23. Gaja, nördlich von Göding.

Cerithium pictum. Bast.
Rissoa tenuis. Partsch.
Melanopsis Martiniana. Fér.
— Bouéi. Fér.
Cardium conjungens. Partsch.
Congeria spathulata Partsch.
— triangularis. Partsch.

24 Bisenz, nordöstlich von Göding.

Neritina fluviatilis. Lam.
Paludina acuta. Drap.
Melanopsis Martiniana. Fér.
— Bouéi. Fér.
Congeria spathulata. Partsch.

---

3. Eine neue Methode zur Auflösung algebraischer Gleichungen des vierten Grades.

Von Dr. Peche.

Mitgetheilt am 4. Juni 1847.

Der allgemeine Ausdruck der Gleichungen vierten Grads $B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$ kann durch das Einführen zweier Hilfsbögen φ, φ_1, auf die Form

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2(\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi) y^2 + \\ + B_3 y + B_4 = 0$$

gebracht werden, wofern nur zwischen B_2, φ, und φ_1, die Relation

$$B_2 = -2\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi - 2\sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1$$

statuirt wird. In dieser Voraussetzung ist φ_1 irgend eine Function des Bogens φ, und dieser Bogen durch B_2 und die übrigen Coeficienten bestimmt.

Der Ausdruck

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2(\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1) y^2 \\ + B_3 y + B_4 = 0$$

ist die Summe der beiden Theile

$$B_0 y_4 - 2\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi\, y^2 + B^4 \text{ und}$$
$$y[B_1 B^2 - 2\sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1\, y + B_3].$$

Der erste Theil ergibt durch Zerfällen in seine Wurzelfactoren, wenn $\sqrt{-1}$ durch i vorgestellt wird, wie leicht zu ersehen

$$B_0 y^4 - 2\sqrt{B_0 B_4}\cos 2\varphi\, y^2 + B_4 =$$

$$= B_0 \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{\varphi i}\right] \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{-\varphi i}\right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{\varphi i}\right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{-\varphi i}\right]$$

und der zweite analog

$$y(B_1 y^2 - 2\sqrt{B_1 B_3}\cos\varphi_1\, y + B_3) =$$

$$= yB_1 \left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\, C^{\varphi_1 i}\right] \left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\, C^{-\varphi_1 i}\right].$$

Es ist somit

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2(\sqrt{B_0 B^4}\cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3}\cos\varphi_1)\, y^2 + B_3 y + B_4 =$$

$$= B_0 \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{\varphi i}\right] \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{-\varphi i}\right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{\varphi i}\right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{-\varphi i}\right] + B_1 y \left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\, C^{\varphi_1 i}\right] \left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\, C^{-\varphi_1 i}\right].$$

Weil φ_1 als beliebige Function von φ gewählt werden kann, so sei

$$\varphi_1 i = \varphi i + \tfrac{1}{4}\lambda \frac{B_4}{B_0} - \tfrac{1}{2}\lambda \frac{B_3}{B_1}$$

(wo das Symbol λ den natürlichen Logarithmus bezeichnet), oder für

$$\tfrac{1}{4}\lambda \frac{B_4}{B_0} - \tfrac{1}{2}\lambda \frac{B_3}{B_1} = \alpha i,$$

$$\varphi_1 i = \varphi i + \alpha i.$$

Durch diese Substitution geht der obige Ausdruck über in

$$B_0 \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{\varphi i}\right] \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{-\varphi i}\right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{\varphi i}\right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, C^{-\varphi i}\right] + B_1 y \left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\, C^{\varphi i + \alpha i}\right] \left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\, C^{-(\varphi i + \alpha i)}\right]$$

und nach der Bedeutung von α in

$$B_0\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}c^{\varphi i}\right]\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}c^{-\varphi i}\right]\left[y+\right.$$
$$\left.+\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}c^{\varphi i}\right]\left[y+\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}c^{-\varphi i}\right]+$$
$$+B_1 y\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}c^{\varphi i}\right]\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}c^{-\varphi i}\right].$$

Nach der früheren Voraussetzung ist

$$B_2 = (\sqrt{B_0 B^4}\cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3}\cos(\varphi+\alpha))$$

und für den Fall, dass $\alpha = 0$ wäre, ist $\cos\varphi$ durch eine quadratische Gleichung gegeben, für α nicht $= 0$, ist diese Gleichung vom vierten Grad.

