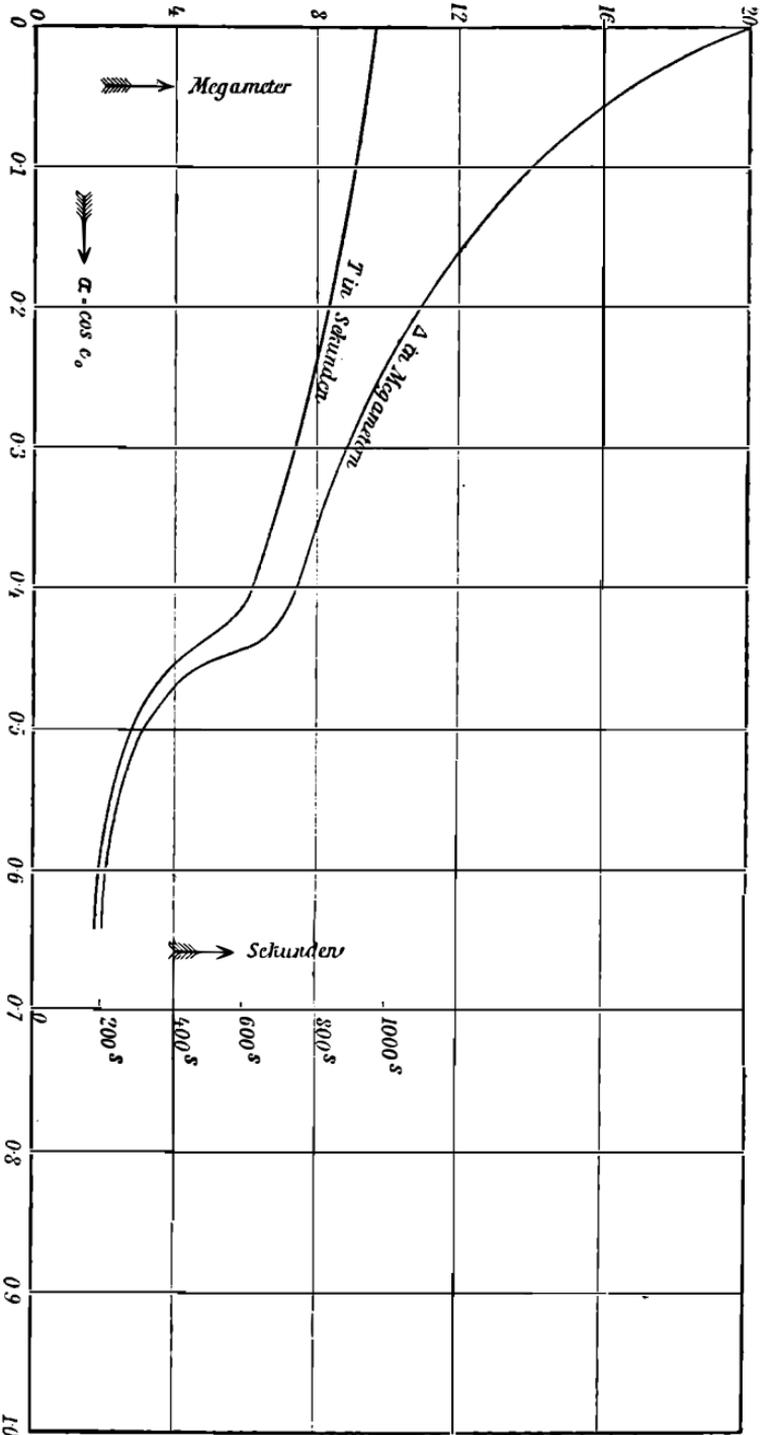


Fig. 6.

Tabelle III.

	Δ Megameter	T Sekunden
$\alpha = 0.00\dots$	20.0	960
0.10...	14.3	913
0.20...	11.0	825
0.30...	8.90	730
0.40...	7.45	635
0.42...	6.90	595
0.44...	5.30	473
0.46...	4.20	383
0.48...	3.60	330
0.50...	3.15	287
0.60...	2.15	188
0.64...	2.00	173

Wir wollen die Geschwindigkeit c als Funktion von r kennen lernen; dies ist erreicht, wenn wir $v = \frac{c_0}{c}$ als Funktion von $\rho = \frac{r}{r_0}$ $v = F(\rho)$ darstellen können.

Denke man sich ρ als Abszisse, v als Ordinaten aufgetragen, so stellt die Bedingung $v\rho = \alpha_1$ eine gleichseitige Hyperbel dar, wie sie in Fig. 7 z. B. aufgezeichnet ist; jedem Wert von α_1 , also jedem Stoßstrahle ist eine Hyperbel zugeordnet.

Das einem Stoßstrahle mit dem Parameter α_1 zugeordnete Wertepaar v_m, ρ_m muß also irgend einem Punkte der betreffenden Hyperbel zugehören.

