Begriff und Berechnung der mittleren Neigung einer Gefällskurve

Von **Dr. August Böhm Edlen von Böhmersheim**
o. ö. Professor der Geographie an der k. k. Universität in Czernowitz

(Mit 3 Figuren im Text)

In der Geographie und besonders in der Orographie wird viel mit „mittleren Neigungen" oder „mittleren Neigungswinkeln" von Gefällskurven operiert, obwohl der Begriff selbst, um den es sich dabei handelt, eigentlich noch gar nicht feststeht.

C. v. Sonklar[1]) z. B. „versteht" unter dem mittleren Neigungswinkel eines Tales „den Winkel, den die zu einer geraden Linie ausgespannte Verbindung von Talursprung und Talmündung mit dem Horizonte einschließt". Dies ist aber streng genommen keine Definition, sondern die Angabe eines Konstruktionsverfahrens, dem die des Berechnungsverfahrens auf dem Fuße folgt, indem es weiter heißt: „Dieser Winkel wird durch die Gleichung $tg\,\varphi = \frac{d}{n}$ gefunden, wo φ den zu suchenden Fallwinkel, d den Höhenunterschied zwischen dem Ursprungs- und dem Mündungspunkte und n die Tallänge bedeutet." Unter Tallänge wird hier die Länge der horizontalen Projektion der Tallinie verstanden, wie sie der Karte zu entnehmen ist.

S. Finsterwalder[2]) sagt: „Der mittlere Neigungswinkel einer Linie ist der Winkel, dessen Tangente gleich dem arithmetischen Mittel aus den Tangenten der Neigungswinkel der einzelnen Linienelemente ist, wobei jede Tangente mit einem Gewichte proportional der Horizontalprojektion des Elementes belastet

[1]) C. v. Sonklar, Allgemeine Orographie. Wien 1873, S. 187.

[2]) S. Finsterwalder, Über den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sitzungsberichte der königl. bayr. Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, 1890, S. 41.

erscheint.“ Auch hier wird die mittlere Neigung als solche nicht definiert, sondern es wird nur gesagt, in welcher Weise sich das „Mittel“, das man nach der allgemein und auch von Sonklar benützten Formel erhält, aus den Einzelkomponenten, nämlich den Neigungswinkeln in den verschiedenen Punkten der Linie zusammensetzt. Finsterwalder bezeichnet dieses Mittel als „Tangentenmittel“ und bringt weiterhin (a. a. O., S. 61) dieses sowie auch das von J. Beneš[1]) benützte „Sekantenmittel“ in Gegensatz zu dem „Winkelmittel“, worunter er das arithmetische Mittel aus den Neigungswinkeln der einzelnen Linienelemente versteht, wobei wieder jeder Einzelwinkel mit einem Gewichte proportional der Horizontalprojektion des Elementes belastet erscheint.

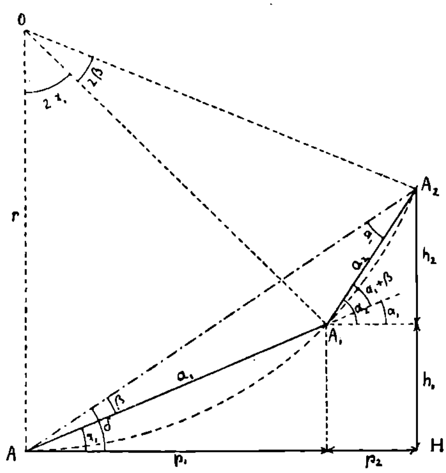

Fig. 1

K. Peucker[2]) dagegen bildet das Winkelmittel der Neigungen einer Gefällslinie dadurch, daß er die Neigungswinkel der einzelnen Profilstrecken mit Gewichten proportional deren wirklichen Längen belastet, und meint, daß „der so ermittelte Winkel in Wahrheit der mittlere Neigungswinkel“ sei.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß dies nichts weniger als zutrifft, obwohl das mit Streckengewichten gebildete Winkelmittel Peuckers der Wahrheit immerhin weit näher kommt als das mit Projektionsgewichten gebildete Winkelmittel. Es genügt dabei, jenen Nachweis für eine einzige Kategorie von Fällen zu erbringen; denn stimmen die mit Streckengewichten gebildeten Winkelmittel in diesen Fällen nicht mit dem unzweifelhaft richtigen Winkelmittel überein, so ist damit erwiesen, daß die Winkelmittelbildung mit Streckengewichten eben nicht allgemein richtig ist.

---

[1]) J. Beneš, Die wahre Oberfläche des Böhmerwaldes im Vergleiche zu ihrer Projektion. Bericht des Vereines der Geographen an der Universität Wien, XIV, 1888, S. 52.

[2]) K. Peucker, Beiträge zur orometrischen Methodenlehre. Dissertation. (Breslau) 1890, S. 47—48.

In Fig. 1 sind die beiden Gefällsstrecken a_1 und a_2 so gelegen, daß der durch ihre Endpunkte A, A_1 und A_2 gelegte Kreisbogen vom Halbmesser $OA = r$ in A von der Horizontalen AH tangiert wird. Es ist ohneweiters klar, daß das Mittel aller Neigungswinkel des Bogens AA_1 gleich ist dem Neigungswinkel der Sehne a_1, und ebenso, daß das Mittel aller Neigungswinkel des Bogens $A_1 A_2$ gleich ist dem Neigungswinkel der Sehne a_2. Es können also hinsichtlich der Neigungsverhältnisse die Profilstrecken a_1 und a_2 durch die mittleren Neigungen der Bogen AA_1 und $A_1 A_2$ ersetzt werden, weshalb denn auch die ganze Profillinie $AA_1 A_2$ der mittleren Neigung des Bogens $AA_1 A_2$ entspricht und hierin ihren wahren, einzig richtigen Mittelwert findet.

Eine andere Erwägung, wodurch dieses Resultat noch erweitert wird, ist diese: Verfolgt man den Kreisbogen $AA_1 A_2$, so gelangt man in einem vollkommen gleichmäßig steiler werdenden Anstiege von A über A_1 nach A_2. Das Winkelmittel aus allen Neigungswinkeln dieses Kreisbogens ist deshalb das wahre Winkelmittel nicht nur der beiden Profilstrecken a_1 und a_2, sondern überhaupt das einer jeden Profillinie, deren mit Neigungsänderung behafteten Stellen zugleich Punkte dieses Kreisbogens sind. Denn wenn man unter gleichmäßig wachsendem Neigungswinkel ansteigend alle Punkte eines Profiles passiert, wo sich dessen Neigung ändert, so repräsentiert das Mittel aus jenen gleichmäßig wachsenden Anstiegswinkeln die wahre mittlere Neigung des Profils.

Das Mittel aus allen Neigungswinkeln des Bogens $AA_1 A_2$ ist nun aber gleich dem halben Zentriwinkel AOA_2 oder gleich dem von der Sehne AA_2 und der Tangente AH gebildeten Winkel δ. Dieser Winkel δ ist also die wahre mittlere Neigung — und zwar das wahre Winkelmittel — der beiden Profilstrecken a_1 und a_2.

Die Konstruktion dieses Winkelmittels entspricht also ganz der allgemein üblichen Gepflogenheit, wonach der Winkel δ als „Tangentenmittel“ gilt. Wir haben aber gesehen, daß dieser Winkel — vorläufig wenigstens in unserer bestimmten Kategorie von Fällen — das wahre Winkelmittel ist.

