

Kritischer Böschungswinkel und kritische Tiefe

Von **Dr. August Böhm Edlen von Böhmersheim**

o. ö. Professor der Geographie an der k. k. Universität in Czernowitz

(Mit 6 Figuren im Texte)

Es ist bekannt, daß die großen Meeresbecken in Wirklichkeit keine Hohlformen sind, da wegen ihrer im Verhältnisse zu den Dimensionen des Erdballs zu geringen Tiefe ihr Boden nicht konkav, sondern konvex verläuft. Je breiter ein Becken ist — gleichviel, ob auf dem Festlande oder unter Meeresbedeckung — desto größer müßte seine Tiefe sein, sollte das Becken wirklich eine konkave Gestaltung besitzen. Nimmt die Tiefe eines Beckens von den Rändern gegen die Mitte in solcher Weise zu, daß die Tiefe eines jeden Beckenpunktes nur von der Wölbung der Erdoberfläche abhängt, dann ist der Boden dieses Beckens in Wirklichkeit eine ebene Fläche und weder auf- noch abwärts gekrümmt. Um diesen Grenzfall zwischen konvexer und konkaver Gestaltung eines Beckens zu fixieren, hat Otto Krümmel im Jahre 1907¹⁾ den Begriff des kritischen Böschungswinkels geschaffen.

Krümmel hat jedoch den kritischen Böschungswinkel infolge eines kleinen Versehens nicht zutreffend und vor allem nicht eindeutig definiert und ist deshalb auch bei der Exemplifikation zu unrichtigen Ergebnissen gekommen. In dem unlängst erschienenen II. Bande seines vortrefflichen Handbuches hat Krümmel zwar auf S. 765 unter den Berichtigungen zu Band I bereits selbst ausgesprochen, daß seine Ausrechnung des kritischen Böschungswinkels verfehlt ist, ohne jedoch den Sachverhalt vollständig zu klären. Im Gegenteile, der Irrtum Krümmels lag nicht, wie er

¹⁾ O. Krümmel, Handbuch der Ozeanographie. Zweite, völlig neu bearbeitete Auflage, I. Band, Stuttgart 1907, S. 89—90.

meint, darin, daß er (siehe unten Fig. 1) von dem Winkel OCO_1 anstatt von dem doppelt so großen Winkel OCO_2 ausgegangen ist — wir werden auf beiderlei Wegen zu dem richtigen Resultate gelangen —, sondern beruht, wie alsbald gezeigt werden wird, auf der Verwechslung zweier ganz anderer Winkel. Das richtige Resultat teilt Krümmel aber auch in der Berichtigung nicht mit. Auch P. Putsche, der sich im Februarhefte von Petermanns Mitteilungen, das fast gleichzeitig mit dem zweiten Bande der Ozeanographie erschienen ist, auf S. 78 mit diesem Gegenstande befaßt, hat wohl eine Näherungsformel für die Berechnung der kritischen Tiefe entwickelt, ohne jedoch auf den kritischen Böschungswinkel, dessen Berechnung er sehr mit Unrecht für „etwas umständlich“ hält, irgendwie einzugehen. Es dürfte deshalb zur Vermeidung weiterer Irrtümer und zur völligen Aufklärung am Platze sein, den Sachverhalt näher zu untersuchen.

Krümmel ist bei seiner Darlegung ganz allgemein von der Gestaltung des Meeresbodens zwischen zwei beliebigen Lotungspunkten ausgegangen.

Ist (Fig. 1) C der Erdmittelpunkt und OO_1 die Meeresoberfläche, so ist, wenn die bei O und O_1 geloteten Tiefen gleich sind,

der Meeresboden parallel der Meeresoberfläche und der Krümmungsradius in beiden Lotungspunkten — die Erde als Kugel betrachtet — gleich dem um die Tiefe $OB = O_1 B_1$ verminderten Erdradius OC . Nimmt die Tiefe in B_1 zu, so bleibt die Gestaltung des Meeresbodens BB_2 noch immer konvex, so lange die Tiefe nicht den Betrag $O_1 D$ erreicht, wobei $BD \perp O_1 C$. In diesem letzteren Falle wird der Krümmungsradius des Meeresbodens $= \infty$ und der Boden liegt dann in einer Ebene, die für den Beobachter in O_1 horizontal ist. Wächst die Meerestiefe bei O_1 noch weiter, etwa bis F , und nimmt sie in der Richtung nach B_2 wieder entsprechend ab, so ist der Boden BFB_2 konkav. Im ersteren Falle, bei völligem Parallelismus zwischen Ober- und Bodenfläche, ist der Böschungswinkel bei B gleich Null.

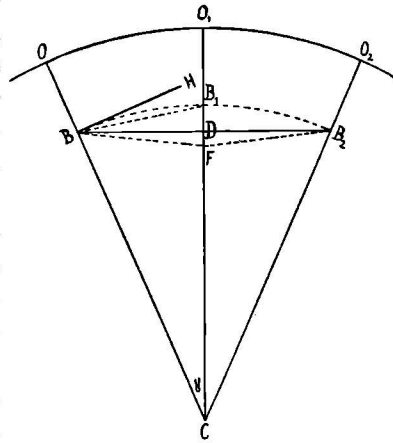


Fig. 1

Bis hieher ist die Argumentation Krümmels, die im vorstehenden sinngemäß und zum Teile wörtlich wiedergegeben ist, in schönster Ordnung; nun aber folgt das Versehen, das darin besteht, daß Krümmel die Tangente mit der Sehne verwechselt. „Wächst der Böschungswinkel weiter,“ sagt er, „so bleibt die normale Konvexität des Bodens erhalten, solange der Winkel“ — nämlich der Böschungswinkel bei B , denn nur von diesem ist ja die Rede — „nicht den Wert $= DBB_1$ erreicht. Sobald er diesen überschreitet, tritt der Übergang zur Konkavität ein. Diesen kritischen Böschungswinkel $DBB_1 = \varphi$ kann man sehr leicht finden. Ist der Winkel $OCO_1 = \gamma$,¹⁾ so ist φ als Peripheriewinkel $= \frac{\gamma}{2}$. Drückt man nun den Abstand der Orte O und O_1 an der Meeresoberfläche in Seemeilen, also in mittleren Bogenminuten einer kugelförmigen Erde aus, so folgt die einfache Regel: Der kritische Böschungswinkel, der zwischen zwei Lotungspunkten den Übergang vom konvexen zum konkaven Verlauf des Bodenreliefs bezeichnet, ist, in Bogenminuten ausgedrückt, gleich dem halben Betrage des in Seemeilen angegebenen Abstandes der beiden Lotungspunkte.“

Nun ist aber der Böschungswinkel des Meeresbodens BD im Punkte B — also der kritische Böschungswinkel bei B — nicht der Winkel $DBB_1 = \frac{\gamma}{2}$, den der Meeresboden BD mit der Sehne BB_1 bildet, sondern der Winkel $DBH = \gamma$ zwischen dem Meeresboden BD und der Tangente BH , die für den Punkt B die Horizontale darstellt.

