

NATURWISSENSCHAFTLICHE
A B H A N D L U N G E N,

GESAMMELT UND DURCH SUBSCRIPTION

HERAUSGEGEBEN

VON

WILHELM HAIDINGER.

VIERTER BAND.

IN VIER ABTHEILUNGEN.

Mit XXX Tafeln.

Subscriptionsjahr vom 1. Jänner bis 31. December 1850.

WIEN, 1851.

Bei Wilhelm Braumüller,

Buchhändler des k. k. Hofes und der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Vorbericht.

Der vierte Band der „Naturwissenschaftlichen Abhandlungen,“ deren Herausgabe durch das Zusammenwirken geistiger und materieller Kräfte vieler Freunde der Naturwissenschaften möglich war, ist nun vollendet. Zugleich mit demselben wird den hochverehrten Theilnehmern an der Subscription der Siebente und letzte Band der gleichfalls mit denselben Kräften herausgegebenen „Berichte über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften in Wien“ zugestellt.

Als der erste Bericht über unsere Versammlungen am 6. Mai, als die Einladung zur Subscription für die Herausgabe der „Naturwissenschaftlichen Abhandlungen“ am 30. Mai 1846 in der Wiener-Zeitung erschien, gab es in Wien noch keine Kaiserliche Akademie der Wissenschaften, keine k. k. geologische Reichsanstalt, keinen zoologisch-botanischen Verein. Versammlungen für wissenschaftliche Zwecke finden nun in erfreulichem Maasse statt, Sitzungsberichte, Denkschriften, abgesonderte Werke bezeugen die vermehrte Regsamkeit des naturwissenschaftlichen Lebens in unserer grossen Reichshauptstadt.

Wenn aber auch mit dem siebenten Bande die Berichte über Mittheilungen in den Versammlungen der durch keine gesellschaftliche Form verbundenen „Freunde der Naturwissenschaften“ geschlossen sind, so tritt ein anderes Verhältniss für die Herausgabe der „Naturwissenschaftlichen Abhandlungen“ ein. Günstige Aussichten scheinen sich für die Fortsetzung und selbst für eine grosse Erweiterung derselben zu gestalten, allein es ist mir in dem gegenwärtigen Augenblicke nicht möglich, die Einzelheiten näher zu bezeichnen. Vor Allem ist es unerlässlich, dass ich den

vierten Band abschliesse, und der Oeffentlichkeit übergebe, bevor weitere Schritte eingeleitet werden können. Es enthält daher auch dieser Vorbericht nicht wie die drei früheren Bände die „Ankündigung des Unternehmens,“ sondern es wird das der gewonnenen neuen Stellung Entsprechende seiner Zeit bekannt gemacht werden. Wohl aber darf ich hier meine hochverehrten Gönner und Freunde der Naturwissenschaften auf das Angelegentlichste einladen, mir auch für die Zukunft ihre freundliche Beihilfe nicht zu entziehen. Der Zweck ist wahrlich kein geringer. Je grösser die Kraft, demselben geweiht, desto sicherer und umfassender wird er erreicht.

Einen Ueberblick der bisherigen Geldgebarung gibt folgende Aufstellung:

für das Jahr:	Zahlungsverbindlichkeiten:	Baar eingegangen:	Die Passivreste:
1846—47	4253 fl. — kr.	2423 fl. 42 kr.	1829 fl. 18 kr.
1847—48	5972 „ 58 „	4624 „ 13 „	1348 „ 45 „
1848—49	5329 „ 34 „	3847 „ 5 „	1482 „ 29 „
1850	5990 „ 7 „	5949 „ 51 „	40 „ 16 „
Zusammen	21545 fl. 39 kr.	16844 fl. 51 kr.	4700 fl. 48 kr.

Den verbindlichsten Dank sage ich meinen hochverehrten Freunden, Herrn FRANZ Ritter v. HAUER, und Herrn FRANZ FOETTERLE, welche die Ueberwachung des Druckes in dem grössten Theile des Bandes, namentlich gegen das Ende zu freundlichst auf sich genommen haben.

