

Die Figur der Erde.

Von Dipl. Ing. F. Klein.

Vortrag, gehalten in der Monats-Versammlung der k. k. Geographischen Gesellschaft zu Wien am 27. März 1883.

(Mit einer Tafel.)

(Schluss.)

V.

Was wir bisher als mathematische Figur der Erde bezeichnet haben, bezog sich stillschweigend immer auf diejenige Fläche, von welcher Gauss sagt, dass sie »überall die Richtung der Schwere senkrecht schneidet und von der die Oberfläche der Weltmeere nur einen Theil ausmacht«. ⁸⁾ Zur Vorstellung dieser Fläche gelangen wir dann, wenn wir uns die Wassermassen mit spiegelglatter Oberfläche im Zustande vollkommener Ruhe und unter einander, also unter der festen Erdrinde durch feine Canäle verbunden denken. Demzufolge müssen wir auch alle unsere Messungen, die wir auf der physischen Oberfläche vornehmen, auf das Meeresniveau reduciren. Zu diesem Ende waren auch die für Zwecke der trigonometrischen Höhenbestimmung gemachten Zenithdistanzmessungen, und als Ersatz für dieselben, das geometrische oder Präcisions-Nivellament bestimmt.

Zum Begriff des Meeresniveau oder des normalen Meeresspiegels gelangt man durch die Vorstellung, dass sich das Meerwasser in Bezug auf den festen Erdkörper in relativer Ruhe befindet, wobei man wohl als selbstverständlich auch noch die stillschweigende Voraussetzung macht, dass der Luftdruck an allen Punkten der Meeresoberfläche constant ist. Dieser ideale Zustand ist wohl denkbar, keineswegs aber wahrscheinlich. Denn verschiedenartige Einflüsse, bald tellurischer bald kosmischer Natur bewirken eine Verschiedenheit der Höhenlage der wirklichen Oberfläche des Meeres, aus welcher man besonders in neuester Zeit durch Aufzeichnung mittelst selbstregistrierender Pegel (Marcographen) die mittlere Oberfläche des Meeresspiegels abzuleiten sich bemühte. Dass aber

⁸⁾ Gauss C. F. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona. Göttingen. Vanderhoeck und Ruprecht. 1828. Pag. 73.

dieser mit dem normalen nicht zusammenfallen kann, ergibt eine einfache Betrachtung der Natur jener Einflüsse, welche eben die Schwankungen des Meeresspiegels bedingen.

Selbst abgesehen von den mehr oder weniger starken Barometerschwankungen, ist der mittlere Barometerstand im Meeresniveau eine Function der geographischen Länge und Breite; von Sonne und Mond hervorgerufene Oscillationen gleichen sich in dem mittleren Meeresspiegel nicht aus; die beständigen Meeresströmungen zeigen auch ganz deutlich, dass sich das Meereswasser nicht in dem Zustande des ruhenden Gleichgewichtes, vielmehr in dem einer stationären Bewegung befindet, wobei es gleichgiltig ist, ob die Ursache der letzteren in dem wechselnden Winddruck oder den Temperatur-Unterschieden der einzelnen Wasserschichten, ihrem Salzgehalt und den hievon abhängigen Dichte-Unterschieden, der Verdunstung, etc. etc. zu suchen ist.

Die durch diese verschiedenartigen Einflüsse bedingten Differenzen werden sicherlich nicht Hunderte und Tausende von Metern betragen; vielmehr wird es sich in diesem Falle nur um eine ganz geringe Anzahl von Metern, ja vielleicht sogar nur um Bruchtheile derselben handeln, also um Grössen, die, man sollte meinen, gegenüber den grossen Dimensionen des Erdkörpers vernachlässigt werden könnten. Diese Vernachlässigung durfte man sich früher, so lange überhaupt die Frage nach der allgemeinen Figur der Erde in Discussion stand, erlauben, heute, wo dieselbe bereits gelöst, und man mittels Präcisions-Nivellements die gegenseitige Höhenlage der Meere ermittelt, sowie insbesondere die Abweichungen von der allgemeinen Form bestimmen will, müssen diese Differenzen als Beobachtungsdaten und nicht als zufällige Beobachtungsfehler in die Rechnung eingeführt werden; ja unser ganzes Streben muss dahin gerichtet bleiben, diese Abweichungen mit allen durch die Wissenschaft gebotenen Mitteln in der möglichsten Genauigkeit zu bestimmen.

Soweit die bisherigen Resultate der Präcisions-Nivellements einen Ueberblick gestatten, darf man mit ziemlicher Sicherheit behaupten, dass auch der mittlere Wasserspiegel der Meere nicht gleich hoch liegt.⁹⁾ Durch welchen derselben soll nun,

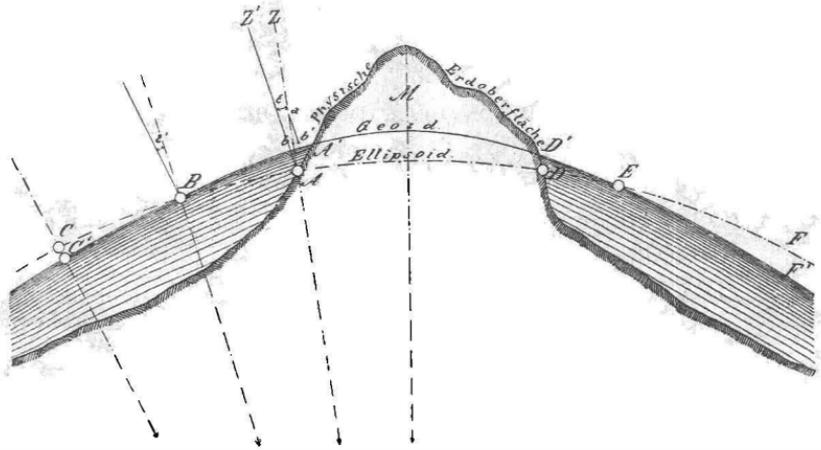
⁹⁾ Man vergleiche diesfalls meinen Aufsatz: Die Höhenlage der Meere in der Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereines. VII. Jahrg. 1882. Pag. 200

von allen sonstigen Unregelmässigkeiten abgesehen, das Ellipsoid gelegt werden? Hierin allein schon liegt eine Unbestimmtheit, die sich unmittelbar aus der bisherigen Definition der mathematischen Oberfläche der Erde ergibt.

VI.

Diese Unbestimmtheit wird uns aber noch greller vor Augen treten, sofern wir es versuchen, aus der bereits berührten Verschiedenheit der Dichteverhältnisse des Erdinnern, besonders aber jener der Festlands- und Wassermassen die weiteren Consequenzen zu ziehen; wir werden auf diese Weise erkennen, »dass die wirkliche Figur der Erde sich zu einer regelmässigen etwa verhält, wie die unebene Oberfläche eines bewegten Wassers zu der ebenen eines ruhigen.«¹⁰⁾

Fig. 2.



Sei in Fig. 2 ein Meridianschnitt des Erdkörpers dargestellt: $CB A D E F$ wäre die Meridian-Ellipse. In dem Punkte A würden wir eine Schweremessung vornehmen; da nun das in a aufgehängte Pendel $a b$ unter der Wirkung der Attraction der gesammten Massen sich befindet, so wird es in seiner Ruhelage nicht die Richtung der Normalen $a b$, sondern die Richtung $a b'$ annehmen, welche durch den Gegensatz der

¹⁰⁾ Bessel F. W. Ueber Mass und Gewicht etc. Pag. 139.

nahezu 2·7mal dichteren Landmassen M gegenüber den Wassermassen bedingt wird. Das Zenith des Punktes A , welches sich also in Z befinden sollte, wird nach Z' verrückt; etwas Aehnliches erfolgt im Punkte B . Wir ersehen also, dass in Folge des Gegensatzes der Land- und Wassermassen thatsächlich Lothstörungen erfolgen, die sich in der Figur für die Punkte A und B durch die Winkel ε , bezw. ε' ausdrücken. Da aber die allgemeine Figur der Erde nur eine Niveaufläche sein kann, für diese aber die Richtung der Resultirenden sämtlicher wirkenden Kräfte, als welche sich für den Punkt A die Gerade AZ' darstellt, mit der Normalen zusammenfallen muss, so folgt hieraus, dass die Niveaufläche nicht nach CBA verlaufen kann, sondern nach $C'BA'D'EF'$ verlaufen muss.