Der Winkel DBB_1 repräsentiert dagegen mit großer Annäherung den mittleren Böschungswinkel des Meeresbodens BD und müßte deshalb als der mittlere kritische Böschungswinkel dieser Bodenstrecke bezeichnet werden. Auf diesen mittleren kritischen Böschungswinkel bezieht sich Krümmels Regel, und man kann allerdings, wenn man will, auch diesen mittleren kritischen Böschungswinkel als Argument des Überganges von Konvexität zu Konkavität benutzen. Praktisch wäre dies freilich nicht, weil ja infolge der Erdkrümmung die Böschung des Meeresbodens BD von B nach D vom Werte γ stetig bis zum Werte Null abnimmt und der mittlere Böschungswinkel in Wirklichkeit

¹⁾ Bei Krümmel β .

nur in einem einzigen Punkte eintritt, dessen Lage in jedem besonderen Falle erst durch Rechnung zu bestimmen wäre.

Es ist ferner zu beachten, daß hier von vornherein ein geradliniger Verlauf des Meeresbodens zwischen den beiden Lotungspunkten vorausgesetzt ist, oder daß, was auf dasselbe hinausläuft, die allgemeine Gestaltung des Meeresbodens nur nach Maßgabe der bei diesen beiden Lotungspunkten geloteten Tiefen beurteilt wird. Dies schließt in sich, daß der Meeresboden zwischen den beiden Lotungspunkten in diesem Sinne unter allen Umständen den Übergang vom konvexen zum konkaven Verlauf des Bodenreliefs auf eben dieser Strecke darstellt, denn die Profilstrecken BB_1 oder BF sind — entweder im Detail oder zumindest als Ganzes betrachtet — ebenso gerade wie die Profilstrecke BD . Hieraus ersieht man, daß die in Krümmels Regel enthaltene Definition nicht das Wesen der Sache trifft, um die es sich handelt. Denn in dem Falle der Bodengestaltung zwischen den beiden Lotungspunkten dreht sich die Frage nicht um den Übergang von Konvexität zu Konkavität, d. h. um den geradlinigen Verlauf dieser Strecke an sich, der ja hier immer vorhanden oder doch stillschweigend vorausgesetzt ist, sondern um einen solchen geradlinigen Verlauf, wo der Böschungswinkel bei dem tieferen Punkte D gleich Null ist. Dann tritt bei dem höheren Punkte B der kritische Böschungswinkel ein und dieser kritische Böschungswinkel ist der Winkel DBH , um den der Horizont von D gegen den Horizont in B geneigt ist; dieser Winkel ist aber gleich dem Zentriwinkel γ .

So gelangen wir denn zu der folgenden allgemeinen und eindeutigen Definition:

Der kritische Böschungswinkel für zwei durch ihre zentralen Projektionen auf die Erdoberfläche gegebenen Punkte verschiedenen Niveaus ist der Böschungswinkel, den der als eben betrachtete Boden bei dem höheren Punkte hat, wenn er bei dem tieferen Punkte horizontal ist. Dieser kritische Böschungswinkel ist daher gleich dem Neigungswinkel zwischen den Horizonten der beiden Punkte und gleich dem Zentriwinkel, um den die beiden Punkte voneinander abstehen; er tritt dann wirklich in Erscheinung, wenn die von dem tieferen Punkte ausgehende Horizontale den anderen Punkt trifft und zugleich das Bodenprofil darstellt.

Dabei ist es völlig gleichgültig, ob einer oder keiner der beiden Punkte auf der Erdkugeloberfläche selbst gelegen ist, oder ob sie darunter oder darüber liegen. Gehören aber beide Punkte der Erdkugeloberfläche an, oder befinden sie sich überhaupt in demselben Niveau, dann ist es natürlich ausgeschlossen, daß die von einem der Punkte ausgehende Horizontale auf den anderen Punkt trifft, es sei denn, daß der Winkelabstand der beiden Punkte so außerordentlich klein wäre, daß das Bogenstück dazwischen als gerades Bogenelement betrachtet werden kann. Dann fallen die Linien BH , BB_1 und BD in Fig. 1 mit dem Bogenelemente zusammen, wirkliche, mittlere und kritische Böschung werden einander gleich und gleich Null, und wenn dann das Bodenprofil zwischen den beiden Punkten keine Unregelmäßigkeit aufweist, so kann hier immerhin auch von dem Grenzfall des Überganges von konvexer zu konkaver Bodengestaltung gesprochen werden; nur daß dann dieser Grenzfall nicht eine Vertiefung der Erdkugeloberfläche, sondern das Bogenelement der Erdkugeloberfläche selbst betrifft.

Man sieht, daß das Auftreten des kritischen Böschungswinkels für zwei benachbarte Lotungspunkte verschiedenen Niveaus nicht die Bedeutung hat, daß zwischen diesen beiden Lotungspunkten der Übergang von konvexer zu konkaver Bodengestaltung vorliegt, sondern daß die Bedeutung des kritischen Böschungswinkels in diesem allgemeinen Falle vielmehr die ist, daß eine geradlinige oder als geradlinig angenommene Bodenstrecke zwischen zwei Punkten, die von dem höheren Punkte unter dem diesen Punkten entsprechenden kritischen Böschungswinkel ausgeht, den tieferen Punkt mit dem Böschungswinkel gleich Null erreicht, d. h. bei diesem tieferen Punkte horizontal ist. Setzt sich nun der Boden in der bisherigen Richtung um den Betrag dieser Strecke noch weiter fort, also in Fig. 1 um die Länge BD über D hinaus bis B_2 , so ist der Punkt B_2 in demselben Niveau gelegen wie der Punkt B und es ist alsdann auch der Böschungswinkel bei B_2 gleich dem Böschungswinkel bei B , nämlich gleich dem kritischen Böschungswinkel γ der um den Zentriwinkel γ voneinander abstehenden Punkte B und D .

Würde nun der Boden in der Mitte der Strecke BB_2 höher oder tiefer liegen als D , so wäre er konvex oder konkav; da er aber just durch D hindurchgeht, so stellt er den Übergang vom konvexen zum konkaven Verlauf dar — dies aber nicht auf der

Strecke BD , sondern auf der doppelt so langen Strecke BB_2 , deren beiderseitigen Endpunkte in demselben Niveau gelegen sind. Nicht der geradlinige Verlauf des Bodenprofils zwischen zwei Punkten verschiedenen Niveaus, sondern nur der zwischen zwei Punkten gleichen Niveaus bedeutet den Übergang von konvexer Bodengestaltung zu konkaver.

Gerade dieser Grenzfall der Bodengestaltung ist aber geographisch von Interesse und soll nach der Absicht Krümmels durch den kritischen Böschungswinkel fixiert werden.

Die vorhin gegebene allgemeine Definition des kritischen Böschungswinkels gilt für Punkte verschiedenen Niveaus; aus ihr ergibt sich sofort die spezielle Definition für Punkte gleichen Niveaus, die jene Forderung erfüllt.

In Fig. 1 liegen die Punkte B und B_2 in demselben Niveau. Verläuft der Boden geradlinig von B bis B_2 , so stellt er auf dieser Strecke den Übergang von konvexer zu konkaver Bodengestaltung dar, also den kritischen Fall, um den es sich handelt und dem der kritische Böschungswinkel entspricht. Dieser kritische Böschungswinkel ist daher der Winkel, den die Bodenstrecke BB_2 , die in der Mitte horizontal den Punkt D passiert, an jedem ihrer Endpunkte B und B_2 mit dem dortigen Horizont bildet, also derselbe Winkel $DBH = \gamma$ wie früher. Dieser kritische Böschungswinkel ist aber in dem Falle seiner Beziehung auf zwei Punkte gleichen Niveaus nicht gleich dem ganzen, sondern dem halben Zentriwinkel, um den diese beiden Punkte voneinander abstehen, da, wie man aus Fig. 1 sofort ersieht, der Zentriwinkel hier der Winkel $BCB_2 = 2\gamma$ ist.