Dieses wahre Winkelmittel läßt sich aus den Neigungen der Profilstrecken a_1 und a_2 auch durch Rechnung finden. Da die beiden Profilstrecken ungleich lang sind, darf man natürlich nicht einfach die beiden Neigungswinkel addieren und durch 2 dividieren, sondern man muß diese Neigungswinkel mit entsprechenden

Gewichten versehen. Diese Gewichte dürfen aber nicht willkürlich gewählt, sondern müssen rationell bestimmt werden. Da der mittlere Neigungswinkel einer verschieden geneigten Profillinie das Mittel aus den gleichmäßig wachsenden Neigungen des vom tiefsten zum höchsten und durch alle Winkelpunkte des Profils zu ziehenden Kreisbogens ist, so ist es klar, daß die verschiedenen Neigungswinkel einer Gefällslinie nur insoferne einer rationellen Mittelbildung unterzogen werden können, als die geradlinigen oder als geradlinig zu betrachtenden Teilstrecken mit konstantem Gefäll Sehnen eines und desselben Kreisbogens sind, also Abschnitten eines Kreisbogens entsprechen. Die Zentriwinkel dieser Kreisbogenabschnitte sind dann die natürlichen Gewichte, mit denen die betreffenden Neigungswinkel zum Zwecke der Mittelbildung zu behaften sind.

In Fig. 1 ersieht man sofort, daß $\alpha_2 = 2\,\alpha_1 + \beta$. Um das Winkelmittel der beiden Profilstrecken a_1 und a_2 rationell zu bilden, haben wir also die Neigungswinkel α_1 und $\alpha_2 = 2\,\alpha_1 + \beta$ je mit den Gewichten der Zentriwinkel AOA_1 und A_1OA_2 zu belasten, d. h. zu multiplizieren, und die aus diesen Produkten gebildete Summe durch die Summe der Gewichte, also durch den Zentriwinkel AOA_2 zu dividieren. Wir erhalten so als Mittel M

$$M = \frac{\alpha_1\, 2\,\alpha_1 + (2\,\alpha_1 + \beta)\, 2\,\beta}{2\,(\alpha_1 + \beta)} = \frac{\alpha_1^2 + 2\,\alpha_1 \beta + \beta^2}{\alpha_1 + \beta} = \frac{(\alpha_1 + \beta)^2}{\alpha_1 + \beta}$$

$$M = \alpha_1 + \beta = \delta$$

Da also die Winkelmittelbildung mit Zentriwinkelgewichten das richtige Winkelmittel ergibt, so ist es klar, daß jede Winkelmittelbildung mit anderen Gewichten ein unrichtiges Resultat ergeben muß.

Setzen wir z. B. in Fig. 1 $\alpha_1 = 23^0$ und $\alpha_2 = 57^0$, so ergibt sich in unserem Falle schon aus diesen beiden Daten allein $\beta = \alpha_2 - 2\,\alpha_1 = 11^0$ und $\delta = \alpha_1 + \beta = 34^0$. Durch die beiden gegebenen Winkel α_1 und α_2 sind auch die Längen aller Geraden in der Figur relativ bestimmt, so daß man, wenn man für eine davon einen bestimmten Wert annimmt, alle anderen berechnen kann. Tut man dies und berechnet man alsdann für die beiden Profilstrecken a_1 und a_2 ein sogenanntes „Winkelmittel“ mit Streckengewichten, so erhält man dafür $34^0\ 9'\ 20{\cdot}65''$, berechnet man aber ein „Winkelmittel“ mit (Horizontal-) Projektionsgewichten (p_1 und p_2), so erhält man $30^0\ 37'\ 10{\cdot}05''$; und berechnet man endlich das Mittel mit Höhengewichten (Vertikalprojektionsgewichten, h_1 und h_2

— was der Strecke und der Horizontalprojektion recht ist, ist der Vertikalprojektion billig), so erhält man 40° 24′ 0·40″. Berechnet man aber die mittlere Neigung aus den mit Projektionsgewichten belasteten Tangenten der Neigungswinkel der einzelnen Profilstrecken a_1 und a_2, so erhält man genau ebenso den richtigen Wert von 34°, wie wenn man gleich nach der Formel $tg\,\delta = \frac{HA_2}{AH}$ rechnet.

Allgemein haben wir auf die vorletzte Weise für Fig. 1:

$$M = \frac{tg\,\alpha_1 p_1 + tg\,\alpha_2 p_2}{p_1 + p_2} = \frac{h_1 + h_2}{p_1 + p_2} = \frac{HA_2}{AH} = tg\,\delta$$

Bei einer geneigten Profilstrecke entspricht der Höhenunterschied dem Sinus, die Horizontalprojektion dem Cosinus, das Verhältnis Höhenunterschied : Horizontalprojektion also der Tangente des Neigungswinkels. Ändert sich ein Winkel, so ändern sich auch seine trigonometrischen Funktionen, und zwar ungleichmäßig; aber unverändert bleibt immer das Verhältnis $\frac{sin}{cos} = tg$ oder seine Umkehrung $\frac{cos}{sin} = cotg$. Wird also bei verschiedener Neigung der Profillinie die Tangente eines jeden einzelnen Neigungswinkels mit dem zugehörigen Cosinus als Gewicht belastet, d. h. damit multipliziert, so muß dieses Produkt immer dem zugehörigen Sinus entsprechen; und wenn dann schließlich alle diese Sinusse summiert und durch die Summe der Cosinusse dividiert werden, so muß daraus die Tangente des Mittels aller aufgesummten Winkel resultieren.

Bei dieser Mittelbildung mit Tangenten wird also gewissermaßen automatisch der Forderung einer rationellen Winkelmittelbildung genügt, daß die Neigungsänderungen auf gleiche Zentriwinkelintervalle zu beziehen sind, und hieraus allein erhellt bereits, daß die so gewonnenen Resultate nicht nur in der in Fig. 1 dargestellten Kategorie von Fällen, sondern ganz allgemein das wahre Winkelmittel der betreffenden Profillinie bedeuten.

Ein Gegensatz zwischen diesem (mit Belastung der einzelnen Tangenten gewonnenen) „Tangentenmittel“ und dem Winkelmittel besteht also dem Werte nach nicht, sie sind vielmehr beide identisch; der Unterschied liegt einzig und allein in der Art der Berechnung. Hiernach könnte man aber das Winkelmittel ebensogut auch als „Cotangentenmittel" bezeichnen, denn man gelangt natürlich zu demselben Resultate, wenn man die Cotangenten der Neigungswinkel der einzelnen Linienelemente mit Gewichten proportional den Vertikalprojektionen der Elemente belastet und die Summe der so belasteten Cotangenten durch die Summe der Gewichte dividiert (Fig. 1):

$$M = \frac{cotg\, \alpha_1\, h_1 + cotg\, \alpha_2\, h_2}{h_1 + h_2} = \frac{p_1 + p_2}{h_1 + h_2} = \frac{AH}{HA_2} = cotg\, \delta$$

Die mit Strecken- oder mit Projektionsgewichten berechneten sogenannten „Winkelmittel" sind dagegen von dem wirklichen Winkelmittel grundverschieden. Nur dann werden die mit Streckengewichten erhaltenen „Winkelmittel" immer mit dem wirklichen Winkelmittel übereinstimmen, wenn die geradlinigen Profilstrecken Sehnen gleicher Kreisbogen bilden; denn in diesem Falle sind eben die Streckengewichte einander gleich und den ebenfalls untereinander gleichen Zentriwinkelgewichten proportional.

Aus dem a priori einleuchtenden Satze: Die mittlere Neigung eines Gefällprofiles ist das Mittel aus den Neigungswinkeln des Kreisbogens, der durch Anfangs- und Endpunkt der Profillinie und durch alle Punkte, wo sich ihr Gefäll ändert, hindurchgeht, ergibt sich zunächst für jedes Profil, das eine Aufeinanderfolge von Sehnen eines Kreisbogens darstellt, von selbst die Definition:

Die mittlere Neigung eines Gefällprofiles ist derjenige Winkel, unter dem man vom unteren Profilende gleichmäßig ansteigend das obere Profilende erreicht.

