Die Berechnung der Kalkauswaschung im Boden

Ein praktisches Beispiel der Anwendung der Varianzanalyse für Bodenfachleute und Landwirte

Von Friedrich Wilhelm

Mit 2 Diagrammen und 2 Ableitungen auf 2 Beilagen-Tafeln XVI und XVII

Unsere Kulturböden sind durch die dauernden Auswaschungen kalkarm geworden und dieser Prozeß geht weiter vor sich. Dieser Vorgang ist für die Landwirtschaft und ihre Erträge von großer Bedeutung. Es ist allzu begreiflich, daß man trachtet, Einblick in die Kalkverhältnisse zu gewinnen. Man kann den Kalkzustand der Böden durch pH-Wert-Bestimmung auf elektrischem Wege oder mittels Indikatoren ermitteln, doch können wir uns durch die bloßen Zahlen vom schwankenden Kalkgehalt, bedingt durch die dauernden Auswaschungen, kein sicheres Urteil bilden. Um zu einem solchen zu gelangen, kann die Einfache Streuungszerlegung, deren Anfänge durch R. A. FISHER in England in den Zwanzigerjahren unseres Jahrhunderts entwickelt wurden, angewendet werden, wobei zu beachten ist, daß gleiche Böden mit gleicher Bewirtschaftung im einheitlichen Klima gegeben sind.

Zweck: Überwachung des Kalkzustandes im Boden durch Überprüfung der pH-Werte der gezogenen Bodenproben unter Anwendung der Varianzanalyse. Es herrschen Meinungen vor, daß der Gebirgsstock des Reitings, Steiermark, die Umgebung genügend mit Kalk versorge. Diese Frage kann durch ein varianzanalytisches Rechnungsverfahren beantwortet werden.

Durchführung: Im Gemeindegebiet Gai, Bezirk Leoben, habe ich an 5 verschiedenen Stellen Pflöcke eingeschlagen, um an jenen regelmäßig Bodenproben entnehmen und die andauernde Podsolisierung verfolgen zu können. Die Bodenproben wurden jahrgangsweise (1949—1952) entnommen. Der Boden ist sandig-lehmig, bzw. lehmig-sandig und trocken.

Die erhaltenen pH-Werte wurden der Prüfung durch die Einfache Streuungszerlegung nach PETITPIERRE, Lausanne, unterworfen. Sie wurden daher pflockweise und nach Jahrgängen geordnet, die Summen gebildet und der Durchschnitt der Bodenproben errechnet.

Tabelle 1:
Festgestellte pH-Werte im Boden:

	Bodenbohrungen/pH-Wert bei Pflock					
Jahr	1	2	3	4	5	
1949	5,0	5,1	5,0	5,2	5,3	
1950	4,9	5,0	5,0	5,3	5,2	
1951	4,9	4,9	5,0	5,2	5,1	
1952	4,7	4,7	4,6	4,7	5,0	
Summe	19,5	19,7	19,6	20,4	20,6	99,8
Durchschnitte $\bar{x}$	4,87	4,92	4,90	5,10	5,15	5,0

Um einen genauen Einblick in den Verlauf der Podsolisierung zu erhalten, ist auch eine graphische Darstellung über das Absinken der pH-Werte notwendig.

Leider bekommen wir durch die graphische Festhaltung nach Jahren, pH-Werten und Pflöcken einen ziemlich unübersichtlichen Einblick in die Auswaschungsverhältnisse. Wir müssen daher einen anderen Weg beschreiten. Um zu einem anderen Bodenbild zu gelangen, stellen wir aus den mittleren quadratischen Abweichungen s und den Durchschnitten der pH-Werte $\bar{x}$ ein Bodenbild her, wobei wir das Verhältnis s zu $\bar{x}$ festhalten können (Tabelle 2); wir sehen, daß sehr große Unterschiede in den gewonnenen Werten gegeben sind. Die Berechnung der Summe der Quadrate der Abweichungen wird nach dem Schema $(x—x)^2$ berechnet, z. B.:

$$\begin{array}{l}
5{,}00 - 4{,}87 = 0{,}13^2 = 0{,}0169 \\
4{,}90 - 4{,}87 = 0{,}03^2 = 0{,}0009 \\
4{,}90 - 4{,}87 = 0{,}03^2 = 0{,}0009 \\
4{,}87 - 4{,}70 = 0{,}17^2 = 0{,}0289 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0{,}0476
\end{array}$$