Demnach kann die spezielle Definition des kritischen Böschungswinkels folgendermaßen gefaßt werden:

Der kritische Böschungswinkel für zwei Punkte gleichen Niveaus ist der Böschungswinkel, den der Boden bei jedem dieser Punkte hat, wenn der Boden auf der ganzen Strecke dazwischen geradlinig verläuft und solcherart den Übergang von konvexer zu konkaver Bodengestaltung darstellt; er ist gleich dem halben Zentriwinkel, um den die beiden Punkte voneinander abstehen.

Die Definition des kritischen Böschungswinkels ist also immer an die Voraussetzung eines geradlinigen Bodenprofils gebunden.

Bei geradlinigem Verlaufe des Bodens von einem höheren zu einem tieferen Punkte kann der kritische Böschungswinkel ein-

treten, muß es aber nicht. Tritt er ein, so besagt dies, daß der Boden in dem tieferen Punkte horizontal ist. Stellt nun in diesem letzteren Falle die Bodenstrecke zwischen den beiden Punkten die Hälfte eines symmetrischen Profils mit der Lotrechten des tieferen Punktes als Symmetrieachse vor, dann wird auch hier durch den kritischen Böschungswinkel der Übergang von konvexer zu konkaver Bodengestaltung bestimmt, aber nicht für die Strecke zwischen den beiden verschieden hoch gelegenen Punkten, sondern für die doppelte Strecke, mit Endpunkten gleichen Niveaus.

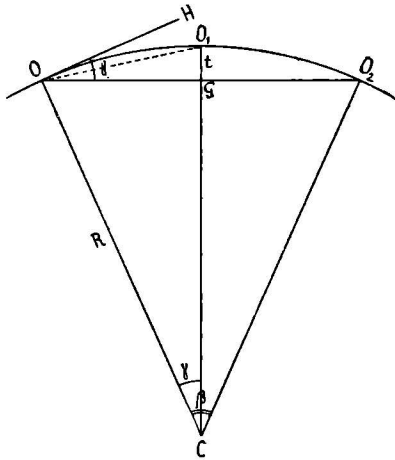


Fig. 2

Der geradlinige Verlauf des Bodens zwischen zwei Punkten gleichen Niveaus ist dagegen nur unter dem kritischen Böschungswinkel bei diesen beiden Punkten möglich, so daß der kritische Böschungswinkel bei Punkten gleichen Niveaus den Übergang von konvexer zu konkaver Gestaltung des Bodenprofils zwischen diesen beiden Punkten bedeutet.

Die Definition des kritischen Böschungswinkels für zwei Punkte gleichen Niveaus gilt natürlich auch für zwei einander gegenüberliegende Uferpunkte eines Meeresbeckens, und man kann

deshalb wohl auch kurzweg von dem kritischen Böschungswinkel eines Meeresbeckenprofils reden.

Die Tiefe eines Punktes unter dem Niveau eines anderen Punktes, die dem kritischen Böschungswinkel bei diesem anderen Punkte entspricht, kann man füglich als die kritische Tiefe¹⁾ des ersten Punktes bezeichnen. In Fig. 1 wäre demnach $B_1 D$ die kritische Tiefe des Punktes D hinsichtlich des Punktes B .

Die kritische Tiefe eines Meeresbeckens ist demnach die Tiefe, die in der Mitte des Beckens dem kritischen Uferböschungswinkel entspricht, also die Tiefe, die ein Meeresbecken in seiner Mitte haben müßte, wenn es den Grenzfall zwischen

¹⁾ Diese Bezeichnung ist bereits von P. Putsche (Petermanns Mitteilungen 1911, S. 78) gebraucht worden.

konvexer und konkaver Gestaltung darstellte. Diese kritische Meeresbeckentiefe ist, wie man aus Fig. 2 ohneweiters ersieht, gleich der Überhöhung des Halbierungspunktes der geradlinigen Verbindung der Uferpunkte des Profils durch die Erdkugeloberfläche oder, um eine kürzere, in der Technik übliche Ausdrucksweise zu gebrauchen, gleich der Pfeilhöhe der durch die Uferpunkte gezogenen Sehne.²⁾

In Fig. 2 ist also $O_1 G$ die kritische Tiefe des Meeresbeckens $OO_1 O_2$. Der kritische Böschungswinkel aber ist der Winkel $GOH = \gamma = \frac{\beta}{2}$, nämlich die Hälfte des Zentriwinkels, um den die beiden Uferpunkte voneinander abstehen.

Bezeichnen wir nun den Erdkugelhalbmesser OC mit R und die kritische Tiefe $O_1 G$ mit t , so ist zunächst in dem bei G rechtwinkligen Dreiecke OGC

$$OG = R \sin \gamma$$

Da ferner Winkel $O_1 OG = \frac{\gamma}{2}$, so ist in dem gleichfalls bei G rechtwinkligen Dreiecke OGO_1

$$O_1 G = t = OG \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = R \sin \gamma \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \qquad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

daher

$$t = 2 R \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$(1) \qquad t = 2 R \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 2 R \sin^2 \frac{\beta}{4}$$

Die Berechnung der kritischen Tiefe eines Meeresbeckens ist also sehr einfach:

Die kritische Tiefe eines Meeresbeckens ist gleich dem Erdkugeldurchmesser mal dem Sinusquadrat des halben kritischen Böschungswinkels, oder gleich dem Erd-

²⁾ Unter Pfeilhöhe versteht man in der Technik den größten senkrechten Abstand des Bogens von der Sehne.

Daher wird

$$(2) \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$$

$$r_2 = r_1 \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$$

Das ist die Polargleichung der von P_1 unter dem Böschungswinkel α ausgehenden Geraden $P_1 P_2$ für das gewählte Polarkoordinatensystem. Ein dritter Punkt P_3 , dessen Abstand vom Erdmittelpunkt r_3 ist und der mit dem Punkte P_1 den Zentriwinkel γ bildet, wird also

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} \text{wenn } r_3 = r_1 \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \gamma)} \left. \begin{array}{l} \text{über} \\ \text{in} \\ \text{unter} \end{array} \right\} \text{ der Profilrichtung } P_1 P_2 \text{ liegen.}$$

Ob in den beiden Ungleichheitsfällen die Profilstrecke zwischen den drei Punkten auf- oder abwärts gekrümmt ist, hängt davon ab, ob $\gamma \geq \beta$ ist. Ist $\gamma > \beta$, wie in der Figur dargestellt, so ist das Profil in der ersten der obigen drei Alternativen abwärts und in der dritten aufwärts gekrümmt; ist aber $\gamma < \beta$, liegt also P_3 zwischen P_1 und P_2 , dann umgekehrt.

