

Der hydrodynamische Spannungsverlauf in zwei homogenen Tonschichten

Von

Dr. Bruno F. J. Kunz

(Mit 10 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Mai 1942)

Zusammenfassung.

Für den eindimensionalen Fall des Problems der hydrodynamischen Spannungserscheinungen in belasteten Tonschichten wird unter der Voraussetzung, daß die Eigenschaften des Tones eine Funktion der Tiefe sind, die Differentialgleichung abgeleitet. Das Randwertproblem ist ein Sturm-Liouville'sches. Die Eigenfunktionen werden in Form einer Reihe angesetzt, deren Summierung für den Fall von zwei homogenen Tonschichten durchgeführt wird. In diesem Fall ergibt sich, daß bei einseitiger Entwässerung nach oben der zeitliche Verlauf der Setzung wesentlich nur von den Eigenschaften der oberen Schichte abhängig ist. Die gewonnenen Resultate gelten auch für die Wärmeleitung und die elektrischen Ausgleichsvorgänge im induktionsfreien Kabel.

Wenn man einen Ton belastet, so wird der Belastungsdruck zuerst zur Gänze von dem im Ton enthaltenen Porenwasser aufgenommen und pflanzt sich als hydrostatischer Druck durch die ganze Tonschichte fort. Hat das Wasser an der Oberfläche des Tones die Möglichkeit, aus dem Ton auszufließen (z. B. wenn die Tonschichte in Sand eingebettet ist), so setzt im Tone eine Porenwasserströmung ein. Ein Teil des Wassers wird allmählich ausgepreßt, bis schließlich der Belastungsdruck von der festen Substanz des Tones als „Korn-zu-Korn“-Druck aufgenommen wird. Die Folge des Wasserverlustes ist eine Volumverminderung, die sich bei Bauwerken, unter denen sich Tonschichten befinden, als Setzung bemerkbar macht. Es handelt sich dabei um einen sehr langsamen Vorgang, so daß Bauschäden auch nach Jahren noch auftreten können.

Der zeitliche Verlauf der Setzung hängt von dem Verlauf der Wasserauspressung und diese von der Druckänderung, mit anderen Worten, von dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen in der Tonschichte ab. Zwischen dem Druck-

höhengefälle und der Porenwassermenge, die durch die Schichte strömt, besteht Proportionalität — Gesetz von Darcy — wie von Terzaghi gezeigt hat.¹

Die mathematische Behandlung des Problems führt auf die bekannte Wärmeleitungsgleichung. Eine ausführliche Darstellung dieser Tonmechanik findet man in dem Lehrbuch von Terzaghi und Fröhlich,² wo auch die Voraussetzungen und notwendigen Vernachlässigungen, die zu der Differentialgleichung v. Terzaghis führen, ausführlich dargestellt sind. Daß die Vereinfachungen, auf denen der v. Terzaghi'sche Ansatz fußt, gestattet sind, wurde von L. Flamm nachgewiesen.³ Während bis jetzt das Problem unter der Annahme behandelt wurde, daß in dem Gesamtbereich der betrachteten Tonschichte der Ton überall die gleichen Eigenschaften besitzt, wird im folgenden diese Voraussetzung nicht gemacht. Die physikalischen Eigenschaften des Tones werden als mit der Tiefe veränderlich angenommen.

Die Differentialgleichung der Porenwasserströmung in einer unhomogenen Tonschichte.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des linearen Problems. Die Porenwasserströmung erfolge nur in der z -Richtung. Wir betrachten in der Schichte eine waagrechte dünne Scheibe mit dem Querschnitt Eins und der Höhe dz . Das Volumen der Scheibe ist somit ebenfalls dz . Der spezifische Porenwasserverlust $v \left[\frac{cm^2}{g} \right]$ ist der Porenwasserverlust pro Volumseinheit bei einer Druckänderung um Eins. Infolge der kleinen Spannungsdifferenz ζ ist daher der Porenwasserverlust der Scheibe $v\zeta dz$.

Die Ortskoordinate z wird im folgenden vertikal nach abwärts positiv gewählt. Es bedeutet $z = 0$ immer die obere Begrenzungsfläche (der oberen Tonschichte, wenn es mehrere sind). Die obere Begrenzungsfläche der betrachteten Scheibe habe die Koordinate z , die untere $z + dz$. In der kurzen Zeit dt fließe durch den oberen Quer-

¹ K. v. Terzaghi, Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Mathem.-naturw. Kl., Abt. IIa, Bd. 132, Heft 3 und 4, S. 125 bis 138. 1923.

² K. v. Terzaghi, O. K. Fröhlich, Theorie der Setzung von Tonschichten, Leipzig und Wien 1936.

³ L. Flamm, Beitrag zur Theorie der Setzung von Tonschichten. Wasserkraft und Wasserwirtschaft 33 (1938), Heft 9/10, S. 97.

schnitt der Scheibe die Porenwassermenge q [cm], durch den unteren Querschnitt die Wassermenge $q+dq$. Es ist $dq = v\zeta dz$.

Den hydrostatischen Druck bezeichnen wir mit ω $\left[\frac{g}{cm^2}\right]$.

Die hydrostatische Druckverminderung in der Zeit dt ist

$$\zeta = \frac{\partial \omega}{\partial t} dt$$

und daher

$$dq = v \frac{\partial \omega}{\partial t} dt dz.$$

Nach dem Gesetz von Darcy ist

$$q = \frac{k}{\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial z} dt \quad (1)$$

k ist die Durchlässigkeitsziffer $\left[\frac{cm}{sec}\right]$ und γ das Raumgewicht der Porenflüssigkeit $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$. Der Porenwasserverlust in unserer Scheibe ist also auch

$$dq = \frac{\partial q}{\partial z} dz = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dt dz.$$

Diesen Ausdruck setzen wir gleich dem oben gewonnenen:

$$v \frac{\partial \omega}{\partial t} dt dz = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dt dz.$$

Nach Kürzung der Faktoren dt und dz erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung

$$\gamma v \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \omega}{\partial z} \right). \quad (2)$$

In dieser Gleichung sind die Größen v und k von z abhängig. Im Falle die beiden konstant sind, können wir diese durch den Verfestigungsbeiwert c $\left[\frac{cm^2}{sec}\right]$ ausdrücken,

$$c = \frac{k}{\gamma v} \quad (3)$$

und erhalten die Gleichung von Terzaghi

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = c \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}, \quad (4)$$

die ein Spezialfall der Gleichung (2) ist.

Lösung des Randwertproblems.

Die Mächtigkeit der betrachteten Tonschichte ist h . Wir führen eine neue Variable

$$x = \frac{\pi}{2h} z \quad (5)$$

ein, so daß für $z = h$, $x = \frac{\pi}{2}$ wird. Außerdem definieren wir eine Funktion

$$\rho(x) = \frac{4h^2\gamma}{\pi^2} v(x). \quad (6)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen geht die Differentialgleichung (2) über in die Gleichung:

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Die Bernouilli'sche Lösung dieser Gleichung wird in der üblichen Form eines Produktes zweier Funktionen $T(t)$ und $X(x)$ eingeführt.

$$\omega(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (8)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Differentialgleichung (7) erhalten wir eine Gleichung, deren eine Seite nur von x , die andere Seite nur von t abhängig ist und die wir daher gleich einer Konstanten $-\lambda$ setzen können. Wir erhalten also zwei Differentialgleichungen:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda T = 0 \quad (9)$$

und

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dX}{dx} \right) + \lambda \rho X = 0. \quad (10)$$

Die Lösung der Gleichung (9) ist

$$T = a e^{-\lambda t}. \quad (11)$$

Die Lösung der Gleichung (10) muß die Randbedingungen erfüllen. Im Falle die Entwässerung der Schichte nur nach oben erfolgt, sind diese:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, \\ \frac{dX}{dx} \left(\frac{\pi}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Durch diese (sowie einige andere hier nicht behandelte Randbedingungen) und durch die Differentialgleichung (10) wird ein sogenanntes Sturm-Liouville'sches Eigenwertproblem definiert.¹ Die Eigenwerte λ sind positiv. Wir setzen daher

$$\lambda = \nu^2. \tag{13}$$

Bei gegebenen Randbedingungen bilden die Eigenwerte nach der Größe geordnet eine abzählbare Reihe

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

und das zugehörige System der Eigenfunktionen

$$X_1, X_2, X_3, \dots$$

liefert ein vollständiges orthogonales Funktionssystem. Es gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho X_n X_m dx = 0 \quad \text{für } n \neq m. \tag{14}$$

Jede den Randbedingungen des Eigenwertproblems genügende stetige Funktion $F(x)$ mit stückweise stetigen ersten und zweiten Ableitungen ist in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m X_m$$

nach den Eigenfunktionen entwickelbar.