Dadurch nun, und das ist das Wesen der Methode, daß man ρ_m oder v_m in immer engere Grenzen einschließt, wird das Stück auf der Hyperbel, innerhalb deren der Punkt liegen kann, immer kleiner. Man erhält so auf den einzelnen Hyperbeln Punkte, die der gesuchten Kurve $v = F(\rho)$ angehören.

Bei der wirklichen Ausführung dieser Methode muß man aber darüber orientiert sein, ob v im ganzen Intervall $0 \leq \rho \leq 1$ mit steigendem ρ wächst oder ob es Bereiche gibt, innerhalb deren v mit wachsendem ρ abnimmt.

Der allgemeinen Orientierung über diesen Punkt ist der nächste Abschnitt gewidmet.

6. Kriterium für die Zunahme von ν .

Allgemeine Voraussetzung sei wieder, daß die kritische Funktion $\varphi(\rho) = \nu\rho$ im ganzen Intervalle mit zunehmendem ρ

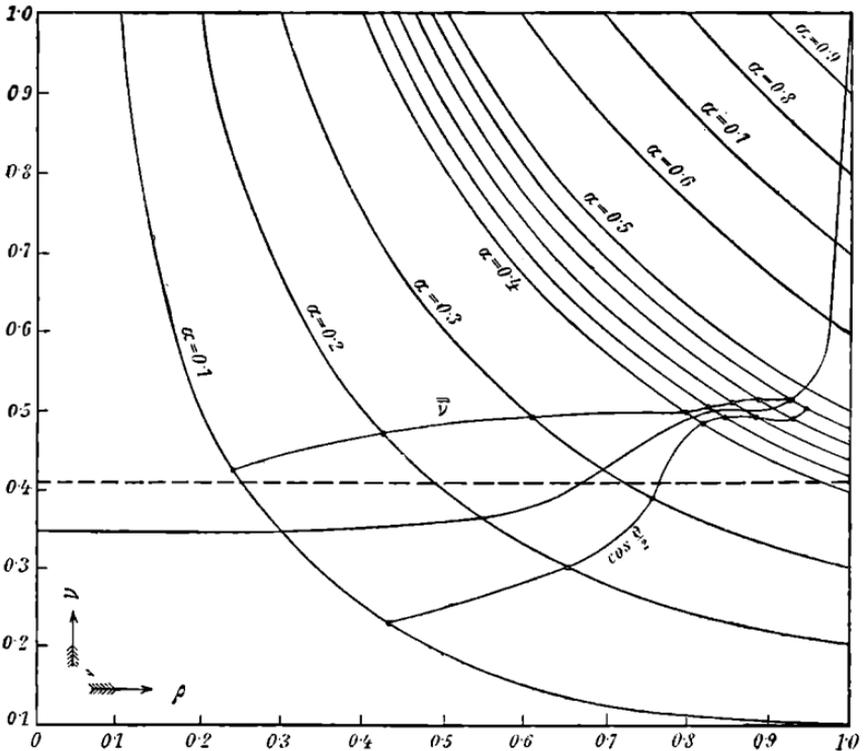


Fig. 7.

wächst und daß ferner die Untersuchung sich auf so große Distanzen erstreckt, daß der Bebenherd genügend genau als in der Oberfläche befindlich angenommen werden darf; ist dies der Fall, so besteht zwischen der Gesamtkrümmung Φ eines Bebenstrahles, dem Epizentralwinkel Θ und dem Emergenzwinkel e_0 die Beziehung

$$\Phi = 2e_0 - \Theta. \quad 29)$$

Da wir Θ als Funktion von $\alpha = \cos e_0$ kennen, läßt sich auch Φ als Funktion von α aus Gleichung 29 bestimmen; es ergeben sich für Φ die Werte

	Φ
$\alpha = 0.0 \dots\dots$	0.0
0.1	39.7
0.2	57.9
0.28	64.2
0.30	64.8
0.38	66.1
0.40	65.4
0.41	66.2
0.42	67.8
0.44	69.8
0.46	87.2
0.48	90.1
0.50	91.6
0.54	90.6
0.60	87.1
0.64	83.0,

welche in Fig. 8 als Kurve eingetragen sind. Den Verlauf von Φ wollen wir nun benützen, um ein Kriterium über die Zunahme von ν zu gewinnen.

Zunächst läßt sich zeigen, daß für jeden Wert von α , für den $\frac{d\Phi}{d\alpha} \leq 0$ ist, $\left(\frac{d\nu}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_m} > 0$ sein muß; da nun jedem α ein bestimmtes ρ_m entspricht, ergibt sich daraus, daß in allen Intervallen, in denen $\frac{d\Phi}{d\alpha} \leq 0$ ist, ν mit wachsendem ρ zunehmen muß.