Drückt man die Fahrstrahlen r_1 , r_2 und r_3 durch den Erdkugelhalbmesser R und durch die Tiefen t_1 , t_2 und t_3 der drei Punkte unter der Erdoberfläche aus, so ist

$$r_1 = R - t_1 \quad r_2 = R - t_2 \quad r_3 = R - t_3$$

Hiedurch geht Formel (2) über in

$$R - t_2 = (R - t_1) \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$$

und es wird

$$(4) \quad t_2 = R - (R - t_1) \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$$

Ein dritter Punkt P_3 , dessen Tiefe unter der Erdoberfläche t_3 ist und der mit dem Punkte P_1 den Zentriwinkel γ bildet, wird also

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} < \\ > \end{array} \right\} \text{wenn } t_3 = R - (R - t_1) \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \gamma)} \left. \begin{array}{l} \text{über} \\ \text{in} \\ \text{unter} \end{array} \right\} \text{ der Profilrichtung } P_1 P_2 \text{ liegen.}$$

Liegen die beiden Punkte P_1 und P_2 in demselben Niveau, ist also (Fig. 4) $r_1 = r_2$ und $t_1 = t_2$, dann ist auch $\eta = \delta$. Da nun

$$\beta + \delta + \eta = \beta + 2\delta = 180^\circ$$

$$\delta = 90^\circ - \alpha$$

so wird in diesem Falle $\alpha = \frac{\beta}{2}$ und es wird ferner nach (2)

$$r_2 = r_1 \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} = r_1$$

was nur möglich ist, wenn

$$\frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} = 1$$

also wenn entweder $\beta = 0$ oder $\alpha = \frac{\beta}{2}$ ist.¹⁾

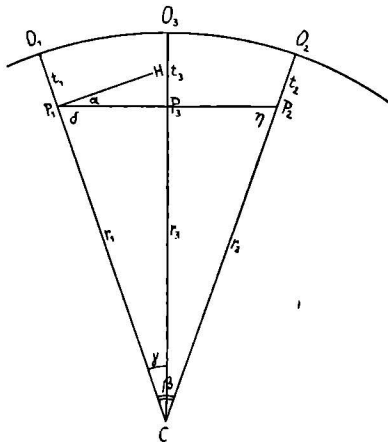


Fig. 4

Ist nun nicht nur $\alpha = \frac{\beta}{2}$, sondern auch $\gamma = \frac{\beta}{2}$, dann geht die Formel (3) über in

$$(6) \quad r_3 = r_1 \cos \frac{\beta}{2}$$

und die Formel (5) über in

$$(7) \quad t_3 = R - (R - t_1) \cos \frac{\beta}{2}$$

¹⁾ Allgemein kann dann zwar $\alpha = 2k\pi \pm \beta$ sein, wobei k Null oder irgendeine ganze Zahl bedeuten kann. Für uns kommt hier indessen nur der oben verzeichnete Fall in Betracht und auch das Winkelvorzeichen spielt hier keine Rolle.

und wenn nun noch überdies $t_1 = t_2 = 0$, d. h. wenn die beiden Punkte P_1 und P_2 einander gegenüberliegende Uferpunkte eines Meeresbeckens der Erdkugel darstellen (Fig. 5), dann wird

$$t_3 = R - R \cos \frac{\beta}{2} = R \left(1 - \cos \frac{\beta}{2} \right)$$

oder, da $1 - \cos \frac{\beta}{2} = 2 \sin^2 \frac{\beta}{4}$

$$(8) \quad t_3 = 2 R \sin^2 \frac{\beta}{4}$$

worin t_3 die Bedeutung der kritischen Tiefe des Meeresbeckens $P_1 P_2$ hat, und welches also dieselbe Formel ist, die wir früher (1) für diesen speziellen Fall direkt entwickelt haben.

Der Böschungswinkel α von einem höheren Punkte P_1 zu einem tieferen Punkte P_2 kann, wenn die Tiefen t_1 und t_2 der beiden Punkte und der Zentriwinkel β zwischen ihnen gegeben sind und die Erde als Kugel vom mittleren Erdhalbmesser R betrachtet werden darf, auf folgende Weise berechnet werden (Fig. 3, vgl. auch S. 595).

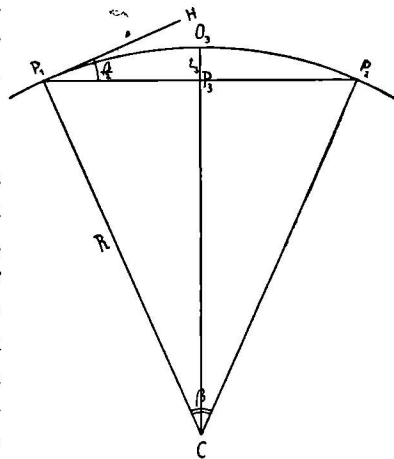


Fig. 5

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha} = \cos \beta + \operatorname{tg} \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_1}{r_2 \sin \beta} - \operatorname{ctg} \beta$$

$$(9) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R - t_1}{(R - t_2) \sin \beta} - \operatorname{ctg} \beta$$

Für den Böschungswinkel ϑ bei dem tieferen Punkte P_2 (Fig. 3) ist:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \delta}{\sin \eta}$$

oder, da $\delta = 90^\circ - (\beta - \vartheta)$ und $\eta = 90^\circ - \vartheta$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\cos(\beta - \vartheta)}{\cos \vartheta} = \frac{\cos \beta \cos \vartheta + \sin \beta \sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \cos \beta + \sin \beta \operatorname{tg} \vartheta$$

dagegen ϑ ein Tiefenwinkel und $\alpha < \beta$; ergibt die Formel Null, dann ist $\vartheta = 0$ und $\alpha = \beta$.

Die für die Rechnung bequemste Formel läßt sich aber für die Differenz $\alpha - \frac{\beta}{2}$ aufstellen, woraus sich dann der gesuchte Winkel α ebenso wie in dem vorigen Falle durch eine einfache Subtraktion ergibt. Es ist nämlich in dem schiefwinkligen Dreiecke $CP_1 P_2$ (Fig. 3) nach dem Tangentensatze

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} = \frac{tg \frac{\eta + \delta}{2}}{tg \frac{\eta - \delta}{2}}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \eta + \delta + \beta &= 180^\circ & \beta + \eta &= 2\alpha + \delta \\ \frac{\eta + \delta}{2} &= 90^\circ - \frac{\beta}{2} & \frac{\eta - \delta}{2} &= \alpha - \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

Dadurch wird

$$\begin{aligned} \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} &= \frac{\cotg \frac{\beta}{2}}{tg \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right)} \\ tg \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) &= \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \cotg \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

Da nun, wie aus den Figuren 3 und 6 sofort zu ersehen, $\alpha = \beta \pm \vartheta$, also $\alpha - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} \pm \vartheta$, je nachdem ϑ ein Höhen- oder Tiefenwinkel ist, so wird

$$\begin{aligned} tg \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) &= tg \left(\frac{\beta}{2} \pm \vartheta \right) = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \cotg \frac{\beta}{2} \\ (12) \quad tg \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) &= tg \left(\frac{\beta}{2} \pm \vartheta \right) = \frac{t_2 - t_1}{2R - (t_2 + t_1)} \cotg \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

Ob nun ϑ ein Höhen- oder Tiefenwinkel ist, also das positive oder das negative Vorzeichen gilt, ist unschwer zu entscheiden. Denkt man sich in Fig. 6 die Gerade $P_1 B$ gezogen, die mit $P_1 D$ den Winkel $\frac{\beta}{2}$ bildet, so sieht man leicht folgendes:

für $\alpha - \frac{\beta}{2} = 0$ ist $\alpha = \frac{\beta}{2}$ und $\vartheta = \frac{\beta}{2}$, ϑ ein Tiefenwinkel,

für $\alpha - \frac{\beta}{2} > \frac{\beta}{2}$ ist $\alpha > \frac{\beta}{2}$ und $\vartheta < \frac{\beta}{2}$, ϑ ein Tiefenwinkel,

für $\alpha - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$ ist $\alpha = \beta$ und $\vartheta = 0$,

für $\alpha - \frac{\beta}{2} < \frac{\beta}{2}$ ist $\alpha < \beta$ und $\vartheta > 0$, ϑ ein Höhenwinkel.