Man kann daher die Lösung $\omega(x, t)$ an den vorgegebenen Anfangszustand $F(x)$ anpassen.

¹ R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik. Berlin 1931, Bd. 1, S. 250 ff.

Man erhält

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) a_m e^{-v_m^2 t}. \quad (15)$$

Die Konstanten a_m sind aus

$$a_m = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho F X_m dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho X_m^2 dx} \quad (16)$$

zu bestimmen.

Um die Eigenfunktionen zu bestimmen, formen wir die Gleichung (10) durch Einführung einer neuen unabhängigen Variablen

$$\xi = \int \frac{dx}{k(x)} \quad (17)$$

um und erhalten die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \lambda \sigma u = 0. \quad (18)$$

In dieser Gleichung ist σ eine Funktion von ξ . Die u sind die von ξ abhängigen Eigenfunktionen. Es ist

$$k(x) \cdot \rho(x) = \sigma(\xi), \quad (19)$$

$$X(x) = u(\xi). \quad (20)$$

Die Lösung der Gleichung (18) setzen wir in Gestalt einer Reihe¹ an:

$$u = s_0 - s_1 + s_2 - s_3 + \dots \quad (21)$$

Daraus folgt die Bedingung, daß

$$\frac{d^2 s_0}{d\xi^2} - \frac{d^2 s_1}{d\xi^2} + \frac{d^2 s_2}{d\xi^2} - \dots = -\lambda \sigma s_0 + \lambda \sigma s_1 - \lambda \sigma s_2 + \dots$$

sein muß. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn das erste Glied der linken Seite gleich Null, das zweite Glied der linken Seite gleich dem ersten Glied der rechten Seite, das dritte Glied links gleich

¹ Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen, Braunschweig 1912.

dem zweiten Gliede rechts ist und so fort. Wir erhalten also ein System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s_0}{d\xi^2} &= 0, \\ \frac{d^2 s_1}{d\xi^2} &= \lambda \sigma s_0 \\ &\dots \\ \frac{d^2 s_n}{d\xi^2} &= \lambda \sigma s_{n-1} \\ &\dots \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß nach durchgeführter Integration in diesem Gleichungssystem nur zwei willkürliche Konstanten A und B auftreten können, so daß die Glieder der Reihe (21) folgende Gestalt haben

$$\begin{aligned} s_0 &= A\xi + B, \\ s_1 &= \lambda \iint \sigma s_0 (d\xi)^2, \\ s_2 &= \lambda \iint \sigma s_1 (d\xi)^2, \\ &\dots \\ s_n &= \lambda \iint \sigma s_{n-1} (d\xi)^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Es ist jedes folgende Glied der Reihe aus dem vorhergehenden zu berechnen. Diese so gewonnene Darstellung der Eigenfunktionen leistet gute Dienste, wenn bei bekanntem σ die Integration in geschlossener Form durchgeführt werden kann und die Summierung der Reihe gelingt.

Zwei homogene Tonschichten.

Wir betrachten den Fall von zwei homogenen Tonschichten, die übereinanderlagern und nur nach oben entwässert werden. In jeder der beiden Schichten sind k und v konstant. Die beiden Konstanten haben aber in jeder der beiden Schichten einen anderen Wert, so daß jede Schichte allein betrachtet zwar homogen ist, die beiden Schichten gemeinsam als Ganzes betrachtet aber als eine unhomogene Schichte anzusehen sind. Wenden wir in diesem Fall die Formeln (22) an, so können die Integrale

berechnet werden, weil σ konstant ist und vor das Integralzeichen tritt. Es ist nur zu beachten, daß σ in jeder Schichte einen anderen Wert hat.

Wir versehen alle Konstanten, die sich auf die obere Schichte I beziehen, mit dem Index „I“, dementsprechend die Konstanten der Schichte II mit dem Index „II“. Da die Eigenfunktionen X und u bereits einen Index, nämlich den der zugehörigen Eigenwerte tragen, versehen wir diese mit dem römischen Index „I“ und „II“, je nachdem, für welche Schichte diese gelten.

Die Mächtigkeit der oberen Schichte ist h_1 , die der unteren h_2 ; die Mächtigkeit der beiden Schichten zusammen als unhomogene Schichte betrachtet ist h .

$$\text{Es ist} \quad h_1 + h_2 = h. \quad (23)$$

Wir setzen in Formel (22)

$$\sigma = \sigma_1 = \text{const.}$$

und erhalten mit Berücksichtigung von (24)

$$u_I = \frac{A_1}{\sqrt{\lambda \sigma_1}} \left\{ \xi \sqrt{\lambda \sigma_1} - \frac{(\xi \sqrt{\lambda \sigma_1})^3}{3!} + \frac{(\xi \sqrt{\lambda \sigma_1})^5}{5!} - \dots \right\} + B_1 \left\{ 1 - \frac{\xi (\sqrt{\lambda \sigma_1})^2}{2!} + \frac{(\xi \sqrt{\lambda \sigma_1})^4}{4!} - \dots \right\}$$

Die Klammerausdrücke sind die trigonometrischen Reihen und es ist daher

$$u_I = \frac{A_1}{\sqrt{\lambda \sigma_1}} \sin(\xi \sqrt{\lambda \sigma_1}) + B_1 \cos(\xi \sqrt{\lambda \sigma_1}).$$

In der gleichen Weise erhalten wir für die Schichte II

$$u_{II} = \frac{A_2}{\sqrt{\lambda \sigma_2}} \sin(\xi \sqrt{\lambda \sigma_2}) + B_2 \cos(\xi \sqrt{\lambda \sigma_2}).$$

Nach Formel (17) erhalten wir für die obere Schichte

$$\xi = \frac{x}{k_1}$$

und entsprechend von (6) und (19)

$$\sigma_1 = k_1 \rho_1 = \frac{4 h^2 \gamma k_1 v_1}{\pi^2}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen und mit Berücksichtigung von (3), (13) und (20) erhalten die Eigenfunktionen im Bereich der Schichte I folgende Gestalt:

$$X_I = \frac{A_1 \pi \sqrt{c_1}}{2h k_1 \nu} \sin\left(\frac{2h\nu}{\pi \sqrt{c_1}} x\right) + B_1 \cos\left(\frac{2h\nu}{\pi \sqrt{c_1}} x\right).$$

Analog für die untere Schichte:

$$X_{II} = \frac{A_2 \pi \sqrt{c_2}}{2h k_2 \nu} \sin\left(\frac{2h\nu}{\pi \sqrt{c_2}} x\right) + B_2 \cos\left(\frac{2h\nu}{\pi \sqrt{c_2}} x\right).$$