Somit ist 0,0476 die Summe der Quadrate der Abweichungen SQ bei Pflock 1. Diese letztgenannte Summe muß durch den Freiheitsgrad 3, gewonnen nach dem Schema (n—1), somit (4—1), da der Unterschied zwischen vier Werten der Jahre fraglich ist, dividiert werden, um die Streuung s^2, in unserem Fall 0,0158, zu erhalten. Die Mittlere Abweichung s ist somit nichts anderes als die Quadratwurzel aus s^2, bei uns 0,1257 bei Pflock 1. Die Summe der Quadrate der Abweichungen SQ bei 15 Freiheitsgraden beträgt 0,5252 (siehe Tabelle 2).

Tabelle 2:

Pflock Nr.	Freiheitsgrad n	Summe der Quadrate der Abweichungen SQ	Streuung s^2	Mittlere Abweichung s
1	3	0,0476	0,0158	0,1257
2	3	0,0876	0,0292	0,1709
3	3	0,1200	0,0400	0,2000
4	3	0,2200	0,0733	0,2707
5	3	0,0500	0,0166	0,1299
Summe	15	0,5252	—	—

Diese festgestellten $\bar{x}$- und s-Werte werden in der Tabelle 4 graphisch dargestellt; die mittleren quadratischen Abweichungen s sind von den Durchschnitten $\bar{x}$ unabhängig und geben Differenzen. Tabelle 4 rechtfertigt die Anwendung der Einfachen Streuungszerlegung. Wir haben somit die Werte innerhalb der Gruppen erhalten.

Die Werte zwischen den Gruppen sind durch den Rechnungsvorgang

$$B = 1/4 \left\{ \frac{19{,}5^2}{4} + \frac{19{,}7^2}{4} + \frac{19{,}6^2}{4} + \frac{20{,}4^2}{4} + \frac{20{,}6^2}{4} - \frac{99{,}8^2}{4} \right\}$$

$= 1/4\ (0{,}2500) = 0{,}0625$ bestimmt.

Tabelle 3 stellt die Varianztabelle dar.

Streuung	Freiheitsgrad	Summe der Quadrate	Durchschnittsquadrat
Zwischen den Gruppen = B	4	0,2500	0,0625
Innerhalb der Gruppen	15	0.5252	0,0350
Insgesamt	19	0,7752	$F = \frac{0{,}0625}{0{,}0350} = 1{,}785$ (3,056) 0,05

Befund: Da der empirische Wert 1,785 vom Tabellenwert (3,056) 0,05 übertroffen wird, sind die Unterschiede der pH-Werte als nicht gesichert anzusehen. Die pH-Werte zeigen lt. Tabelle 1 eine fallende Tendenz, ihre Unsicherheit ist durch die vorangegangene varianzanalytische Operation bewiesen; der Kalkzustand im Boden ist als labil zu bezeichnen und ist einer weiteren Podsolierung unterworfen. Der Kalkstock des Reitings ist nicht in der Lage, seine Umgebung mit Kalk zu versorgen, da seine Verwitterung nicht mit der Auslaugung der Böden das Gleichgewicht hält.

