Die Erddichte und der freie Fall ins Erdinnere

Von **Emil Kraft von Helmhacker,**
Oberleutnant der Schweren Haubitzdivision Nr. 3
(Wien)

(Mit 4 Textfiguren und 2 Tabellen)

Denkt man sich den Widerstand des Erdreiches ausgeschaltet und überläßt einen sich auf der Erdoberfläche befindlichen Körper seiner Schwere, so wird er gemäß den Gesetzen der Anziehung nach dem Schwerpunkte der Erde, also in der Richtung zum Erdmittelpunkt fallen. Dieser freie Fall ins Erdinnere, den man sich am besten in einer durch den Erdmittelpunkt gehenden schmalen Röhre ausgeführt denkt, erscheint auf den ersten Blick als ein einfacher Vorgang und er wäre es auch, wenn die Erde ein homogener, also überall gleich dichter Körper wäre. Da aber die Dichteverhältnisse unseres Planeten ziemlich kompliziert sind, ist der Vorgang beim Fall ins Erdinnere oder beim subtelluren Fall ziemlich verwickelt.

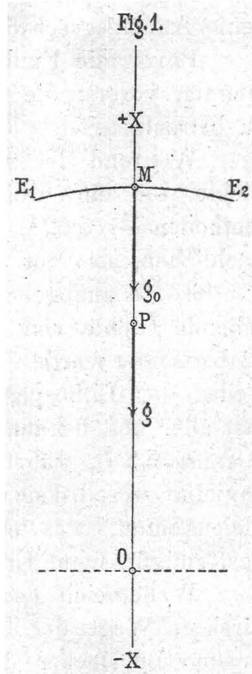

Fig. 1

Bezeichnet E_1 E_2 (Fig. 1) die Erdoberfläche, O den Erdmittelpunkt als den Ursprung eines nach aufwärts (in der Richtung nach M) positiv zu zählenden linearen Koordinatensystems und stellt P den fallenden Punkt selbst in einem bestimmten Momente dar, so lautet die Differenzialgleichung der Bewegungen bekanntlich

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - mg. \qquad 1)$$

Hierin bedeutet g keinesfalls eine konstante Größe, sondern die Fallbeschleunigung im betreffenden Punkte und ist, da diese vom geozentrischen Abstand des Punktes ($O\,P$) abhängig ist, eine Funktion der Koordinate, so daß

$$g = f(x). \qquad 2)$$

Führt man diesen Wert in Gleichung 1) ein, so hat man

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\,f(x), \qquad 3)$$

zu welcher Gleichung noch wegen der sich ergebenden zwei Integrationskonstanten die beiden Bedingungsgleichungen hinzutreten müssen:

$$t = 0,\ \ x = r; \qquad 4\,a)$$

$$t = 0,\ \frac{dx}{dt} = 0. \qquad 4\,b)$$

Sie sagen aus, daß der Punkt P seine Bewegung im Abstande r vom Erdmittelpunkt, also an der Erdoberfläche beginnen und daß seine Anfangsgeschwindigkeit dortselbst Null betragen müsse.

Bevor die Funktion $g = \varphi(x)$ entwickelt wird, ist es notwendig, vorerst die Dichteverhältnisse des Erdsphäroïds näher zu betrachten.

Während der wahrscheinlichste Wert für die mittlere Erddichte — ein Kompromiß der verschiedenen Berechnungsmethoden — 5·52[1]) betragen dürfte, wird die Dichte der oberflächlichen, also uns direkt zugänglichen Schichten nur mit etwa 2·5 bis 2·8 angegeben, wogegen die im Erdzentrum selbst herrschende Dichte von Helmert und Stampf übereinstimmend mit 11 berechnet wurde. Die Dichte des uns unmittelbar erforschbaren Teiles der Lithosphäre steht daher erheblich unter derjenigen fast aller uns bekannten, selbst der dichtesten Hauptbestandteile (Granit = 2·7), während sie nach dem Erdmittelpunkt allmählich zunimmt, woselbst sie etwa der des Bleies (Blei = 11·3, Silber = 10·4) gleichkommt, was natürlich mit der landläufigen Theorie des gasförmigflüssigen Erdinnern nicht mehr vereinbar erscheint.

Wenngleich das Innere der Lithosphäre kaum jemals im direkten Wege der Beobachtung erforscht werden dürfte — die tiefsten Bohrlöcher der Erde würden erst auf einem über 6 m im Durchmesser betragenden Globus 2 mm tief ausfallen — muß doch als feststehend angenommen werden, daß die Dichte mit der Entfernung von der Erdoberfläche wachse, wodurch das Potenzial der Erde von dem der homogenen Vollkugel abweichen muß.

[1]) Nach Marcuse, Weltall und Menschheit, Bd. IV.

Zur Ergänzung des über die Dichte im Erdinnern Gesagten sei noch hinzugefügt, daß der „feste Erdkern“, der nach den Forschungen Arrhenius’ über Vulkanismus zirka 4500 km im Halbmesser betragen soll, trotz der hohen Dichtezahlen bezüglich seines Aggregatzustandes nur mit gewissen Einschränkungen als „fest“ bezeichnet werden kann, da im Erdzentrum nach wärmetheoretischen Untersuchungen eine Temperatur von über 20·000° C herrschen müsste, also mehr als das Dreifache der Oberflächentemperatur der Sonne.[1])