Die Randbedingungen (12) lauten im vorliegenden Falle

$$X_I(0) = 0,$$

$$\frac{dX_{II}}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Die erste der beiden Bedingungen ist erfüllt für

$$B_1 = 0.$$

Um die zweite Bedingung zu erfüllen, formen wir den Ausdruck für X_{II} um. Wir führen zwei neue willkürliche Konstanten a_2 und α_2 ein nach folgender Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{A_2 \pi}{2h\nu} &= a_2 \sin\left(\frac{2h\nu}{\pi \sqrt{c_2}} \alpha_2\right) \\ B_2 &= a_2 \frac{\sqrt{c_2}}{k_2} \cos\left(\frac{2h\nu}{\pi \sqrt{c_2}} \alpha_2\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Dadurch erhält X_{II} die Gestalt

$$X_{II} = a_2 \frac{\sqrt{c_2}}{k_2} \cos\left[\frac{2h\nu}{\pi \sqrt{c_2}} (\alpha_2 - x)\right]$$

und die zweite Randbedingung ist erfüllt, wenn

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Auch A_1 ersetzen wir durch eine neue Konstante:

$$a_1 = \frac{A_1 \pi}{2h\nu}.$$

Auf Grund der zuletzt gewonnenen Resultate lauten nun die Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} X_{\text{I}} &= a_1 \frac{\sqrt{c_1}}{k_1} \sin \left(\frac{2h\nu}{\pi\sqrt{c_1}} x \right) \\ X_{\text{II}} &= a_2 \frac{\sqrt{c_2}}{k_2} \cos \left[\frac{2h\nu}{\pi\sqrt{c_2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Sie werden übersichtlicher, wenn wir nach (5) x durch z ersetzen.

$$\begin{aligned} X_{\text{I}} &= a_1 \frac{\sqrt{c_1}}{k_1} \sin \left(\frac{\nu}{\sqrt{c_1}} z \right) \\ X_{\text{II}} &= a_2 \frac{\sqrt{c_2}}{k_2} \cos \left[\frac{\nu}{\sqrt{c_2}} (h-z) \right]. \end{aligned}$$

Um die Eigenwerte $\lambda = \nu^2$ zu bestimmen, müssen wir noch die Vorgänge in der Grenzfläche zwischen den beiden Schichten betrachten. Der ganze Vorgang ist, abgesehen vom Zeitpunkt $t=0$, notwendig stetig. Es darf also an der Schichtgrenze weder eine Unstetigkeit des hydrostatischen Druckes noch eine Unstetigkeit des Druckhöhengefälles auftreten. Oder mit anderen Worten, der hydrostatische Druck ist in beiden Schichten an der Grenze gleich, ebenso die zu- und abströmende Porenwassermenge, die nach Darcy dem Druckhöhengefälle proportional ist.

Die Grenzbedingungen lauten demnach

$$\omega_{\text{I}}(h_1, t) = \omega_{\text{II}}(h_1, t)$$

und

$$k_1 \left(\frac{\partial \omega_{\text{I}}}{\partial z} \right)_{z=h_1} = k_2 \left(\frac{\partial \omega_{\text{II}}}{\partial z} \right)_{z=h_1}.$$

Betrachten wir nach (8) nur die Eigenfunktionen, so lauten die Grenzbedingungen:

$$X_{\text{I}}(h_1) = X_{\text{II}}(h_1), \quad (26)$$

$$k_1 \left(\frac{dX_{\text{I}}}{dz} \right)_{z=h_1} = k_2 \left(\frac{dX_{\text{II}}}{dz} \right)_{z=h_1}. \quad (27)$$

Wir fassen jetzt, ohne Unklarheiten befürchten zu müssen, X als Funktion von z , statt wie bisher von x auf.

Aus (26) folgt

$$a_1 \frac{\sqrt{c_1}}{k_1} \sin\left(\frac{\nu h_1}{\sqrt{c_1}}\right) = a_2 \frac{\sqrt{c_2}}{k_2} \cos\left(\frac{\nu h_2}{\sqrt{c_2}}\right) = a. \quad (28)$$

Aus (27) folgt

$$a_1 \cos\left(\frac{\nu h_1}{\sqrt{c_1}}\right) = a_2 \sin\left(\frac{\nu h_2}{\sqrt{c_2}}\right). \quad (29)$$

Durch Division der ersten Gleichung durch die zweite erhalten wir eine transzendente Gleichung für ν :

$$\frac{\sqrt{c_1}}{k_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\nu h_1}{\sqrt{c_1}}\right) = \frac{\sqrt{c_2}}{k_2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\nu h_2}{\sqrt{c_2}}\right). \quad (30)$$

Außerdem existiert eine nicht triviale Lösung der beiden Gleichungen für a_1 und a_2 . Wir führen statt derselben eine neue Konstante a ein, wie in Gleichung (28) bereits angedeutet. Die Eigenfunktionen lauten dann

$$X_I = \frac{a}{\sin\left(\frac{\nu h_1}{\sqrt{c_1}}\right)} \sin\left(\frac{\nu}{\sqrt{c_1}} z\right)$$

$$X_{II} = \frac{a}{\cos\left(\frac{\nu h_2}{\sqrt{c_2}}\right)} \cos\left[\frac{\nu}{\sqrt{c_2}} (h-z)\right].$$

Die Lösungen der Gleichung (30), die wir in folgender Form schreiben:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\nu_m h_1}{\sqrt{c_1}}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\nu_m h_2}{\sqrt{c_2}}\right) = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \quad (31)$$

kann man auf graphischem Wege bestimmen, indem man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die beiden Kurven

$$y = \operatorname{tg}\left(x \frac{h_1}{\sqrt{c_1}}\right) \quad (x = \nu_m)$$

und

$$y = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \operatorname{ctg}\left(x \frac{h_2}{\sqrt{c_2}}\right)$$

konstruiert. Die Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven sind die Lösungen der Gleichung. Nun schneiden sich aber die

ins Unendliche verlaufenden Zweige des Tangens und Kontangens in sehr spitzem Winkel, so daß die Bestimmung der Schnittpunkte sehr unsicher wird. Es ist daher von Vorteil, der Gleichung eine andere Gestalt zu geben. Man erhält

$$\cos \left[\nu_m \left(\frac{h_1}{\sqrt{c_1}} + \frac{h_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right] = K \cos \left[\nu_m \left(\frac{h_1}{\sqrt{c_1}} - \frac{h_2}{\sqrt{c_2}} \right) \right]. \quad (32)$$

Hierin bedeutet

$$K = \frac{1 - \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}}. \quad (33)$$

Die Gleichung (32) ist zur graphischen Lösung besser geeignet, da sich bei richtiger Wahl des Maßstabes die beiden Kurven in fast rechten Winkel schneiden und die Koordinaten der Schnittpunkte gut abgelesen werden können, wie wir an einem Zahlenbeispiel noch sehen werden.

Die vollständigen Lösungen der Differentialgleichung des Problems zweier Tonschichten bei durchlässiger oberer und undurchlässiger unterer Begrenzungsfläche sind

$$\omega_{\text{I}}(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\nu_m^2 t} a_m \frac{\sin \left(\frac{\nu_m z}{\sqrt{c_1}} \right)}{\sin \left(\frac{\nu_m h_1}{\sqrt{c_1}} \right)} \quad (34)$$

$$\omega_{\text{II}}(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\nu_m^2 t} a_m \frac{\cos \left[\frac{\nu_m (h - z)}{\sqrt{c_2}} \right]}{\cos \left(\frac{\nu_m h_2}{\sqrt{c_2}} \right)}$$

wobei die ν_m aus (31), bzw. aus (32) zu bestimmen sind.

In gleicher Weise werden die Lösungen auch für andere Randbedingungen gefunden. Für den Fall z. B., daß sowohl die obere als auch die untere Begrenzungsfläche der Doppeltenschicht wasserdurchlässig ist, lauten die Randbedingungen

$$\omega_{\text{I}}(0, t) = \omega_{\text{II}} \left(\frac{\pi}{2}, t \right) = 0. \quad (35)$$

In diesem Fall sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \omega_{\text{I}} &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-v_m^2 t} a_m \frac{\sin\left(\frac{v_m z}{\sqrt{c_1}}\right)}{\sin\left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}}\right)} \\ \omega_{\text{II}} &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-v_m^2 t} a_m \frac{\sin\left[\frac{v_m (h-z)}{\sqrt{c_2}}\right]}{\sin\left(\frac{v_m h_2}{\sqrt{c_2}}\right)} \end{aligned} \quad (36)$$

wobei die v_m jetzt zu bestimmen sind aus

$$\operatorname{tg}\left(\frac{v h_1}{\sqrt{c_1}}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{v h_2}{\sqrt{c_2}}\right) = -\frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \quad (37)$$

oder aus

$$\sin\left[v_m\left(\frac{h_1}{\sqrt{c_1}} + \frac{h_2}{\sqrt{c_2}}\right)\right] = K \sin\left[v_m\left(\frac{h_1}{\sqrt{c_1}} - \frac{h_2}{\sqrt{c_2}}\right)\right]. \quad (38)$$

K hat dieselbe Bedeutung, wie früher (33).