Der jüngst verstorbene Göttinger Professor Joh. B. Listing bezeichnet diese Fläche als das Geoid; indem er 1872 auf Grundlage der Resultate der bisherigen Gradmessungen die Eigenschaften desselben zu ermitteln sich bemühte ¹¹⁾, fand er nicht unbeträchtliche Abweichungen desselben von dem idealen Sphäroid, u. zw. Abweichungen, die sich sowohl auf das Gebiet der Wasser-, als auf das der Festlandsmassen erstrecken. Im Allgemeinen ergab sich, dass den ersteren Vertiefungen, den letzteren aber Erhebungen des Geoides entsprechen. Behufs Ermittlung der Dimensionen des »typischen Ellipsoides« macht er nun die folgenden Annahmen:

1. Die Rotationsachse desselben fällt in die Erdachse,
2. die hiedurch am Geoid sich bildenden Auf- und Abträge sollen sich ausgleichen, so dass also Ellipsoid und Geoid gleiches Volumen erhalten, und
3. die Summe dieser Erhöhungen und Vertiefungen soll ein Minimum werden.

Bezüglich der Abweichungen dieser beiden Flächen war Listing bemüsst, zu Schätzungen seine Zuflucht zu nehmen und gelangte so dahin, für den mittleren Radius $r = \sqrt[3]{aab}$ den Werth von 6,370.000 Meter zu setzen, während er, da es sich ihm doch nur um einen ersten Versuch handelte, für die Abplattung auch einen runden Betrag, u. z. entsprechend dem aus

¹¹⁾ Listing J. B. Ueber unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde. Göttingen. Dietrich 1872.

den Pendelmessungen gewonnenen, $\alpha = \frac{1}{289.00}$ in die Rechnung einföhrte.

$$\begin{aligned} \text{Es ergab sich } a &= 6,377.365.0^m \\ b &= 6,355.298.0^m. \end{aligned}$$

In einer zweiten, aus dem Jahre 1878 stammenden Abhandlung¹⁰⁾ beschäftigt er sich eingehend mit den Pendelmessungen und findet als den wahrscheinlichsten Werth für die Länge l des Sekundenpendels und die Beschleunigung der Schwere g in der geographischen Breite φ die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} l &= (990.9948 + 5.1547 \sin^2\varphi)^{mm} \\ g &= (9.780728 + 0.050875 \sin^2\varphi)^m \end{aligned}$$

Den wahrscheinlichsten Werth der Abplattung berechnet er zu $\alpha = \frac{1}{288.48}$, womit sich also für das typische Ellipsoid ergibt:

$$\begin{aligned} a &= 6,377.377^m \\ b &= 6,355.270^m. \end{aligned}$$

Versuchen wir nun umgekehrt, auf Grundlage dieser so gewonnenen Resultate die Grösse der besprochenen Abweichungen zwischen den in Betracht stehenden beiden Flächen zu ermitteln. Der sich aus den obigen Gleichungen ergebende theoretische Werth für die Pendellänge und die Schwere bezieht sich auf das Ellipsoid; was wir aber durch directe Messung und nachfolgende Reduction auf den Meereshorizont erhalten, entspricht dem Geoid. Eine Uebereinstimmung der so gefundenen Werthe wird also auf ein Zusammenfallen zwischen Geoid und Ellipsoid schliessen lassen, die Grösse und das Vorzeichen der Differenzen jedoch ein Urtheil über die Grösse der Erhöhung oder Vertiefung ermöglichen.

Ist nämlich n die beobachtete Anzahl Schwingungen pro Tag, Δn die gefundene Differenz zwischen der auf die Meeressfläche reducirten und der theoretisch für das Ellipsoid geltenden Schwingungszahl, so folgt aus der Reductionsformel auf den Meereshorizont, die Differenz zwischen Geoid und Ellipsoid:

$$\Delta r = -\frac{3}{2} \frac{\Delta n}{n} r \dots (3);$$

und zwar entspricht einem positiven Werthe von Δr eine

¹²⁾ Neue geometrische und dynamische Constanten des Erdkörpers. Göttingen. Dietrich. 1878.

Erhebung, einem negativen Werthe aber eine Vertiefung des Geoids unter das Ellipsoid.

Mit Benützung dieser Formel ergeben sich für die nächstfolgenden Stationen die in der nächsten Tabelle eingetragenen Werthe von Δr .

Stationen	Breite	Länge von Ferro	Δn	Δr
Maranham ..	— 2° 31' 35"	— 26° 36'	— 5.12	+ 567 ^m
Paris	+ 48° 50' 14"	+ 20° 0'	— 2.42	+ 268 ^m
London	+ 51° 31' 8"	+ 17° 34'	— 1.07	+ 118 ^m
Königsberg ..	+ 54° 52' 51"	+ 38° 10'	— 0.84	+ 93 ^m
Berlin	+ 52° 30' 17"	+ 31° 4'	— 0.34	+ 38 ^m
Spitzbergen ..	+ 79° 49' 58"	+ 39° 40'	+ 1.96	— 217 ^m
St. Helena ..	— 15° 56' 7"	+ 11° 57'	+ 7.68	— 847 ^m
Bonin-Inseln	+ 27° 4' 12"	+ 160° 0'	+ 11.83	— 1309 ^m

Die Richtigkeit und Genauigkeit der Beobachtungsdaten vorausgesetzt, würde man aber fehlgehen, wollte man die sich aus der Rechnung ergebenden Unregelmässigkeiten des Geoides einzig und allein auf Kosten des Gegensatzes zwischen Wasser- und Landmassen stellen und demnach von vornherein annehmen, dass diese beträchtlichen Erhebungen und Vertiefungen tatsächlich vorkommen. Denn in der Differenz zwischen der beobachteten und der theoretischen Schwingungszahl kommt, von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern abgesehen, auch noch der Einfluss der petrographischen Verhältnisse der Beobachtungsstation zum Ausdruck, welcher a priori doch nicht als ganz verschwindend betrachtet werden darf. Wohl ergibt eine theoretische Untersuchung dieser Frage, dass die **localen Unregelmässigkeiten**, trotzdem sie die Richtung und Grösse der Schwere bedeutend zu afficiren vermögen, also bedeutende Lothstörungen hervorrufen, im **Allgemeinen** nur ganz unbedeutende Schwankungen zwischen Geoid und Ellipsoid bedingen. Freilich hat diese Theorie zur Voraussetzung, dass sich diese **Unregelmässigkeiten** nur über verhältnissmässig **kleine Gebiete** erstrecken. Kann man aber von vornherein

behaupten, dass diese Annahme überall zutrifft? — Betrachten wir doch einmal eine geologische Weltkarte. In dem bunten Farbenspiel, das sich uns da offenbart, finden wir ziemlich bedeutende Stellen, die noch unerforscht geblieben sind; aber selbst von denjenigen Flächentheilen, deren Inneres bereits, erschlossen ist, werden wir kaum die Behauptung wagen dürfen dass sie uns zur Beantwortung dieser Frage hinreichendes Material liefern. Diesfalls brauchen wir nur zu bedenken, dass die grösste Tiefe, welche wir bisher erschlossen haben (Sperenberg in Preussen), nur $\frac{1}{50.000}$ des Erdhalbmessers beträgt, während wir die Dicke der Erdrinde nach Humboldt mit $\frac{1}{100}$, nach Hopkins sogar mit $\frac{1}{5} - \frac{1}{4}$ des Erdhalbmessers annehmen müssen. Sofern wir also Dichteverhältnisse des Erdinnern in die Rechnung einzuführen gezwungen sind, bleibt uns eben kein anderer Ausweg, als zu Hypothesen unsere Zuflucht zu nehmen die mehr weniger doch auf schwachen Füßen stehen. Um die Richtigkeit dieser, gleichsam als Vorwurf erscheinenden Behauptung zu erkennen, brauchen wir uns nur all' die Momente zu vergegenwärtigen, welche auf die streng physikalische Lösung dieser Frage Einfluss üben. Vor Allem ist es die qualitative Verschiedenheit der die Lithosphäre zusammensetzenden Gesteine, sowie der gesammten Erdmasse überhaupt; dann die zweifelsohne gegen das Centrum bis auf mehrere Tausend Grade zunehmende Temperatur; die hiedurch allein schon bedingten Unterschiede in den Aggregatsverhältnissen; ferner die wahrscheinlich bis zu vielen Zehntausenden von Atmosphären sich steigernden Druckverhältnisse und die im Zusammenhange damit stehende Erhöhung des Schmelzpunktes in den grossen Metallmassen, welche das Erdinnere zweifelsohne birgt: also lauter Momente, welche mit der Dichte und ihrer Aenderung in vershiedener Tiefe, sowie dem Einfluss nach aussen im Zusammenhange stehen, die wir aber auf inductivem Wege einer Lösung zuzuführen desshalb nicht vermögen, weil uns, wenigstens momentan, die nöthigen Hilfsmittel hiezu fehlen.