Um dies zu beweisen, greifen wir einen bestimmten Stoßstrahl mit dem Parameter α_1 und einen zweiten, benachbarten, mit dem Parameter α_2 , wobei $\alpha_2 > \alpha_1$ sein soll; die entsprechenden Gesamtkrümmungen seien Φ_{α_1} und Φ_{α_2} , die größten Eindringungstiefen ρ_{m_1} und ρ_{m_2} .

Für die Gesamtkrümmung Φ fanden wir den Ausdruck Gleichung 17; wir können daher schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha_1} &= 2\alpha_1 \int_{\rho_{m_1}}^{\rho_{m_2}} \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} + 2\alpha_1 \int_{\rho_{m_2}}^1 \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} = \\ &= \Phi'_{\alpha_1} + \Phi''_{\alpha_1} \quad 30) \end{aligned}$$

und

$$\Phi_{\alpha} = 2\alpha_2 \int_{\rho_{m_2}}^1 \frac{\frac{dv}{d\rho} \cdot d\rho}{v \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha_2^2}}. \quad (31)$$

Zunächst sieht man leicht ein, daß Φ'_{α_1} immer kleiner sein muß als Φ_{α_2} , da der Nenner des Integrals im ganzen Integra-

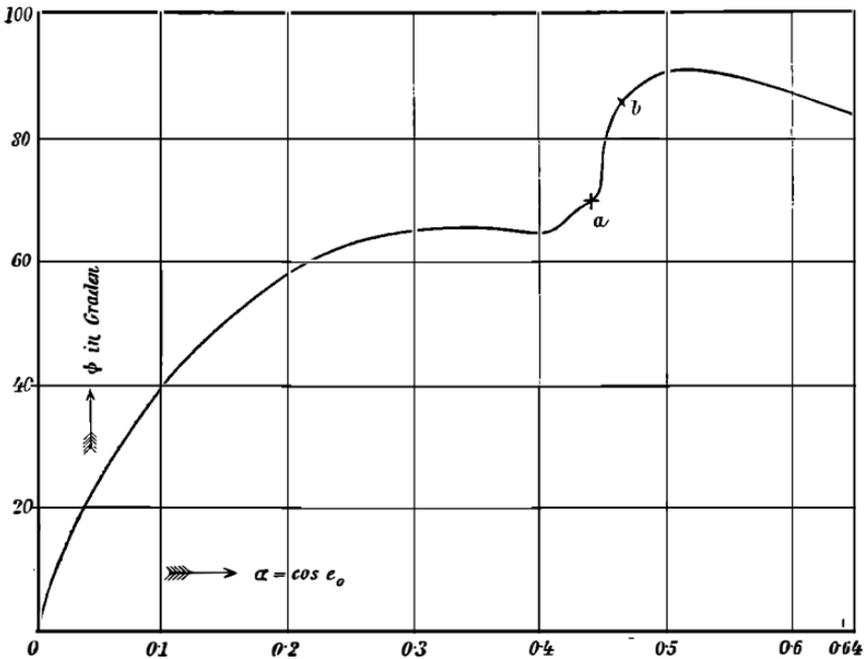


Fig. 8.

tionsintervall durchaus größer ist, da $\alpha_1 < \alpha_2$. Wenn nun $\Phi_{\alpha_1} \cong \Phi_{\alpha_2}$ sein soll, und dies ist der Fall, wenn $\frac{d\Phi}{d\alpha} \leq 0$, so muß

$$\Phi'_{\alpha_1} = 2\alpha_1 \int_{\rho_{m_1}}^{\rho_{m_2}} \frac{\frac{dv}{d\rho} \cdot d\rho}{v \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha_1^2}}$$

notwendig positiv sein, d. h. $\frac{dv}{d\rho}$ muß positiv sein im Intervall ρ_{m_1} bis ρ_{m_2} oder v muß mit wachsendem ρ zunehmen, q. e. d.

Wir sehen aus Fig. 8, daß v sicher zunimmt im Intervall $\alpha = 0.35$ bis $\alpha = 0.4$ und ferner $\alpha = 0.5$ bis $\alpha = 0.64$.

Es fragt sich nun nur noch, was man schließen kann, wenn $\frac{d\Phi}{d\alpha} > 0$ ist.

Wir wollen uns folgender Schlußweise bedienen.

Es ist

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} = \lim_{\alpha_2 = \alpha_1} \left[\frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi_{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right]$$

oder, wenn wir genügend kleine endliche Differenzen wählen:

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1,$$

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} = \frac{\Delta\Phi_{\alpha_1}}{\Delta\alpha} = \frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi_{\alpha_1}}{\Delta\alpha} = \frac{\Phi'_{\alpha_1}}{\Delta\alpha}.$$

Nehmen wir nun an, daß v im Intervalle ρ_{m_1} bis ρ_{m_2} mit wachsendem ρ abnimmt oder höchstens gleich groß bleibt, so wird

$$\Phi'_{\alpha_1} \leq 0,$$

woraus dann folgt:

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} \geq \frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi_{\alpha_1}}{\Delta\alpha}. \quad (32)$$