Eine einzige homogene Tonschichte.

Die für diese gültigen Formeln erhält man aus obigen, wenn man z. B.

$$v_1 = v_2 = v, \quad k_1 = k_2 = k, \quad c_1 = c_2 = c$$

setzt. Es wird dann die Konstante

$$K = 0$$

und die Gleichung (32) reduziert sich auf die einfache Gestalt

$$\cos\left[v_m \frac{h_1 + h_2}{\sqrt{c}}\right] = 0.$$

Daraus folgt

$$v_m = \frac{m\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{c}}{h} \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Man sieht leicht, daß

$$\omega_I = \omega_{II} = \sum_m e^{-m^2 \frac{c\pi^2}{4h^2} t} a_m \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2h} z\right)}{\sin\left(\frac{m\pi}{2} \frac{h_1}{h}\right)}$$

gilt. Führen wir eine neue willkürliche Konstante

$$a_m^* = \frac{a_m}{\sin\left(\frac{m\pi}{2} \frac{h_1}{h}\right)} \quad (39)$$

ein und setzen zur Abkürzung

$$\frac{c\pi^2}{4h^2} = M \quad (40)$$

so erhalten wir die von Terzaghi und Fröhlich für eine nach oben entwässerte Tonschicht abgeleitete Formel

$$\omega = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} e^{-m^2 M t} a_m^* \sin\left(m \frac{\pi z}{2h}\right). \quad (41)$$

Der Fall der rechteckigen Lastfläche.

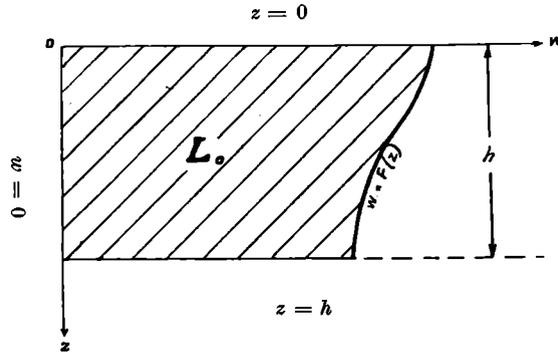
Am Beginn des betrachteten Strömungsvorganges hat der hydrostatische Druck $\omega(z, t)$ eine bestimmte Verteilung $F(z)$. Es lautet daher die Anfangsbedingung

$$\omega(z, 0) = F(z). \quad (42)$$

Nach unendlich langer Zeit ist der Druck von der festen Substanz des Tones aufgenommen, der hydrostatische Druck ist also am Ende des Verfestigungsvorganges Null:

$$\omega(z, \infty) = 0. \quad (43)$$

Trägt man die beiden Kurven, welche durch die Gleichungen (42) und (43) dargestellt werden, in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem ein, so begrenzen diese und die Abszissen $z=0$ und $z=h$ eine Fläche L_0 , für welche v. Terzaghi die Bezeichnung Lastfläche eingeführt hat.

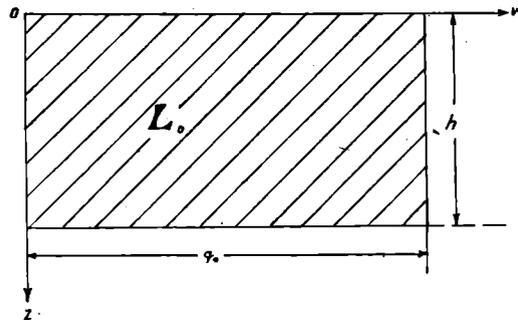


Wenn die Last zur Zeit $t = 0$ auf einmal aufgebracht wird und sich der Druck gleichmäßig durch das Porenwasser der Schicht fortpflanzt, so ist die Anfangsdruckverteilung überall gleich und der Druck unabhängig von z . Die Anfangsbedingung lautet in diesem Fall

$$F(z) = q_0 = \text{const.} \quad (44)$$

und die Lastfläche ist ein Rechteck:

$$L_0 = q_0 h$$



In diesem Falle ist die Integration in Formel (16) leicht durchzuführen. F tritt vor das Integralzeichen, ebenso ρ , wenn man die Integrale in 2 Teile zerlegt, und zwar mit den Grenzen 0 bis x_1 und x_1 bis $\frac{\pi}{2}$.

$$x_1 = \frac{\pi h_1}{2h}$$

ist die Abszisse der Trennungsfäche der beiden Schichten. Wir erhalten

$$a_m = q_0 \frac{\rho_1 \int_0^{x_1} X_{I_m} dx + \rho_2 \int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} X_{II_m} dx}{\rho_1 \int_0^{x_1} X_{I_m}^2 dx + \rho_2 \int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} X_{II_m}^2 dx}.$$

Die Berechnung ergibt

$$a_m = \frac{2q_0 \sqrt{c_1} \sin\left(\frac{h_1 v_m}{\sqrt{c_1}}\right)}{1 + \frac{h_2}{h_1} \left[\frac{k_1}{k_2} + \left(\frac{v_2}{v_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \sin^2\left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}}\right) \right]}. \quad (45)$$

An zwei Zahlenbeispielen wollen wir sehen, wie sich der Verlauf der hydrodynamischen Drucke unter verschiedenen Bedingungen gestaltet.

Erstes Zahlenbeispiel:

Unter wasserdurchlässigem Sande lagert eine 3 m mächtige Schichte des Tones *A*, dieser wird unterlagert von einer 2 m mächtigen Schichte des Tones *B*, der sich auf felsiger undurchlässiger Unterlage befindet. Ton *A* sei blaugrauer Tegel, Ton *B* steifer, magerer Ton, mit Eigenschaften, wie diese im Erdbaulaboratorium der Technischen Hochschule in Wien unter Leitung des Prof. O. K. Fröhlich festgestellt und von Dr. Ing. G. Heinrich¹ veröffentlicht wurden. Es ist

$$\begin{aligned} k_1 &= 7,5 \cdot 10^{-9} \frac{cm}{sec} & k_2 &= 28,3 \cdot 10^{-9} \frac{cm}{sec} \\ v_1 &= 1,41 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{g} & v_2 &= 1,17 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{g} \\ c_1 &= 5,31 \cdot 10^{-4} \frac{cm^2}{sec} & c_2 &= 24,23 \cdot 10^{-4} \frac{cm^2}{sec} \\ h_1 &= 300 \text{ cm} & h_2 &= 200 \text{ cm.} \end{aligned}$$

In diesem Falle lautet die transzendente Gleichung (32)

$$\cos(17082 \nu) = 0,278 \cos(8955 \nu) = y.$$

¹ G. Heinrich, Wissenschaftliche Grundlagen der Theorie der Setzung von Tonschichten. Wasserkraft und Wasserwirtschaft 33 (1938), S. 9.