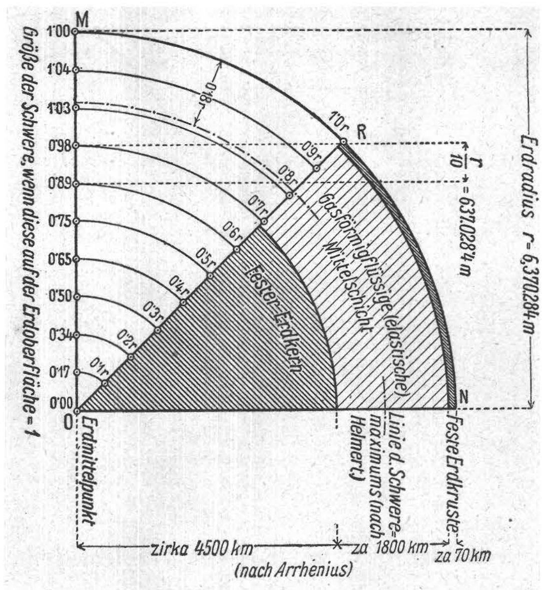

Fig. 2

Nimmt man nun die Größe der Beschleunigung der Erdschwere auf der Oberfläche mit 1 an und teilt den Erdhalbmesser (Fig. 2) in 10 gleiche Teile, so nimmt die Schwere zunächst um etwa 4 % zu, um dann bis zum Erdmittelpunkt abzunehmen, woselbst sie den Wert Null erreicht. Diese Reihe (Fig. 2) 1·00, 1·04, 1·03, 0·98, 0·89, 0·75, 0·65, 0·50, 0·34, 0·17, 0·00, welche den Verlauf der Schwere im Erdinnern in den einzelnen Radiuszehnteln anzeigt, wurde von Lipschitz gegeben. Diese Reihe müßte bei der homogen gedachten Erde 1·00, 0·90, 0·80, 0·70, 0·60, 0·50, 0·40, 0·30, 0·20, 0·10, 0·00 lauten. Während die Schwerkraft der homogenen Erde bereits im Abstand von $^5/_{10}$ Erdradien vom Erdmittelpunkt auf die Hälfte ihres ursprünglichen Wertes herabsinkt, fällt jene des nichthomogenen — also wirklich bestehenden — Erdkörpers erst im Abstande von $^3/_{10}$ Erdradien vom Erdzentrum aus gerechnet auf die Hälfte ihres Oberflächenwertes herab.

[1]) Die Oberflächentemperatur der Sonne wird gegenwärtig mit etwa 6000° C angenommen.

Nach Helmert soll die Schwere noch über das erste Radiuszehntel zunehmen und im Abstande von 0·18 Erdradien von der Erdoberfläche aus gemessen ein Maximum erreichen.

Bezeichnet (Fig. 3) x die Achse der geozentrischen Abstände, y die Achse der Schwere (Schwere der Erdoberfläche gleich der Einheit), O den Erdmittelpunkt als den Ursprung des Koordinatensystems und trägt man auf den zur y-Achse parallelen Ordinaten

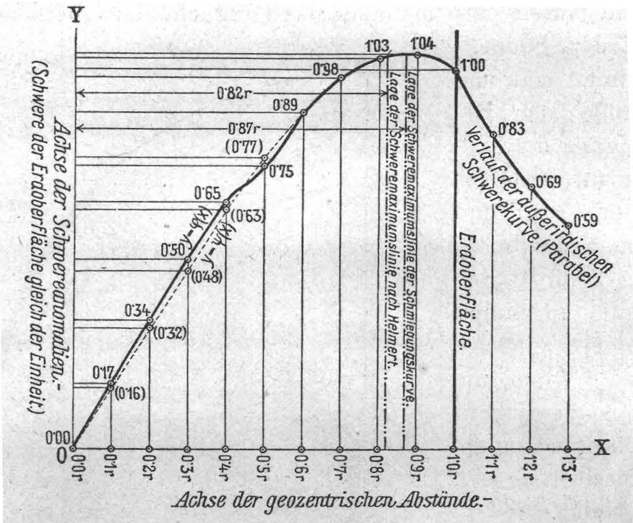

Fig. 3

die Zahlenwerte der Lipschitzschen Reihe auf, so ergibt sich der Verlauf der Schwerekurve mit

$$y = \varphi(x), \tag{5}$$

wobei jedoch nicht vergessen werden darf, daß der Erdradius in der x-Achse und die Oberflächenschwere in der y-Achse als Einheiten angenommen wurden, weshalb die durch Fig. 3 dargestellte Kurve $y = \varphi(x)$ (vollgezogen) hinsichtlich der y-Achse über Maß gehalten ist.

Da der Bau der Funktion $\varphi(x)$ (Gleichung 5) nicht bekannt ist, soll diese durch eine andere Funktion, deren Gesetz gegeben ist, $\psi(x)$ ersetzt werden, so daß ohne große Fehler

$$\varphi(x) \doteq \psi(x) \tag{6}$$

gesetzt werden kann, wodurch Gleichung 5) in

$$y = \psi(x) \tag{7}$$

als die Gleichung der Schmiegungslinie übergeht. Diese Schmiegungslinie soll mit der wahren Schwerelinie (Gleichung 5) möglichst viele Punkte gemein haben, d. h. sich ihr möglichst nahe anschmiegen.

Die Gleichung der Schmiegungslinie laute nun

$$y = \psi(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \ldots + a_n\, x^n \qquad 8a)$$

worin $a_0, a_1, a_2, \ldots . a_n$ ganz willkürliche, noch zu bestimmende Koeffizienten bedeuten; die Schmiegungskurve wird sich der graphisch gegebenen umsomehr anschließen, aus je mehr Gliedern ihre Gleichung zusammengesetzt sein wird.