Dies ist wirklich eine Definition — nicht nur die Angabe eines Konstruktions- oder Rechnungsverfahrens — und es soll nun gezeigt werden, daß diese Definition nicht nur für die besondere Kategorie von Fällen gilt, von der wir ausgegangen sind, sondern daß sie so allgemein zutrifft, wie sie soeben bereits — vorgreifend — allgemein ausgesprochen worden ist.

Zu diesem Zwecke wird der Nachweis zu erbringen sein, daß der Winkel zwischen der die Profilenden verbindenden Geraden und der Horizontalen das richtige Winkelmittel aller Neigungen der Profillinie darstellt. Eigentlich ist dieser Nachweis freilich schon in dem auf S. 44 über die Mittelbildung mit belasteten Tangenten Gesagten enthalten; die folgende Betrachtung aber wird dasselbe auf anderem Wege erzielen und dabei die Sache noch anschaulicher machen.

Wir gehen von einem Profile aus, das aus geraden Strecken $a_1, a_2, a_3 \ldots$ von beliebiger Länge und Neigung besteht (Fig. 2), fassen aber zunächst nur die beiden unteren Strecken a_1 und a_2

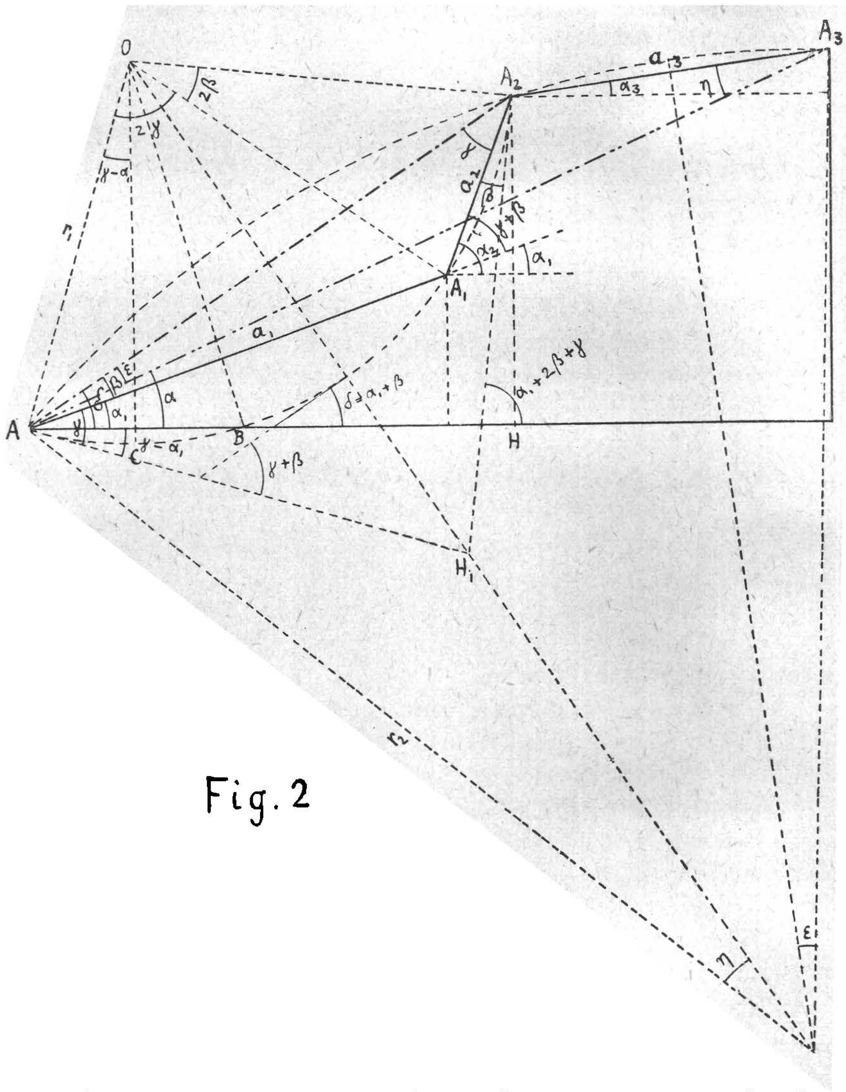

Fig. 2

ins Auge. Der Neigungswinkel der Strecke a_1 sei α_1, der der Strecke a_2 sei α_2. Durch diese Angaben sind die beiden Dreiecke AA_1A_2 und AHA_2 bestimmt; es können also deren Seiten und Winkel berechnet werden, mithin als bekannt gelten.

Nun ziehen wir durch die drei Profilpunkte A, A_1 und A_2 einen Kreisbogen vom Halbmesser $OA = r_1 = \frac{a_1 a_2 A A_2}{4 \triangle A A_1 A_2}$ und ziehen an diesen Kreisbogen die Tangenten AH_1 und A_2H_1; dann ist Winkel H_1AA_1 = Winkel $AA_2A_1 = \gamma$ und Winkel $H_1A_2A_1$ = Winkel $A_1AA_2 = \beta$.

Nun ist genau so wie in der durch Fig. 1 illustrierten Kategorie von Fällen der Winkel $H_1AA_2 = \gamma + \beta$ der wahre mittlere Neigungswinkel der beiden Profilstrecken a_1 und a_2, jedoch bezogen nicht auf die Horizontale AH, sondern auf die Linie AH_1, die gegen jene um den Winkel $\gamma - \alpha_1$ abwärts geneigt ist. Bezogen auf die Horizontale AH ist daher der wahre mittlere Neigungswinkel der beiden Profilstrecken $\gamma + \beta - (\gamma - \alpha_1) = \alpha_1 + \beta = \delta$. Denkt man sich nämlich die Profilstrecken a_1 und a_2 mitsamt dem Kreisbogen und mit der Tangente AH_1 um den Winkel $\gamma - \alpha_1$ aufwärtsgedreht, so daß AH_1 in die Lage AH gelangt, so werden alle Neigungen gegen AH um $\gamma - \alpha_1$ steiler; das Profil ist aber dann vollkommen auf die in Fig. 1 dargestellte Kategorie von Fällen zurückgeführt. Der mittlere Neigungswinkel der beiden Profilstrecken a_1 und a_2 wird dann natürlich $\delta + \gamma - \alpha_1 = \gamma + \beta$. Diese mittlere Neigung ist aber dann gegen die wirkliche Horizontale AH um den Betrag des Drehungswinkels $\gamma - \alpha_1$ zu groß, weil wir ja eben um diesen Winkel aufwärts gedreht haben; wir müssen also den Drehungswinkel von dem mittleren Gefällswinkel, wenn wir diesen von AH an zählen wollen, abziehen und erhalten alsdann auch auf diese Weise wieder den Winkel δ.

Daß dies nicht anders sein kann, erhellt auch aus folgender Erwägung: Zweifelsohne entspricht die mittlere Neigung des gleichmäßig gekrümmten Kreisbogens AA_1A_2 der mittleren Neigung aller darin aneinanderstoßenden Sehnen, also auch der mittleren Neigung der beiden Profilstrecken a_1 und a_2. Die mittlere Neigung dieses Kreisbogens ist aber gleich dem Neigungswinkel der zugehörigen Sehne AA_2: auf die Horizontale AH bezogen ist deren Neigungswinkel der Winkel $HAA_2 = \delta$; deshalb mißt δ auch die mittlere Neigung der beiden Profilstrecken a_1 und a_2.