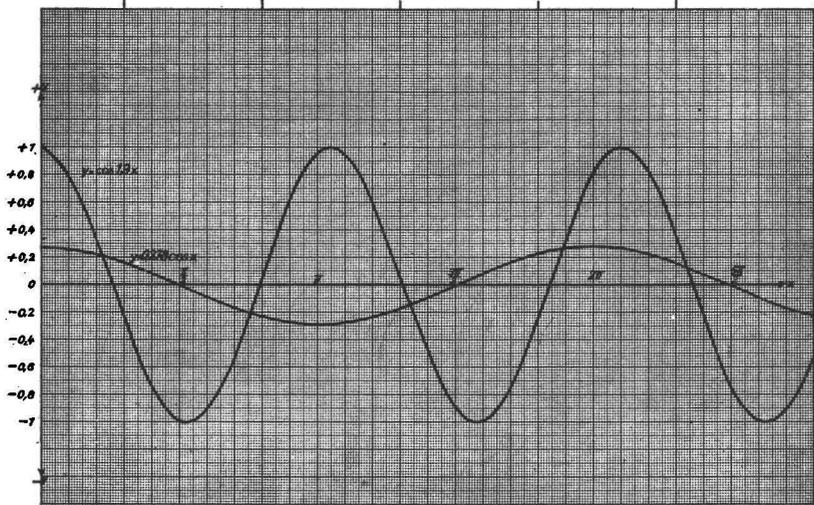


Fig. 1. Bestimmung der Eigenwerte $\nu = \frac{x}{8955}$ aus den Schnittpunkten der Kurven $y = 0,278 \cos x$ und $y = \cos(1,9 x)$, Zahlenbeispiel 1.

Wir setzen

$$8955 \nu = x,$$

$$17082 \nu = 1,9 x$$

und erhalten zwei Gleichungen

$$y = 0,278 \cos x,$$

$$y = \cos(1,9 x),$$

welche zwei Kurven darstellen, die auf Millimeterpapier so aufgetragen wurden, daß 50 mm die Einheit für y und 100 mm die Zahl π auf der X-Achse darstellen (Fig. 1). Man liest für x folgende Werte ab, woraus die ν_m berechnet wurden.

$x_1 = 0,23$	$\pi = 0,7226$	$\nu_1 = 0,807 \cdot 10^{-4}$
$x_2 = 0,755$	$\pi = 2,372$	$\nu_3 = 2,649 \cdot 10^{-4}$
$x_3 = 1,355$	$\pi = 4,194$	$\nu_5 = 4,683 \cdot 10^{-4}$
$x_4 = 1,885$	$\pi = 5,922$	$\nu_7 = 6,612 \cdot 10^{-4}$
$x_5 = 2,34$	$\pi = 7,353$	$\nu_9 = 8,209 \cdot 10^{-4}$

Nach Formel (34) und (45) wurden für den Fall der rechteckigen Lastfläche Isochronen berechnet (Fig. 2). Sie verlaufen

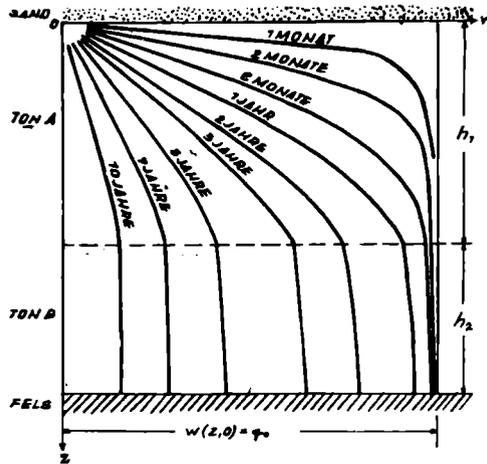


Fig. 2. Isochronenbild nach Beispiel 1.

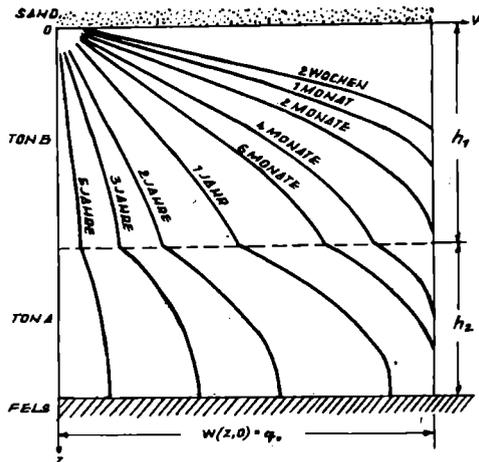


Fig. 3. Isochronenbild nach Beispiel 2.

in der unteren Schichte II nahezu geradlinig, was auf die größere Durchlässigkeit dieser Schichte zurückzuführen ist. Es ist nämlich k_2 ungefähr viermal so groß wie k_1 .

Zweites Zahlenbeispiel:

Zum Vergleich wurde die Rechnung durchgeführt für den Fall, daß die obere 3 m mächtige Schichte aus Ton *B* und die untere 2 m mächtige Schichte aus Ton *A* bestehe. Aus dem Verlauf der Isochronen (Fig. 3) ersieht man, daß in diesem Fall der Vorgang

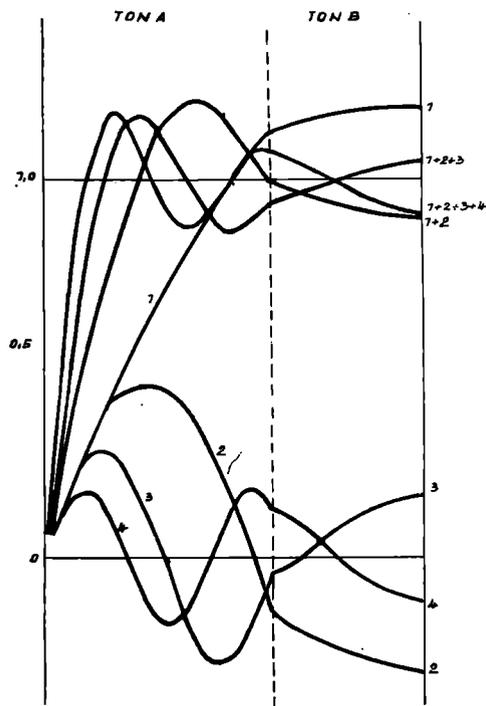


Fig. 4. Überlagerung der Sinuslinien entsprechend Beispiel 1.

schneller abläuft. Besonders gleich nach Aufbringung der Last erfolgt die Wasserauspressung viel schneller. Die Verfestigung der Tonschichten ist nach 5 Jahren weiter fortgeschritten als im ersten Beispiel nach 10 Jahren.

Die höheren Glieder der Summe in Formel (34) konvergieren mit wachsendem t sehr schnell gegen Null. Das bedeutet, daß die Einfluß der Anfangsbedingungen nach kurzer Zeit verschwindet. Obwohl in Wirklichkeit die Lastfläche von der rechteckigen Gestalt

mehr oder weniger abweicht, so ist der Fehler durch diese Annahme gering. Für $t = 0$ sind in Fig. 4 und Fig. 5 die ersten 4 Glieder der Reihe und deren Teilsummen für beide Zahlenbeispiele dargestellt.

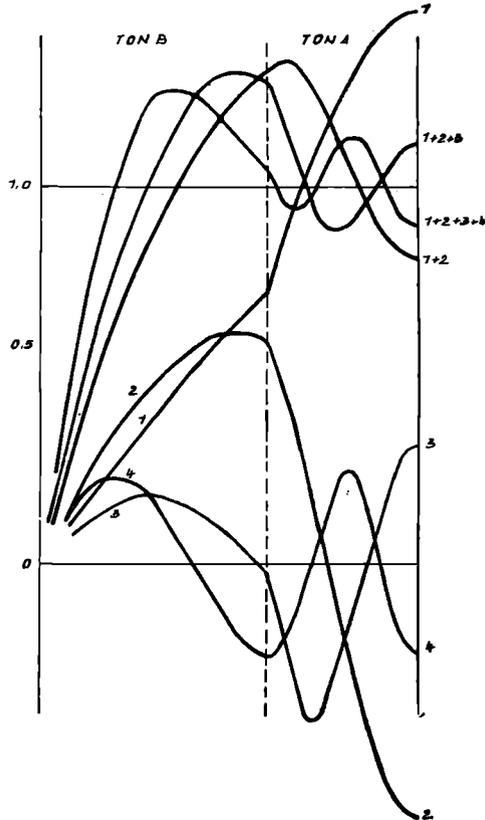


Fig. 5. Überlagerung der Sinuslinien entsprechend Beispiel 2.