Begnügt man sich nun mit der Bedingung, daß die Kurve nur in vier Punkten mit der gegebenen Linie absolut genommen zusammenfällt, nämlich in den Punkten

$$\begin{aligned} &P_{0\cdot 0}\,(x = 0, \quad y = 0), \\ &P_{0\cdot 8}\,(x = 0{\cdot}8, \; y = 1{\cdot}03), \\ &P_{0\cdot 9}\,(x = 0{\cdot}9, \; y = 1{\cdot}04) \text{ und} \\ &P_{1\cdot 0}\,(x = 1, \quad y = 1) \end{aligned}$$

so geht Gleichung 8 a) in

$$y = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 \qquad 8\,\text{b})$$

über; wird ferner erwogen, daß für $x = o$ gemäß der Bedingung des Punktes $P_{0\cdot 0}$ auch $y = o$ sein müsse, so hat man schließlich, da a_0 verschwindet:

$$y = a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 \qquad 8\,\text{c})$$

als die Gleichung der Schmiegungskurve. Durch Substitution der Werte der Punkte $P_{0\cdot 8}$, $P_{0\cdot 9}$ und $P_{1\cdot 0}$ gelangt man zu dem Wertesystem

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{0{\cdot}9}{}^3\, a_3 + \overset{\frown}{0{\cdot}9}{}^2\, a_2 + 0{\cdot}9\, a_1 - 1{\cdot}04 &= 0 \\ \overset{\frown}{0{\cdot}8}{}^3\, a_3 + \overset{\frown}{0{\cdot}8}{}^2\, a_2 + 0{\cdot}8\, a_1 - 1{\cdot}03 &= 0 \\ a_3 + \quad a_2 + \quad a_1 - 1{\cdot}00 &= 0, \end{aligned} \qquad 9)$$

nachdem man vorher die Gleichungen auf Null reduziert und nach fallenden Potenzen geordnet hat.

Die Auflösung dieses Systems nach den Regeln der Determinantentheorie liefert nun die Werte für die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3; es ist

$$a_1 = \frac{215}{144} = 1{\cdot}4930\dot{5}55, \qquad 9\,\text{a})$$

$$a_2 = \frac{99}{144} = 0{\cdot}687500\dot{0}0, \qquad 9\,\text{b})$$

$$a_3 = -\frac{170}{144} = -\,1{\cdot}180\dot{5}555. \qquad 9\,\text{c})$$

Die Gleichung 8 c) lautet daher

$$y = \frac{215}{144} x + \frac{99}{144} x^2 - \frac{170}{144} x^3 \qquad 10\,a)$$

oder

$$y = 1{\cdot}4930\dot{5}55\, x + 0{\cdot}6875\dot{0}00\, x^2 - 1{\cdot}1805\dot{5}55\, x^3; \qquad 10\,b)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve fällt in den Punkten $P_{0\cdot0}$, $P_{0\cdot8}$, $P_{0\cdot9}$ und $P_{1\cdot0}$, mit der Schwerekurve mathematisch genau zusammen, aber auch in den übrigen Punkten schmiegt sie sich der gegebenen Linie sehr nahe an. Werden nämlich in Gleichung 10 b) für x nach und nach die Werte 0·0, 0·1, 0·2, ... eingesetzt und die y daraus auf zwei Dezimalstellen genau berechnet, so fallen beide Linien noch in zwei weiteren Punkten [$P_{0\cdot6}$ ($x = 0{\cdot}6$, $y = 0{\cdot}89$), $P_{0\cdot7}$ ($x = 0{\cdot}7$, $y = 0{\cdot}98$)] zusammen, während der sich ergebende Fehler im Maximum kleiner bleibt als 6 %[1]).

Die so erhaltene Schmiegungskurve ist in Fig. 3 gestrichelt dargestellt, während folgende Tafel die Abweichung beider Linien anzeigt.

x	$y =$		Fehler Δy	Anmerkung
	$\varphi(x)$	$\psi(x)$		
1·0 *)	1·00	1·00	0·00 %	*) Mathematisch genaues Zusammenfallen. **) Vollständiges Zusammenfallen, wenn y auf zwei Dezimalien gerechnet wird. ***) Annäherndes Zusammenfallen, wobei sich Fehler bis zu 5·88 % ergeben können.
0·9 *)	1·04	1·04		
0·8 *)	1·03	1·03		
0·7 **)	0·98	0·98		
0·6 **)	0·89	0·89		
0·5 ***)	0·75	0·77	2·59 %	
0·4 ***)	0·65	0·63	3·08 %	
0·3 ***)	0·50	0·48	4·00 %	
0·2 ***)	0·34	0·32	5·88 %	
0·1 ***)	0·17	0·16		
0·0 *)	0·00	0·00	0·00 %	

Nachdem der Bau der Funktion $\psi(x)$ erforscht und dargetan worden ist, daß mit genügender Näherung für $\varphi(x)$ die eben errechnete Funktion $\psi(x)$ gesetzt werden kann, soll ihr Wert in der Differenzialgleichung der Bewegung 3) zur Einführung gelangen.

1) Genauer 5·88 %

Würde der geozentrische Abstand in Erdradien selbst, also in Metern, wobei $r = 6{,}370.284\,\mathrm{m}$[1]), einzusetzen sein, so müßte $\psi(x)$ nur mit g_0[2]), das ist mit der wirklichen Beschleunigung der Erdschwere in Metern multipliziert werden, um die Annahme, die Schwere sei auf der Erdoberfläche gleich Eins, wettzumachen. Da es jedoch für die weitere Entwicklung der Aufgabe vorteilhaft erscheint, den Erdradius $r = 1$ beizubehalten, muß auch g_0 in Erdhalbmessern angegeben werden, d. h. als Bruchteil des Radius. Bezeichnet man nun diese Größe mit $G_0 \left(= \frac{g_0}{r}\right) = 0{\cdot}00000153934$, so wird unmittelbar

$$g = f(x) = G_0\,\psi(x), \tag{11)}$$

daher die Differenzialgleichung der Bewegung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\,G_0\,\psi(x) = -m\,G_0\,(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3). \tag{12 a)}$$

Wird diese Gleichung nach dem Prinzipe der lebendigen Kräfte integriert, indem sie beiderseits mit $\frac{dx}{dt}$ multipliziert wird, so ergibt sich

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{dx}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -m\,G_0\,(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)\frac{dx}{dt} \tag{12 b)}$$

oder nach Ausführung der Integration

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -2\,G_0\left(\frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4\right) + C_1 \tag{12 c)}$$

Zieht man in Betracht, daß für $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 0$ sein müsse, so ergibt sich die Konstante

$$C_1 = 2\,G_0\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4}\right). \tag{13)}$$

Nach entsprechender Zusammenfassung der Konstanten und Ausziehen der Quadratwurzel aus Gleichung 12 c) hat man schließlich

$$\frac{dx}{dt} = K\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma}, \tag{14)}$$

worin $K = 0{\cdot}000953225$, $\alpha = -0{\cdot}7764706$, $\beta = -2{\cdot}5294123$ und $\gamma = 2{\cdot}3058829$.