Ist nun eine Gleichung

$$C_0 x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 = 0$$

gegeben, und man setzt $x = y + p$, wodurch nach der Substitution, wenn Kürze halber,

$$\begin{aligned}
C_0 &= D_0 \\
4C_0 p + C_1 &= D_1 \\
6C_0 p^2 + 3C_1 p + C_2 &= D_2 \\
4C_0 p^3 + 3C_1 p^2 + 2C_2 p + C_3 &= D_3 \\
C_0 p^4 + C_1 p^3 + C_2 p^2 + C_3 p + C_4 &= D_4
\end{aligned}$$

gesetzt wird, die Gleichung in

$$D_0 y^4 + D_1 y^3 + D_2 y^2 + D_3 y + D_4 = 0$$

übergeht: so kann immer p aus einer Gleichung des dritten Grads so bestimmt werden, dass die Relation

$$\frac{D_4}{D_0} = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2$$

stattfinde, wodurch zugleich die Gleichung

$$D_0 y^4 + D_1 y^3 + D_2 y^2 + D_3 y + D_4 = 0$$

die Eigenschaft erlangt, dass in ihr $\alpha = 0$ ist.

Diese Bedingung

$$\frac{D_4}{D_0} = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2$$

gibt

$$\frac{C_0 p^4 + C_1 p^3 + C_2 p^2 + C_3 p + C_4}{C_0} = \left(\frac{4C_0 p^3 + 3C_1 p^2 + 2C_2 p + C_3}{4C_0 p + C_1}\right)^2,$$

und diesen Ausdruck entwickelnd, erhält man

$$16\,C_0^2\,p^6 + \left.\begin{array}{r}8\,C_0\,C_1\\ +16\,C_0\,C_1\end{array}\right|p^5 + \left.\begin{array}{r}C_1^2\\ 8\,C_1^2\\ 16\,C_0\,C_2\end{array}\right|p^4 + \left.\begin{array}{r}\frac{C_1^3}{C_0}\\ 8\,C_1\,C_2\\ 16\,C_0\,C_3\end{array}\right|p^3 + \left.\begin{array}{r}\frac{C_1^2\,C_2}{C_0}\\ 8\,C_1\,C_3\\ 16\,C_0\,C_4\end{array}\right|p^2 +$$

$$+ \left.\begin{array}{r}\frac{C_1^2\,C_3}{C_0}\\ 8\,C_1\,C_4\end{array}\right|p + \frac{C_1^2\,C_4}{C_0} = 16\,C_0^2\,p^6 + 24\,C_0\,C_1\,p^5 +$$

$$+ \left.\begin{array}{r}9\,C_1^2\\ 16\,C_0\,C_2\end{array}\right]p^4 + \left.\begin{array}{r}12\,C_1\,C_2\\ 8\,C_0\,C_3\end{array}\right]p^3 + \left.\begin{array}{r}4\,C_2^2\\ 6\,C_1\,C_3\end{array}\right]p^2 + 4\,C_2\,C_3\,p + C_3^2$$

d. i., für p folgende Gleichung dritten Grads

$$\left[\frac{C_1^3}{C^0} - 4\,C_1\,C_2 + 8\,C_0\,C_3\right]p^3 + \left[\frac{C_1^2\,C_2}{C_0} + 2\,C_1\,C_3 + \right.$$

$$\left. + 16\,C_0\,C_4 - 4\,C_2^2\right]p^2 + \left[\frac{C_1^2\,C_3}{C_0} + 8\,C_1\,C_4 - 4\,C_2\,C_3\right]p +$$