Auch so können wir argumentieren: Das mittlere Gefälle der Profilstrecken a_1 und a_2 gegen AH entspricht dem Mittel aus allen sich gleichmäßig ändernden Neigungen des Kreisbogens AA_1A_2 gegen AH. Diese Neigungen beginnen bei A mit dem Neigungswinkel $-(\gamma-\alpha_1)$ und enden bei A_2 mit dem Neigungswinkel $\alpha_1+2\beta+\gamma$; ($OC \perp AH$ und $OA_2 \perp A_2H_1$). Bei C beträgt die Neigung Null und bei B ist sie $+(\gamma-\alpha_1)$. Das Bogenstück AB kommt deshalb hier nicht in Betracht, denn seine mittlere Neigung gegen AH ist gleich Null. Es erübrigt also nur die Mittelbildung aus den gleichmäßig wachsenden Neigungen von $\gamma-\alpha_1$ bei B bis $\alpha_1+2\beta+\gamma$ bei A_2. Dieses Mittel ist $\frac{1}{2}[\alpha_1+2\beta+\gamma-(\gamma-\alpha_1)]=$ $=\alpha_1+\beta=\delta$.

Wir können aber die wahre mittlere Neigung durch Rechnung auch aus den Streckenneigungswinkeln finden, wenn man diese mit Gewichten proportional den Zentriwinkeln belastet, die den Profilstrecken als Sehnen eines und desselben Kreises entsprechen. Alsdann erhalten wir, indem wir berücksichtigen, daß $\alpha_2=\alpha_1+\gamma+\beta$, für das Mittel M:

$$M=\frac{\alpha_1\gamma+(\alpha_1+\gamma+\beta)\beta}{\gamma+\beta}=\frac{\alpha_1\gamma+\alpha_1\beta+\gamma\beta+\beta^2}{\gamma+\beta}$$

und nach Durchführung der Division:

$$M=\alpha_1+\beta=\delta$$

Hiemit ist also erwiesen, daß die Definition der mittleren Neigung eines Gefällprofiles als desjenigen Winkels, unter dem man vom unteren Profilende gleichmäßig ansteigend das obere Profilende erreicht, auch für zwei beliebige geradlinige Profilstrecken das wahre Winkelmittel bedeutet. Damit ist aber schon alles gewonnen und die allgemeine Gültigkeit des Satzes erwiesen. Denn folgt auf die beiden Profilstrecken a_1 und a_2 (Fig. 2) noch eine dritte, vierte usw., so kann man einfach dasselbe Verfahren fortsetzen, indem man nun die Linie mittlerer Neigung der ersten beiden Profilstrecken ihrerseits sls Profilstrecke betrachtet und auf dieselbe Weise wie früher das Winkelmittel für sie und die dritte Profilstrecke a_3 berechnet. Es ist dann die mittlere Neigung der idealen Profilstrecke AA_2, die als Resultierende an die Stelle der Profilstrecken a_1 und a_2 tritt, und der nächstfolgenden Profilstrecke a_3 dargestellt durch die mittlere Neigung des Kreisbogens AA_2A_3, also durch die Neigung der Sehne AA_3, und es ist deshalb der Winkel $HAA_3=\alpha$ das wahre Winkelmittel der drei Profilstrecken a_1, a_2 und a_3 usw.

Aber nicht nur bei Gefällsprofilen, die aus geraden Strecken bestehen, sondern auch bei gekrümmten Profilen schließt die obige

Definition das wahre Winkelmittel in sich. Denn dem eingeschlagenen Beweisverfahren können im Geiste ebensogut wie gebrochene Linien auch Kurven unterzogen werden, da man jede Kurve als eine Aufeinanderfolge außerordentlich kleiner, aber geradliniger Elemente betrachten kann. Zu demselben Schlusse gelangt man auch, wenn man sich bei der Kurve den Vorgang der Ermittlung des Neigungswinkels durch die Mittelbildung aus den Tangenten der Neigungswinkel der einzelnen Elemente vorstellt, wobei jede Tangente mit einem Gewichte proportional der Horizontalprojektion des Elementes belastet wird, da hier, wie bereits gezeigt, bei der Mittelbildung aus den Verhältnissen $\frac{sin}{cos}$ de Neigungswinkel aller einzelnen Kurvenelemente die Bedingung der wahren Winkelmittelbildung, das Fortschreiten nach gleichen Zentriwinkelintervallen, automatisch erfüllt wird.

Wir können also sagen, daß die Formel

$$tg\,\alpha = \frac{h}{p} \tag{1}$$

das wahre Winkelmittel eines jeden wie immer beschaffenen Gefällprofiles ergibt, dessen höchster Punkt in der Höhe h über dem tiefsten Punkte und in dem horizontalen Abstande p davon gelegen ist.

Um zu zeigen, wie wenig die nach den anderen Methoden berechneten „Mittel" mit dem wahren Winkelmittel eines Gefällprofiles übereinstimmen, wollen wir ein konkretes Beispiel durchrechnen und in Fig. 2 als gegeben annehmen:

$p_1 = 93{\cdot}969\,26$ $\quad p_2 = 13{\cdot}087\,42$ $\quad p_3 = 61{\cdot}708\,41$

$h_1 = 34{\cdot}202\,02$ $\quad h_2 = 38{\cdot}008\,64$ $\quad h_3 = 6{\cdot}485\,817$[1])

Hieraus folgt:

$a_1 = 100$ $\quad a_2 = 40{\cdot}198\,72$ $\quad a_3 = 62{\cdot}048\,33$

$\alpha_1 = 20^0$ $\quad \alpha_2 = 71^0$ $\quad \alpha_3 = 6^0$

und ferner:

$r_1 = 83{\cdot}082\,02$ $\quad r_2 = 198{\cdot}320\,5$

$\beta = 14^0$ $\quad \varepsilon = 9^0$

$\gamma = 37^0$ $\quad \eta = 19^0$

---

[1]) Die Werte sind so gewählt, daß nur runde Zahlen für die Winkel herauskommen. In Wirklichkeit ist also die Rechnung umgekehrt geführt worden.

Die Tangentenformel (1) auf das ganze Profil angewendet ergibt für die mittlere Neigung den Winkel $\alpha = 25^0$. Dies ist also, wie vorhin nachgewiesen worden ist, das wahre Winkelmittel aller Neigungen des Profiles, das man natürlich auch erhält, wenn man die Rechnung als Mittelbildung aus den projektionsbelasteten Tangenten der Neigungswinkel der einzelnen Strecken durchführt.

Ebenso muß man dieses wahre Mittel auch erhalten, wenn man entsprechend dem früher eingeschlagenen Beweisverfahren zuerst aus den Neigungswinkeln der Strecken a_1 und a_2 die mittlere Neigung δ dieser beiden Strecken berechnet, indem man die betreffenden Neigungswinkel mit Gewichten proportional den Zentriwinkeln multipliziert, die diesen beiden Profilstrecken als Sehnen eines und desselben Kreises entsprechen, und dann die Summe dieser Produkte durch die Summe der Gewichte dividiert, und hierauf ebenso mit dem so erhaltenen ersten Mittel δ und dem Neigungswinkel der Strecke a_3 verfährt.

Die Rechnung ist alsdann (nach Berechnung von r_1, β und γ) zunächst:

$$\delta = \frac{20^0 . 37^0 + 71^0 . 14^0}{37^0 + 14^0} = 34^0$$

und hierauf (nach Berechnung von r_2, ε und η):

$$\alpha = \frac{34^0 . 19^0 + 6^0 . 9^0}{19^0 + 9^0} = 25^0$$

Es ist bisher stillschweigend die Basis des Profiles, nämlich die durch dessen tiefsten Punkt gezogene Linie mit dem Neigungswinkel Null, als gerade angenommen, also von der Erdkrümmung abgesehen worden. Auf der kugelförmigen Erde ist aber die Profilbasis keine Gerade, sondern ein Bogen eines größten Kugelkreises, und da alsdann alle Neigungen auf diese gekrümmte Nulllinie bezogen werden müssen, so ist es klar, daß sich auf der Erdkugel die Neigung einer Geraden gegen den Horizont von Ort zu Ort ändert. Die Gerade, die an einem Punkte der kugelförmigen Erdoberfläche horizontal ist, ist in ihrer Verlängerung bei einem Punkte, dessen geozentrischer Bogenabstand[1]) vom Aus-

[1]) Durch die Bezeichnungen geozentrischer Bogenabstand und (später) geozentrischer Bogen soll, um jeden Zweifel zu vermeiden, kurz ausgedrückt werden, daß es sich dabei um Kreisbögen handelt, deren Zentrum der Erdmittelpunkt ist.

gangspunkte β ist, um den Winkel β gegen den dortigen Horizont geneigt. Infolgedessen werden alle Neigungswinkel in dem Bogenabstande β um den Winkel β vermindert, bezw. vermehrt.