---

[1]) Als Erdhalbmesser wurde der Radius einer Kugel gewählt, die mit dem Erdsphäroïd denselben Kubikinhalt, daher auch dieselbe Masse hat. — Köhler, 7 stell. Logarithmen. —

[2]) g_0 bedeutet die Größe der Fallbeschleunigung der Erdschwere unter 45° Breite und beträgt 9.80604 m. — Köhler, 7 stell. Logarithmen. —

Setzt man das Polynom unter dem Wurzelzeichen $x^4 + \alpha x^3 + + \beta x^2 + \gamma = W$ und führt, da $\frac{dx}{dt} = v$,[1]) diesen Wert in Gleichung 14) ein, so ergibt sich

$$v = K\sqrt{W} \tag{15 a)}$$

Dies ist die Formel für die Geschwindigkeit. Da jedoch als Einheit der x-Koordinate die Erdhalbmesserlänge r gleich der Einheit angenommen wurde, so stellt sich die Geschwindigkeit v ebenfalls in Erdradien heraus; soll nun diese im Metermaße ausgedrückt werden, so muß der rechte Teil der Gleichung 15 a) mit 6,370.284 (Länge des Erdradius in Metern) multipliziert werden, wodurch Gleichung 15 a) in

$$v = C.\sqrt{W} \tag{15 b)}$$

übergeht, worin C den Wert 6072·32 annimmt.

In der Tabelle I sind die Geschwindigkeiten für $x = 1{\cdot}0$, $x = 0{\cdot}9$, $x = 0{\cdot}8$, ... $x = 0{\cdot}0$, d. h. die Geschwindigkeiten, die ein subtellur fallender Körper in den Erdradiuszehnteln erlangen würde, ausgerechnet. Bei Durchführung der Rechnung wurden die Koëffizienten α, β und γ abgerundet, wodurch die letzten Stellen der Resultate nicht ganz verläßlich werden.

Aus Gleichung 15 b) ergibt die Geschwindigkeit v ein Minimum, wenn der Wurzelausdruck ein Minimum wird, was für $x = 1$ eintrifft, da der Wurzelausdruck verschwindet, somit auch $v = 0$ wird; d. h. der Punkt beginnt die Bewegung aus der Ruhelage [siehe auch Tabelle I, Kolonne 11, Anmerkung*)]; W wird hingegen ein Maximum, wenn $x = 0$ wird, d. h. der Punkt erlangt im Erdmittelpunkt die größte Geschwindigkeit. Denn setzt man den 1. Differenzialquotienten von W gleich Null oder

$$4x^3 + 3\alpha x^2 + 2\beta x = 0,$$

so ergibt sich für $x_1 = 0$; es bleibt nunmehr eine quadratische Gleichung aufzulösen übrig, deren Wurzeln für die Aufgabe offenbar nicht in Betracht kommen.

Auf den ersten Blick scheint es, daß bei negativem x sich die Minima- und Maximaverhältnisse der Geschwindigkeit ändern könnten. Wird nämlich x negativ, d. h. hat der Punkt den Erdmittelpunkt mit der in diesem erlangten Geschwindigkeit von $v = 9220{\cdot}89$ m (Tabelle I, Kolonne 10, letzte Zeile) passiert, so

---

[1]) v = Geschwindigkeit.

wird zunächst der Wurzelausdruck $\sqrt{W}$ imaginär. Da jedoch $C = r \, . \, K = r \sqrt{- G_0 \frac{a_3}{2}}$ eine reale positive Zahl bedeutet ($G = 0{\cdot}00000153934$, $a_3 = - 1{\cdot}1805555$), geht, weil die Beschleunigung g_0 gleichzeitig mit x das Vorzeichen wechselt, in $- g_0$, daher auch G_0 in $- G_0$ über $\left(G_0 = \frac{g_0}{r}\right)$, folglich C bei negativ werdendem x den Wert $C = r \sqrt{+ G_0 \frac{a_3}{2}}$ annimmt. Weil aber $+ G_0 \frac{a_3}{2}$ eine negative Größe darstellt, wird C gleichzeitig mit $\sqrt{W}$ imaginär; die Formel 15) geht daher über in $v = i \, . \, C \, . \, i \sqrt{W}$ [1]) oder in $v = - C \sqrt{W}$. Abstrahiert man nun von dem Vorzeichen, da die Geschwindigkeit positiv zu zählen sein wird und die Zweiwertigkeit der Quadratwurzel über W beim Überschreiten des Ursprunges die Annahme des Negativzeichen erheischt, so hat man wieder $v = C \sqrt{W}$.

Mit anderen Worten: Ein von der Erdoberfläche nach dem Erdmittelpunkte fallen gelassener Punkt verläßt diese mit der Anfangsgeschwindigkeit Null, nimmt an Geschwindigkeit fortwährend zu, bis diese im Erdmittelpunkt ein Maximum (9220·89 m) erreicht, worauf seine Geschwindigkeit im entgegengesetzten Sinne abnimmt und im Antipodenpunkt der Erde gleich Null wird; hierauf beginnt der Punkt erneuert zu fallen. Der Punkt pendelt daher längst eines Erddurchmessers, seine Bewegung hat mit der harmonischen eine gewisse Ähnlichkeit, ist ihr jedoch nicht gleichwertig.[2])

Um die Fallzeit zu berechnen, muß eine zweite Integration der Differenzialgleichung, am besten der Gleichung 14) vorgenommen werden, nämlich

$$t = \frac{1}{K} \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma}} + C_2 \qquad 16)$$

welche Gleichung ein in geschlossener Form nicht aufzulösendes Integral aufgibt. Nimmt man dieses Integral als ein bestimmtes und bedenkt, daß für $t = 0$ das Integral, das dann zwischen den

---

[1]) $i = \sqrt{-1}$, imaginäre Einheit.