Nun ist aber genügend genau

$$\frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi_{\alpha_1}}{\Delta\alpha} = \left[\frac{\partial \Phi_{\alpha_1}}{\partial \alpha} \right]_{\rho_{m_2}} = \text{const}$$

und, wenn wir unter dem Integrale differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{\alpha_2} - \Phi_{\alpha_1}}{\Delta\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[2\alpha_1 \int_{\rho_{m_2}}^1 \frac{\frac{dv}{d\rho} \cdot d\rho}{v \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}} \right] = \\ &= 2 \int_{\rho_{m_2}}^1 \frac{\frac{dv}{d\rho} \cdot d\rho}{v \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}} + 2\alpha_1^2 \int_{m_2}^1 \frac{\frac{dv}{d\rho} \cdot d\rho}{v \sqrt{(v^2 \rho^2 - \alpha_1^2)^3}}. \quad (33) \end{aligned}$$

Das zweite Integral der rechten Seite läßt sich nach dem Mittelwertsatz auch schreiben:

$$2\alpha_1^2 \int_{\rho_{m_2}}^1 \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{(\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2)^3}} = \frac{2\alpha_1^2}{\nu_x^2 \rho_x^2 - \alpha_1^2} \int_{\rho_{m_2}}^1 \frac{\frac{d\nu}{d\rho} \cdot d\rho}{\nu \sqrt{\nu^2 \rho^2 - \alpha_1^2}} = \\ = \frac{\alpha_1}{\nu_x^2 \rho_x^2 - \alpha_1^2} \cdot \Phi_{\alpha_1}'' ,$$

wobei $\nu_x^2 \rho_x^2$ einen Mittelwert bedeutet, der zwischen $\nu_{m_2}^2 \rho_{m_2}^2$ und 1 liegt.

Gleichung 33 läßt sich also auch schreiben:

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} \geq \frac{\Phi_{\alpha_1}''}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\nu_x^2 \rho_x^2 - \alpha_1^2} \cdot \Phi_{\alpha_1}'' = \Phi_{\alpha_1}'' \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{\nu_x^2 \rho_x^2 - \alpha_1^2} \right). \quad 34)$$

Setzen wir $\nu_x^2 \rho_x^2 = 1$, so wird die rechte Seite der Gleichung 34 jedenfalls kleiner, ebenso, wenn wir statt Φ_{α_1}'' : Φ_{α_1} einsetzen; es bleibt somit um so mehr die Ungleichung bestehen:

$$\frac{d\Phi_{\alpha_1}}{d\alpha} > \Phi_{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_1(1-\alpha_1^2)} \quad 35)$$

oder

$$\alpha_1(1-\alpha_1^2) > \Phi_{\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha}{d\Phi_{\alpha_1}}. \quad 36)$$

Da die rechte Seite der Gleichung 36 die Subtangente der Φ -Kurve im Punkt α_1 angibt, können wir sagen: Wenn ν mit wachsendem ρ abnimmt oder höchstens konstant bleibt, also $\frac{d\nu}{d\rho} \leq 0$ ist, dann muß die Subtangente der Φ -Kurve im Punkt α_1 kleiner sein als der Ausdruck $\alpha_1(1-\alpha_1^2)$.

Ist also die Subtangente größer als $\alpha_1(1-\alpha_1^2)$, so muß $\frac{d\nu}{d\rho} > 0$ sein.

Den Inhalt dieses Abschnittes zusammenfassend, kann man sagen:

Konstruiert man eine Kurve der Gesamtkrümmung Φ , indem man zum Parameter α als Abszisse den entsprechenden

Wert von Φ als Ordinate einträgt, so lassen sich aus dem Verlaufe der Φ -Kurve folgende Schlüsse ziehen.

Ist in irgend einem Punkt α_1 $\frac{d\Phi}{d\alpha} \leq 0$, so folgt daraus, daß im Abstände ρ_{m_1} vom Erdmittelpunkte ν mit wachsendem ρ zunimmt, $\frac{d\nu}{d\rho} > 0$ ist. In Punkten α_1 , wo $\frac{d\Phi}{d\alpha} > 0$ ist, hat man zu untersuchen, ob die Subtangente der Φ -Kurve größer ist als $\alpha_1(1-\alpha_1^2)$; ist dies der Fall, so ist auch für solche Punkte ρ_{m_1} , die diesen Parameterwerten α_1 zugeordnet sind, $\frac{d\nu}{d\rho} > 0$, d. h. ν nimmt mit wachsendem ρ zu. Nur für solche α , respektive ρ_m kann $\frac{d\nu}{d\rho} \leq 0$ sein, für die $\alpha_1(1-\alpha_1^2)$ größer ist als die Subtangente der Φ -Kurve.

Untersucht man unsere Spezialkurve Fig. 8 daraufhin, so zeigt es sich, daß, wenn ν überhaupt abnimmt mit wachsendem ρ , dies nur im Intervall $\alpha = 0.44$ und $\alpha = 0.46$ der Fall sein kann.

7. Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Tiefen der Erde.

Ich will nun zur wirklichen Anwendung der im fünften Abschnitte gegebenen Methode schreiten, die dadurch wesentlich erleichtert wird, daß, wie der vorangehende Abschnitt gezeigt hat, wenn ν überhaupt irgendwo mit wachsendem ρ abnimmt, dies nur in dem kleinen Intervall $\alpha = 0.44$ bis $\alpha = 0.46$ stattfinden kann; da nun im zweiten Abschnitte gezeigt ist, daß $-\frac{d\nu}{d\rho} < \frac{\nu}{\rho}$ sein muß, kann eine erhebliche Abnahme von ν überhaupt nicht eintreten.

In Anbetracht des noch so unsicheren Zahlenmaterials will ich mich auf eine erste Annäherung beschränken und da können wir dann ruhig annehmen, daß ν überhaupt nicht abnimmt.

Die Bahn des Stoßstrahles für $\alpha = 0$ ist ein Erddurchmesser; infolgedessen ist

$$T_0 = 2n_0 r_0 \int_0^1 v d\rho = 2n_0 r_0 \bar{v},$$

wobei \bar{v} den Mittelwert von v im Intervalle 0 bis 1 darstellt, und zwar ist

$$\bar{v} = \int_0^1 v \cdot d\rho = \int_0^1 F(\rho) d\rho;$$

da nun $T_0 = 960$ Sek. ist, wird $\bar{v} = 0.415$ der Mittelwert der gesuchten Funktion $F(\rho)$.

Für ρ_m läßt sich leicht eine obere Grenze angeben; es muß jedenfalls für jeden Stoßstrahl ρ_m kleiner sein als der Abstand der dem Strahl zugehörigen Sehne vom Erdmittelpunkt, also $\rho_m < \cos \frac{\Theta}{2}$. Berechnet man also für jedes α das zugehörige Θ und trägt die Werte von $\cos \frac{\Theta}{2}$ auf den Hyperbeln auf, so erhält man die Punkte, die in Fig. 7 eingezeichnet sind und weiß, daß die Kurve für $v = F(\rho)$ jedenfalls ober ihnen zu liegen kommt.

Andererseits findet sich eine untere Grenze für v_m auf folgende Weise. Die Zeit T ist gegeben durch die Gleichung 15

$$T = 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{v^2 \rho \cdot d\rho}{\sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}};$$

nach dem Mittelwertsatz kann man schreiben:

$$T = \bar{v} \cdot 2n_0 r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{v \rho d\rho}{\sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}},$$

wobei \bar{v} einen Mittelwert von v bedeutet, so daß $v_m < \bar{v} < 1$ ist, wenn v im ganzen Intervalle $\rho_m \leq \rho \leq 1$ wächst mit wachsendem ρ .

Nun ist aber nach Gleichung 13

$$2r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{v \rho d\rho}{\sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}} = L$$

der Länge der Stoßstrahlkurve, also $T = \bar{v} n_0 L$; setzt man in der rechten Seite dieser Gleichung für L einen Wert ein, der

kleiner ist als L , z. B. die Länge der dem Stoßstrahl entsprechenden Sehne

$$S = 2r_0 \sin \frac{\theta}{2},$$

so wird

$$\bar{v} < \frac{T}{n_0 S}$$

und um so mehr

$$v_m < \frac{T}{2n_0 r_0 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

In Tabelle IV sind die berechneten Werte zusammengestellt.

Tabelle IV.

	Δ Megameter	$\frac{\theta}{2}$	T Sekunden	$\cos \frac{\theta}{2}$	$\frac{T}{n_0 S}$
$\alpha = 0.0 \dots$	20.0	90°	960	0.00	0.416
0.1 ...	14.3	64.4°	913	0.43	0.437
0.2 ...	11.0	49.5	825	0.65	0.472
0.3 ...	8.90	40.1	730	0.77	0.490
0.4 ...	7.45	33.5	635	0.83	0.499
0.42 ...	6.90	31.1	595	0.86	0.498
0.44 ...	5.30	23.9	473	0.91	0.507
0.46 ...	4.20	18.9	383	0.95	0.513
0.48 ...	3.60	16.2	330	0.96	0.513

Zu höheren Werten von α bin ich nicht gegangen, da sich dann bereits der Einfluß der Herdtiefe zu zeigen beginnt.

Die Werte von $\frac{T}{2n_0 r_0 \sin \frac{\theta}{2}}$ sind ebenfalls in Fig. 7 ein-

gezeichnet und durch einen Linienzug (\bar{v}) verbunden; da nun $v_m < \bar{v}$ sein muß, muß die gesuchte Kurve für v unterhalb dieser Werte verlaufen.