Man möchte deshalb auf den ersten Blick wohl meinen, daß die Formel (1) für die Berechnung der mittleren Profilneigung, welche Formel unter der Voraussetzung gerader Horizontalen abgeleitet ist, bei ausgedehnten Profilen, wo sich die Erdkrümmung bemerkbar macht, ihre Genauigkeit verliere. Beträgt doch die Depression des Horizontes schon auf eine Entfernung von nur 1853 m eine Minute, und werden doch die mittleren Neigungen in der Regel bis auf einzelne Sekunden berechnet. Indessen wird die Untersuchung zeigen, daß die Formel fast ebensogut wie für die horizontale auch für die kugelförmige Erde gilt; freilich werden wir dabei einen anderen Fehler kennen lernen, der bei der Anwendung der Formel fast ausnahmslos begangen wird, der sich aber leicht vermeiden läßt und das Prinzip nicht alteriert, auf dem die Formel beruht.

Natürlich bleibt auch auf der kugelförmigen Erde die Definition zu Recht bestehen, daß die wahre mittlere Neigung eines Gefällprofiles derjenige Winkel ist, unter dem man in gleichmäßigem Anstiege vom tiefsten zum höchsten Profilpunkt gelangt. Doch leuchtet ein, daß diese gleichmäßig ansteigende Linie auf der Erdkugel nicht mehr eine Gerade, sondern eine Kurve ist. Denn wenn wir den Begriff der geraden Horizontalen verlassen und nunmehr einen größten Kugelkreis als Horizontale betrachten, so muß natürlich auch jede Linie, die gegen diese gekrümmte Horizontale allerorten unter gleichem Winkel geneigt ist, selbst gekrümmt sein.

Die Linie konstanter Neigung zwischen Tiefen- und Höhenpunkt eines Gefällprofiles ist also in Wirklichkeit eine Kurve, die die Eigenschaft hat, daß sie an allen ihren Punkten gegen den jeweiligen Horizont — die betreffende Tangente — gleich geneigt ist, oder bei der, anders ausgedrückt, der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor konstant ist.

Die Kurven dieser Art sind in der Analysis unter dem Namen der logarithmischen Spiralen bekannt.

Es stelle in Fig. 3 der Kreisbogen AF einen Teil eines größten Erdkugelkreises vom Halbmesser R und dem Zentriwinkel β vor, und es seien A und B zwei Punkte der physischen Erdoberfläche, von denen der tiefer gelegene der Einfachheit wegen vorläufig im Meeresniveau angenommen ist. Dann ist also die logarithmische Spirale AB die Linie konstanter Neigung zwischen A und B und der konstante Winkel α zwischen jeder an die Spirale gezogenen Tangente und der zu dem betreffenden Radiusvektor Normalen ist die wahre mittlere Neigung eines jeden Gefällprofiles zwischen B und A.

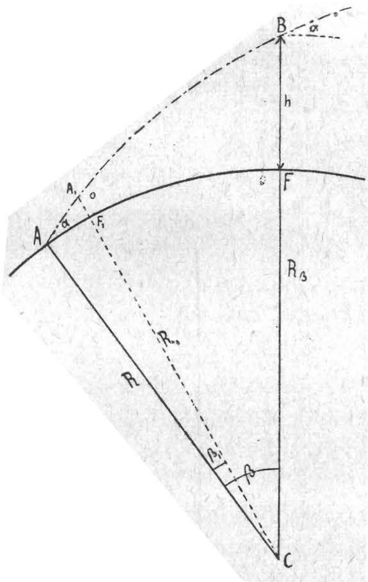

Fig. 3

In dem infintesimalen Dreiecke AA_1F_1 ist

$$tg\,\alpha = \frac{R_1 - R}{R\beta_1}$$

Die Polargleichung der logarithmischen Spirale ist (für CA als Polarachse und C als Pol)

$$R_\beta = R\,e^{\varkappa\beta}$$

wobei R den Radiusvektor in der Polarachse, R_β und β die Polarkoordinaten eines beliebigen anderen Spiralenpunktes bezeichnen, e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist und $\varkappa$ eine Konstante bedeutet.

Es ist also allgemein

$$R_\beta - R = R\,e^{\varkappa\beta} - R = R\,(e^{\varkappa\beta} - 1)$$

daher auch

$$\frac{R_1 - R}{R\beta_1} = \frac{R\,(e^{\varkappa\beta_1} - 1)}{R\beta_1} = \frac{R\left(1 + \frac{\varkappa\beta_1}{1} + \frac{\varkappa^2\beta_1^2}{2!} + \frac{\varkappa^3\beta_1^3}{3!} + \ldots - 1\right)}{R\beta_1}$$

$$= \varkappa + \frac{\varkappa^2\beta_1}{2!} + \frac{\varkappa^3\beta_1^2}{3!} + \ldots$$

Da nun β_1 ein beliebig kleiner Winkel ist, so verschwinden im Grenzfalle die mit β_1 und dessen Potenzen behafteten Glieder und es wird

$$tg\,\alpha = \frac{R_1 - R}{R\beta_1} = \varkappa$$

In der Gleichung der logarithmischen Spirale bedeutet also die Konstante $\varkappa$ die Tangentenfunktion des Winkels, den die Tangente der Spirale mit der auf den bezüglichen Radiusvektor gefällten Senkrechten bildet.

Demnach kann denn also die Gleichung der logarithmischen Spirale auch so geschrieben werden

$$R_\beta = R e^{\beta \, tg \, \alpha}$$

Hieraus folgt

$$e^{\beta \, tg \, \alpha} = \frac{R_\beta}{R}$$

$$\beta \, tg \, \alpha = l \frac{R_\beta}{R}$$

$$(2) \qquad tg \, \alpha = \frac{l \frac{R_\beta}{R}}{\beta} = \frac{log \frac{R_\beta}{R}}{\mu \beta} = \frac{log R_\beta - log R}{\beta \, log \, e}$$

wobei l den natürlichen Logarithmus und μ den Modulus des natürlichen Logarithmensystems bedeutet.

Hiernach könnte man also den mittleren Neigungswinkel eines jeden Gefällprofiles zwischen zwei beliebigen Endpunkten in aller Schärfe berechnen; R bedeutet dabei den Abstand des tieferen, R_β den des höheren Profilendpunktes vom Erdmittelpunkt und β den geozentrischen Bogenabstand der Profilenden in analytischem Maße.

Diese Formel leidet jedoch an zwei Übelständen: einmal ist sie unbequem, und dann erfordert die Berechnung der logarithmischen Differenz im Zähler eigentlich mindestens elfstellige, bei kleinem Unterschiede zwischen R_β und R aber noch mehrstellige Logarithmen, wenn die übrige Rechnung siebenstellig geführt werden soll.