[2]) Im Falle der Homogenität der Erde würde diese Bewegung eine harmonische sein (Sinus- und Cosinusschwingungen).

Grenzen $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ zu nehmen sei, ebenfalls verschwinden muß, daher $C_2 = 0$ resultiert, so geht Gleichung 16) in

$$t = \frac{1}{K}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma}} \qquad 17\text{ a)}$$

über, worin jedoch die Zeit t im Maße Erdradius / Sekunden gegeben erscheint; soll auf m / sec übergegangen werden, und wird ferner wieder das Polynom unter der Wurzel mit W bezeichnet, so hat man endlich

$$t = \frac{1}{C}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{W}}. \qquad 17\text{ b)}$$

Dieses Integral gehört zu einer Klasse elliptischer Integrale und kann somit, da keine der Wurzeln des Polynoms W zwischen den hier in Betracht kommenden Grenzen liegt, aufgelöst werden. Will man also die Fallzeiten des Punktes zwischen den einzelnen Radiuszehnteln wissen, muß der Wert der Integrale

$$\int_{1\cdot 0}^{0\cdot 9} \frac{dx}{\sqrt{W}}, \quad \int_{0\cdot 9}^{0\cdot 8} \frac{dx}{\sqrt{W}}, \quad \int_{0\cdot 8}^{0\cdot 7} \frac{dx}{\sqrt{W}}, \quad \ldots\ldots \quad \int_{0\cdot 1}^{0\cdot 0} \frac{dx}{\sqrt{W}}, \qquad 18)$$

ermittelt werden. Da ihre Auflösung mit nicht unbedeutenden Schwierigkeiten verbunden ist und die Genauigkeit der so erhaltenen Resultate infolge der ziemlich umfangreichen Arbeit mit dem praktisch erwünschten Genauigkeitsgrade in keinem Verhältnisse steht, kann ihre Lösung näherungsweise auf folgende Art umgangen werden.

Nimmt man innerhalb der Erdradiuszehntel eine gleichförmig-beschleunigte Bewegung an, so läßt sich eine mittlere Geschwindigkeit v_μ einführen, mit welcher der Körper fallen müßte, um in der gleichen Fallzeit bei gleichförmiger Bewegung denselben Weg (also ein Radiuszehntel) zurückzulegen. Dann ist $s = v_\mu \,.\, t$, und da s, der zurückgelegte Weg, gleich $\frac{r}{10}$ ist $\left(s = \frac{r}{10} = 637.028\cdot 4 \text{ m}\right)$,

$$t = \frac{r}{10\, v_\mu}. \qquad 19)$$

Bedeutet v_μ, wie vorerwähnt, die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Radiuszehnteln x_1 und x_2, weshalb es in der

Folge zweckmäßig mit $v_\mu\left\{\begin{smallmatrix}x_2\\x_1\end{smallmatrix}\right.$ bezeichnet werden möge, so gilt näherungsweise

$$\frac{1}{C}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{W}} \doteq \frac{r}{10\, v_\mu\left\{\begin{smallmatrix}x_2\\x_1\end{smallmatrix}\right.} \qquad 20)$$

Anstatt der unter 18) gegebenen Integrale, die noch zur Bildung der Zeit mit dem Faktor $\frac{1}{C}$ zu multiplizieren wären $\left(\frac{1}{C} = 0{\cdot}000164682\right)$, braucht man nunmehr die Werte

$$\frac{r}{10\, v_\mu\left\{\begin{smallmatrix}0\cdot9\\1\cdot0\end{smallmatrix}\right.} \quad \frac{r}{10\, v_\mu\left\{\begin{smallmatrix}0\cdot8\\0\cdot9\end{smallmatrix}\right.} \quad \frac{r}{10\, v_\mu\left\{\begin{smallmatrix}0\cdot7\\0\cdot8\end{smallmatrix}\right.} \quad \cdots\cdots \quad \frac{r}{10\, v_\mu\left\{\begin{smallmatrix}0\cdot0\\0\cdot1\end{smallmatrix}\right.} \qquad 21)$$

zu bestimmen, deren Ermittlung auf logarithmischen Wege unschwer erfolgen kann.

In der Tabelle II sind die Fallzeiten von Zehntel zu Zehntel Erdhalbmesser ausgerechnet; es sind aber auch die Gesamtfallzeiten zu den einzelnen Punkten von der Erdoberfläche aus gegeben. Bezüglich der Verläßlichkeit der letzten Stellen gilt das unter Tabelle I Gesagte.

Die Gesamtfallzeit, d. i. die Zeit, die der Körper braucht, um von der Erdoberfläche bis zum Erdmittelpunkt zu fallen, ergibt sich mit

$$T_o = \frac{1}{C}\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{W}} = 1167{\cdot}67^{sec} = 19^{min}\, 27{\cdot}67^{sec}, \qquad 22\text{ a)}$$

während die Schwingungsdauer oder Antipodenzeit, d. i. die Fallzeit von der Erdoberfläche bis zum diametral gelegenen Antipodenpunkt mit

$$T_a = 2\, T_o = 2335{\cdot}34^{sec} = 38^{min}\, 55{\cdot}34^{sec} \qquad 22\text{ b)}$$

resultiert; endlich beträgt die Zeit, die der Körper braucht, um an seinen ursprünglichen Erdort zurückzukehren, oder die Epochenzeit

$$T_e = 4\, T_o = 4670{\cdot}68^{sec} = 1^h\, 17^{min}\, 50{\cdot}68^{sec}. \qquad 22\text{ c)}$$