Geprüft wird in unserem Fall nach dem F-Test, benannt nach dem englischen Biomathematiker R. A. FISHER, und zwar:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad \text{in unserem Fall} \quad \frac{0{,}0625}{0{,}0350} = 1{,}785$$

Der F-Wert ist das Verhältnis zweier quadratischer Größen und ist sein Wert zwischen 0 und Unendlich gegeben. Die F-Verteilung wird nicht in Sicherheitsgrenzen, sondern in Sicherheitspunkten zum Ausdruck (Signifikanz) gebracht, und zwar:

P = 5 Prozent gesichert, Signifikanz 95 Prozent
P = 1 Prozent gut gesichert, Signifikanz 99 Prozent
P = 0,1 Prozent sehr gut gesichert, Signifikanz 99,9 Prozent

Gefunden wird der Wert P in den sogenannten F-Verteilungstabellen mit P = 5 Prozent, P = 1 Prozent und P = 0,1 Prozent

Ist ein berechneter F-Wert kleiner als der in der Tabelle gefundene Sicherheitspunkt, so bedeutet dies, daß die Differenz der beiden Streuungen zufällig, daher nicht gesichert ist.

Ist jedoch ein berechneter F-Wert größer als der Tabellenwert, so kann mit entsprechender Wahrscheinlichkeit angenommen werden, daß es sich um einen echten Unterschied, also um gesicherte Werte handelt.

Zusammenfassung:

1. Durch die Anwendung der Einfachen Streuungszerlegung nach Cl. PETITPIERRE, Lausanne, ist es möglich, einen ziemlich genauen Einblick in den Kalkzustand gleicher Böden, die auch einer gleichen Betriebsform unterworfen sind, zu erhalten.
2. Demnach sind wir auch in der Lage, Böden nach den Sicherheitsgraden des Kalkzustandes zu unterscheiden, und zwar jene mit statistisch gesicherten, gut gesicherten und sehr gut gesicherten pH-Werten und somit nach diesen Gesichtspunkten Kalkzustandskarten anzulegen.

3. Sind wir in der Lage, nach diesen gewonnenen Erkenntnissen die Fragen der Kalkversorgung grundstückweise zu regeln.

Literatur:

LINDER A. 1951. Statistische Methoden für Naturwissenschafter, Mediziner und Ingenieure. Birkhäuser, Basel.

BEHRENS W. U. 1956. Die Gültigkeit des t-Testes. Sonderdruck aus Zeitschrift für Pflanzenzüchtung, 36 (2). (Auch besprochen beim Biometrischen Seminar, Linz, 24. September bis 3. Oktober 1956, durch den Verfasser).

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. Friedrich WILHELM, Graz, Landhaus, Abt. 8.