ϑ ist also ein Höhen- oder Tiefenwinkel, je nachdem die Auswertung der Formel (12) einen Wert ergibt, der größer oder kleiner ist als $\frac{\beta}{2}$.¹⁾

Ist P_1 ein Uferpunkt, also im Meeresniveau gelegen, dann wird $t_1 = 0$ und die Formel (12) geht über in

$$(17) \quad \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) = \frac{t_2}{2R - t_2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$$

Ist nun auch P_2 ein Uferpunkt, also $t_1 = t_2 = 0$, dann gewinnt α die Bedeutung des kritischen Böschungswinkels für das Meeresbecken $P_1 P_2$ und die Formel (17) geht über in

$$\operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) = 0$$

was in unserem Falle nur möglich ist, wenn $\alpha = \frac{\beta}{2}$; das heißt: der kritische Böschungswinkel eines Meeresbeckens ist, wie wir bereits früher gesehen haben, gleich dem halben Zentriwinkel, um den die Uferpunkte des Profils voneinander abstehen.

¹⁾ Liegen die beiden Punkte über der Erdoberfläche und bezeichnen wir nunmehr den tieferen Punkt mit P_1 und den höheren mit P_2 , die Höhen mit h_1 und h_2 , den Neigungswinkel bei P_1 mit α und den bei P_2 mit ϑ , so lauten die Formeln (9)–(12):

$$(13) \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta - \frac{R + h_1}{(R + h_2) \sin \beta}$$

$$(14) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{R + h_2}{(R + h_1) \sin \beta} - \operatorname{cotg} \beta$$

$$(15) \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\vartheta - \beta) = \frac{h_2 - h_1}{(R + h_2) \sin \beta} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

$$(16) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \pm \alpha \right) = \operatorname{tg} \left(\vartheta - \frac{\beta}{2} \right) = \frac{h_2 - h_1}{2R + h_2 + h_1} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$$

Ergibt die Auswertung der Formel (16) einen Wert, der größer ist als $\frac{\beta}{2}$, dann gilt das positive Vorzeichen und α ist ein Höhenwinkel; andernfalls gilt das negative Vorzeichen und α ist ein Tiefenwinkel.

Betrachtet man die Erde als Kugel vom Inhalte des Bessel'schen Erdsphäroids, so wird aus (1) oder (8) die kritische Tiefe t in Metern

$$(18) \quad t = 12\,740\,566 \sin^2 \frac{\beta}{4}$$

oder, wenn man statt des konstanten Koeffizienten dessen Logarithmus [in eckigen Klammern] einsetzt,

$$(19) \quad t = [7.105\,18873] \sin^2 \frac{\beta}{4}$$

Die Formeln (1) und (8) gelten, wie eine Vergleichung der Figuren 1 und 2 sofort zeigt, auch für die Berechnung der kritischen Tiefe eines Punktes unter dem Niveau eines anderen Punktes bei gegebenem Winkel- oder Bogenabstand der beiden Punkte voneinander. Tritt bei dem tieferen Punkte die kritische Tiefe, die dem kritischen Böschungswinkel bei dem höheren Punkte entspricht, ein, so bedeutet dies, daß der Boden bei dem tieferen Punkte horizontal ist. Liegt der höhere Punkt O (Fig. 2) im Meeresniveau, so ist die kritische Tiefe des im Winkelabstande γ befindlichen Punktes G — also O, G — gleich der kritischen Tiefe des Meeresbeckens, dessen Profildenden durch den doppelten Zentriwinkel, nämlich durch den Winkel $\beta = 2\gamma$ bestimmt sind. Liegt dagegen der höhere Punkt nicht im Meeresniveau, sondern darunter, so ist die Tiefe des tieferen Punktes unter der Meeresoberfläche gleich der kritischen Tiefe dieses Punktes unter dem Niveau des höheren Punktes mehr der Tiefe dieses letzteren. Will man in diesem Falle genauer rechnen, so hat man in die Formel (1) oder (8) anstatt R den um die Tiefe des höheren Punktes verminderten Erdkugelhalbmesser einzusetzen. Ist jedoch die Tiefe des höheren Punktes nicht groß und liegen die beiden Punkte nicht weit auseinander, dann kann man auch hier direkt nach (19) rechnen; selbst wenn die Tiefe des höheren Punktes 8666 m und der Winkelabstand beider Punkte 1° (60 Seemeilen) beträgt, erhält man nach dieser Formel die kritische Tiefe des zweiten Punktes unter dem ersten nur um einen Meter zu groß (970.2 anstatt 968.9 m).

Indessen ist ein anderer Fehler beachtenswert, der überhaupt aus der Anwendung der Formeln (1), (8) oder (19) sowie nicht minder auch der Formeln (9)—(16) deshalb resultiert, weil darin die wahre, sphäroidische Erdgestalt vernachlässigt und durch die Gestalt der mit dem Erdsphäroide inhaltsgleichen Kugel ersetzt ist. Dieser Fehler kann unter Umständen gar nicht unbeträcht-

lich sein und sich in der kritischen Tiefe von Meeresbecken bis in die Zehner der Meter geltend machen. Will man ihn auf verhältnismäßig einfache Weise und hinlänglich vermeiden, so wird man in die Formel (1) oder (8), beziehungsweise (9)—(16), je nachdem das betreffende Profil mehr in meridionaler Richtung, in westöstlicher Richtung oder unter dem Azimut von 45° verläuft, anstatt R den Meridiankrümmungshalbmesser, den Querkrümmungshalbmesser oder den mittleren Krümmungshalbmesser für die mittlere geographische Breite des Profils einsetzen, für welche Größen handliche Tabellen vorliegen.¹⁾ Ist die Richtung des Profils aber sehr von diesen drei Hauptrichtungen verschieden, so kann man für die Mitte des Profils den Krümmungshalbmesser K , den man anstatt R in die Formeln einzusetzen hat, nach folgender Formel berechnen:

$$(20) \quad \frac{1}{K} = \frac{\cos^2 \xi}{M} + \frac{\sin^2 \xi}{Q}$$

wobei M den Meridiankrümmungshalbmesser und Q den Querkrümmungshalbmesser für die mittlere geographische Breite des Profils und ξ das Azimut des Profils bedeutet.

Hat man keine Tabellen für M und Q zur Verfügung, so kann man diese Größen für die geographische Breite φ nach den Formeln berechnen

$$(21) \quad M = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^3}} = \frac{[6 \cdot 801 \ 73510]}{\sqrt{(1 - [0 \cdot 824 \ 41042 - 3] \sin^2 \varphi)^3}}$$

$$(22) \quad Q = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{[6 \cdot 804 \ 64346]}{\sqrt{1 - [0 \cdot 824 \ 41042 - 3] \sin^2 \varphi}}$$

wobei a die äquatoriale Halbachse, ε die numerische Exzentrizität der Meridianellipse und die Zahlen in den eckigen Klammern Logarithmen bedeuten.

Die genaue Formel für die Berechnung der kritischen Tiefe t eines Meeresbeckens, dessen Profilsbogen dem Winkel β entspricht und mit dem Azimut ξ in der mittleren geographischen Breite φ gelegen ist, lautet demnach

$$(23) \quad t = 2 K_{\varphi, \xi} \sin^2 \frac{\beta}{4}$$

wenn man mit $K_{\varphi, \xi}$ den Krümmungshalbmesser in der geographischen Breite φ für das Azimut ξ bezeichnet.