Mit einem Male sehen wir uns also vor eine Menge von Fragen gestellt, die der Geodät allein zu lösen nicht vermag. Er muss in dieser Beziehung den Physiker und Geologen zu Rathe ziehen, namentlich aber auch noch den Ersteren entscheiden lassen, ob und inwieweit die Störungen im Erd-

magnetismus mit den localen Störungen zusammenhängen; überhaupt wird es nothwendig erscheinen, auch der Ursache des grossen magnetischen Momentes der Erde nachzugehen und zu untersuchen, inwieweit dasselbe mit der durch geologische Forschung gereiften Ansicht über die Beschaffenheit des Erdinnern vereinbarlich erscheint oder dieselbe zu modificiren vermag.¹³⁾

Um über die Undulationen der physischen Erdoberfläche in Bezug auf das Meeresniveau einen Begriff zu erhalten, habe ich es versucht, auf der beigelegten Tafel einige charakteristische Meridianschnitte zu zeichnen. Es ist wohl selbverständlich, dass die Erhebungen und Vertiefungen der physischen Erdoberfläche keineswegs in richtigem Verhältniss zum mittleren Erdradius stehen; in diesem Falle wäre es überhaupt nicht möglich gewesen, eine diesbezügliche graphische Darstellung zu liefern; das Verzerrungs-Verhältniss beträgt 1:80. — Die detaillirte Beschreibung der einzelnen Figuren wird eine nähere Erklärung derselben überflüssig machen; es genüge deshalb anzuführen, dass sie folgenden Meridianschnitten angehören:

¹³⁾ Die meisten Anhänger zählt nämlich die Hypothese, dass das Erdinnere sich in einem heiss- und schmelzfüssigen Zustande befindet (Pyrosphäre), eine Ansicht, die sich übrigens mit der aus astronomischen und physikalischen Thatsachen abgeleiteten Folgerung, dass der ganze Erdkörper ursprünglich eine glühend flüssige Kugel gewesen ist, welche in Folge fortschreitender Abkühlung an der Oberfläche erstarrte, und noch anderen, vor unseren Augen sich vollziehenden Aenderungen und Umbildungen in Uebereinstimmung bringen lässt.

Dem entgegen steht die Ansicht von der Starrheit des Erdinnern (Barysphäre), sowie auch die erst in der jüngsten Zeit von englischen und amerikanischen Geologen aufgestellte und mit vielem Scharfsinn vertheidigte Hypothese, zufolge welcher die Erde ausser der festen äusseren Kruste noch einen festen Centralkern und zwischen beiden eine flüssige, in wässerigem Schmelzfluss befindliche Masse enthalte. Was speciell die Zusammensetzung dieses Centralkernes anlangt, so wäre dieser vornehmlich aus Eisen bestehend zu denken; diesem würde also eine Dichte von 7·0—7·8 entsprechen. Macht man jedoch die Annahme, dass die Zunahme der Dichtigkeit von der Oberfläche zum Erdmittelpunkte nach dem Gesetze $k = a - b \left(\frac{\rho}{r} \right)^c$ erfolgt, worin k die Dichte für einen in der Entfernung ρ vom Mittelpunkte der Erde befindlichen Punkt, und r den Erdradius bezeichnet, a, b, c aber Constante sind, welche durch Beobachtungen ermittelt werden müssen, so erhält man für die Dichte im Centrum Werthe, die zwischen 9·45 und 10·82 variiren, also dichter, als Eisenmassen entsprechen.

Fig. 1 dem Meridian		von Ferro
» 2 » »	20° ö.	» » (Paris, französische Gradmessung.)
» 3 » »	31° »	von Ferro (Berlin, europäische Gradmessung.)
» 4 » »	46° »	von Ferro (Petersburg, russisch-scand. Gradmessung.)
» 5 » »	95° »	von Ferro (Ostindische Gradmessung.)
» 6 » »	100° »	von Ferro (in der Nähe der Bonin-Inseln.)

VII.

Gerade die durch die Theorie erwiesenen Unregelmässigkeiten der soeben als Geoid definirten Fläche waren Veranlassung, der allgemeinen Figur der Erde andere Flächen als Rotations-Ellipsoide zu Grunde zu legen.

Wir begegnen da vor Allem dem hierher gehörigen Versuche von Paucker¹⁴⁾, welcher sich 1854 die Aufgabe gestellt hatte, aus den Pendelmessungen die beiden extremen Meridiane (den grössten und den kleinsten) und die Abweichung des Aequators vom Kreise zu bestimmen. Nach theoretischen Grundsätzen müssten die ersteren auf einander senkrecht stehen; die Rechnung ergibt jedoch, dass sie sich unter einem Winkel von 16° bez.

164° kreuzen und eine aequatoriale Abplattung von $\frac{1}{3177}$ bewirken, was Resultate sind, welche der Theorie geradezu widersprechen. Darnach war es Clarke¹⁵⁾, welcher 1858 ein nicht elliptisches Sphäroid berechnete, dessen Aequator wohl kreisförmig war, dessen Meridiancurven jedoch das auf denselben Halbachsen beschriebene Ellipsoid in den beiden Polen und längs des Aequators berührten, in der Polhöhe von 45° jedoch sich nahe um 54^m darüber erhoben. Auf Grund der Gleichgewichtsfläche von Jacobi, welcher 1834 gezeigt hatte, dass auch ein dreiachsiges Ellipsoid bedingungsweise in's Gleich-

¹⁴⁾ Bulletin phys. math. de l'Acad. de St. Pétersbourg. Tome XII. 1854. Nr. 7 und 8. Tome XIII. 1855. Nr. 4, 5 und 6.

¹⁵⁾ Account of the Observations and Calculations of the Principal Triangulation etc. London 1858.

gewicht kommen könne, berechnete Schubert¹⁶⁾ im Jahre 1859 ein solches Ellipsoid, welches den bisherigen Gradmessungen am besten entsprechen sollte. Ohne der vielen Willkürlichkeiten, welche sich derselbe beim Ansatz der Rechnung zu Schulden kommen liess, zu gedenken, sei nur das Resultat derselben hier mitgetheilt. Die Ellipticität des Aequators findet er zu

$\frac{1}{3881.3}$ und die Länge der grossen Achse $58^{\circ}44'$ ö. v. Ferro.

Auch Clarke¹⁷⁾ hat dem dreiachsigen Ellipsoid seine Aufmerksamkeit zugewendet; aus den Berechnungen des Jahres 1861 ergab sich für die Abplattung des Aequators der Werth von

$\frac{1}{3942.6}$, die Länge der grossen Achse desselben $31^{\circ}38'$ ö. v. Ferro;

hingegen lieferte die Rechnung des Jahres 1866 wohl eine noch grössere Ellipticität des Aequators, nämlich $\frac{1}{3281.2}$,

dagegen die Lage der grossen Achse desselben nur etwa $1\frac{1}{2}^{\circ}$ östlicher als früher, nämlich $33^{\circ}14'$ ö. v. Ferro. Gegen Schubert sind aber die Differenzen sehr bedeutend.

VIII.

Alles bisher Gesagte zusammenfassend, gewinnen wir die Ueberzeugung, dass die Lösung der Frage nach der Figur der Erde immer nur auf Grundlage irgend einer Hypothese angestrebt wurde. Erst in der letzten Zeit stellte sich Bruns die Aufgabe, zu untersuchen, ob es nicht möglich erscheint, die mathematische Figur der Erde mit Ausschluss jeder hypothetischen Voraussetzung über das Bildungsgesetz derselben zu ermitteln.¹⁸⁾

Bevor wir daran gehen, uns mit den Resultaten seiner Forschung vertraut zu machen, wird es nothwendig erscheinen, an einige Sätze aus der Potentialtheorie zu erinnern.