Wien, den 3. November 1851.

W. Haidinger.

I. SUBSCRIPTIONSLISTE

zur Herausgabe des Werkes:

NATURWISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN,

gesammelt und herausgegeben

VON

W. Haidinger.

Retrag 20 fl. C. M. jährlich.

Nachtrag für die drei Subscriptionsperioden vom 1^{sten} Juli 1846 bis 31^{sten} December 1849.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlauchtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG WILHELM.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlauchtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG JOSEPH.

Ein Exemplar der Naturwissenschaftlichen Abhandlungen.

Die Herren:

Bach, Alexander, Jur. Dr., k. k. Minister.
Esterházy v. Galantha, Se. Durchlaucht Paul Fürst.
Haber, Ludwig v., Prag.
Hartinger, Anton.
Liechtenstein, Se. Durchlaucht Alois, regierender
Fürst von und zu.
Rothschild, Salomon Meyer Freiherr v.

Die Bibliotheken u. s. w.

Eisenerz, k. k. Steiermärkisch-österreichische Eisenwerks-Direction.
Gmunden, k. k. Salinen- und Forst-Direction.
Graz, k. k. Berg- und Forst-Direction.
Hall, k. k. Berg- und Salinen-Direction.
Hermannstadt, k. k. Ministerial-Commission für
Berg-, Salinen- und Forstwesen.
Joachimthal, k. k. Berg-Oberamt.

Nagyág, k. k. Berg-Verwaltung.
Nagybánya, k. k. Bergwesens-Inspectorat-Oberamt.
Neusohl, k. k. Kammerverwaltung.
Oravitza, k. k. Bergdirection.
Padua, k. k. Universität.
Przibram, k. k. Bergoberamt.
Przibram, k. k. Montanistische Lehranstalt.
Reschitza, k. k. Werksdirection.
Salzburg, k. k. Berg- und Forst-Direction.
Schemnitz, k. k. Berg-, Forst- und Güter-Direction.
Schemnitz, k. k. Berg- und Forst-Akademie.
Schmöllnitz, k. k. Bergwesens-Inspectorat-Oberamt.
Steierdorf, k. k. Werksdirection.
Wieliczka, k. k. Berg-, Salinen- und Forst-Direction.
Wien, k. k. Finanzministerium.
Zalathna, k. k. Montan-Administration.

II. Subscription für die Periode vom 1. Juli 1848 bis 31. Dec. 1849.

Herr Friedrich Brauer.

Die Bibliothek der k. k. montanistischen Lehranstalt zu Leoben.

Die Bibliothek des k. k. Obergymnasiums in Lemberg.



III. SUBSCRIPTIONSLISTE

zur Herausgabe eines Werkes:

NATURWISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN,

gesammelt und herausgegeben

VON

W. Haidinger.

Betrag **20** fl. C. M. jährlich.

Für das Subscriptionsjahr vom 1^{sten} Jänner bis zum 31^{sten} December 1850.

SEINE MAJESTÄT DER KAISER.

Fünf Exemplare mit der Bestimmung für die nachfolgenden Bibliotheken:

1. Die k. k. Hofbibliothek.
2. Die Allerhöchste Privatbibliothek.
3. Die k. k. Universitätsbibliothek in Wien.
4. Die Bibliothek der k. k. Hofnaturalien-cabinete.
5. Die Bibliothek der k. k. Gesellschaft der Aerzte in Wien.

Mit dem doppelten Betrage des Preises der herauszugebenden Schriften.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlachtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG FRANZ KARL.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlachtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG WILHELM.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlachtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG STEPHAN.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlachtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG JOSEPH.

Ein Exemplar der Naturwissenschaftlichen Abhandlungen.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlachtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG JOHANN.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlachtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG RAINER.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlachtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG LUDWIG.

Die Frauen:

Henikstein, Johanna Edle v., geborne Edle v. Dickmann-Secherau.

Marschall, Elisabeth, verwitwete Gräfin v., geborne Freyin von Reischach, München.