Die Setzung von Tonschichten.

Die Setzung einer Tonschichte ist die Folge des Verlustes von Porenwasser. Die Volumenverminderung der Tonschichte ist mit der Volummenge des ausgepreßten Porenwassers identisch. Es bedeutet bei der linearen Porenwasserströmung der spezifische Porenwasserverlust v die Höhe jener Wassersäule, welche durch

eine Spannungserhöhung „Eins“ aus einem Bodenprisma beliebigen Querschnitts und der Länge „Eins“ in der Strömungsrichtung ausgepreßt wird. Aus einem Prisma mit der Länge dz wird also bei einer Änderung des „Korn-zu-Korn“-Druckes um Δp die Wassermenge $dq = v \cdot \Delta p \cdot dz$ ausgepreßt. Zur Zeit t hat an der Stelle z der hydrostatische Druck von $w(z, 0)$ auf $w(z, t)$ abgenommen und um denselben Betrag der „Korn-zu-Korn“-Druck zugenommen. Es ist daher

$$\Delta p = w(z, 0) - w(z, t).$$

Für den Fall der konstanten Anfangsspannung (rechteckige Lastfläche), den wir wieder betrachten, ist nach (44)

$$w(z, 0) = q_0 = \text{const.}$$

und daher

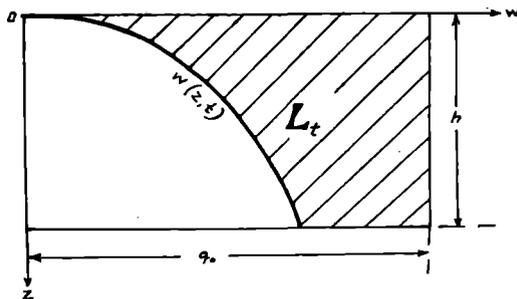
$$dq = v \{q_0 - w(z, t)\} dz.$$

Das ist die von der Stelle z stammende Porenwassermenge. Die Porenwassermenge aus der ganzen Schichte ist

$$q = v \int_0^h \{q_0 - w(z, t)\} dz,$$

diese ist mit der Setzung s_t identisch und daher ist

$$s_t = v \left\{ q_0 h - \int_0^h w(z, t) dz \right\}^1 \quad (46)$$



Den Teil der Lastfläche L_0 , der nach der Zeit t verlorengegangen ist, nennen wir

¹ Terzaghi und Fröhlich 17 (3 a).

$$L_t = q_0 h - \int_0^h \omega(z, t) dz \quad (47)$$

in Anschluß an v. Terzaghi und Fröhlich. Diese haben auch den Begriff des Verfestigungsgrades μ eingeführt, welcher durch die Gleichung

$$\mu = \frac{L_t}{L_0} = \frac{L_t}{q_0 h} \quad (48)$$

definiert ist. Es gilt dann für die Setzung die Beziehung

$$s_t = \mu v L_0^2. \quad (49)$$

Für zwei Tonschichten erhalten wir

$$\mu_1 = \frac{1}{q_0 h_1} \int_{z=0}^{h_1} \omega_{I1}(z, t) dz$$

$$\mu_2 = \frac{1}{q_0 h_2} \int_{z=h_1}^h \omega_{II}(z, t) dz.$$

Aus dieser Formel erhalten wir mit Berücksichtigung von (34) und (45) den Verfestigungsgrad μ_1 der oberen Tonschichte:

$$\mu_1 = 1 - \frac{2c_1}{h_1^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{v_m^2} \left[1 - \cos \left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}} \right) \right] e^{-v_m^2 t}}{1 + \frac{h_2}{h_1} \left[\frac{k_1}{k_2} + \left(\frac{v_2}{v_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \sin^2 \left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}} \right) \right]}.$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man für μ_2 . Die Berechnung von μ_1 und μ_2 ist aber umständlich und bringt bei zwei Tonschichten keinen Vorteil. Für eine einzige Tonschichte haben die Herren v. Terzaghi und Fröhlich den Verfestigungsgrad μ für verschiedene Randbedingungen berechnet und in Tabellen für verschiedene Zeiten festgelegt. Mit Hilfe dieser Tabellen wird die Rechnung wesentlich vereinfacht, was von großem Vorteil ist. Durch Einführung eines Zeitfaktors $\tau = \frac{ct}{h^2}$ haben die Tabellen eine einfache und übersichtliche Gestalt. Anders ist es bei zwei Tonschichten.

¹ Terzaghi und Fröhlich, 17 (6).

² Ebenda, 18 (1).

An Stelle der Abhängigkeit von drei Variablen c , h und t , die noch dazu durch τ -zusammengefaßt werden können, tritt eine Abhängigkeit von sieben Variablen c_1 , c_2 , h_1 , h_2 , v_1 , v_2 , t , welche nicht in einen einfachen Ausdruck zusammengefaßt werden können. Die Berechnung von μ_1 und μ_2 müßte in jedem einzelnen Fall neu erfolgen, woraus dann erst die Setzung s_t und ihr Verlauf zu bestimmen wäre. Es empfiehlt sich daher, eine andere Formel¹ für die Volumabnahme, d. i. die Setzung der Tonschichte, die, wie gesagt, mit der ausgepreßten Porenwassermenge identisch ist, zu verwenden. Im Falle der einseitig nach oben entwässerten Tonschichte ist die in kurzer Zeit dt durch die Fläche $z = 0$ tretende Porenwassermenge nach dem Gesetz von Darcy (4)

$$q = \frac{k}{\gamma} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z=0} dt.$$

Die Setzung zur Zeit t ist daher die in der Zeit von 0 bis t durch die obere Begrenzungsfläche ausgepreßte Porenwassermenge:

$$s_t = \frac{k}{\gamma} \int_{t=0}^t \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)_{z=0} dt. \quad (50)$$

An der Stelle $z = 0$ ist in unserem Falle

$$k = k_1 \text{ und } \omega = \omega_1.$$

Wir erhalten aus (34) und (50) mit Berücksichtigung von (3)

$$\begin{aligned} s_t &= v_1 \sqrt{c_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{-v_m^2 t} \right) \frac{a_m}{v_m \sin \left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}} \right)} = \\ &= v_1 \sqrt{c_1} \sum_m \frac{a_m}{v_m \sin \left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}} \right)} - v_1 \sqrt{c_1} \sum_m \frac{a_m e^{-v_m^2 t}}{v_m \sin \left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}} \right)}. \end{aligned}$$

Setzen wir $t = \infty$, dann erhalten wir

$$s_{\infty} = v_1 \sqrt{c_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{v_m \sin \left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}} \right)}, \quad (51)$$

¹ Terzaghi und Fröhlich, l. c., 17 (17).

so daß wir auch schreiben können

$$s_t = s_\infty - v_1 \sqrt{c_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m e^{-v_m^2 t}}{v_m \sin\left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}}\right)}. \quad (52)$$

s_∞ wird aber auf andere Art leicht gewonnen.

L_0^I sei die Lastfläche in Schichte I zur Zeit $t = 0$,

L_0^{II} sei die Lastfläche in Schichte II zur Zeit $t = 0$,

laut Formel (49) ist dann die Setzung zur Zeit t

$$s_t = \mu_1 v_1 L_0^I + \mu_2 v_2 L_0^{II}.$$

Im Falle der rechteckigen Lastfläche ist

$$L_0^I = h_1 q_0,$$

$$L_0^{II} = h_2 q_0$$

und somit

$$s_t = (\mu_1 v_1 h_1 + \mu_2 v_2 h_2) q_0.$$

Da zur Zeit $t = \infty$ die Verfestigung abgeschlossen ist, so ist

$$L_\infty = L_0$$

und demzufolge nach (48)

$$\mu_1 = \mu_2 = 1.$$

Demnach ist

$$s_\infty = (v_1 h_1 + v_2 h_2) q_0 \quad (53)$$

und leicht zu berechnen. Die Darstellung von s_∞ nach Formel (53) verkürzt die numerischen Rechnungen nach Formel (52) um ein Beträchtliches. Die Möglichkeit, s_∞ auf zweierlei Art zu berechnen, gibt uns auch ein Hilfsmittel, die Genauigkeit der Berechnung von s_t abzuschätzen. Sie erspart uns die Berechnung von Gliedern, die innerhalb der gesteckten Genauigkeit keinen Einfluß mehr haben. Die Glieder

$$\frac{a_m}{v_m \sin\left(\frac{v_m h_1}{\sqrt{c_1}}\right)}$$

müssen zwecks Auswertung der Formel (52) auf alle Fälle berechnet werden. Es erfordert dann nur mehr einen geringen Rechenaufwand, diese zu addieren und s_∞ nach Formel (51) zu berechnen.