Denken wir uns einen sonst beliebig geformten Körper und in demselben ein Massen-Element A ; auf dieses werden alle Massen-Elemente des Körpers einwirken und sich schliesslich zu einer Gesamtwirkung vereinigen, deren Grösse nach einer bestimmten Richtung (Componente) zu kennen, für unsere

¹⁶⁾ Mémoires de l'Acad. de St. Pétersbourg VII. Serie T. I. 1859. Nr. 6.

¹⁷⁾ Memoirs of the Royal Astron. Society, Vol. XXIV. 1861. Pag. 2.

¹⁸⁾ Bruns H. Die Figur der Erde. Berlin. Stankiewicz. 1878.

Betrachtungen Interesse hat. Wir werden diese Aufgabe dann zu lösen vermögen, wenn wir das Potential des in Rede stehenden Körpers kennen. Dieses findet sich aber aus der Summe der Massen-Elemente, jedes derselben dividirt durch die Entfernung der letzteren von jenem Massentheilchen A , auf welches die Wirkung erfolgt. Ist also dm eines der Massen-Elemente und r die bezügliche Entfernung, so ist das Potential V defnirt durch die Gleichung:

$$V = \int \frac{dm}{r} \dots\dots (4).$$

Aus dieser berechnet sich die Componente S nach irgend einer Richtung s , wenn man sich den in Rede stehenden Punkt in der fraglichen Richtung um eine unendlich kleine Strecke ds verschoben denkt und die hieraus resultirende Aenderung des Potentials, d. i. dV , ins Verhältniss setzt zur Grösse der gedachten Verschiebung; es ist also die Grösse dieser Componente ausgedrückt durch die Gleichung:

$$S = \frac{dV}{ds} \dots\dots (5).$$

In Anwendung auf unseren Erdkörper ergibt sich, dass das über die gesammte Masse desselben ausgedehnte Integral

$$V = \int \frac{dm}{r} \dots\dots (6)$$

das Potential des Erdkörpers in Bezug auf einen Punkt P bedeutet, mag dieser ausser- oder innerhalb des Erdkörpers liegen. Strenge genommen müssen wir aber unseren Betrachtungen die Kräftefunction W zu Grunde legen, welcher im Allgemeinen dieselben Eigenschaften zukommen, durch welche sich das Massen-Potential auszeichnet, die sich aber aus diesem und dem Schwungkraft-Potential zusammensetzt; letzteres ist jedoch, wenn u die Umfangsgeschwindigkeit und ρ die Entfernung des fraglichen Punktes von der Rotationsachse bedeutet, durch den Ausdruck $\frac{1}{2} u^2 \rho^2$ bestimmt. Demgemäss liefert die Gleichung:

$$W = V + \frac{1}{2} u^2 \rho^2 \dots\dots (7)$$

die Kräftefunction der Erde.

Beziehen wir nun den Punkt P auf ein Coordinaten-System OX, OY, OZ , dessen Ursprung O z. B. mit dem Erd-

mittelpunkte zusammenfällt. Die Kräftefunction wird sich dann als eine Function der Coordinaten x, y, z des Punktes P , also durch die Gleichung: $W = F(x, y, z)$ ausdrücken lassen, die aber nichts Anderes als die Gleichung einer Fläche darstellt. Für den Fall nun, dass

$$W = F(x, y, z) = \text{Const.} \dots\dots(8)$$

wird, erhalten wir eine Fläche, welcher die Eigenschaft zukommt, dass für jeden ihrer Punkte die Kräftefunction den gleichen Werth besitzt; eine solche Fläche ist aber eine Gleichgewichts- oder Niveaufläche der Kräftefunction oder eine Niveaufläche kurzweg.

Die Frage nach Grösse und Richtung der Schwere g beantwortet sich jetzt ohne Schwierigkeit. Letztere muss in die Richtung der Flächennormale fallen, erstere ist zufolge (5 und der Beziehung zwischen Potential und Kräftefunction bestimmt durch:

$$g = - \left(\frac{dW}{dn} \right) \dots\dots(9,$$

worin dn das nach aussen gerichtete Element der Normalen bezeichnet.

Aus der Definition des Potentials geht schon hervor, dass dessen Grösse für jeden Punkt des Erdkörpers bestimmt werden kann; es entspricht also auch jedem einzelnen dieser Punkte ein Werth der Kräftefunction W , folglich auch eine Niveaufläche. Für uns haben begreiflicherweise nur jene Niveauflächen Interesse, welche der Lithosphäre angehören. Nun lehrt aber die Analysis, dass das Wesen der Kräftefunction ein stetiges Verlaufen der Niveauflächen bedingt, dieselben also weder Ecken und Kanten, noch Risse, Sprünge oder sonst welche Unregelmässigkeiten ähnlicher Art besitzen können. Sie werden sich demnach schalenförmig umschliessen und im Allgemeinen nur wenig von einem Ellipsoid differiren. Der Abstand zweier so benachbarter Niveauflächen, gemessen in der Normalen, ergibt sich zufolge (9 mit:

$$dn = - \frac{dW}{g} \dots\dots(10;$$

derselbe ist also nicht constant, sondern mit der Schwere variabel und dieser verkehrt proportional.

IX.

Wenn wir das soeben Gesagte in Beziehung bringen zu der Vorstellung, welche wir bisher mit dem Begriff »mathematische Figur der Erde« verknüpften, so müssen wir unzweifelhaft erkennen, dass darunter nur eine bestimmte Niveaufläche der Kräftefunction W verstanden sein kann; die Hypothese, die wir aber dort stillschweigend gemacht haben, bestand darin, dass wir das »mittlere« Meeresniveau, entsprechend der im Gleichgewichtszustande befindlichen Meeresoberfläche *a priori* als Niveaufläche betrachteten.

Es wurde bereits früher dargelegt, welche Unbestimmtheit der Ausdruck »mittleres Meeresniveau«, »Mittelwasser des Meeres« in sich schliesst, und es wurde nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass es sich rücksichtlich der hier in Betracht kommenden Abweichungen doch nur um Beträge handeln kann, die gegenüber den grossen Dimensionen des Erdkörpers praktisch eigentlich verschwinden. Dass sie aber trotz dieser Kleinheit eine ganz besondere theoretische Bedeutung besitzen, dürfte sich jetzt ganz klar und deutlich ergeben. Man mag nämlich das Ellipsoid oder sonst eine andere demselben nahe kommende Fläche für die Oberfläche der Erde substituiren und deren Lage selbst soweit präcisiren, als man sie in den Nullpunkt der Höhen, also den Mittelwasserspiegel dieses oder jenes Meeres legt, in keinem Falle wird man dem Dilemma entgehen, wohl die Gleichung einer Fläche und deren Erzeugenden berechnet zu haben, welche als erste Approximation für die Erdgestalt dienen kann, keineswegs aber die Gleichung jener Niveaufläche, als welche wir die Meeresoberfläche betrachten zu dürfen glaubten. Die Annahme irgend eines Mittelwasserspiegels als Nullpunkt der Höhen hat eben nicht mehr Berechtigung, als wenn Jemand für genaue und vergleichende Temperatur-Beobachtungen Thermometer benützen wollte, welche die mittlere Jahrestemperatur des betreffenden Ortes zum Ausgangspunkte der Zählung haben. Gerade so, als man hier einen unveränderlichen Punkt, den Schmelzpunkt des Eises unter bestimmtem Druck etc. als Nullpunkt wählt, muss man auch den geodätischen Präcisionsarbeiten einen Fixpunkt zu Grunde legen, dessen Auswahl so getroffen ist, dass auch die geologische Beschaffenheit des Terrains die Bürgschaft für dessen Unveränderlichkeit bietet.

Inwieweit man diesen Unbestimmtheiten zu entgehen vermag, dürfte durch das Nachfolgende klar werden. Indem man sich von dem bisher geltenden Begriff der »mathematischen Figur der Erde« emancipirt und in weiterer Folge mit diesem Begriff auch nicht jene einer bestimmten Niveaufläche verbindet, wird die Aufgabe der Geodäsie dahin erweitert werden müssen, die Gesammtheit aller Niveauflächen oder, was gleichbedeutend ist, die Kräftefunction W selbst zu ermitteln.