Ich habe nun eine v -Kurve in Fig. 7 so eingezeichnet, daß für $\rho = 1$ $v = 1$ wird, die Linie zwischen den beiden Punktreihen so hindurchgeht, daß das Integral

$$\int_0^1 v d\rho = 0.42$$

wird. Dadurch ist, wie man sieht, die Kurve $v = F(\rho)$ schon ziemlich genau bestimmt. Angenommen, daß die Zahlenwerte annähernd der Wirklichkeit entsprechen, gibt uns diese Kurve ein Bild über den Verlauf der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Erdinneren, die eventuell zwischen $\alpha = 0.44$ und $\alpha = 0.46$ eine Korrektur in dem Sinne bedarf, daß v eine Strecke hindurch abnimmt. Im großen und ganzen dürfte aber das Bild richtig sein.

In folgender Tabelle habe ich die Zahlenwerte zusammengestellt, die sich für v und daraus für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bebenwellen ergeben; außerdem sind noch die Emergenzwinkel angegeben, die Strahlen entsprechen, die bis zur betreffenden Tiefe in das Erdinnere eindringen. Fig. 9 gibt eine graphische Darstellung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Funktion der Entfernung vom Erdmittelpunkte.

Tabelle V.

ρ	v	c in Kilometer pro Sekunde	e_0
$\rho = 0.0$	0.35	15.7	90°
0.1	0.35	17.7	88
0.2	0.35	15.7	86
0.3	0.35	15.7	84
0.4	0.35	15.7	82
0.5	0.36	15.3	80
0.6	0.38	14.5	77
0.7	0.44	12.7	73
0.8	0.49	11.3	67
0.85	0.50	11.1	65
0.90	0.50	11.0	63
0.95	0.54	10.3	59
0.975	0.63	8.8	52
1.00	1.00	5.5	0

Im großen ergibt sich also folgendes Bild für den Verlauf von c .

Im Erdmittelpunkt ist c ein Maximum (15.7 km/Sek.) und nimmt kontinuierlich gegen die Oberfläche zu ab, bei etwa $\frac{4}{5}$ des Erdradius tritt ein Stillstand in der Abnahme (eventuell sogar ein kleiner Anstieg) ein, um bei etwa $\frac{19}{20}$ des Erdradius

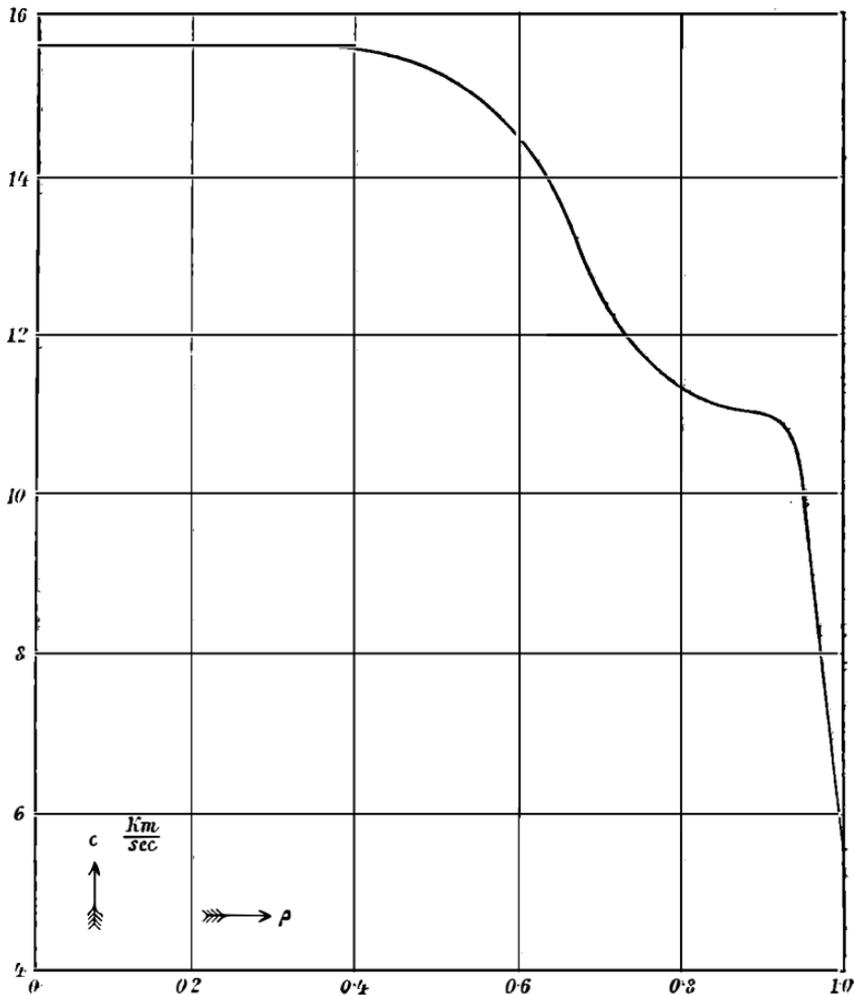


Fig. 9.

einem rapiden Abfall auf den Oberflächenwert von 5.5 km/Sek. Platz zu machen. So unsicher die Absolutwerte und so roh die Annäherung auch sein mag, so scheinen doch ungefähr die beiden Punkte $\rho = \frac{4}{5}$ und $\rho = \frac{19}{20}$ als charakteristische Stellen der c -Kurve.