Die Herren:

Adlitzer, Se. Hochw. P. Kaspar, Pfarrer in Mönichkirchen.

Alth, Alois, Jur. Dr., Czernowitz.

Arenstein, Se. Hochw. P. Joseph, k. k. Professor.

Arneth, Se. Hochw. Mich., Propst zu St. Florian, k. k. Rath.

Arthaber, Rudolph Edler v.

Augustin, Se. Exc. Vincenz Freiherr v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, Feldzeugmeister.

Baader, Jacob Andreas, Med. Dr.

Bach, Alexander, Jur. Dr., k. k. Minister.

Barrande, Joachim, Prag.

Baumgartner, Se. Exc. Andreas Ritter v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, Minister, Präsident der kais. Akademie d. Wissensch.

Beer, Se. Hochw. Jacob, General und Grossmeister des ritterl. Kreuzerrenordens mit dem rothen Stern, Prag.

Benko, Anton, Buchdruckereibesitzer.

Bernard, Se. Hochw., Abt im Neukloster zu Wiener-Neustadt, k. k. Rath.

Beroldingen, Se. Exc. Franz Graf v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, Kämmerer.

Beron, Peter, Krajowa, Wallachei.

Boué, Ami, Med. Dr., Mitglied der kaiserl. Akad. der Wiss.

Brauer, Friedrich.

Braumüller, Wilhelm, k. k. Hof-Buchhandlung.

Breunner, August Graf, k. k. Kämmerer, Sectionschef.

Breunner, August Graf, jun.

Breunner, Joseph Graf.

Buch, Leopold v., k. preuss. Kammerherr, Berlin.

Canaval, Jos. Leodegar.

Cantacuzeno, Georg Fürst v., jun., Jassy.

Colloredo-Wallsee, Se. Exc. Franz Graf v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, Kämmerer u. s. w.

Czapka, Ritter v. Winstetten, Ignaz, k. k. Regierungsrath.

Czernin, Se. Exc. Eugen Graf v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, Kämmerer.

Czjžek, Johann, k. k. Bergrath.

Dietrichstein, Johann Graf v., k. k. Kämmerer.

Edmund, Se. Hochw., Abt zum Heiligen Kreuz im Walde, Oesterreich, und zu St. Gotthard in Ungarn, k. k. Rath.

Esterházy v. Galantha, Se. Durchlaucht, Paul Fürst.

Ettingshausen, Andreas v., k. k. Regierungsrath, Mitglied, früher Generalsecretär der kais. Akademie der Wissenschl.

Ettingshausen, Constantin v., Med. Dr.

Ferrari, Giov. Angelo, Nobile det.

Ferro, Joseph Ritter v., k. k. Ministerialrath.

Forgatsch, Ludwig Freiherr v., k. k. Kämmerer.

Friedenfels, Eugen v., k. k. Ministerialsecretär.

Die Herren:

Friesach, Karl, Phil. Dr.

Fridau, Franz Ritter v., Gratz.

Gross, Joseph, Central-Director, Witkowitz, Mähren.

Gruber, Ignaz, Med. Dr.

Habel, Franz, Med. Dr., Baden.

Haber, Ludwig v., Prag.

Haidinger, Eugen, Fabriksbesitzer, Elbogen, Böhmen.

Haidinger, Rudolph, Fabriksbesitzer, Elbogen, Böhmen.

Haidinger, Wilhelm, k. k. Sectionsrath, Director der k. k. geolog. Reichsanstalt, Mitglied der kais. Akad. der Wissensch.

Hammer-Purgstall, Joseph Freiherr v., k. k. Hofrath, Mitglied, früher Präsident der kais. Akademie d. Wissenschaften.

Hartinger, Anton.

Hauer, Franz Ritter v., k. k. Bergrath.

Hauer, Se. Exc. Joseph Ritter v., k. k. wirkl. Geheimer Rath.

Herbert, Paul Freiherr v., Klagenfurt.

Hingenu, Otto Freiherr v., k. k. Professor.