$$+ \frac{C_1^2\,C_3}{C_0} - C_3^2 = 0\,.$$

Wird also in der gegebenen Gleichung

$$B_0\,y^4 + B_1\,y^3 + B_2\,y^2 + B_3\,y + B_4 = 0\,;\; y = p + z$$

gesetzt, und p so gewählt, dass es der Gleichung

$$\left[\frac{B_1^3}{B_0} - 4\,B_1\,B_2 + 8\,B_0\,B_3\right]p + \left[\frac{B_1^2\,B_2}{B_0} + 2\,B_1\,B_3 + \right.$$

$$\left. + 16\,B_0\,B_4 - 4\,B_2^2\right]p^2 + \frac{B_1^2\,B_3}{B_0} + 8\,B_1\,B_4 - 4\,B_2\,B_3\Big]\,p +$$

$$+ \frac{B_1^2\,B_3}{B_0} - B_3^2 = 0$$

genügt; so ist durch diese Substitution die Gleichung in

$$D_0\,z^4 + D_1\,z^3 + D_2\,z^2 + D_3\,z + D_4 = 0$$

übergegangen und zugleich sind die Wurzeln letzterer Gleichung, da die Relation besteht

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} = \sqrt{\frac{D_3}{D_1}}\,,\ \text{d. i. } \tfrac{1}{4}\lambda\,\frac{D_4}{D_0} - \tfrac{1}{2}\lambda\,\frac{D_3}{D^1} = \alpha = 0$$

durch folgende Gleichung gegeben

$$D_0\left[z - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{\varphi i}\right]\left[z - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{-\varphi i}\right]\left[z + \right.$$

$$\left. + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D^0}}\,C^{\varphi i}\right]\left[z + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{-\varphi i}\right] +$$

$$+ D_1\,z\left|z - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{\varphi i}\right|\left[z - \sqrt[4]{\;}\,C^{-\varphi i}\right] = 0\,.$$

Somit sind

$$z_1 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{\varphi i} \qquad z_2 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{-\varphi i}$$

2 Wurzeln der letzten Gleichung und daher 2 Werthe von y bekannt

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{\varphi i} \qquad y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{-\varphi i}.$$

Die andern 2 Werthe von z ergeben sich aus der noch übrigen quadratischen Gleichung, die man erhält, wenn die Gleichung durch die bereits bekannten Wurzelfactoren getheilt wird. Man erhält nach Weglassung dieser Factoren

$$z - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{\varphi i} \text{ und } z - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{-\varphi i},$$

$$D_0\left(z + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{\varphi i}\right)\left(z + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{-\varphi i}\right) + D_1 z = 0$$

$$D_0 z^2 + \left(2\sqrt[4]{D_0^3 D_4}\cos\varphi + D_1\right) z + \sqrt{D_0 D_4} = 0$$

$$z_3 = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

$$z_4 = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

und somit die 2 andern Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$y_3 = p - \tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

$$y_4 = p - \tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_4}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}\,.$$

Es wäre somit bloss der Werth von φ als Function der Coefficienten zu bestimmen. Dieser Werth ergibt sich aus einer Gleichung zweiten Grads, somit sind der Werthe von φ, 2, und daher die Werthe von z, 8. Man kann sich nehmlich durch wirkliche Substitution überzeugen, dass sowohl die z für den einen Werth von φ als für den andern der Gleichung

$$D_0 z^4 + D_1 z^3 + D_2 z^2 + D_3 z + D_4 = 0$$

genügen. Der Werth von φ, ist aus der Gleichung

$$2\sqrt{D_0 D_4}\cos 2\varphi + 2\sqrt{D_1 D_3}\cos\varphi = -D_2$$

zu bestimmen, d. i. aus

$$4\sqrt{D_0 D_4}\cos^2\varphi + 2\sqrt{D_1 D_3}\cos\varphi + D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4} = 0$$

und ist

$$\cos\varphi = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}\,.$$

Seien die Werthe von z für den ersten Werth von $\cos\varphi = \cos\varphi_1$ durch kleine und die für den zweiten Werth $\cos\varphi = \cos\varphi_2$ durch grosse Buchstaben bezeichnet; so sind wenn zur Abkürzung

$$\lambda = 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1 + \frac{D_1}{D_0}$$

$$\mu = \sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1 + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

gesetzt wird

$$z_1 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{\varphi i}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,C^{-\varphi_1 i}$$

$$z_3 = -\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu$$

$z_4 = -\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu$ 4 Wurzeln der Gleichung: und die