Die Differenz zwischen den aus (51) und den aus (53) berechneten Wert ist immer größer als der Fehler, der in (52) gemacht wird, wenn in letzterer Formel die Berechnung mit dem gleichen Glied abgebrochen wird, da der Faktor $e^{-\frac{g}{m}t} \geq 1$ ist.

Drittes Zahlenbeispiel:

Im folgenden sehen wir davon ab, zwei bestimmte, in der Natur vorkommende Töne als Zahlenbeispiel heranzuziehen. Wir

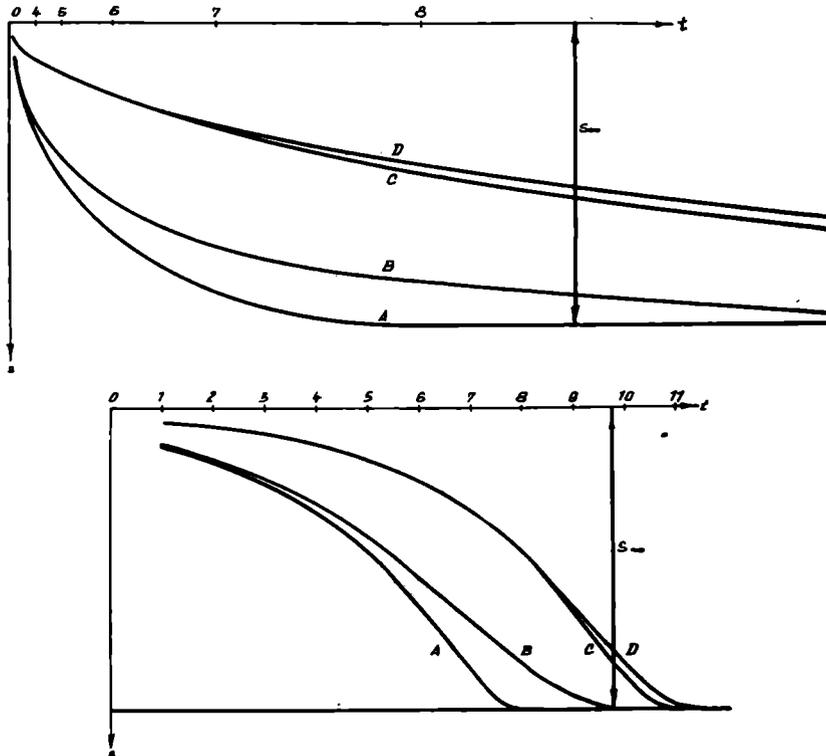


Fig. 6. Zeitsetzungskurven in den Fällen A, B, C, D. Im unteren Schaubild ist die Zeit im logarithmischen Maßstab dargestellt.

wählen vielmehr die Konstanten und Abmessungen in Hinblick auf eine möglichst einfache Rechnung und gut übersichtbare Resultate nach Willkür aus, ohne jedoch gegen die Größenordnung zu verstoßen.

Zwei Schichten gleicher Mächtigkeit lagern übereinander. Die beiden Tone haben gleiche Porosität und gleiche Verdichtungsziffern. Die Durchlässigkeit des einen Tones sei aber neunmal so groß als die des anderen. Zum Vergleich wurden 4 Fälle durchgerechnet.

Fall A:

Der gut durchlässige Ton füllt den ganzen Raum aus.

Fall B:

Der gut durchlässige Ton bildet die obere Schichte, der schlecht durchlässige Ton die untere Schichte.

Fall C:

Die beiden Tone sind vertauscht. Der gut durchlässige ist unten, der schlecht durchlässige oben.

Fall D:

Der ganze Raum wird von dem schlecht durchlässigen Ton ausgefüllt.

Es wurde angenommen:

$$h = 600 \text{ cm}$$

$$h_1 = h_2 = 300 \text{ cm}$$

$$\text{Verdichtungsziffer} \quad a = 1.7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$$

$$\text{Porenziffer} \quad \varepsilon = 0.70$$

$$\text{Spezifischer Porenwasser-} \\ \text{verlust} \quad v = 1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \left(v = \frac{a}{1 + \varepsilon} \right)$$

$$\text{Durchlässigkeitsziffer} \quad k_1 = 4 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \text{ (schlecht} \\ \text{durchlässig)}$$

$$k_2 = 36 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \text{ (gut durch-} \\ \text{lässig).}$$

Die Zahlen sind so gewählt, daß die transzendente Gleichung (32) auf eine quadratische Gleichung führt, so daß die Ungenauigkeiten, die durch die graphische Lösung auftreten können, wegfallen. Die Setzung und die Isochronen wurden für Zeitpunkte berechnet, die im Verhältnis der Potenzen von zwei zueinander stehen. Dies vereinfacht die Rechnung sehr.

Die Schaubilder der Werte der Tabelle I auf S. 28 sind in Fig. 6 dargestellt. Der Fall der Setzung im Falle A unterscheidet sich wenig von dem Fall B. Die Setzung ist im Fall C gleich der

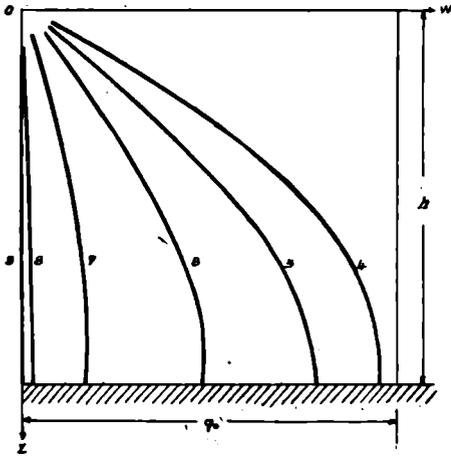


Fig. 7. Isochronenbild im Falle A.

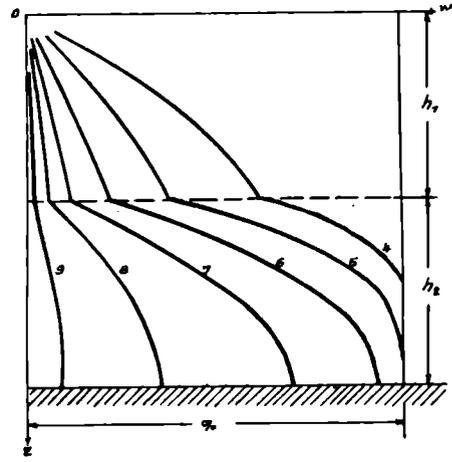


Fig. 8. Isochronenbild im Falle B.

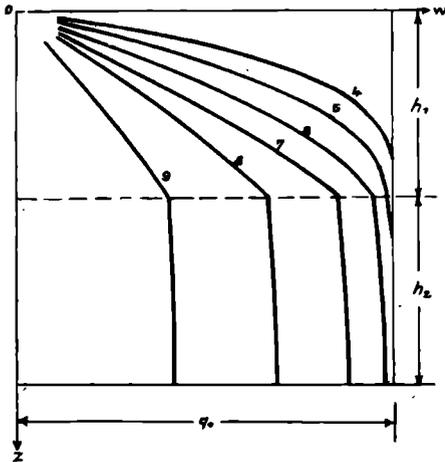


Fig. 9. Isochronenbild im Falle C.