Dies steht in schönster Übereinstimmung mit der Wiechertschen Theorie, die im Wesentlichen eine plötzliche Änderung des Erdmaterials bei etwa $\frac{4}{5}$ des Erdradius verlangt; andererseits ist die Existenz der Milne-Láska'schen Kruste von $\frac{1}{20}$ Erdradiusdicke angedeutet.

Wenn ausgedehnteres Beobachtungsmaterial vorliegt, als es gegenwärtig der Fall ist, können eventuell weitere Regeln zur Gewinnung von Näherungswerten von c mit Vorteil Anwendung finden; darauf, sowie auf die geophysikalischen Folgerungen, die sich aus dem Verlaufe der c -Kurve ziehen lassen, hoffe ich in einer späteren Mitteilung zurückzukommen.

Bis jetzt haben wir nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in größeren Tiefen der Erde behandelt; um ihre Veränderung in der Nähe der Erdoberfläche zu studieren, müssen andere Wege eingeschlagen, die im nächsten Abschnitte besprochen werden sollen.

8. Berechnung der Herdtiefe und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche.

Als gegeben vorausgesetzt sei wieder n_0 und die Laufzeitkurve, sei es die eines bestimmten Bebens oder eine mittlere; im folgenden ist der Einfachheit halber überall der Index (w) bei den einzelnen Größen weggelassen. Aus der Beziehung Gleichung 26

$$\frac{1}{n_0} \frac{dT}{d\Delta} = \alpha$$

ergibt sich für jedes T und Δ das zugehörige α . An einer Stelle der Laufzeitkurve wird $\frac{d^2T}{d\Delta^2} = 0$, die zugehörigen Werte seien T_h , Δ_h und α_h ; sie zeichnet sich dadurch aus,¹ daß dort die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit ein Minimum wird und der zugehörige Stoßstrahl NN' (Fig. 3) trennt die Schar der Strahlkurven in zwei Gruppen.

In die eine Gruppe gehören alle Stoßstrahlen, die Epizentralentfernungen entsprechen, die kleiner als Δ_h sind; in die zweite Gruppe die übrigen. Zu einem Werte von α gehören

¹ Siehe z. B. Rudzki, l. c.

also immer zwei Werte von Δ , einer, Δ_i , kleiner als Δ_h , der andere Δ_a , größer.

Wir beginnen mit Werten von Δ , die kleiner sind als Δ_h . Es besteht dann die Beziehung

$$\Delta_i = r_0 \alpha \int_{\rho_h}^1 \frac{d\rho}{\rho \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}, \quad (35)$$

wobei ρ_h die Entfernung des Bebenherdes vom Erdmittelpunkt ist; nennen wir die Herdtiefe $h = 1 - \rho_h$, führen in das Integral $\varepsilon = 1 - \rho$ als Variable ein und entwickeln v nach Potenzen von ε :

$$v = 1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots, \quad (36)$$

so wird

$$v^2 \rho^2 = 1 + (2b_1 - 1)\varepsilon + b_2 \varepsilon^2 + \dots$$

und

$$\Delta_i = r_0 \alpha \int_0^h (1 - \varepsilon)^{-1} (1 + b_1 \varepsilon + b_2 \varepsilon^2 + \dots - \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} d\varepsilon.$$

Entwickelt man unter dem Integralzeichen, multipliziert und integriert, so ergibt sich:

$$\Delta_i = \frac{r_0 \alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} (h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \dots), \quad (37)$$

wobei die Koeffizienten $A_2, A_3 \dots \alpha$ und die Koeffizienten a der Entwicklung von v enthalten.

Da nun h klein ist, kann man sich mit den ersten Gliedern der Reihe 37 begnügen und aus einer Anzahl verschiedener Δ_i , die $a_1, a_2 \dots$ und die Herdtiefe h am einfachsten wohl durch Probieren mit der nötigen Genauigkeit berechnen.

Gehen wir jetzt über Δ_h hinaus, also in das Gebiet, wo die scheinbare Oberflächengeschwindigkeit wieder zunimmt, so gelten hier die Gleichungen 7, wobei zu beachten ist, daß $\Delta^{(w)} = \Delta_a$ und $\Delta' = \Delta_i$ ist.

Es ergibt sich somit für

$$\Delta_a + \Delta_i = 2 r_0 \int_{\rho_m}^1 \frac{d\rho}{\rho \sqrt{v^2 \rho^2 - \alpha^2}}; \quad (38)$$

auch hier läßt sich eine Reihenentwicklung vornehmen, die gestattet, wenn v für einen Wert von ρ bekannt, die Werte von v in der Nähe dieses Punktes zu finden; so fortschreitend, kann man dann für beliebige Tiefen die Werte für v finden; auch hier wird die Rechnung durch Einsetzen von Näherungswerten sich vereinfachen.