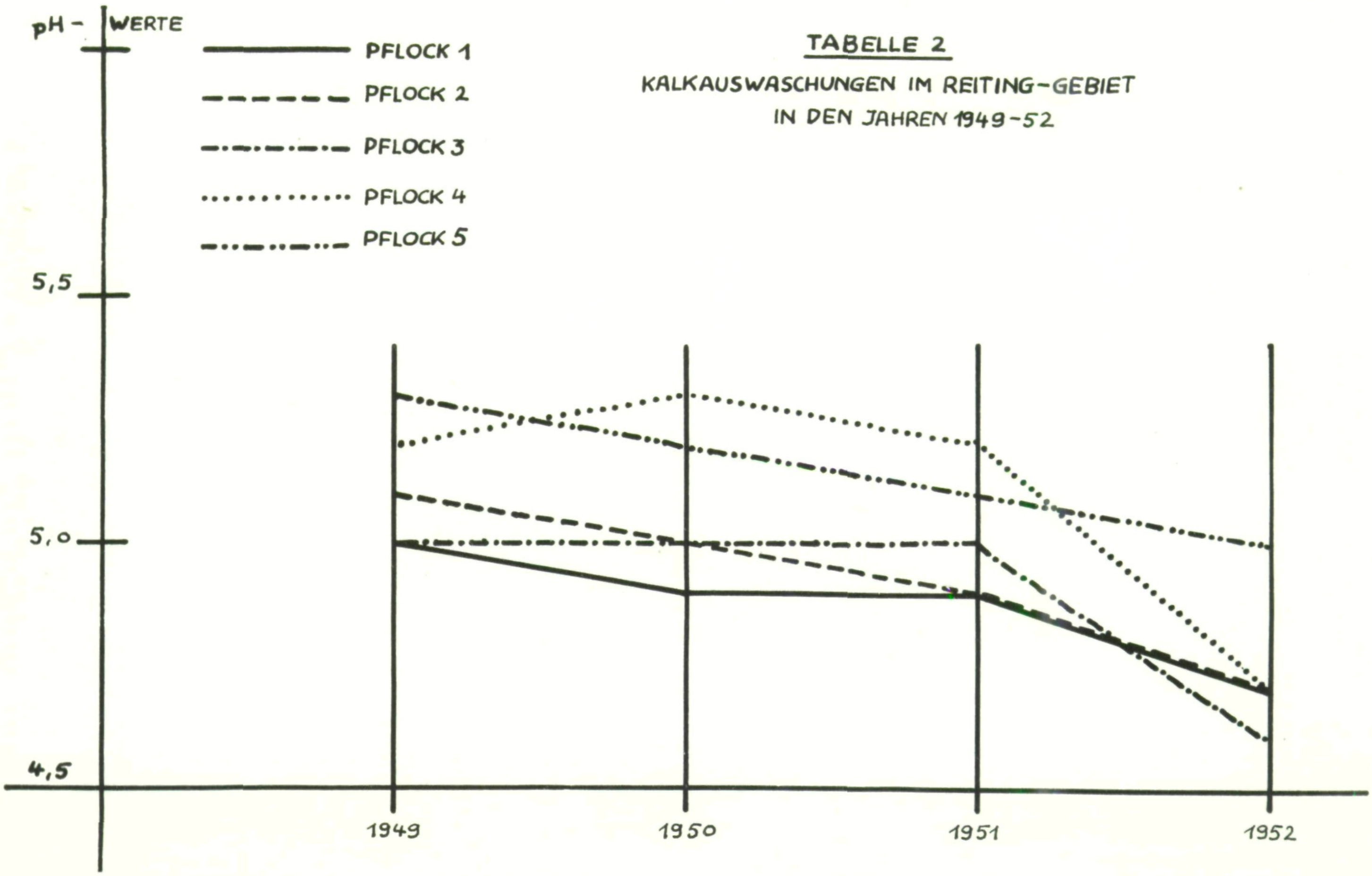
TABELLE 2
KALKAUSWASCHUNGEN IM REITING-GEBIET
IN DEN JAHREN 1949-52
pH- WERTE
PFLOCK 1
PFLOCK 2
PFLOCK 3
PFLOCK 4
PFLOCK 5
5,5
5,0
4,5
1949
1950
1951
1952