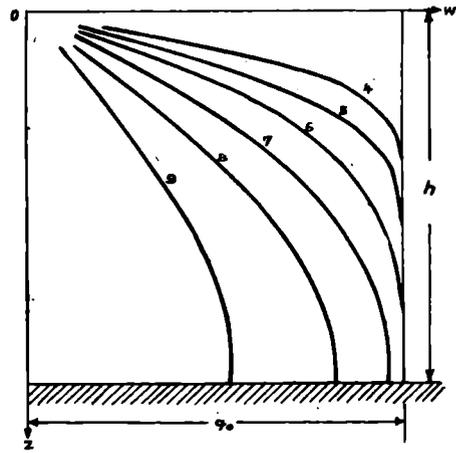


Fig. 10. Isochronenbild im Falle D.

Setzung im Falle D. Erst vom Zeitpunkt 8 ab sind merkliche Unterschiede zu sehen. Doch ist die Abweichung nirgends größer als 5%. Daraus ergeben sich folgende Tatsachen.

Der zeitliche Verlauf der Setzung wird von der oberen Schichte beherrscht. Dies ist in dem gewählten Fall plausibel; bei Entwässerung nach oben muß ja das gesamte Porenwasser der

Tabelle I.

Zeitpunkt	Zeit in Wochen	Setzung in Zentimetern			
		Fall A	Fall B	Fall C	Fall D
1	2	0·74	0·68	0·26	0·26
2	4	1·05	0·98	0·36	0·36
3	8	1·49	1·41	0·50	0·50
4	16	2·11	2·01	0·70	0·70
5	32	2·98	2·73	0·99	0·99
6	64	4·13	3·48	1·40	1·40
7	128	5·34	4·26	2·00	1·99
8	256	5·89	5·11	2·89	2·81
9	512	—	5·76	4·11	3·92
10	1024	—	5·98	5·31	5·11
11	—	—	—	5·91	5·87

unteren Schichte durch die obere hindurchfließen. Falls die obere Schichte mindest so mächtig ist, wie die darunterliegende, so kann der zeitliche Verlauf mit ziemlicher Annäherung berechnet werden, wenn man annimmt, daß die Durchlässigkeitsziffer in beiden Schichten gleich groß ist und in der oberen Schichte festgestellt wurde. Der Betrag der Gesamtsetzung ist natürlich nur vom spezifischen Porenwasserverlust abhängig, wie aus (55) ersichtlich ist.

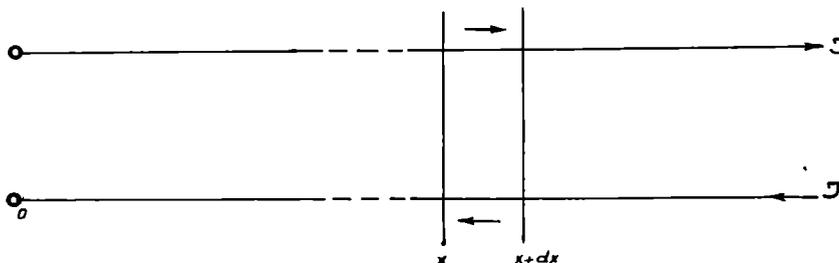
In der Fig. 7—10 sind für die Zeitpunkte 5—10 die Isochronen dargestellt. Man sieht auch hier, daß der Fall B durch A und der Fall C durch den Fall D approximiert wird. Auch die bessere Übereinstimmung von C und D, wie aus der Zeitsetzungskurve (Fig. 6) zu erwarten war, ist in dem Verlauf der Isochronen zu erkennen.

Analogien zwischen der Theorie der Wärmeleitung, der Hydraulik der Tone und der Stromaufnahme des induktionsfreien Kabels.

Die Differentialgleichung der linearen Porenwasserströmung stimmt formal mit der Wärmeleitungsgleichung überein und auch mit der Telegraphengleichung für den Fall, daß keine Selbstinduktion und keine Ableitungsverluste vorhanden sind. Unser zuletzt gewonnenes Resultat bedeutet daher für die Wärmeleitung folgendes: ein heißer, sich selbst überlassener Körper (dem also keine Wärme mehr zugeführt wird) bestehe aus zwei Materialschichten, die verschiedene Wärmeleitfähigkeit bei annähernd gleicher spezifischer Wärme besitzen. Wenn die Wärme nur auf einer Seite abfließen kann, so erfolgt die Abkühlung dann schneller, wenn die

Schichte mit der größeren Wärmeleitfähigkeit der Abkühlung ausgesetzt wird.

Während das thermodynamische Gleichnis im Lehrbuch von Terzaghi und Fröhlich ausführlich behandelt ist, wird dort auf den Vergleich mit der Fortpflanzung des elektrischen Stromes in einem Kabel nicht näher eingegangen. Wir wollen daher hier diesen Fall näher behandeln:



Betrachtet man einen Leiter, an dessen einem Ende sich Spannung und Strom ändern, so gilt die Telegraphengleichung¹

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (CR + GL) \frac{\partial F}{\partial t} + RGF. \quad (54)$$

In dieser Gleichung bedeutet das Symbol F entweder die Spannung U oder den Strom J an der Stelle x (Entfernung vom Kabelanfang), C , R , G und L bedeuten die Kapazität, den Ohm'schen Widerstand, die Ableitung und Induktion pro Längeneinheit. Für den Sonderfall, daß $L = G = 0$ ist, nimmt die Gleichung (54) die Form an:²

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = CR \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (55)$$

Diese entspricht der Gleichung (4) des Porenwasserproblems.

Ist sowohl C als auch R nicht als konstant, sondern als Funktion von x anzusehen, dann erhalten wir für Spannung und Strom je eine unserer Gleichung (2) analoge Gleichung, nämlich

¹ R. Tomaschek, Grimsehl's Lehrbuch der Physik, Leipzig und Berlin 1940, Bd. II, S. 503.

² J. R. Carson, F. Ollendorff, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung. Berlin 1929.

$$C \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (56)$$

und

$$R \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial J}{\partial x} \right). \quad (57)$$

Wir können also die bei Betrachtung der Tonschichten gewonnenen Resultate auf den Fall des induktionsfreien Kabels übertragen. Sind z. B. zwei Kabel mit verschiedenem Widerstandsbelag, aber gleichem Kapazitätsbelag und gleicher Länge hintereinandergeschaltet, so entspricht dies unserem letzten Zahlenbeispiel, wenn wir an Stelle der hydrodynamischen Spannungsänderungen w die elektrischen Spannungsänderungen U nach Gleichung (56) betrachten. Wird an dieses Kabelsystem an ein Ende eine Spannung angelegt, so dauert es eine gewisse Zeit, bis sich die Höchstspannung über die ganze Kabellänge verbreitet hat, ebenso vergeht Zeit, bis die Spannung verschwunden ist, wenn die Spannungsquelle wieder abgeschaltet wird. Unser Resultat besagt nun, daß es nicht gleich ist, von welcher Seite der Stromstoß erfolgt. Arbeitet die Spannung an dem Kabelende mit dem geringen Widerstand, dann stellt sich der Spannungs-, bzw. spannungslose Zustand schneller ein, als wenn der Stromstoß von der anderen Seite kommt. Die Verformung oder Verflachung ist nicht von beiden Seiten gleich. Unter Umständen kann man auf einem solchen Kabel in der einen Richtung schneller telegraphieren als in der anderen Richtung.

Diese Abhandlung ist ein Auszug aus einer nicht veröffentlichten, von der philosophischen Fakultät der Universität Wien genehmigten Dissertation. Herrn Prof. L. Flamm, Leiter des Universitätsinstitutes für Theoretische Physik, spreche ich für das Thema, für die wertvollen und richtunggebenden Anweisungen und die mir geopferte Zeit meinen besten Dank aus. Herrn Prof. O. K. Fröhlich, Technische Hochschule Wien, bin ich für Anregungen ebenfalls zu Dank verpflichtet.