¹⁾ Z. B. von H. Hartl in den Mitteilungen des k. u. k. Militärgeographischen Instituts XIV, 1894, Wien 1895, S. 112—123.

Für ein Meeresbecken z. B., dessen horizontale Erstreckung vier Bogengrade beträgt, ergibt die Formel (1) — beziehungsweise (8) oder (19) — eine kritische Tiefe von 3881 m auf der als Kugel betrachteten Erde. Liegt nun das Meeresbecken am Äquator, so ist nach Formel (23) die kritische Tiefe für ein meridionales Profil in Wirklichkeit nur 3859 m, dagegen für ein westöstliches Profil 3885 m und für ein Profil mit dem Azimut $\pm 45^\circ$ 3872 m. Liegt aber dieses Meeresbecken am Pol, so ist die kritische Tiefe für jede Profilrichtung in Wirklichkeit 3898 m.

Der Einfluß der sphäroidischen Erdgestalt äußert sich hier also in stärkerem Grade, als man von vornherein erwarten möchte, und darf daher nicht vernachlässigt werden. Die kritischen Tiefen von Meeresbecken sind deshalb stets nach Formel (23) zu berechnen.¹⁾

Das Schwarze Meer hat in 34° Ö. L. eine Breite von rund $2^\circ 20'$,²⁾ der nach Formel (1) eine kritische Tiefe von 1320·6 m entsprechen würde, während ihr nach Formel (23) in Wirklichkeit eine solche von 1319·4 m entspricht. Daß hier der Unterschied nur etwas über 1 m beträgt, kommt daher, weil dieses Profil genau meridionale Richtung hat und sich der Meridiankrümmungshalbmesser, der in rund $48^\circ 10'$ geographischer Breite die Länge des mittleren Erdhalbmessers besitzt, in der mittleren Profilbreite

¹⁾ Ebenso ist auch die Formel (12) für den Böschungswinkel α von einem höheren zu einem tieferen Punkte zu modifizieren in

$$(24) \quad \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) = \frac{t_2 - t_1}{2 K_{\varphi, \xi} - (t_2 + t_1)} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

und die Formel (16) für den Böschungswinkel α von einem tieferen zu einem höheren Punkte in

$$(25) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \pm \alpha \right) = \frac{h_2 - h_1}{2 K_{\varphi, \xi} + h_2 + h_1} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

Die Differenz kann sich hier bis in die Minuten geltend machen. Auf der als Kugel betrachteten Erde würde z. B. der Abfallswinkel von einem Uferpunkte zu einem um $10'$ Bogenabstand entfernten, 2000 m tieferen Punkt $6^\circ 14' 39\cdot9''$ betragen. Liegt die Profilmitte im Äquator, so ist der Abfallswinkel in Wirklichkeit bei meridionaler Profilrichtung $6^\circ 16' 43\cdot1''$, bei äquatorialer Richtung $6^\circ 14' 15\cdot4''$ und bei einer Richtung des Profils mit dem Azimut $45^\circ 6' 15' 29\cdot1''$; überspannt dagegen das Profil den Pol, so beträgt jener Abfallswinkel unabhängig von der Profilrichtung $6^\circ 13' 1\cdot8''$.

²⁾ Die Angabe $2^\circ 10'$ bei Krümmel beruht auf einem Druckfehler; für diese Erstreckung wäre die kritische Tiefe nur 1139 m.

von $43^{\circ} 10'$ nicht mehr sehr davon unterscheidet. Setzt man aber für die Profilausdehnung den genaueren Wert $2^{\circ} 22'$ ein, dann steigt die wahre kritische Tiefe auf 1357·4 m. Die Vernachlässigung von nur zwei Bogenminuten in der Profillänge hat hier also einen Fehler von 38 m in der kritischen Tiefe zur Folge. Die wirkliche Tiefe des Schwarzen Meeres ungefähr in der Mitte dieses Profiles mißt 2240 m; sie ist also um 883 m größer als die kritische Tiefe. Das Schwarze Meer ist somit ein durchaus konkaves Becken, während es von Krümmel, der die kritische Tiefe irrthümlich zu 2628 m angegeben hat, als nur an den Rändern konkav, im ganzen aber als konvex bezeichnet wurde.

Das Celebes-Becken hat über seine größte Tiefe von 5111 m hinweg von der Sangi- nach der Jolo-Insel eine Ausdehnung von rund $4^{\circ} 40'$; die mittlere geographische Breite dieses Profilbogens ist $4\frac{1}{2}^{\circ}$ N, das Azimut der Profilrichtung N 60° W. Hiefür ergibt Formel (23) mit Benützung von (20) eine kritische Tiefe von 5279 m,¹⁾ nicht aber, wie nach Krümmels Berechnung, eine solche von 10 560 m. Nichtsdestoweniger ist auch hiernach das Celebes-Becken noch immer konvex, wenn ihm auch nur 168 m Tiefe zum Übergang in eine wirkliche Hohlform fehlen. Würde die Profillänge indessen nur um $4\frac{1}{2}$ Bogenminuten weniger betragen als $4^{\circ} 40'$, so würde die kritische Tiefe genau der wirklichen gleichen, das Becken also den Übergang von konvexer zu konkaver Gestaltung darstellen. Nun sind die vorstehenden Profildaten dem Blatte 66 von Stieler's Handatlas im Maßstabe von 1:12 500 000 entnommen, die Profillänge daher gewiß nicht auf die Minute genau; abgesehen davon dürften die Endpunkte des Profils hier auch astronomisch nicht auf die Minute genau bestimmt sein. Ob das Celebes-Becken also wirklich konvex gestaltet ist, läßt sich nicht mit Sicherheit entscheiden; nur so viel kann behauptet werden, daß seine Gestaltung von dem Grenzfalle zwischen konvex und konkav nicht weit entfernt ist.

In der Straße von Dover sind nach Krümmel in 6·8 Seemeilen Abstand von C. Blanc Nez 62 m Tiefe gelotet worden. Hier

¹⁾ Formel (19), wobei die Erde als Kugel betrachtet wird, ergibt 5282 m; die Differenz ist also auch in diesem Falle nicht bedeutend und beträgt nur 3 m. Dagegen ergibt die Näherungsformel Putsches $t = \frac{1}{50} b^2$ (Petermanns Mitteilungen 1911, S. 78), wobei b die Länge des Profilbogens bedeutet, 5366 m, also um 87 m zu viel.

hat Krümmel die kritische Tiefe richtig zu 12·5 m angegeben; der wirkliche Böschungswinkel vom Strande dorthin ist jedoch nicht 16' 56'', sondern 20' 18'', und der kritische Böschungswinkel nicht 3' 24'', sondern 6' 48'' — die Angaben Krümmels beziehen sich auf den mittleren Böschungswinkel und den mittleren kritischen Böschungswinkel.