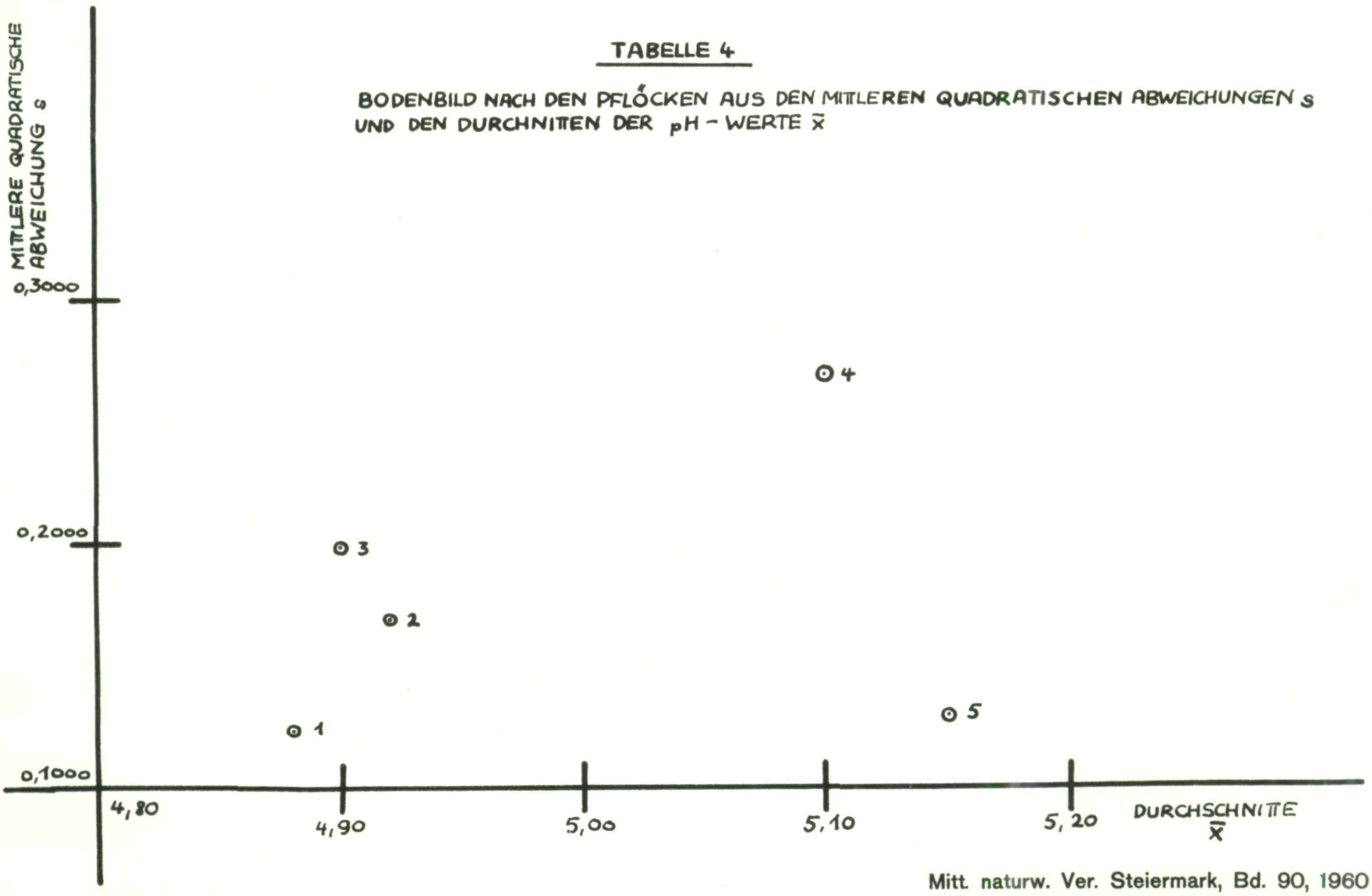
TABELLE 4
BODENBILD NACH DEN PFLÖCKEN AUS DEN MITTLEREN QUADRATISCHEN ABWEICHUNGEN s
UND DEN DURCHNITTEN DER pH-WERTE x̄
MITTLERE QUADRATISCHE ABWEICHUNG s
0,3000
0,2000
0,1000
4
3
2
1
5
4,80
4,90
5,00
5,10
5,20
DURCHSCHNITTE x̄

Mathematischer Beweis nach Cl. Petitpierre, Lausanne; (1) wird ergänzungshalber gebracht:

Kennzeichnen wir die Einzelwerte (pH-Werte) mit y_{ji}, somit j die Gruppe und i den Einzelwert innerhalb der Gruppe, erhalten wir nachfolgendes algebraisches Schema:

	1	2	j	M	
Einzelwerte	y_{11}	y_{21}	y_{j1}	y_{M1}	
	y_{12}	y_{22}	y_{j2}	y_{M2}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	
	y_{1i}	y_{2i}	y_{ji}	y_{Mi}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	
	y_{1N_1}	y_{2N_2}	y_{jN_j}	y_{MN_M}	
Summen	$\underset{i}{S}y_{1i}$	$\underset{i}{S}y_{2i}$	$\underset{i}{S}y_{ji}$	$\underset{i}{S}y_{Mi}$	$\underset{i}{SS}y_{ji}$
Durchschnitte	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_j$	$\bar{y}_M$	$\bar{y}$
Anzahl der Einzelwerte	N_1	N_2	N_j	N_M	N