Es ist wohl selbstverständlich, dass diese allgemeine Lösung unserer Aufgabe, welche sich auf die Gesammtoberfläche des Erdkörpers erstreckt, keineswegs ausschliesst, für begrenzte Complexe, innerhalb welcher die erforderlichen Daten mittels astronomischer und geodätischer Operationen erhoben wurden, und zwar mit Benützung derselben, die Form einer ganz bestimmten Niveaufläche zu ermitteln, welche dann als jene Fläche zu betrachten ist, welche wir schon als Geoid früher kennen gelernt haben. Daran muss aber festgehalten werden, dass die den einzelnen, von einander isolirten Gradmessungen entsprechenden Geoide nicht etwa einer einzigen Niveaufläche angehören, — dass aber die sich zwischen je zweien derselben ergebenden Differenzen mit Rücksicht auf die grossen Dimensionen des Erdkörpers ebenfalls als praktisch verschwindend betrachtet werden dürfen. Mit der Ermittlung dieser Geoide hat man aber unter einem auch die Grösse der Kräftefunction, sowie die Grösse der Schwere längs diesen Flächen bestimmt und auch deren Orientirung in Bezug auf den Schwerpunkt und die Rotationsachse der Erde vorgenommen.

Hieraus darf man aber keineswegs folgern, dass es im Allgemeinen gelingen könnte, das Geoid durch einen geschlossenen mathematischen Ausdruck darzustellen; denn wiewohl die Geoide stetige und geschlossene Flächen sind, so bestehen sie doch, den einzelnen Massenschichten, also den verschiedenen Dichteverhältnissen entsprechend, aus sonst regellos an einander gereihten Stücken verschiedenartig geformter analytischer Flächen, deren Krümmung sich an den Uebergangsstellen im Allgemeinen sprungweise ändert; in den Lothablenkungen finden diese sprungweisen Aenderungen ihren deutlichsten Ausdruck. Strenge genommen sind die Geoide nach aussen convex; concave

Krümmungen müssten, sofern sie sich auf grössere Gebiete erstrecken sollten, naturnothwendig in Begleitung grosser Lothstörungen auftreten, deren Betrag selbst grösser sein müsste, als die ganze geodätische Amplitude. Damit sind aber negative oder concave Krümmungen innerhalb ganz kleiner Gebiete nicht ausgeschlossen, ja sie sind sogar, besonders aber bei Niveauflächen des Erdinnern, sehr wahrscheinlich, woselbst die durch die verschiedenen Dichteverhältnisse bedingten Aenderungen in der Grösse der Anziehung Undulationen der Geoidflächen hervorzurufen vermögen.

Abstrahiren wir aber vorläufig von dieser Verschiedenheit der Dichteverhältnisse und denken wir uns einen idealen Erdkörper von gleichförmiger oberflächlicher Massenvertheilung Demselben wird eine Kräftefunction $W = U$ entsprechen und diesem speciellen Falle durch die Gleichung $U = \text{Const.}$ eine Schaar Niveauflächen, die wir als Sphäroide bezeichnen wollen; dieselben sind nicht identisch mit dem Rotations-Ellipsoid, vielmehr, wie die Theorie zeigt, algebraische Flächen viel höherer Ordnung, indessen in ihrer Gestalt so geartet, dass sie zwischen Ellipsoid und Geoid zu liegen kommen und so wieder ihrerseits als erste Approximation des letzteren, namentlich aber dann gelten können, wenn es sich um das Studium der Lothstörungen selbst handelt. Man findet nämlich, dass die Differenz h zwischen Geoid und Sphäroid sich ausdrückt durch die Gleichung:

$$h = - \frac{W-U}{\gamma \cos. \varepsilon} \dots (11,$$

worin W und U die bekannte Bedeutung haben, γ aber die theoretische Schwere und ε die Lothablenkung in dem betreffenden Punkte bezeichnet. Dieser Ausdruck ist es nun, durch dessen Discussion man zu dem schon früher angegebenen Resultate gelangt dass locale Unregelmässigkeiten in der Massenvertheilung nur geringe Aenderungen in h auch dann hervorrufen, wenn sie selbst γ und ε bedeutend afficiren, also bedeutende Lothstörungen bedingen.

Um den Einfluss des Gegensatzes zwischen Continental- und Wassermassen wenigstens annäherungsweise zu berechnen, machen wir mit *Brunns* die folgende Annahme: Wir denken uns den Erdkern als homogene Kugel vom mittleren Erdhalbmesser und der Dichtigkeit 5.55 und ersetzen die Oeane und

Continente durch unendlich dünne Massenbelegungen derselben Configuration und der Dichte $k_1 H_1$, bez. $k_2 H_2$, worin $k_1 = -1.5$ und $k_2 = +2.5$ ist, und $H_1 = 3000^m$ die mittlere Tiefe der Oceane, $H_2 = 300^m$ aber die mittlere Höhe der Landmassen bedeuten¹⁹⁾; ausserdem nehmen wir an, die östliche Halbkugel wäre in Folge der hier vorkommenden Vertheilung der Land- und

¹⁹⁾ Otto Krümmel findet in seinem Buche: »Vergleichende Morphologie der Meeresräume, Leipzig, Duncker & Humblot 1879« die mittlere Meerestiefe zu 3438 m. (pag. 99) und als mittlere Höhe der Continente (Erhebung über die Meeres-Oberfläche) den Betrag von 440 m. Es ist wohl selbstverständlich, dass nicht im mindesten beabsichtigt werden kann, an diesen Zahlen irgendwie Kritik zu üben; indessen darf nicht verschwiegen werden, dass denselben keinerlei besonders hoher Genauigkeitsgrad beigemessen werden darf, zumal dieselben das Resultat einer Schätzung sind, die, was namentlich die Meerestiefe betrifft, doch nur auf Grundlage eines äusserst unvollkommenen Materiales positiver Beobachtungsdaten vorgenommen werden konnte. Eben deshalb muss es aber befremden, wenn das genannte Werk, nachdem auf Grund dieser Zahlen die Massen des Meeres und der Erdfesten (Erhebungen der Erdmassen über das mittlere Niveau des Meeresbodens) übereinstimmend gefunden, und in Vergleich zu früheren Schätzungen gestellt wurden, auf pag. 108 und 109 folgendermassen ausklingt: »Hiernach dürfen wir es vielmehr für mehr als wahrscheinlich bezeichnen, dass zwischen den Massen des Meeres und der Erdfesten Gleichgewicht herrscht.« — »Wir halten,« so erklärt Krümmel auf der Schlussseite seines Werkes weiter, »es nicht für die Aufgabe der Erdkunde, über die Begründung oder die Zweckmässigkeit eines solchen Gleichgewichtes der Land- und Meermassen Speculationen anzustellen; es ist dies vielmehr Sache der Physiker und Astronomen.« Bezüglich seiner Aeusserung, die Aufgabe der Erdkunde betreffend, wollen wir ihm nicht entgegenreten; rücksichtlich der Aufgabe, welche er aber den Vertretern anderer wissenschaftlichen Disciplinen zuweisen will, möchten wir uns nur die eine Bemerkung erlauben, dass für diese insolange keine Veranlassung vorliegen dürfte, sich mit dieser Frage zu beschäftigen, insolange die von Krümmel geführte oder eine ähnliche Berechnung nur auf so unsicheren Annahmen beruht, und sich nicht frei von Willkürlichkeiten darstellt, welche am meisten zu einer solchen Uebereinstimmung beitragen. Abgesehen von der für die mittlere Dichte des Oceans eingesetzten Zahl soll zur Begründung des soeben Gesagten nur auf die für die Dichte der Erdfesten angenommene Grösse hingewiesen werden, welche mit 2.5 in die Rechnung eingeführt wurde. Warum gerade diese unterste Grenze gewählt worden ist, ist nicht des Näheren begründet, sondern blos auf Humboldt's »Kosmos« und »Naumann's Geognosie« I. 1858 hingewiesen; dass aber gerade in der Wahl dieser Zahl eine grosse Willkürlichkeit liegt, wird wohl Niemand in Abrede stellen dürfen.