Zur Berechnung der auf die Erdoberfläche bezogenen Fallzeiten bis in die einzelnen Radiuszehntel dienen folgende Formeln, da es sich jetzt um die Berechnung der Integrale

$$\int_1^{0\cdot9}\frac{dx}{\sqrt{W}}, \quad \int_1^{0\cdot8}\frac{dx}{\sqrt{W}}, \quad \int_1^{0\cdot7}\frac{dx}{\sqrt{W}} \qquad 23\text{ a)}$$

handelt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{C}\int_{1}^{0\cdot 9}\frac{dx}{\sqrt{W}}=\frac{r}{10\,v_{\mu}}\Big\{{}^{0\cdot 9}_{1},\\
&\frac{1}{C}\int_{1}^{0\cdot 8}\frac{dx}{\sqrt{W}}=\frac{r}{10\,v_{\mu}}\Big\{{}^{0\cdot 9}_{1}+\frac{r}{10\,v_{\mu}}\Big\{{}^{0\cdot 8}_{0\cdot 9},\\
&\frac{1}{C}\int_{1}^{0\cdot 7}\frac{dx}{\sqrt{W}}=\frac{r}{10v_{\mu}}\Big\{{}^{0\cdot 9}_{1}+\frac{r}{10\,v_{\mu}}\Big\{{}^{0\cdot 8}_{0\cdot 9}+\frac{r}{10\,v_{\mu}}\Big\{{}^{0\cdot 7}_{0\cdot 8},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad 23\text{ b)}$$

In Figur 4 sind Zeiten und Geschwindigkeiten graphisch dargetan. Obwohl nicht in Proportion gehalten (bei der Kurve der Geschwindigkeit ist auf der x-Achse $^1/_2$ mm = 63.072·84 m, auf der y-Achse entspricht $^1/_2$ mm = 10 m), ist doch zu ersehen, daß die Zeit schneller zunimmt als die Geschwindigkeit, während diese in der Nähe des Erdmittelpunktes annähernd konstant bleibt.

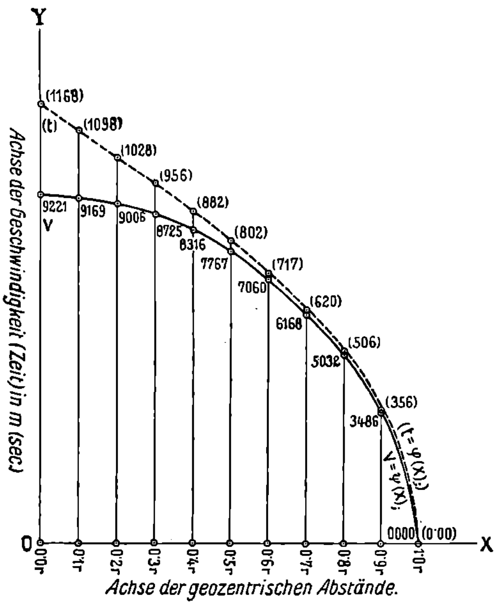

Fig. 4

Es erübrigt noch, den Vergleich zwischen den so ermittelten Resultaten und jenen anzustellen, die bei Vernachlässigung der Homogénität des Erdkörpers sich ergeben müßten.

Da bei der homogenen Vollkugel die Anziehung zugleich mit dem Abstande vom Erdmittelpunkte abnimmt, lauten die so entwickelten Formeln für die Geschwindigkeit und Zeit

$$v=p\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}, \qquad 24\text{ a)}$$

$$t = q\left[\left(arc\ sin\frac{x}{r} - \frac{\pi}{2}\right)\right]_{x_1}^{x_2}; \qquad 24\,b)$$ [1]

hierin ist $q = \sqrt{\frac{r}{g_0}} = 805{\cdot}9952$, $p = \sqrt{r\,g_0} = 7903{\cdot}62$ (siehe übrigens die Konstantenzusammenstellung).

Doch muß beim Gebrauche dieser Formeln auf den Umstand verwiesen werden, daß darin der Erdradius nicht als Einheit angenommen wurde; wo früher für $x = 0{\cdot}9$ zu substituieren gewesen wäre, hätte man hier den Wert $x = 0{\cdot}9\,.\,r = 0{\cdot}9\,.\,6{,}370.284$ einzusetzen. Die Geschwindigkeit ergibt sich direkt in Metern, die Zeit in Sekunden.

Aus Formel 24 a) ergibt sich für die Geschwindigkeit v ein Maximum, wenn $x = 0$ wird; dann wird

$$v = 7903{\cdot}62\,\mathrm{m}$$

während ein Minimum für $x = r$ mit $v = 0$ eintritt.

Die Fallzeiten nehmen die Werte an:

$$T_0 = 1266{\cdot}0544^{sec} = 21^{min}\ 6{\cdot}0544^{sec} \qquad 26\,a)$$

$$T_a = 2532{\cdot}1088^{sec} = 42^{min}\ 12{\cdot}1088^{sec} \qquad 26\,b)$$

$$T_e = 5064{\cdot}2176^{sec} = 1^h\ 24^{min}\ 24{\cdot}2176^{sec} \qquad 26\,c)$$

Läßt man somit zwei Körper nach dem Erdinnern fallen, von denen der eine den tatsächlich herrschenden Kräften unterliegt, während der andere die Gesetze der homogen gedachten Erde befolgt, so wird dieser mit einer Verspätung von $6^{min}\ 33{\cdot}5276^{sec}$ [2]) an seinen Ursprungsort zurückkehren gegenüber dem die tatsächlich vorhandenen Gesetze befolgenden Körper.