Indessen kann die Formel auch sehr handlich gemacht werden, ohne für unsere Zwecke an Schärfe wesentlich zu verlieren. Bezeichnet man (Fig. 3) die Höhe des Punktes B über dem Meeresniveau mit h, so daß $R_\beta = R + h$, so ist

$$e^{\beta \, tg \, \alpha} = \frac{R_\beta}{R} = \frac{R + h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$$

$$\beta \, tg \, \alpha = l\left(1 + \frac{h}{R}\right) = \frac{h}{R} - \frac{h^2}{2R^2} + \frac{h^3}{3R^3} - \frac{h^4}{4R^4} + \ldots =$$

$$= \frac{h}{R}\left(1 - \frac{h}{2R} + \frac{h^2}{3R^2} - \frac{h^3}{4R^3} + \ldots\right)$$

Nun ist

$$\frac{1}{1+\frac{h}{2R}} = 1 - \frac{h}{2R} + \frac{h^2}{4R^2} - \frac{h^3}{8R^3} + \ldots.$$

Setzt man nun einfach

$$\beta \, tg \, \alpha = \frac{h}{R} \frac{1}{1+\frac{h}{2R}}$$

so ist die Vernachlässigung, die man rücksichtlich des dritten Gliedes begeht,

$$\frac{h^3}{3R^3} - \frac{h^3}{4R^3} = \frac{h^3}{12R^3}$$

und die Vernachlässigung rücksichtlich der folgenden Glieder ist noch viel kleiner.

Nehmen wir nun an, daß h im Maximum sogar 10 000 m betragen könne, so macht, da der Erdkugelhalbmesser 6 370 283 m mißt,[1] der begangene Fehler nur drei Einheiten der zehnten Dezimalstelle aus. Rücksichtlich der Tangentenfunktion wird dieser Fehler durch die Division durch β allerdings etwas vergrößert; da aber nach den Verhältnissen der Erdoberfläche bei so großem h der Bogen β nicht gut kleiner werden kann als 0·02 (für Guam-Nerotief z. B. ist $\beta = 0{\cdot}023\,55$), so würde selbst in diesem ungünstigsten Falle die Länge der Tangente nur um 16 Einheiten der neunten Dezimalstelle zu klein erhalten werden, was im Logarithmus der Tangente nur neun Einheiten der achten Mantisse und im Winkel kaum 0·01″ ausmacht. Ist aber h kleiner, etwa 1000 m, dann sinkt der zuerst betrachtete Fehler auf drei Einheiten der 13. Dezimalstelle herab und bezüglich der Tangente — da dann β kaum kleiner sein kann als 0·000 08, was schon einem mittleren Gefälle von mehr als 63° entsprechen würde — auf vier Einheiten der neunten Dezimalstelle. Je kleiner h, desto kleiner wird der Fehler, so daß er sich selbst in den extremsten, rein akademisch aufgestellten Fällen bei siebenstelliger logarithmischer Rechnung kaum mehr bemerkbar machen kann, in der wirklichen Praxis aber auch bei acht- bis zehnstelliger Rechnung nicht erkennbar wäre.

[1]) Nach dem Besselschen Erdsphäroide.

Mit der eben besprochenen minimalen Vernachlässigung folgt nun weiter

$$\beta \, tg \, \alpha = \frac{h}{R} \cdot \frac{2R}{2R+h} = \frac{2h}{2R+h} = \frac{h}{R+\frac{h}{2}}$$

also

(3)
$$tg \, \alpha = \frac{h}{\left(R+\frac{h}{2}\right)\beta}$$

$\left(R+\frac{h}{2}\right)\beta$ ist nun aber nichts anderes als der zu dem Zentriwinkel β gehörende Bogen in der halben Meereshöhe des Punktes B. Bezeichnet man diesen Bogen mit b_m, so geht die Formel über in

(4)
$$tg \, \alpha = \frac{h}{b_m}$$

Liegt der Punkt B nicht in der Höhe h über, sondern in der Tiefe t unter dem Meeresspiegel, so ist Formel (2) zu ersetzen durch

(5)
$$tg \, \alpha = \frac{l \frac{R}{R_\beta}}{\beta} = \frac{log \frac{R}{R_\beta}}{\mu \beta} = \frac{log \, R - log \, R_\beta}{\beta \, log \, e}$$

und Formel (3) oder (4) durch

(6)
$$tg \, \alpha = \frac{t}{\left(R-\frac{t}{2}\right)\beta} = \frac{t}{b_m}$$

wo dann α bei A aber nicht wie früher einen Höhen-, sondern einen Tiefenwinkel darstellt.

Liegt der Punkt A nun aber nicht, wie bisher angenommen, im Meeresniveau, sondern darüber oder darunter, so ist, wie ohneweiters einzusehen, in den Formeln (2) bis (6) unter R nicht der Erdkugelhalbmesser, sondern der Abstand des Punktes A vom Erdmittelpunkt zu verstehen, ferner unter h oder t der Höhenunterschied der beiden Punkte A und B, und unter b_m die Länge des Bogens im mittleren Niveau der beiden Punkte.

Man sieht, die Formeln (4) und (6), die unter ausdrücklicher Berücksichtigung der Kugelgestalt der Erde für die Linie gleichmäßiger Neigung von einem tieferen zu einem höheren, beziehungsweise von einem höheren zu einem tieferen Punkte abgeleitet worden sind, und die daher den früheren Ausführungen zufolge auch dem wahren mittleren Neigungswinkel eines jeden Gefällprofiles zwischen den beiden Punkten der kugelförmigen Erde entsprechen, unterscheiden sich in ihrem Aufbau nicht im geringsten von der Formel (1), bei deren Ableitung die Krümmung der Erdoberfläche nicht berücksichtigt worden ist. Der einzige Unterschied ist der, daß in (1) im Nenner die Länge der Horizontalprojektion des Profiles, in (4) und (6) dagegen anstatt deren die Länge des geozentrischen Bogens im mittleren Niveau der beiden Punkte auftritt. Die der Karte entnommene Horizontalprojektion ist nun aber nicht die Projektion auf eine horizontale Ebene, wie bei der Ableitung der Formel (1) stillschweigend vorausgesetzt worden ist, sondern die Projektion auf die gekrümmte Erdoberfläche, daher ihrer Länge nach gleich dem Bogen im Meeresniveau zwischen den beiden Punkten. Dadurch kommt also, wie man nunmehr durch Vergleichung mit den für die kugelförmige Erde abgeleiteten Formeln (4) oder (6) sieht, der Einfluß der Erdkrümmung doch auch in der Formel (1) zur Geltung — ein Umstand, den man bisher wohl kaum beachtet, zumindest aber noch niemals betont hat.

Der einzige kleine Fehler, der also bei der Anwendung der Formel (1) unterläuft und auf den schon früher hingedeutet worden ist, liegt also darin, daß hier immer mit dem Bogen im Meeresniveau gerechnet wird, anstatt mit dem Bogen im mittleren Niveau zwischen den beiden Punkten.

Dieser Fehler kann sich aber bis in die Minuten geltend machen.

Beträgt z. B. die der Karte entnommene Profillänge 1000 m und der Höhenunterschied der Profilendpunkte auch 1000 m, so ist nach der gewöhnlichen Rechnung nach Formel (1) die mittlere Profilneigung genau 45^{0}. Dies entspricht aber der Wirklichkeit nur dann, wenn die mittlere Höhe der Profilendpunkte mit dem Meeresniveau übereinstimmt. Welche Werte die genauere Formel (4) oder (6) für die mittlere Neigung des in Rede stehenden Profiles sowie eines von der halben und eines von der doppelten Länge bei gleichem Höhenunterschiede der Profilendpunkte ergibt, wenn das mittlere Niveau der Profilendpunkte über oder unter dem Meeresniveau gelegen ist, zeigt die folgende Tabelle.