Wurzeln genügen den nöthigen Bedingungen: es ist

$$-(z_1+z_2+z_3+z_4) =$$
$$= -2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1 + 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1 + \frac{D_1}{D_0} = \frac{D_1}{D_0}$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 =$$
$$= \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\right) e^{\varphi_1 i}$$
$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\mu\right) e^{\varphi_1 i}$$
$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\right) e^{-\varphi_1 i}$$
$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\mu\right) e^{-\varphi_1 i} + \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} =$$
$$= 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} - 2\cos\varphi_1 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\lambda$$
$$= 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} - 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}(\cos 2\varphi_1 - 1) - 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cdot\frac{D_1}{D_0}\cos\varphi_1$$
$$= -2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}\cos 2\varphi_1 - 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cdot\frac{D_1}{D_0}\cos\varphi_1$$
$$= -2\sqrt{\frac{D_4 D_0}{D_0^2}}\cos 2\varphi_1 - 2\sqrt{\frac{D_3 D_1}{D_0^2}}\cos\varphi_1$$
$$= -\frac{1}{D_0}\left(2\sqrt{D_0 D_4}\cos 2\varphi_1 + 2\sqrt{D_1 D_3}\cos\varphi_1\right) = \frac{D_2}{D_0}.$$

$$-(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4)$$
$$= -\Big[\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\right)$$
$$+\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\mu\right)$$
$$+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(\tfrac{1}{4}\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\mu^2\right) e^{\varphi_1 i}$$
$$+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(\tfrac{1}{4}\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\mu^2\right) e^{-\varphi_1 i}\Big]$$
$$= -\Big[-\lambda\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} + 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(\tfrac{1}{4}\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\mu^2\right)\cos\varphi_1\Big] =$$

$$= -\left[-\lambda\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} + 2\sqrt[\frac{4}{3}]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1\right] = \frac{D_1}{D_0}\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} = \frac{D_3}{D_0}.$$

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}(\lambda^2 - \mu^2) = \frac{D_4}{D_0}.$$

Aber auch die Wurzeln Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 genügen der Gleichung, denn es ist, da sich die vorigen Reductionen ohne Substitution des Werthes von φ ergaben, analog

$$-(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = \frac{D_1}{D_0}$$

$$Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4 = \frac{D_2}{D_0}$$

$$-(Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4 = \frac{D_3}{D_0}$$

$$Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 = \frac{D_4}{D_0}.$$

Diess lässt vermuthen, dass die 4 letztern Werthe von Z mit denen von z identisch sind, und wirklich lässt sich erweisen, dass

$$z_1 = Z_3$$
$$z_2 = Z_4$$
$$z_3 = Z_1$$
$$z_4 = Z_2.$$

Es ist

$$Z_1 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\, i) =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-a - b + i\sqrt{1 - (a+b)^2}\right)$$

für

$$a = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_4 D_0}} \qquad b = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D^0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}};$$

und

$$z_3 = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a+b) + \frac{D_1}{D_0}\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D^0}}(-a+b) + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}},$$

für das obige a und b ist aber, wie man durch die Substitution ersieht $Z_1 = z_3$ und eben so erfolgen die andern Gleichungen, denn es ist, wie man sich durch Substituiren überzeugt

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left[(-a-b)-i\sqrt{1-(a+b)^2}\right]=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a+b)+\sqrt{\frac{D_1}{D_0}}\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a+b)+\frac{D_1}{D_0}\right)^2-4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left[(-a+b)+i\sqrt{1-(a-b)^2}\right]=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a-b)+\sqrt{\frac{D_1}{D_0}}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a-b)+\frac{D_1}{D_0}\right)^2-4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

und

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left[(-a+b)-i\sqrt{1-(a-b)^2}\right]=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a-b)+\sqrt{\frac{D_1}{D_0}}\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a-b)+\frac{D_1}{D_0}\right)^2-4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}.$$