Beide Körper verlassen die Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit Null, nehmen gegen den Erdmittelpunkt an Geschwindigkeit zu, den sie mit $9220{\cdot}89\,{}^m/_{sec}$, bezw. $7903{\cdot}62\,{}^m/_{sec}$ Geschwindigkeit passieren, um bis zum Antipodenpunkt an dieser wieder abzunehmen, worauf sie mit der Phasendifferenz von $6^{min}\ 33{\cdot}5276^{sec}$ am Ursprungsort anlangen, um die Schwingung vom Neuen zu beginnen. —

---

[1]) D. h. als entwickeltes bestimmtes Integral aufzufassen; wird $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, so ergibt sich die Fallzeit zum Erdmittelpunkt mit $T_0 = q\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{r}{g_0}}\,\frac{\pi}{2} = 1266{\cdot}0544^{sec}$; vergl. Formel 26 a).

[2]) $1^h\ 24^{min}\ 24{\cdot}2176^{sec} - 1^h\ 17^{min}\ 50{\cdot}68^{sec}$. Ein Schnellzug, der 80 km per Stunde zurücklegt ($22{\cdot}22\,{}^m/_{sec}$) würde zu einer Epoche dieser Art etwa $13^1/_2$ Tage brauchen, während er bis zum Erreichen des Erdmittelpunktes eine Zeit von beiläufig 3 Tagen und 7 Stunden nötig hätte.

Konstanten-Zusammenstellung

$r = 6{,}370.284\,\mathrm{m}$	$\log r = 6 \cdot 8041588$
$g_0 = 9 \cdot 80604\,\mathrm{m}$	$\log g_0 = 0 \cdot 9914937$
$G_0 = 0 \cdot 00000153934$	$\log G_0 = 0 \cdot 1873349 - 6$
$\alpha = -0 \cdot 7764706$	$\log(-\alpha) = 0 \cdot 8901250 - 1$
$\beta = -2 \cdot 5294123$	$\log(-\beta) = 0 \cdot 4030196$
$\gamma = 2 \cdot 3058829$	$\log \gamma = 0 \cdot 3628372$
$K = 0 \cdot 000953225$	$\log K = 0 \cdot 9791956 - 4$
$\frac{1}{K} = 1049 \cdot 07$	$\log \frac{1}{K} = 3 \cdot 0208044$
$C = 6072 \cdot 32$	$\log C = 3 \cdot 7833544$
$\frac{1}{C} = 0 \cdot 000164682$	$\log \frac{1}{C} = 0 \cdot 2166456 - 4$
$q = 805 \cdot 9952$	$\log q = 2 \cdot 9063325$
$p = 7903 \cdot 62$	$\log p = 3 \cdot 8978262$

$v^{*}) = 6072{\cdot}32\ \sqrt{x^4 - 0{\cdot}8x^3 - 2{\cdot}53x^2 + 2{\cdot}3059}.$ **Tabelle I**

x	Berechnung des Ausdruckes unter der Wurzel (W): Summe d. positiven Glieder $x^4+2{\cdot}3059$ †)	Die negativen Glieder: $0{\cdot}8x^3$	Die negativen Glieder: $2{\cdot}53x^2$	Summe der negativen Glieder $0{\cdot}8x^3+2{\cdot}53x^2$	Ausdruck unter der Wurzel (W)	$log\ W$	$log\ \sqrt{W} = {}^1/_2\ log\ W$	$log\ v^{*}) = lg\ C\sqrt{W} = 3{\cdot}7833544 + {}^1/_2\ log\ W$	$v^{*})$
1	2	3	4	5	6	7	8	9**)	10
1·0	3·3059	0·8000	2·5300	3·3300	***) 0·0000	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0000·00
0·9	2·9620	0·5832	2·0493	2·6325	0·3295	0.5178554—1	0·7589277—1	3·5422821	3485·64
0·8	2·7155	0·4096	1·6192	2·0288	0·6867	0·8367670—1	0·9183885—1	3·7017429	5032·03
0·7	2·5460	0·2744	1·2397	1·5141	1·0319	0·0136376	0·0068188	3·7901732	6168·41
0·6	2·4355	0·1728	0·9108	1·0836	1·3519	0·1309446	0·0654723	3·8488267	7060·36
0·5	2·3684	0·1000	0·6325	0·7325	1·6359	0·2137568	0·1068784	3·8902328	7766·63
0·4	2·3315	0·0512	0·4048	0·4560	1·8755	0·2731171	0·1365585	3·9199129	8315·97
0·3	2·3140	0·0216	0·2277	0·2493	2·0647	0·3148570	0·1574285	3·9407829	8725·35
0·2	2·3075	0·0064	0·1012	0·1076	2·1999	0·3424029	0·1712015	3·9545559	9006·49
0·1	2·3060	0·0008	0·0253	0·0261	2·2799	0·3579158	0·1789579	3·9623123	9168·79
0·0	2·3059	0·0000	0·0000	0·0000	2·3059	0·3628405	0·1814202	3·9647746	9220·89

A n m e r k u n g (11)

*) Aus dieser Formel ergibt sich die Geschwindigkeit v direkt in Metern, während x — wie in der ganzen Aufgabe durchgeführt — in Erdhalbmessern einzusetzen ist, wobei $r = 1$.

**) „C", d. i. der Faktor vor dem Wurzelausdruck gleich 6072·32; demnach $log\ C = 3{\cdot}7833544$.

***) Daß die Geschwindigkeit v für $x = 1$ also für die Erdoberfläche gleich Null sein muß, geht direkt aus der Annahme hervor, daß der fallende Körper die Bewegung aus der Ruhelage beginne. Die Tabelle selbst würde 0·0059 statt der dort eingetragenen Zahl 0·0000 liefern; dies rührt daher, weil die Koeffizienten der einzelnen Summanden nur unvollständig angegeben sind. Je mehr Stellen in die Rechnung eingeführt werden, umsomehr nähert sich $W = x^4 - 0{\cdot}8\,x^3 - 2{\cdot}53\,x^2 + 2{\cdot}3059$ der Null. Bei genauer Angabe der Koeffizienten etwa durch Einführung gemeiner Brüche, verschwindet W tatsächlich, daher auch v.