Wassermassen gegen Lothstörungen vollkommen compensirt; auf der westlichen Halbkugel ersetzen wir aber den sich zwischen 30° und 75° westlich von Ferro ausdehnenden amerikanischen Continent durch ein Kugelzweieck dieser Ausdehnung und der Dichtigkeit $k_2 H_2$, und denken uns den übrigen Theil durch die Massenbelegung $k_1 H_1$ erfüllt. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für Punkte des Aequators der Abstand zwischen Geoid und Sphäroid, indem wir auch noch die Verschiebung des Schwerpunktes für die fingirte Massenvertheilung in Betracht ziehen,

$$\begin{array}{r} \text{in einer geogr. Länge } 10^{\circ} \text{ w. v. F.} = - 1078^m \\ \text{» » » } 60^{\circ} \text{ » » »} = - 531^m; \\ \hline \text{daher die Differenz} = - 547^m. \end{array}$$

Zufolge dieser Zahlen liegt also die Meeresoberfläche in 10° westl. L. von Ferro dem Schwerpunkte der Erde um 547^m näher als in 60° westlicher Länge.

Aus dem Umstande, dass in diesem Beispiel der Einfluss der östlichen Halbkugel vollständig eliminirt ist, werden sich die tatsächlichen Differenzen wesentlich anders gestalten müssen. Bruns ist der Ansicht, dass dieselben den Werth von nahezu 1000^m erreichen dürften, eine Annahme, die gewiss keinerlei grössere Berechtigung für sich in Anspruch nehmen darf, als eine solche einer Schätzung überhaupt zukommt.

Rücksichtlich der Lothstörungen darf man bei der hier gemachten Annahme für Punkte des Aequators nur östliche (—) und westliche (+) Ablenkungen erwarten. Dieselben betragen, um nur die Maximalwerthe zu nennen:

$$\begin{array}{cccc} \text{für } 0^{\circ} & 30^{\circ} & 75^{\circ} & 180^{\circ} \text{ w. L. v. F.}^{20)} \\ - 23'' & + 47'' & - 37'' & + 30'', \end{array}$$

also zwischen der Ost- und Westküste des fingirten Continentes

²⁰⁾ Es wurde in vorliegender Arbeit als Ausgangspunkt der Längenzählung »der Meridian von Ferro« gewählt, welcher 20° westlich vom Meridian des Hauptinstrumentes der Pariser Sternwarte liegt, und circa $30'$ westlich an der Insel Ferro vorübergeht. — Es ist bekannt, dass vielfach schon der Versuch gemacht worden ist, einem neuen internationalen »Null-Meridian« zur Annahme zu verhelfen. Diesfalls sei nur der Vorschläge Erwähnung gethan, welche 1874 von Champcourtois und Longperrier in der Pariser Société de géographie gemacht wurden. (»Les Mondes« XXXIV, 1874). In der neuesten Zeit haben sich aber Struve und Förster, conform den Vorschlägendes »Canadischen Institutes zu Toronto« für den 180° von Greenwich liegenden Meridian als »Null-Meridian« ausgesprochen. (Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde

volle 84"; d. h. man würde zwischen der astronomisch und geodätisch bestimmten Längendifferenz zweier solcher Küstenpunkte eine Differenz von 84", folglich den Aequatorgrad aus einer solchen Bestimmung um beiläufig $\frac{1}{1900}$ seiner Länge zu klein erhalten.

Würdigt man die von Bruns gelieferte Tabelle, in welcher die Differenz der Höhenlage zwischen Geoid und Sphäroid nebst den Lothablenkungen von 5^0 zu 5^0 des Aequators für die in Rede stehende ideale Massenvertheilung verzeichnet erscheinen, einer näheren Betrachtung, so zeigt sich, dass die durch diesen Gegensatz in den Dichtigkeitsverhältnissen der Oceane und Continente hervorgerufenen Lothstörungen nur langsam variirend sich über grosse Bögen erstrecken; dies ist auch der Grund, warum sie so lange Zeit hindurch gänzlich unbeachtet bleiben konnten.

Schon früher haben wir erkannt, dass, Ausnahmen nicht ausgeschlossen, die hiedurch bedingten Erhebungen des Geoides den Continenten, hingegen die Vertiefungen den Oceanen angehören werden. Sei nun g die in dem betreffenden Punkte beobachtete und auf den Meereshorizont reducirte Schwere, γ die dem entsprechenden Punkte des Geoides und γ' jenem des Sphäroides zukommende theoretische Schwere, so ergibt die Rechnung, dass man die Schwerestörung $g - \gamma'$ findet aus der Gleichung:

$$\frac{g - \gamma'}{\gamma} = \frac{3}{2} \frac{h}{r} \dots (12,$$

worin r den mittleren Erdradius bedeutet. Mit Rücksicht auf die Formel für die Schwingungsdauer eines Pendels und den Zusammenhang zwischen der Länge desselben und seiner Schwingungszahl beträgt also für ein Secundenpendel und $h = 1000^m$, in Uebereinstimmung mit (3, die Differenz in der täglichen Schwingungszahl mehr als 10.

X.

Nachdem wir jetzt eine genügende Vorstellung von jener Fläche besitzen dürften, welche wir in der Folge als mathematische zu Berlin, 1881). Der Vollständigkeit wegen sei noch des Vorschlages von Tomaschek Erwähnung gethan, welcher den Meridian 10^0 östlich von Greenwich als »Null-Meridian« empfiehlt. (»Neue Freie Presse« Abendbl. v. 24. Jänner 1883). Man sieht, dass der Meridian einer Sternwarte immer den Ausgangspunkt bildet. Die Seefahrer werden von Greenwich nicht leicht abgehen, und für andere Zwecke hat die Frage eines internationalen »Null-Meridians« wohl auch keine so besondere Bedeutung.

Oberfläche der Erde zu betrachten haben, soll es noch unsere Aufgabe sein, die Bedeutung der nach den verschiedenen Methoden und aus den einzelnen Operationen erhaltenen Messungsergebnisse für die Lösung der in Rede stehenden Frage zu untersuchen.

Betrachten wir vorerst die auf Grund der Basis- und Winkelmessung durch Triangulation geodätisch festgelegten Polyeder, die nach Grösse und Richtung bestimmt erscheinen, sofern wir auch an jedem Punkte derselben Zenithdistanzen gemessen haben; zu ihrer Orientirung brauchen wir nur noch zwei astronomische Daten, z. B. eine Polhöhe und ein Azimuth, oder zwei Polhöhen etc. zu ermitteln. Ohne Zuhilfenahme einer Hypothese über die Figur der Erde sind wir nicht im Stande, die Entfernung der Ecken des Polyeders von der Rotationsachse oder dem Schwerpunkte der Erde anzugeben; wir vermögen auch nicht zwei getrennte Polyeder in entsprechende Beziehung zu einander zu bringen, ausser wir verbinden dieselben durch vier von einander unabhängige Stücke. Offenbar wird jeder der in Betracht stehenden Polyeder-Ecken eine Niveaufläche entsprechen; da uns aber ihr Bildungsgesetz unbekannt ist, so vermögen wir auch nicht ein Geoid abzuleiten, und sind demgemäss ebensowenig in der Lage, den Abstand der einzelnen Polyeder-Ecken von diesem Geoid anzugeben. Hieraus ergibt sich also, dass die trigonometrische Höhenmessung den Namen eines Nivellements eigentlich gar nicht verdient.

Es wurde schon früher darauf hingewiesen, in welcher Weise man aus Gradmessungen die Dimensionen des Rotations-Ellipsoids bestimmt; es sind nämlich den in die Berechnung einbezogenen Gradmessungen unter einander congruente Ellipsoide zu Grunde gelegt, deren kleine Achsen der Erdachse parallel liegen, und die nun so dimensionirt werden, dass die Differenzen zwischen den astronomisch bestimmten und durch geodätische Uebertragung erhaltenen Polhöhenunterschieden ein Minimum werden. Gleichzeitig, und das ist von besonderer Wesenheit, ist noch stillschweigend die weitere Voraussetzung gemacht, nämlich, dass die Mittelpunkte aller dieser Ellipsoide unter sich und mit dem Schwerpunkte der Erde zusammenfallen. — Dass die erste Annahme, die Substituierung eines Ellipsoids für das Geoid, innerhalb eines beschränkten Gebietes in Folge der Kleinheit der Lothstörungen

gestattet ist, ergibt sich schon aus dem Vorhergehenden; fraglich bleibt aber immer, ob die zweite Annahme a priori zulässig ist. Die Mittel, welche uns heute zur Prüfung dieser Hypothese zur Verfügung stehen, gewähren noch immer nicht die wünschenswerthe Genauigkeit; sie berechtigen uns blos zu dem Schlusse, dass die Abstände des Geoides vom Sphäroide, also auch die Abstände des in Rede stehenden Ellipsoides vom Schwerpunkte der Erde verhältnismässig sehr gering sind und nur wenige Kilometer betragen. Auf directem Wege die Abstände zwischen Geoid und Sphäroid zu messen, sind wir also dem Gesagten zufolge ausser Stande.