Profillänge im Meeresniveau		Höhenunterschied
	A 500 m	
	B 1000 m	1000 m
	C 2000 m	

Mittlere Höhe der Profilendpunkte	Mittlere Profilneigung *A*	Δ	*B*	Δ	*C*	Δ
5500 m	63° 24′ 54·60″		44° 58′ 31·00″		26° 32′ 43·00″	
		12·94″		16·17″		12·93″
4500 m	63° 25′ 7·54″		44° 58′ 47·17″		26° 32′ 55·93″	
		12·94″		16·20″		12·95″
3500 m	63° 25′ 20·48″		44° 59′ 3·37″		26° 33′ 8·88″	
		12·96″		16·16″		12·94″
2500 m	63° 25′ 33·44″		44° 59′ 19·53″		26° 33′ 21·82″	
		12·96″		16·20″		12·95″
1500 m	63° 25′ 46·40″		44° 59′ 35·73″		26° 33′ 34·77″	
		12·94″		16·17″		12·93″
500 m	63° 25′ 59·34″		44° 59′ 51·90″		26° 33′ 47·70″	
0 m	63° 26′ 5·82″	12·95″	45°	16·20″	26° 33′ 54·18″	12·96″
— 500 m	63° 26′ 12·29″		45° 0′ 8·10″		26° 34′ 0·66″	
		12·95″		16·20″		12·95″
— 1500 m	63° 26′ 25·24″		45° 0′ 24·30″		26° 34′ 13·61″	
		12·95″		16·20″		12·97″
— 2500 m	63° 26′ 38·19″		45° 0′ 40·50″		26° 34′ 26·58″	
		12·96″		16·18″		12·96″
— 3500 m	63° 26′ 51·15″		45° 0′ 56·68″		26° 34′ 39·54″	
		12·96″		16·19″		12·96″
— 4500 m	63° 27′ 4·11″		45° 1′ 12·87″		26° 34′ 52·50″	
		12·95″		16·20″		12·96″
— 5500 m	63° 27′ 17·06″		45° 1′ 29·07″		26° 35′ 5·46″	

Die Differenz beträgt also in dem Beispiele *B*, wo die mittlere Profilneigung bei der Mittelhöhe Null 45° ist, für jede Änderung der Höhenlage des Profiles um 1000 m etwa 16·2″ und erreicht mit großer Annäherung bei dieser Profilneigung ihr Maximum. Bei welcher Profilneigung in aller Strenge das Maximum eintritt, läßt sich leicht zeigen.

Die Neigung vom unteren zum oberen Profilendpunkte wird bestimmt durch die Formel $tg\,\alpha = \frac{h}{b_m}$, unter h den Höhenunterschied und unter b_m den mittleren Bogenabstand der Profilendpunkte verstanden. Wird nun b_m als Horizontalprojektion p der Karte entnommen, so stimmen diese beiden Werte nur dann überein, wenn die mittlere Höhe der Profilendpunkte dem Meeresniveau entspricht. Liegt das Profil über dem Meeresspiegel, so ist $p = b$ kleiner, liegt es darunter, so ist p größer als b_m, aber immer verhält sich $p\,(=b) : b_m = R : R_m$, wenn wir mit R den Erdkugelhalbmesser und mit R_m den bis zur mittleren Höhe der Profilendpunkte verlängerten Erdkugelhalbmesser bezeichnen. Bei gegebener Höhenlage des Profiles ist also das Verhältnis $p : b_m$ für alle Profile konstant, sie mögen kurz und steil, oder lang und sanft geneigt sein.

Nehmen wir nun an, daß die Profilendpunkte in der mittleren Höhe $R_m - R$ über dem Meeresspiegel liegen; dann ist der Neigungswinkel α_m dieses Profiles nach der Formel $tg\,\alpha_m = \frac{h}{b_m}$ zu berechnen, wobei $b_m = b\frac{R_m}{R}$, wofür wir aber der Kürze wegen schreiben wollen $b_m = b\,k$, indem wir setzen $\frac{R_m}{R} = k$.

Dadurch wird $tg\,\alpha_m = \frac{h}{b\,k}$, während nach der gewöhnlichen Berechnung ist $tg\,\alpha = \frac{h}{b}$.

Setzen wir den letzteren Wert in die vorige Formel ein, so erhalten wir $tg\,\alpha_m = \frac{1}{k}\,tg\,\alpha$ und die Differenz $\alpha - \alpha_m$ ist alsdann bestimmt durch

$$tg\,(\alpha - \alpha_m) = \frac{tg\,\alpha - \frac{1}{k}\,tg\,\alpha}{1 + \frac{1}{k}\,tg^2\,\alpha} = tg\,\alpha\,\frac{1 - \frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}\,tg^2\,\alpha} = \frac{(k-1)\,tg\,\alpha}{k + tg^2\,\alpha}$$

Hiefür kann man auch schreiben[1])

$$tg\,(\alpha - \alpha_m) = \frac{(k-1)\,tg\,\alpha}{(tg\,\alpha - \sqrt{k})^2 + 2\sqrt{k}\,tg\,\alpha} = \frac{k-1}{2\sqrt{k} + cotg\,\alpha\,(tg\,\alpha - \sqrt{k})^2}$$

Nun wird $tg\,(\alpha - \alpha_m)$ seinen größten Wert erreichen, wenn der Nenner des letzten Bruches seinen kleinsten Wert erreicht, und dies ist dann der Fall, wenn $cotg\,\alpha\,(tg\,\alpha - \sqrt{k})^2 = 0$, was nur möglich ist, wenn

$$tg\,\alpha = \sqrt{k}$$

Alsdann wird

$$tg\,\alpha_m = \frac{1}{k}\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k}} = cotg\,\alpha, \text{ also } \alpha_m = 90^0 - \alpha$$

---

[1]) Denn es ist

$$(tg\,\alpha - \sqrt{k})^2 + 2\sqrt{k}\,tg\,\alpha = tg^2\,\alpha - 2\sqrt{k}\,tg\,\alpha + k + 2\sqrt{k}\,tg\,\alpha = k + tg^2\,\alpha$$

und die Differenz $\alpha - \alpha_m$ ist bestimmt durch

$$tg\,(\alpha - \alpha_m) = \frac{(k-1)\sqrt{k}}{2\,k} = \frac{k-1}{2\sqrt{k}} = \frac{tg^2\,\alpha - 1}{2\,tg\,\alpha} = \frac{1}{2}(tg\,\alpha - cotg\,\alpha) =$$
$$= -\,cotg\,2\,\alpha\,^{1})$$

Da nun k nach den Reliefverhältnissen der Erdoberfläche immer nur sehr wenig von 1 verschieden sein kann (selbst wenn die mittlere Meereshöhe der Profilendpunkte 6000 m beträgt, ist $k = 1{\cdot}000\,918$, bei 1000 m aber ist $k = 1{\cdot}000\,157$), so ist auch $tg\,\alpha = \sqrt{k}$ immer sehr nahe gleich 1, also der Neigungswinkel, bei dem das Maximum der in Rede stehenden Differenz eintritt, sehr nahe gleich 45°. Genau tritt das Maximum dann ein, wenn der nach der gewöhnlichen Methode $tg\,\alpha = \frac{h}{p}$ berechnete Neigungswinkel um eben so viel größer ist als 45°, als der nach der richtigen Formel $tg\,\alpha_m = \frac{h}{b_m}$ berechnete Neigungswinkel kleiner ist als 45°; denn es ist, wie vorhin gezeigt, $\alpha_m = 90^0 - \alpha$, also und auch wegen

$$tg\,(\alpha + \alpha_m) = \frac{\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}}{1 - 1} = \infty$$

$\alpha + \alpha_m = 90^0$ und daher $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha_m) = 45^0$.