Es sind somit die 4 Wurzeln der Gleichung

$$B_0y^4+B_1y^3+B_2y^2+B_3y+B_4=0$$

$$y_1=p+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,e^{\,i\arccos\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}-4\frac{(D_2-2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}\right]}$$

$$y_2=p+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,e^{-i\arccos\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}-4\frac{(D_2-2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}\right]}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{\,i \arccos \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} +} \right.}$$

$$\left. -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} \right]$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{\,-i \arccos \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_4}{D_0 D_4} +} \right.}$$

$$\left. -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} \right],$$

und darin ist p durch die Gleichung:

$$\left(\frac{B_1^3}{B_0} - 4 B_1 B_2 + 8 B_0 B_3\right) p^3 +$$

$$+ \left(\frac{B_1 B_2}{B_0} + 2 B_1 B_3 + 16 B_0 B_4 - 4 B_2^2\right) p^2 +$$

$$+ \left(\frac{B_1^2 B_3}{B_0} + 8 B_1 B_4 - 4 B_2 B_3\right) p +$$

$$+ \frac{B_1^2 B_4}{B_0} - B_3^2 = 0,$$

und die D durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned} B_0 &= D_0 \\ 4 B_0 p + B_1 &= D_1 \\ 6 B_0 p^2 + 3 B_1 p + B_2 &= D_2 \\ 4 B_0 p^3 + 3 B_1 p^2 + 2 B_2 p + B_3 &= D_3 \\ B_0 p^4 + B_1 p^3 + B_2 p^2 + B_3 p + B_4 &= 0. \end{aligned}$$

Der Vortheil dieser Auflösungsmethode besteht darin, dass man die Zeichen der Coefficienten nicht zu kennen braucht, um alsogleich die Wurzeln der Gleichung zu bestimmen, welches bei den andern Methoden nicht der Fall ist, wo sich z. B die Wahl bestimmter Gruppen von Wurzeln nach dem Zeichen eines Coefficienten einer transformirten Gleichung richtet.

Ein anderer wesentlicher Vortheil wäre die mögliche Bestimmung der Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten, wenn die Wurzeln der Gleichung gewisse Bedingungen erfüllen sollen; z. B. dass je 2 einander gleich seien oder bloss durch das Zeichen differiren u. s. f.

Diese Bedingungsgleichungen der Coefficienten, die sich hier auf einem sehr bequemen Weg ergeben, will ich in einem spätern Blatte mittheilen.

4. Bemerkungen über die geologischen Karten von England.

Von Herrn Professor A. Favre.

Aus der Bibliothèque universelle de Genève. IV. Serie. Ire. Année. Tome 3. Suppl. p. 344.

Es sind nunmehr etwas mehr als 120 Jahre (1720) seit Fontenelle, der Verfasser der Geschichte der Academie der Wissenschaften, bei Besprechung der Vermuthungen, welche Reaumur über die Art, wie die Fossilien der Provinz Touraine abgelagert wurden, anführte: „Um über diesen Gegenstand mit Bestimmtheit sprechen zu können, müsste man eine Gattung Landkarten haben, welche nach allen Arten der in der Erde gelagerten Muschelschalen entworfen wären — Welche Menge von Beobachtungen wäre da erforderlich, und welch' ein Zeitaufwand, um dieselben zu bekommen. Wer weiss jedoch, ob nicht die Wissenschaft einst bis dahin fortschreiten wird, wenigstens zum Theil?" *)

Diese Karten, deren Ausführung Fontenelle vorausgesehen hatte, sind nunmehr für ganz Europa mit grösserer oder geringerer Genauigkeit angefertigt. Einige derselben werden noch mannigfache Veränderungen bestehen müssen, aber es gibt unter denselben Andere, welche wahrscheinlich ungeachtet der Fortschritte der Wissenschaften nur wenig mehr verändert werden dürften. Zu Letzteren gehören die Karten, welche so eben auf Befehl der englischen Regierung

*) Geschichte der königlichen Academie der Wissenschaften. 1720. Seite 9.