Die wirkliche Durchführung dieser Rechnungen erfordert aber ein ziemlich exaktes Beobachtungsmaterial, so daß es sich vorläufig kaum der Mühe lohnen würde, eine praktische Durchrechnung zu probieren.

9. Zusammenfassung der wichtigsten Resultate.

Bezeichnet c_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen an der Erdoberfläche, T die Zeit, die der erste Stoß eines Bebens vom Herd bis zum Beobachtungsort braucht, Δ die Epizentraldistanz des Beobachtungsortes; konstruiert man ferner die Laufzeitkurve, indem zu Δ als Abszisse das zugehörige T als Ordinate aufgetragen wird, so läßt sich beweisen, daß für ein beliebiges Verteilungsgesetz der Geschwindigkeit im Erdinneren ($c = f(\rho)$),

$$c_0 \frac{dT}{d\Delta} = \cos e_0,$$

wo e_0 den Emergenzwinkel bedeutet, unter dem der betreffende Strahl die Erdoberfläche trifft; anders ausgedrückt, das Verhältnis der wirklichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit (c_0) zur scheinbaren $v^{(s)} = \frac{d\Delta}{dT}$ ist gleich dem Cosinus des Emergenzwinkels.

Diese Beziehung lehrt, daß sich aus der Laufzeitkurve die Emergenzwinkel berechnen und infolgedessen auch T und Δ als Funktion von $\alpha = \cos e_0$ sich darstellen lassen.

Eben wegen dieser Beziehung erscheint die experimentelle Bestimmung der Emergenzwinkel von großer Bedeutung; einmal ermöglicht sie eine unabhängige und noch sehr wünschenswerte Kontrolle der Laufzeitkurve; zweitens gestattet sie eine direkte Bestimmung von c_0 , wenn gleichzeitig die scheinbare

Oberflächengeschwindigkeit bekannt ist. Man ist daher nicht nur in der Lage, Mittelwerte von c_0 für die Erdoberfläche zu gewinnen, sondern kann eventuell auch größere geologische Abnormalitäten in der Nähe eines Beobachtungsortes erschließen.

Schließlich aber ist nicht unwichtig, festzustellen, daß die obige Beziehung auch für transversale Wellen gilt.

Die Prüfung dieser Beziehung an den von Schlüter experimentell bestimmten Emergenzwinkeln ergibt eine überraschend gute Übereinstimmung. Die aus den Emergenzwinkeln berechnete Laufzeitkurve fällt mit der früher bestimmten Kurve nahe zusammen und schließt sich stellenweise sogar besser an die Zeitbeobachtungen an. Der Rechnung ist ein Wert von $5 \cdot 5 \text{ km/Sek.}$ für c_0 zu Grunde gelegt worden.

Im fünften Abschnitte wird eine geometrisch-synthetische Methode angegeben, um die wirkliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der ersten Vorläufer eines Bebens in verschiedenen Erdtiefen zu bestimmen.

Die Größe c nimmt im allgemeinen mit wachsender Entfernung vom Erdmittelpunkt ab; zur Entscheidung der Frage, ob diese Abnahme eine durchgängige ist oder ob es Stellen gibt, wo c mit wachsendem Radius zunimmt, wird ebenfalls eine Methode angegeben. Ihre Anwendung auf das vorliegende Zahlenmaterial ergibt, daß, wenn überhaupt, nur in einer relativ kleinen Schicht des Erdinneren die Geschwindigkeit wächst.

Im siebenten Abschnitte wird der Versuch gemacht, trotzdem das Beobachtungsmaterial recht dürftig ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Erdinneren zu berechnen. Es ergibt sich im großen der folgende Verlauf.

Im Erdmittelpunkte ist c ein Maximum ($15 \cdot 7 \text{ km/Sek.}$) und nimmt kontinuierlich gegen die Oberfläche zu ab, bei etwa $\frac{4}{5}$ des Erdradius tritt ein Stillstand in der Abnahme (eventuell sogar ein kleiner Anstieg) ein, der anhält, bis etwa bei $\frac{19}{20}$ des Erdradius ein rapides Absinken auf den Oberflächenwert ($c_0 = 5 \cdot 5 \text{ km/Sek.}$) beginnt.

Dieses typische Verhalten steht einerseits in guter Übereinstimmung mit der Wiechert'schen Theorie des Erdinneren, was als ein die Richtigkeit bestätigendes Moment von Wert ist,

andererseits deutet es die Existenz einer von Milne und Láska angenommenen äußersten Erdkruste von $\frac{1}{20}$ Erdradiusdicke an.

Der letzte Abschnitt schließlich gibt einen Weg zur Bestimmung der Herdtiefe und der genaueren Ermittlung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Nähe der Erdoberfläche.