Dieser Neigungswinkel von 45° entspricht aber nicht, wie man vermuten könnte, genau dem in seine halbe Meereshöhe versetzt gedachten Profile, das die Bogenweite $b_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2}(b + b_m)$ besitzt. Bezeichnen wir nämlich dessen Neigungswinkel mit $\alpha_{\frac{m}{2}}$, so ist

$$tg\,\alpha_{\frac{m}{2}} = \frac{h}{b_{\frac{m}{2}}} = \frac{h}{\frac{1}{2}(b + b_m)}.$$

Nun folgt aus $tg\,\alpha = \frac{h}{b} = \sqrt{k}$ und aus $tg\,\alpha_m = \frac{h}{b_m} = \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$b = \frac{h}{\sqrt{k}} \text{ und } b_m = h\sqrt{k}$$

---

[1]) Dieses letztere Resultat folgt auch direkt aus
$tg\,(\alpha - \alpha_m) = tg\,(\alpha - [90^0 - \alpha]) = tg\,(2\,\alpha - 90^0) = -\,cotg\,2\,\alpha$

Dadurch wird

$$b_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sqrt{k}} + h\sqrt{k}\right) = \frac{h\,(1+k)}{2\sqrt{k}}$$

$$tg\,\alpha_{\frac{m}{2}} = \frac{h}{\frac{h\,(1+k)}{2\sqrt{k}}} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} = \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\,\alpha} = 2\,tg\,\alpha\,cos^2\,\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$$

$$tg\,\alpha_{\frac{m}{2}} = sin\,2\,\alpha$$

Da nun α etwas größer ist als 45^0, so ist hiernach $tg\,\alpha_{\frac{m}{2}}$ etwas kleiner als 1, also $\alpha_{\frac{m}{2}}$ schon etwas kleiner als 45^0, so daß also der Neigungswinkel von 45^0 bei einer etwas tieferen Lage des Profiles als in seiner halben mittleren Meereshöhe eintreten würde.

Auch diese Höhenlage wollen wir der Vollständigkeit wegen berechnen.

Bezeichnen wir die mittlere Bogenweite des Profiles in dieser Höhenlage mit B, so muß wegen

$$tg\,45^0 = 1 = \frac{h}{B}$$

sein

$$B = h$$

Nun ist nach dem Vorigen $h = b\sqrt{k}$, also auch $B = b\sqrt{k}$. Bezeichnen wir den bis zu dieser Höhenlage verlängerten Erdkugelhalbmesser (also den zu dem Bogen B gehörenden Radius) mit R_B, so ist

$$B : b_m = R_B : R_m$$

Nun ist $b_m = b\,k$, ferner $k = \frac{R_m}{R}$, also $R_m = k\,R$; dadurch wird

$$b\sqrt{k} : b\,k = R_B : k\,R$$

$$R_B = \frac{k\,R\,b\sqrt{k}}{b\,k} = R\sqrt{k} = \sqrt{R\,R_m}$$

Es liegt also das Profil, das genau den Winkel von 45^0 ergibt, in der mittleren Meereshöhe

$$R_B - R = R\sqrt{k} - R = R\,(\sqrt{k} - 1)$$

während die halbe mittlere Meereshöhe des Profiles

$$\frac{1}{2}\,(R_m - R) = \frac{1}{2}\,(k\,R - R) = \frac{1}{2}\,R\,(k - 1)$$

und die wirkliche mittlere Meereshöhe des Profiles

$$R_m - R = R(k - 1)$$

ist.

Kehren wir wieder zu der Tabelle auf S. 57 zurück, so können wir weiter sagen, daß die Differenz der nach den Formeln (1) und (4) oder (6) berechneten Neigungswinkel eines der Karte entnommenen Profiles desto geringer ist, je größer oder je kleiner als 45^0 die Profilneigung ist; diese Differenz ist, wenn die Profilneigung gleichviel mehr oder weniger als 45^0 beträgt, nahezu gleichgroß (für alle praktisch möglichen Fälle kann man sie geradezu als gleichgroß bezeichnen), im Verhältnis zu der betreffenden Profilneigung aber in dem letzteren Falle bedeutend größer. Das kommt daher, weil bei gegebenem Höhenunterschiede der Profilendpunkte die Tangenten der Neigungswinkel dem horizontalen Abstande der beiden Punkte umgekehrt proportional sind, eine Veränderung der Tangentenlänge um einen bestimmten Betrag aber eine desto geringere Veränderung der Winkelgröße in sich schließt, je größer die Tangente ist.

Die in Rede stehende Differenz für einen Unterschied der Höhenlage des Profiles um je 1000 m — oder überhaupt für einen beliebigen Unterschied der Höhenlage — nimmt übrigens mit wachsender Höhenlage des Profiles langsam ab, mit wachsender Tiefenlage langsam zu; doch ist der Unterschied zu gering, um im Rahmen der Tabelle bei siebenstelliger Rechnung deutlich zum Ausdruck zu kommen. Innerhalb der durch die Höhenverhältnisse der Erdoberfläche gesteckten Grenzen kann man jene Differenz für gleiche Intervalle der Höhenlage eines Profiles von bestimmter Fallhöhe und bestimmter, nach dem Kartenmaßstabe gemessener horizontaler Erstreckung als konstant betrachten.

Wenn man nun aber genau nach den Formeln (4) oder (6) rechnen will, so hat man zu beachten, daß die Spezialkarten die Projektion auf das Erdsphäroid — nicht auf die mit dem Sphäroide inhaltsgleiche Kugel — darstellen, weshalb bei der Berechnung von b_m aus $\left(R + \frac{h}{2}\right)\beta$ oder $\left(R - \frac{t}{2}\right)\beta$, wenn $\frac{h}{2}$ oder $\frac{t}{2}$ den halben Höhen- oder Tiefenunterschied der beiden Punkte bedeutet für R der der geographischen Breite und der Richtung des Profilbogens entsprechende Krümmungshalbmesser — beziehungsweise, wenn der tiefere (höhere) Profilendpunkt nicht im Meeresniveau, sondern darüber (darunter) gelegen ist, dieser Krümmungshalbmesser vermehrt (vermindert) um die Meereshöhe (Meerestiefe) des tieferen (höheren) Profilendpunktes — einzusetzen ist.[1])

Liegt z. B. ein Profil von einem Höhenunterschiede der Profilendpunkte von 1000 m und einer der Karte entnommenen Horizontalprojektion von gleichfalls 1000 m in dem mittleren Niveau von 3000 m über dem Meeresspiegel, so wird der mittlere Neigungswinkel des Profiles, wenn zwar der Höhenlage Rechnung getragen, im übrigen aber die Erde als Kugel betrachtet wird, zu $44^\circ\ 59'\ 11{\cdot}45''$ gefunden. Erstreckt sich nun dieses Profil längs dem Äquator, so ist der Neigungswinkel in Wirklichkeit — nämlich unter Berücksichtigung der sphäroidischen Erdgestalt berechnet — $44^\circ\ 59'\ 11{\cdot}52''$, wenn aber das Profil den Äquator in meridionaler Richtung überquert, nur $44^\circ\ 59'\ 11{\cdot}18''$, dagegen, wenn das Profil in beliebiger Richtung den Pol überquert, $44^\circ\ 59'\ 11{\cdot}66''$.

Will man also den Neigungswinkel auf Zehntelsekunden genau erhalten, so muß die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigt werden, wenn nicht etwa das Profil so gelegen ist, daß der entsprechende Krümmungshalbmesser nahezu mit dem mittleren Erdhalbmesser übereinstimmt. Dies ist umsomehr geboten, wenn die Profilerstreckung nicht in Längenmaß, sondern in Winkelmaß gegeben ist.

Daß freilich eine so weit getriebene Schärfe der Berechnung das Maß der sachlichen Genauigkeit überschreitet, ist bei dem Umstande, daß mittlere Neigungen mitunter sogar bis auf Hundertelsekunden bestimmt werden, vielleicht nicht überflüßig zu bemerken.

---

[1]) A. v. Böhm, Kritischer Böschungswinkel und kritische Tiefe. Diese Mitteilungen, 1911, S. 602—603.