Im offenen Atlantischen Ozean hat nach Krümmel der Kabeldampfer „Podbielski“ im Juni 1902 in 39° 11·2' N und 66° 12·7' W 4598 m und 23 Seemeilen nordöstlich davon 4672 m gelotet. An dem ersten Punkte ist nach Formel (12) der wirkliche Böschungswinkel 17' 28'',¹⁾ während der kritische Böschungswinkel hier 23' ist. Wäre der wirkliche Böschungswinkel diesem gleich, dann wäre der Boden bei dem tieferen Punkte horizontal — in Wirklichkeit aber ist er dort um 23'—17' 28'' = 5' 32'' geneigt. Um diesen Betrag, der also kaum ein Drittel des wirklichen Böschungswinkels bei dem höheren Punkte ausmacht, müßte die Böschung bei beiden Punkten größer sein, damit der kritische Böschungswinkel erreicht wäre. Die Angaben Krümmels: wirklicher Böschungswinkel 5' 58'', kritischer Böschungswinkel 11' 30'' beziehen sich wiederum auf den mittleren wirklichen und den mittleren kritischen Böschungswinkel; die mittlere wirkliche Böschung der ganzen Profilstrecke müßte also fast doppelt so groß sein, als sie ist, um der mittleren kritischen Böschung gleichzukommen.

Man sieht, daß die mittleren Böschungen zu solchen Vergleichen minder geeignet sind als die wirklichen. Wäre bei dem höheren Punkte die wirkliche Böschung der kritischen gleich, also 23', dann wäre die Böschung bei dem tieferen Punkte gleich Null und die mittlere Böschung der ganzen Strecke wäre gleich der mittleren kritischen Böschung von 11' 30''. An welchem Zwischenpunkte alsdann die wirkliche Böschung bei ihrem durch die Erdkrümmung bedingten Anwachsen von Null bei dem tieferen Punkte bis auf 23' bei dem höheren Punkte den Wert der mittleren kritischen Böschung von 11' 30'' passiert, müßte erst eigens berech-

¹⁾ In diesem Falle beeinflußt die wahre Erdgestalt das Resultat erst in den Zehntelsekunden. Formel (12) ergibt 17' 28·39'', während nach (24) der wirkliche Abfallswinkel 17' 28·08'' ist, wenn die Distanz durch das Log, und 17' 28·23'', wenn sie astronomisch bestimmt wurde. Diese Unterscheidung ist hier selbstverständlich nur theoretisch von Interesse, weil die Rechnung viel weiter getrieben ist, als es die Zuverlässigkeit der Angaben gestattet.

net werden. Während also in dem gegebenen Falle die Böschung bei dem höheren Punkte nur um rund ein Drittel des dort wirklich vorhandenen Betrages größer sein müßte, damit die kritische Böschung einträte, müßte sich zu demselben Zwecke die mittlere Böschung fast verdoppeln; das heißt also: an dem unbekanntem Punkte der Profilstrecke, wo die wirkliche Böschung $5' 58''$ beträgt, also den Wert der mittleren Böschung der ganzen Profilstrecke besitzt, müßte die Böschung fast doppelt so groß sein, als sie ist, damit die Profilstrecke „kritisch“ verlief, also bei dem tieferen Punkte horizontal wäre. Die Vergleichung der mittleren Böschungen entbehrt hier also nicht nur der Anschaulichkeit, sondern verleitet sogar zu unrichtigen Vorstellungen über die in Rede stehenden Neigungsverhältnisse.

Es könnte auf den ersten Blick auffallend erscheinen, daß die wirkliche mittlere Böschung unserer Profilstrecke, die bei dem höheren Punkte den Böschungswinkel $17' 28''$ und bei dem tieferen Punkte den Böschungswinkel $5' 32''$ aufweist, $5' 58''$ beträgt, also nur um $26''$ größer ist als die Böschung bei dem letzteren Punkte, dagegen um nicht weniger als $11' 30''$ kleiner als die Böschung bei dem höheren Punkte. Das kommt daher, weil die Profilstrecke in unserem Falle, wo der kritische Böschungswinkel nicht erreicht ist, von jedem Endpunkt gegen den andern Endpunkt abfällt, also bei einem Zwischenpunkte horizontal ist. Die Neigungswinkel bei den beiden Endpunkten haben also entgegengesetzten Sinn und sind deshalb mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen; alsdann ergibt sich als arithmetisches Mittel der mittlere Böschungswinkel von $5' 58''$, wie dies ebenso auch bei den kritischen Böschungswinkeln, $\frac{23' + 0}{2} = 11' 30''$, der Fall ist.

Bei der Berechnung der kritischen Tiefe $t = 2 R \sin^2 \frac{\beta}{4}$ wird es häufig vorkommen, daß die Länge des Profilbogens nicht in Winkelmaß, sondern nach ihrem auf der Erdoberfläche gemessenen horizontalen Abstände gegeben ist. Bei kleinen Winkeln ist es nun innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen erlaubt, den Sinus durch den Bogen zu ersetzen, wodurch unsere Formel überginge in $t = 2 R \left(\frac{\beta}{4} \right)^2$. Wir wollen nun ermitteln, bis zu welcher Winkelgröße oder bis zu welchem horizontalen Abstände dies

hier zulässig ist, wenn man die kritische Tiefe bis auf $\frac{1}{2}$ m genau erhalten will.

Zu diesem Zwecke entwickeln wir:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\beta}{4} &= \frac{\beta}{4} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\beta}{4} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\beta}{4} \right)^5 - \dots = \\ &= \frac{\beta}{4} - \frac{\beta^3}{384} + \frac{\beta^5}{122\,880} - \dots \\ (26) \quad \sin^2 \frac{\beta}{4} &= \left(\frac{\beta}{4} \right)^2 - \frac{\beta^4}{768} + \frac{\beta^6}{92\,160} - \dots \end{aligned}$$

Da der Bogen größer ist als sein Sinus, so wird die Näherungsformel mit dem Bogenquadrat einen größeren Wert ergeben als die genaue Formel mit dem Sinusquadrat. Soll nun die Differenz höchstens $\frac{1}{2}$ m betragen, so darf höchstens sein

$$\begin{aligned} 2R \left(\frac{\beta}{4} \right)^2 - 2R \sin^2 \frac{\beta}{4} &= 0.5 \\ \left(\frac{\beta}{4} \right)^2 - \sin^2 \frac{\beta}{4} &= \frac{0.5}{2R} \end{aligned}$$

Nun ist nach (26)

$$\left(\frac{\beta}{4} \right)^2 - \sin^2 \frac{\beta}{4} = \frac{\beta^4}{768} - \dots$$

wobei die folgenden Glieder, da β hier immer ein kleiner Winkel ist, selbst bei achtstelliger Rechnung nicht mehr zur Geltung kommen, so daß wir als Grenzbedingung erhalten:

$$(27) \quad \frac{\beta^4}{768} = \frac{0.5}{2R} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{192}{R}}$$

Die Auswertung ergibt $\beta = 4^\circ 14' 43.076''$ und für diesen Wert von β ergibt die genaue Formel eine kritische Tiefe von 4371.0963 m, die Näherungsformel eine solche von 4371.5963 m, also, wie es nach unserem Ansatz sein muß, genau um 0.5 m mehr. Für $\beta = 4^\circ 30'$ ergeben die beiden Formeln 4911.8886 und 4911.2574 m, differieren also im Resultate um etwas mehr als 0.6 m, und innerhalb dieser Unsicherheit kann man also die Näherungsformel bis zu einer Profilhogenweite von rund $4\frac{1}{2}^\circ$ oder ungefähr 500 km anwenden.