†) Da $x = o$, so wird $v = 6072{\cdot}32\ \sqrt{2{\cdot}3059}$, was den Wert 9220·93 ergeben würde; in der Tabelle ist jedoch der genauere Wert 9220·89 eingetragen, der erhalten wird, wenn die Zahl 2·3059 auf 7 Dezimalien genau, also mit 2·3058829 eingeführt wird.

$$t^{*}) = 0{\cdot}000164682\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x^4-0{\cdot}8x^3-2{\cdot}53x^2+2{\cdot}3059}} = \frac{r}{10\,v_\mu\left\{^{x_2}_{x_1}\right.}$$

Tabelle II

Berechnung des Ausdruckes $\frac{r}{10\,v_\mu}\left\{^{x_2}_{x}\right.$					$t^{*})$		$T^{**}) = \frac{1}{C}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{W}} = \frac{r}{10\,v_\mu\left\{^{x_2}_{x_1}\right.}$	
Integralgrenzen x_1	x_2	$v\,\mu\left\{^{x_2}_{x_1}\right.$	$\log v\,\mu\left\{^{x_2}_{x_1}\right.$	$\log t^{*}) = \log\frac{r}{10} - \log v_\mu\left\{^{x_2}_{x_1}\right. = 5{\cdot}8041588 - \log v_\mu\left\{^{x_2}_{x_1}\right.$	Sek.	Min.	x_2	$T^{**})$
1		2	3	4	5		6	7
1·0	0·9	1742·82	3·2412526	2·5629062	***) 356·90	5′56·90″	0·9	***) 356·90
0·9	0·8	4258·83	3·6292903	2·1748685	149·58	2′29·58″	0·8	506·48
0·8	0·7	5600·22	3·7482051	2·0559537	113·75	1′53·75″	0·7	620·23
0·7	0·6	6614·38	3 8204892	1·9836696	96·31	1′36·31″	0·6	716·54
0·6	0·5	7413·49	3·8700233	1·9341355	85·92	1′25·92″	0·5	802·46
0·5	0·4	8041·30	3·9053263	1·8988325	79·22	1′19·22″	0·4	881·68
0·4	0·3	8520·66	3·9304733	1·8736855	74·76	1′14·76″	0·3	956·44
0·3	0·2	8865·92	3·9477238	1·8564350	71·85	1′11·85″	0·2	1028·29
0·2	0·1	9087·64	3·9584511	1·8457077	70·10	1′10·10″	0·1	1098·39
0·1	0·0	9194·84	3·9635442	1·8406146	69·28	1′ 9·28″	0·0	1167·67

A n m e r k u n g (8)

*) Die Zeit ergibt sich direkt in Sekunden; für das x ist wieder in Erdhalbmessern zu substituieren (s. Fußnote * der Tabelle I).

**) T stellt die Fallzeit bezogen auf die Erdoberfläche vor: wird diese Zeit bis $x_2 = 0$ also bis zum Erdmittelpunkt gezählt, so wird $T = \frac{1}{C}\int_1^0\frac{dx}{\sqrt{W}}$ gleich der Gesamtfallzeit $T = 1167{\cdot}67^{sec} = 19^{min}\ 27{\cdot}67^{sec}$.

Die mittlere Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden Körpers derselben Fallzeit betrüge $c' = 5456.02$ m, während sich die wahre mittlere Geschwindigkeit mit $c = \frac{0+9220{\cdot}89}{2} = 4610{\cdot}445$ m ergibt (Tabelle I, Kolonne 10, erste und letzte Zeile).

T ist nur in Sekunden angegeben (Kolonne 7), während t auch in Minuten umgerechnet ist (Kolonne 5).

***) Hier würde die Tabelle 365·51 ergeben. Da der Körper seine Bewegung aus der Ruhe antritt, seine Anfangsgeschwindigkeit also Null ist, ferner die Schwerkraft bis zum ersten Zehntel des Erdradius nur wenig (+4%) zunimmt, wurde der Wert 356·90 aus der Formel für die Fallzeit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ berechnet. An Stelle von h ist der zehnte Teil des Erdhalbmessers, also 637.028·4m, statt g ein Mittelwert der Beschleunigungen des Anfangs- und Endpunktes der Bewegung zu setzen, also $g_0 . \frac{1{\cdot}00+1{\cdot}04}{2} = 1{\cdot}02\,g_0$. Da gerade im Anfange der Bewegung die Geschwindigkeit sehr schnell wächst, kommt der so erhaltene Wert der Wirklichkeit näher.

Dauer des Zwielichtes

Von **Dr. Max Möller**

(Mit 1 Textfigur)

Mit Hilfe der im Jahrgang 1909 dieser „Mitteilungen" p. 150ff. angegebenen Methode kann auch die Frage nach der Dämmerungszeit auf graphischem Wege beantwortet werden. — Das Wort Zwielicht wird im folgenden sowohl von der astronomischen als auch von der bürgerlichen Dämmerung gebraucht.

In der Figur ist der große Kreis ein Meridianschnitt durch das Himmelsgewölbe; *ns* sei die Mittagslinie im (wahren) Horizont unter 48° nördlicher Breite; *ns* ist auch die Projektion des Horizontes auf die Meridianebene; *AE* ist Durchschnitt des Himmelsäquators mit derselben Meridianebene und zugleich auch Projektion des Himmelsäquators auf die genannte Ebene, schneidet die Mittagslinie im Weltmittelpunkte *O*; Winkel $AOs = 42^0$, das ist die zur Polhöhe 48° gehörige Äquatorhöhe; *N* ist der astronomische Nordpol, *S* Südpol. Der Bogen *na* mißt 18°. Durch *a* wird eine Ebene gelegt parallel zum Horizont; *ab* ist die Projektion dieser Ebene auf den Meridian. Hat die Sonne jene Ebene erreicht — sie soll kurz: Dämmerungsebene heißen — dann endet die astronomische Abenddämmerung, respektive beginnt die Morgendämmerung. — Jene Sonnendepression von 18° ist gemessen in einem Höhenkreis. Um