Welche Genauigkeit den aus Gradmessungen allein abgeleiteten Zahlenwerthen für die Dimensionen des Erdkörpers überhaupt zukommt, kann man aus folgender Betrachtung erkennen. Man denke sich die den verschiedenen Gradmessungen entsprechenden, unter einander congruenten Ellipsoide, neben den als Meereshorizonte geltenden Geoidstücken, und endlich zwischen beiden, die sich diesen möglichst anschmiegenden Sphäroide. Die Lösung der Aufgabe verlangt eigentlich die letzteren; thatsächlich erhält man aber die gemeinschaftlichen Dimensionen der Ellipsoide. In dem Falle, als die Lothablenkungen gering sind und in einerlei Sinn fortschreiten, wird auch der Unterschied zwischen den einzelnen Flächen ein praktisch verschwindender sein und man wird demgemäss auch berechtigt sein, die aus den, auf solche Weise sich ergebenden Polhöhenfehlern abgeleiteten wahrscheinlichen Fehler der Halbachsen und der Abplattung als der Wahrscheinlichkeit wirklich sehr nahe kommend, anzusehen. Diese Schlussfolgerung ist jedoch nicht mehr zulässig, sofern längs eines Bogens Lotablenkungen von ziemlicher Grösse, wenn auch desselben Sinnes auftreten; denn in den schliesslich übrig bleibenden Polhöhenfehlern kommen die Lotablenkungen nicht zum Ausdruck, weil auf die Amplitude der Bögen nur die Differenz der Ablenkungen Einfluss übt. Nur so ist es erklärlich, warum z. B. die colossalen Massen des Himalaya scheinbar gar keine Ablenkung ergaben.

Man ist jedenfalls von einem Irrthume befangen, wenn man glaubt, durch Zugrundelegung einer anderen Hypothese, also dreiachsiger Ellipsoide etc. bessere Resultate zu erzielen; denn ein Blick auf die Weltkarte allein lehrt schon, wie gering das Gebiet

der Erdoberfläche ist, auf welches sich die Gradmessungen erstrecken — man also thatsächlich sich nur in der Lage befindet, die Uebereinstimmung auf einem so beschränkten Raume zu controliren. Dies im Verein mit der Vorstellung, welche man sich über die Undulationen der physischen Erdoberfläche gegenüber den verschiedenen hypothetischen Flächen aus den auf der beigegebenen Tafel gezeichneten Meridianschnitten bilden kann, wird wohl ohneweiters erkennen lassen, dass es bei dieser Approximation, um welche es sich vorläufig nur handeln kann, ziemlich gleichgiltig ist, für welche Hypothese man sich entscheidet; vom praktischen Standpunkte muss der einfachsten, also dem Rotations-Ellipsoide der Vorrang eingeräumt werden. Alle diese Berechnungen führen aber zu dem einen Ziele, dass man aus den astronomischen und trigonometrischen Daten nur die Gestalt der Polyederecken und deren Orientirung in Bezug auf die Erdachse erhält, niemals aber die Entfernung der einzelnen Ecken von dieser Achse.

XI.

Indem wir uns jetzt dem geometrischen oder Präcisions-Nivellement zuwenden, wird es nothwendig erscheinen, vorerst die Begriffe »Meereshöhe« und »Niveaudifferenz« zu präcisiren.

Wir haben schon früher erkannt, dass jedem einzelnen Punkte der Erdrinde eine Niveaufläche entspricht, welche sich eben dadurch charakterisirt, dass ihre Normalen mit der Lothrichtung zusammenfallen. Diese bilden aber Tangenten an die Lothlinie oder die Kraftlinie, d. i. jene Curve, welche, der Aenderung der Lothrichtung in der Niveaufächenschaar folgend, dieselben senkrecht durchschneidet. Da aber die Krümmung der Kraftlinie nicht sehr bedeutend ist, so wird auch die Differenz zwischen diesem Durchschnittspunkte und dem Fusspunkte der einer benachbarten Niveaufläche entsprechenden Lothrichtung als verschwindend klein betrachtet werden dürfen.

Denken wir uns nun von einem Punkte P der Erdrinde an das unserer Betrachtung als Meereshorizont zu Grunde gelegte Geoid eine Normale gezogen und gleichzeitig auch die zu P gehörige Lothrichtung oder Verticalc; wir werden aus dem oben angeführten Grunde auch die Länge dieser beiden Strecken nicht viel von einander verschieden erhalten. Strenge genommen, wird aber die an das Geoid gezogene Normale die Höhe des

Punktes P über der Meeresfläche angeben, so dass wir alle Punkte, welche in diesem Abstände von der Geoidfläche liegen, also alle Punkte einer Parallel- oder Aequidistantenfläche des Geoids als in gleicher Meereshöhe liegend betrachten dürfen.

Wir sind aber auch gewohnt, unendlich nahe Punkte, deren Verbindungslinie auf der Richtung der Schwere senkrecht steht, als in gleicher Höhe, in gleichem Niveau liegend zu bezeichnen. Demgemäss müssten wir auch alle Punkte ein und derselben Niveaufläche als in demselben Niveau, und in weiterer Consequenz auch diese gegen alle Punkte einer zweiten Niveaufläche in gleicher Niveaudifferenz liegend ansehen. Nun wissen wir aber, dass zufolge Gleichung (10) die Niveauflächen keineswegs Parallelfächen sind, vielmehr einen variablen Abstand besitzen, welcher mit der Zunahme der Schwere abnimmt; Punkte gleicher Meereshöhe müssen also nicht in gleichem Niveau, und Punkte derselben Niveaudifferenz nicht in derselben Meereshöhe liegen.

Wiewohl sich die »Meereshöhe« durch den verticalen Abstand des fraglichen Punktes vom Geoid geometrisch darstellen lässt, so gibt man für geodätische Zwecke dem Begriffe »Niveaudifferenz« schon deshalb den Vorzug, weil man im ersten Falle die willkürliche Voraussetzung zu machen genöthigt ist, der Meereshorizont sei eine bestimmte Niveaufläche, während die Niveaudifferenz gerade jene Grösse ist, welche man beim geometrischen Nivellement, ohne Kenntniss der Gestalt der Niveauflächen, mit Zuziehung der Schwere direct aus den Angaben des Nivellirinstrumentes erhält. Hieraus die Meereshöhe abzuleiten, fällt nicht schwer; hiezu bedarf man nur aus der, für die fraglichen Punkte bekannten Differenz der Kräftefunction nur noch den Mittelwerth aus den Werthen der Schwere längs dieses Höhenunterschiedes.

Inwieweit also das geometrische Nivellement und die trigonometrische Höhenbestimmung einander zu ersetzen vermögen, ergibt sich jetzt von selbst; gerade jene Methode, welche man in neuerer Zeit aus praktischen Gründen statt der älteren in die Gradmessungsarbeiten eingeführt hatte, vermag erst das zu leisten, was man schon früher erreicht zu haben glaubte.

Früher haben wir schon gesehen, dass die aus einer Triangulirung mit Zuhilfenahme von astronomischen Coordinaten und

Zenithdistanzen sich ergebenden Resultate das dieser Gradmessung zu Grunde gelegte Ellipsoid zu bestimmen vermögen; wir erhalten also auf diese Weise auch die Lage jedes einzelnen Punktes gegenüber diesem Ellipsoid und den Abstand der einzelnen Dreieckspunkte von demselben, gemessen in der Richtung der Verticalen. In derselben Richtung aber gemessen, erhalten wir aus dem geometrischen Nivellement den Abstand derselben Punkte vom Geoid; folglich gibt die Differenz der nach beiden Methoden erhaltenen Höhenunterschiede den Abstand des Geoids vom Ellipsoid.

XII.

Auf diese Weise sind wir also im Stande, durch entsprechende Combination

1. der Triangulation (Basis- und Winkelmessung),
2. der astronomischen Coordinaten (Polhöhe, Länge, Azimuth),
3. der trigonometrischen Höhenbestimmung (Messung der Zenithdistanzen),
4. des geometrischen Nivellements und
5. der Schweremessungen

die relative Lage beliebig vieler Punkte einer Niveaufläche zu bestimmen, ohne über das Bildungsgesetz derselben oder ihre Form irgend welche Hypothese zu machen. Damit haben wir aber auch die einzelnen Niveauflächen in Bezug auf die Erdachse orientirt, wie nicht minder die Kräftefunction W , bis auf eine, vorerst noch unbestimmt bleibende Constante ermittelt. Diese erhalten wir aber sofort, wenn sich die verschiedenen Beobachtungen über die ganze Erdoberfläche erstrecken.