Dieser Näherungsformel kann man aber eine noch bequemere Fassung geben. Bezeichnet man den dem Zentriwinkel β ent-

sprechenden Bogen der Erdoberfläche mit b , so ist $b = R \beta$

und die Näherungsformel $t = 2 R \left(\frac{\beta}{4} \right)^2$ geht alsdann über in

$$(28) \quad t = \frac{b^2}{8 R^1}$$

Selbstverständlich ist jedoch auch hier das auf S. 601—603 Gesagte zu beachten, so daß also bei Berechnungen der kritischen Tiefe, die nicht gedachten Meeren auf der idealen, kugelförmigen, sondern wirklichen Meeren auf der reellen, sphäroidischen Erdoberfläche gelten, auch innerhalb der geringen hier angestrebten Genauigkeit von mindestens $\frac{1}{2}$ m statt nach (28) zu rechnen ist nach

$$(29) \quad t = \frac{b^2}{8 K_{\varphi, \xi}}$$

Zu demselben Resultate muß man natürlich auch gelangen, wenn man die Formel nicht trigonometrisch, sondern geometrisch ableitet. Denkt man sich in Fig. 2 den Radius $O_1 C$ zum Durchmesser $O_1 E$ verlängert und die Gerade $O E$ gezogen, so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $O G O_1$ und $E O O_1$

$$t : O O_1 = O O_1 : 2 R$$

$$t = \frac{O O_1^2}{2 R}$$

Hier fragt es sich nun, inwielange man die Sehne $O O_1$ mit ihrem Bogen $\frac{b}{2}$ (nach unserer Bezeichnungsweise) vertauschen darf, ohne im Resultate eine bestimmte Fehlergrenze — wir wählen wieder $\frac{1}{2}$ m — zu überschreiten.

Ersetzen wir $O O_1$ durch den Bogen $\frac{b}{2}$, so geht die Formel über in

¹⁾ Drückt man b in Kilometern aus, so wird für die Besselsche Erdoberfläche $t = \frac{1}{50 \cdot 962} b^2 = [0 \cdot 29276 - 2] b^2$ in Metern. Indem P. Putsche (a. a. O.) den Koeffizienten von b^2 auf $\frac{1}{50}$ abrundet, erhält er die kritische Tiefe bei Bögen von 100—500 km um 4—95 m zu groß, während die richtige Näherungsformel auch bei einem Profilibogen von 500 km noch auf $\frac{1}{2}$ m genau ist.

$$t = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2R} = \frac{b^2}{8R}$$

also in dieselbe Näherungsformel wie früher. Andererseits ist

$$OO_1 = 2R \sin \frac{\beta}{4}$$

wodurch die genaue Formel

$$t = \frac{OO_1^2}{2R} = \frac{4R^2 \sin^2 \frac{\beta}{4}}{2R} = 2R \sin^2 \frac{\beta}{4}$$

wird, was wiederum dieselbe genaue Formel ist wie früher. Es kann also die Sehne des halben Bogens mit dem halben Bogen mit genau demselben Effekte vertauscht werden wie der Sinus des Viertelbogens mit dem Viertelbogen. Dies geht auch aus der Figur sofort hervor, da (für $R = 1$) $OO_1 = 2 \sin \frac{\beta}{4}$ ist.

Der Wert von t wird nach der Näherungsformel (28) zu hoch erhalten:

b	β		Richtiger Wert von t
bei 500 km	4° 29' 49.6104''	um 0.6295	m 4904.9609
" 450 "	4° 2' 50.6493''	" 0.4131	" 3973.1151 "
" 400 "	3° 35' 51.6884''	" 0.2579	" 3139.3200 "
" 350 "	3° 8' 52.7274''	" 0.1512	" 2403.5881 "
" 300 "	2° 41' 53.7662''	" 0.0816	" 1765.9309 "
" 250 "	2° 14' 54.8054''	" 0.0393	" 1226.3583 "
" 200 "	1° 47' 55.8443''	" 0.01609	" 784.87839 "
" 150 "	1° 20' 56.8832''	" 0.00509	" 441.49805 "
" 100 "	53' 57.9221''	" 0.00101	" 196.22261 "
" 50 "	26' 58.9610''	" 0.000062	" 49.055842 "

Die Berechnung ist hier nur deshalb so vielstellig durchgeführt worden, um zu zeigen, in welchem Maße sich der Wert der Näherungsformel mit kleiner werdendem Profilbogen dem Werte der richtigen Formel nähert. Der „richtige Wert von t “ entspricht der Formel (19) und gilt natürlich nur für eine kugelförmige Erde vom mittleren Halbmesser des Besselschen Erd-sphäroids, $R = 6\,370\,283.157$ m.

Es dürfte in vielen Fällen nützlich sein, zu wissen, welchen Fehler man begeht, wenn man den Bogen b vom mittleren Erdhalbmesser R und dem Zentriwinkel β an die Stelle der zugehörigen Sehne s setzt. Um dies allgemein zu untersuchen, entwickeln wir wieder:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{\beta}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\beta}{2} \right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{\beta}{2} \right)^5 - \frac{1}{5040} \left(\frac{\beta}{2} \right)^7 + \dots = \\ &= \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48} + \frac{\beta^5}{3840} - \frac{\beta^7}{645120} + \dots \end{aligned}$$

Nun ist

$$b = R \beta$$

$$s = 2 R \sin \frac{\beta}{2} = R \left(\beta - \frac{\beta^3}{24} + \frac{\beta^5}{1920} - \frac{\beta^7}{322560} + \dots \right)$$

also

$$b - s = R \left(\frac{\beta^3}{24} - \frac{\beta^5}{1920} + \frac{\beta^7}{322560} - \dots \right)$$

oder, da $\beta = \frac{b}{R}$

$$b - s = R \left(\frac{b^3}{24 R^3} - \frac{b^5}{1920 R^5} + \frac{b^7}{322560 R^7} - \dots \right)$$

$$\begin{aligned} (30) \quad b - s &= \frac{b^3}{24 R^2} - \frac{b^5}{1920 R^4} + \frac{b^7}{322560 R^6} - \dots = \\ &= \frac{b^3}{24 R^2} \left(1 - \frac{b^2}{80 R^2} + \frac{b^4}{13440 R^4} - \dots \right) \end{aligned}$$

In Betracht kommt hier nur das erste Glied, die übrigen können vernachlässigt werden. Denn das Glied mit b^5 ergibt

0·001 m	bei einem Bogen auf der Erdkugel von	316 218 m
0·01	" " " " " "	501 173 "
0·1	" " " " " "	794 305 "
1	" " " " " "	1 258 888 "

Das Glied mit b^7 aber ergibt 0·001 m erst bei einem Bogen von 1 550 633 m Länge.

Zur Orientierung möge die folgende Tabelle dienen. Es ist auf der Erdkugel der Bogen länger als die Sehne um

	b	β
0·001 m bei	9 912·341 m	5' 20·95''
0·005 " "	16 949·865 "	9' 8·82''
0·01 " "	21 355·49 "	11' 31·47''
0·05 " "	36 517·46 "	19' 42·40''
0·1 " "	46 009·0 "	24' 49·74''
0·5 " "	78 674·3 "	42' 27·41''
1 " "	99 123 "	53' 29·54''
5 " "	169 499 "	1° 31' 28·23''
10 " "	213 556 "	1° 55' 14·77''
50 " "	365 179 "	3° 17' 4·20''
100 " "	460 100 "	4° 8' 17·68''

Bei der Berechnung der letzten drei Angaben mußte jedoch in (30) auch noch das Glied mit b^5 berücksichtigt werden; bei seiner Vernachlässigung würde man den Bogen, der genau um 10 (50, 100) m länger ist als seine Sehne, schon um 1 (5, 10) m zu kurz erhalten.