Die Summe der Quadrate aller N Einzelwerte (Summe der Quadrate insgesamt)

$$\underset{ji}{SS}\,(y_{ji} - \bar{y})^2$$

kann infolge

$$(y_{ji} - \bar{y})^2 = (y_{ji} - \bar{y}_j + \bar{y}_j - \bar{y})^2 = (y_{ji} - \bar{y})^2 + 2(y_{ji} - \bar{y}_{ji})(\bar{y}_j - \bar{y}) + (\bar{y}_j - \bar{y})^2$$

auch geschrieben werden als

$$\underset{ji}{SS}\,(y_{ji} - \bar{y})^2 = \underset{ji}{SS}\,(y_{ji} - \bar{y}_j)^2 + \underset{ji}{SS}(\bar{y}_j - \bar{y})^2 ,$$

da $\underset{i}{SS}\,(y_{ji}-\bar{y}_j)(\bar{y}_j-\bar{y}) = \underset{j}{S}\,(\bar{y}_j-\bar{y})\,\underset{i}{S}\,(y_{ji}-\bar{y}_j) = 0$

wegen $S(y_{ji} - \bar{y}_j) = \underset{j}{S}y_{ji} - N_j\bar{y}_j = 0$

Somit ist

$\underset{ji}{SS}\,(y_{ji} - \bar{y}_j)^2$ = Summe der Quadrate innerhalb der Gruppen und

$\underset{ji}{SS}\,(\bar{y}_j - \bar{y})^2 = \underset{j}{S}\,N_j\,(\bar{y}_j - \bar{y})^2$ = Summe der Quadrate zwischen den Gruppen.

$\underset{ji}{SS}\,(y_{ji}-\bar{y})^2 = \underset{ji}{SS}\,(y_{ji}-\bar{y}_j)^2 + \underset{ji}{SS}\,(\bar{y}_j-\bar{y})^2$ kann auch als SQ-Summe der Quadrate geschrieben werden. Demnach ist

SQ (insgesamt) = SQ (innerhalb der Gruppen) + SQ (zwischen den Gruppen)

Der empirische F-Wert ist das Verhältnis von

$$\frac{\text{DQ (zwischen den Gruppen)}}{\text{DQ (innerhalb der Gruppen)}}$$

in unserem Falle daher

$$F = \frac{0{,}0625}{0{,}0350} = 1{,}785$$

Der empirische Wert muss mit dem F-Tabellenwert verglichen werden. Letzteren finden wir in der F-Verteilung P = 0,05 unter $n_1 = 4$ und $n_2 = 15$ und kommen zum Tabellenwert $(3{,}056)_{0,05}$

Der t-Test wird unter Hinweis auf (2), S.219, als Sonderdruck, nicht angewendet, weil die kombinierte Anwendung von F- und t-Test nicht zu gültigen Signifikanzen führt; für den Praktiker genügt der F-Test mit den hohen Sicherheiten 0,05 (95 %), 0,01 (99 %) und 0,001 (99,9 %) vollkommen, so dass wir eine Beurteilung mit 95 % als gesichert, 99 % als gut gesichert und 99,9 % als sehr gut gesichert hinnehmen können.

F-Verteilung, P = 0,05 (Auszug zur Unterweisung)

n_2	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 5$	$n_1 = 6$	$n_1 = 8$	$n_1 = 12$	$n_1 = 24$	$n_1 = \infty$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,999	2,848	2,686	2,505	2,296
13	4,667	3,805	3,410	3,179	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,207
14	4,600	3,739	3,444	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,683	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,853	2,741	2,591	2,424	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,961
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

(Aus A. Linder, Statistische Methoden, 2. Auflage)