Ueberblicken wir nun all' das Gesagte, so werden wir zu der Ueberzeugung gelangen, dass wir nicht erwarten dürfen, es könnte uns je einmal gelingen, für die mathematische Oberfläche der Erde einen einfachen analytischen Ausdruck zu finden; vielmehr wird das Endergebniss der geodätischen Operationen bestehen:

1. in einem Verzeichnisse der Coordinaten möglichst vieler Punkte des Geoids nebst dem zugehörigen Werthe der Kräftefunction W und der Intensität der Schwere g und
2. eventuell in einer graphischen Darstellung.

Auf diese Weise erhalten wir gleichsam ein Netz von Geoidpunkten erster Ordnung, welches als Grundlage dienen wird

für die Einschaltung beliebig vieler neuer Punkte, die wir mittels trigonometrischer Messungen und geometrischer Nivellements festzulegen haben.

Es könnte jetzt nur noch die Frage entstehen, ob und inwiefern die bisherigen Methoden der Messung eine Modification zu erfahren haben. Strenge genommen ist an dem bisherigen Vorgange keinerlei Aenderung nöthig; man wird nur der Messung der Zenithdistanzen, welche man in Folge der Schwierigkeit, genaue Resultate zu erhalten, durch das Präcisions-nivellement ersetzen zu sollen glaubte, wieder volle Aufmerksamkeit zuwenden und demgemäss auch wieder das Studium der Gesetze der irdischen Strahlenbrechung mit allem Ernste pflegen müssen. Eine Erweiterung wird das bisher aufgestellte Programm insofern erfahren, als man zu dem Zwecke, eine grössere Anzahl von Geoidpunkten erster Ordnung zu erhalten, jede Station als Hauptdreieckspunkt wird gelten lassen, d. h. auf jeder Station alle fünf Classen von Beobachtungsdaten wird erheben müssen. Freilich wird hierdurch der Aufwand an Zeit und Mühe bedeutend erhöht; indessen gibt es zur Erreichung des gesteckten Zieles kein anderes Mittel als nur die Vermehrung vollständig bestimmter Punkte. Die Verzichtleistung auf eine oder die andere Classe der Beobachtungen wäre dann gleichbedeutend mit der Verzichtleistung auf die allgemeine Lösung der Frage nach der Figur der Erde.

* * *

So wäre ich denn am Schlusse meiner Ausführungen angelangt, für welche ich mich Ihre freundliche Aufmerksamkeit erbeten. Der an mich ergangenen, mich sehr ehrenden Einladung Folge leistend, war ich bemüht, in diesem hochgeschätzten Kreise einen Gegenstand zu besprechen, der unser Interesse schon desshalb in so bedeutendem Masse zu fesseln vermag, weil er sein Alter bis in die Uranfänge geschichtlicher Forschung zurückdatirt, der aber auch heute unsere Aufmerksamkeit in solcher Weise in Anspruch nimmt, dass er zur Gründung eines internationalen Unternehmens Veranlassung gab, das zu fördern, die besten Männer unserer Tage sich bemühen.

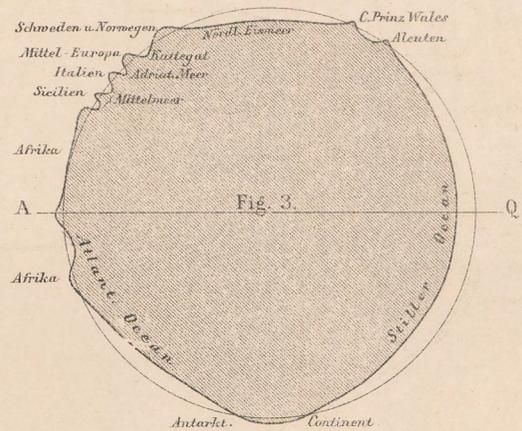
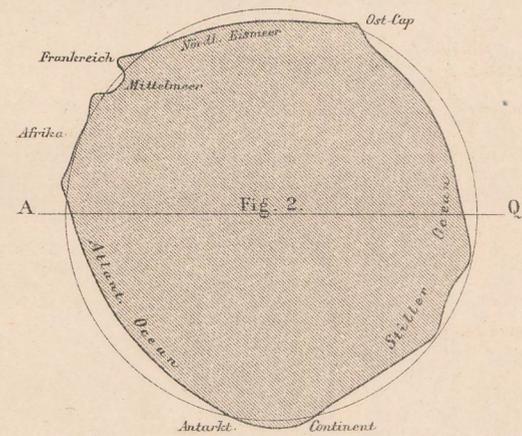
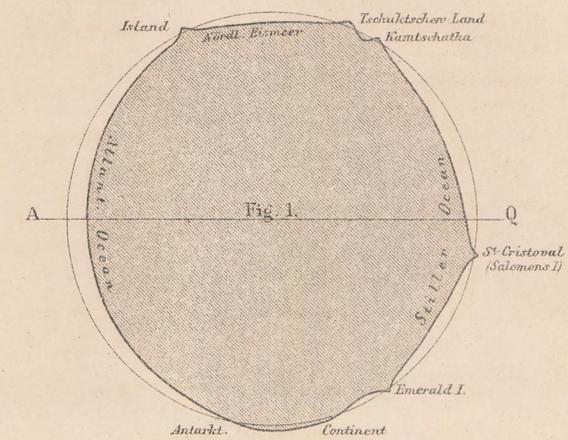
Keinerlei materielle Erfolge harren ihrer; auch keines lärmenden, auf die Schaulust der Menge berechneten öffentlichen Empfanges dürfen sie nach der Rückkehr von ihrer Wanderung »um die Erde« gewärtigen. Den Lohn redlichen Wollens und Strebens können sie nur in dem Bewusstsein treu erfüllter Pflicht empfinden; denn sie müssen sogar darauf verzichten, die Früchte ihrer Bemühungen selbst zu ernten, weil diese voraussichtlich unserer Generation überhaupt vorenthalten bleiben dürften.

Darin charakterisirt sich eben die echte wissenschaftliche Forschung, dass sie selbstlos und unbeirrt von der Tagesströmung den einmal als richtig erkannten Weg wandelt, um nachfolgenden Generationen das Terrain zu ebnen und vorzubereiten, auf dass diese all' jener Ehren theilhaftig werden, an welchen alle früheren in gleicher Weise participiren.

Gerade unserer Generation ist es vergönnt, Zeuge zu sein der gewaltigen Fortschritte auf allen Gebieten naturwissenschaftlicher Forschung; zum grossen Theile ist es aber auch ihr eigenstes Verdienst, die Resultate dieser Forschung weiten Kreisen, besonders aber den praktischen Bedürfnissen dienstbar gemacht zu haben. In ungeahnter Weise mehren sich die einzelnen Errungenschaften, so dass es immer schwieriger wird, auch nur ein beschränktes Feld geistiger Thätigkeit vollkommen zu beherrschen und die sich immer mehr erweiternden Fragen einer gedeihlichen Lösung zuzuführen.

Auch heute haben wir die Nothwendigkeit gegenseitiger Unterstützung erfahren, und wir haben erkannt, dass sich Geodäsie, Physik und Geologie willfährig ergänzen müssen; da dies aber nur dann möglich ist, wenn die Vertreter dieser einzelnen Wissenszweige die Bedeutung der einschlägigen Fragen richtig erfassen, so folgt hieraus unmittelbar, wie nothwendig es erscheint, schon von der Schule an das Verständniss für das grosse Gebiet der Naturwissenschaften zu wecken, um so späterhin, in welchem speciellen Berufszweige man auch thätig sein mag, den Ueberblick über das grosse Ganze nicht zu verlieren. Und so schliesse ich denn mit dem Wunsche, dass die Erkenntniss von der Nothwendigkeit naturwissenschaftlicher Bildung sich noch mehr festigen und gleichen Schritt halten möge mit dem auf diesem Gebiete zu verzeichnenden Fortschritt.

Taf. 1.



Taf. 2.