Hocheder, Joh. Karl, k. k. Ministerial-Secretär.

Hoffer, Joh., Phil. Dr., Director des k. k. physikalischen und astronomischen Cabinetes.

Hohenegger, Ludwig, Erzherzoggl. Eisenwerks-Director, Teschen.

Hormuzaki, Eudoxius v.

Hörnés, Moriz, Phil. Dr., Custos-Adjunct am k. k. Hof-Min.-Cab.

Hügel, Se. Exc. Karl Freiherr v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, ausserord. Gesandter und bevollm. Minister, Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften, Florenz.

Inzaghi, Se. Exc. Karl Graf v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, Kämmerer.

Jacks, Johann, k. k. Custos.

Jakomini-Holzappel-Waasen, Franz Reichsritter v., Werksbesitzer, Bleiberg, Kärnten.

Jenko, Joseph, Phil. Dr., k. k. Professor.

Jordan, Se. Hochw. P. Johann Baptist, k. k. Gymnasial-Director, Görz.

Kanka, Karl, Med. Dr.

Kleyle, Karl Ritter v., k. k. Sectionschef.

Kleyle, Franz Joachim Ritter v., Erzherzoglicher Hofrath.

Kner, Rudolph, k. k. Professor.

Köchel, Ludwig Ritter v., k. k. Rath, Schulrath, Salzburg.

Koller, Se. Hochw. P. Marian, k. k. Ministerialrath, Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften.

Kolowrat-Liebsteinsky, Se. Exc. Franz Anton Graf v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, Kämmerer.

Kopecky, Benedict, k. k. Professor, Görz.

Kraus, Joh. Bapt., k. k. Hofbuchhaltungs-Rechnungsofficial.

Kriegel, Karl Ludwig, Fabriksbesitzer, Prag.

Kübeck, Se. Exc. Karl Friedrich, Freiherr v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, Präsident des k. k. Reichsrathes.

Laserer, Leopold, k. k. Sectionsrath.

Layer, Michael, k. k. Unterstaatssecretär.

Leydolt, Franz, k. k. Professor.

Die Herren :

Liechtenstein, Se. Durchlaucht Alois, regierender Fürst v. Loudon, Olivier Freiherr v., Güterbesitzer.
 Löwe, Alexander, k. k. General-Landes- u. Haupt-Münz-Probirer.
 Marschall, Aug. Friedr. Graf v., k. k. Kämmerer.
 Metternich, Se. Durchlaucht Clemens Wenzel Lothar Fürst v. Metternich, Se. Durchlaucht Richard Fürst v.
 Miesbach, Alois, Güterbesitzer.
 Morlot, Adolph v., Bern, Schweiz.
 Murchison, Sir Rod. Impey, Präsident d. geogr. Gesells., London.
 Neumann, Johann G., k. k. Bezirks-Commissär, Waidhofen an der Ips.
 Partsch, Paul, k. k. Custos, Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften.
 Patera, Adolph, Assistent an der k. k. montanistischen Lehranstalt in Pribram.
 Pettko, Johann v., k. k. Bergrath, Schemnitz.
 Petzval, Joseph; k. k. Professor.
 Pierre, Victor, Med. und Phil. Dr., k. k. Professor, Lemberg.
 Pittoni, Joseph Claudius Ritter v., Gratz, Steiermark.
 Plenker, Georg, k. k. Ministerialrath.
 Plentzner, Karl, k. k. Regierungsrath, Gmunden, Oberöst.
 Pöschl, Eduard, k. k. Professor, Schemnitz.
 Prangner, Se. Hochw. P. Engelbert, k. k. Professor.
 Provençères, Eugen v.
 Prüfer, Karl.
 Puthon, Rudolph Freiherr v., k. k. priv. Grosshändler.
 Ransonnet, Karl Freiherr v., k. k. Ministerialrath.
 Reissek, Siegfried, Med. Dr., k. k. Custos-Adjunct.
 Reslhuber, P. Augustin, Director der Sternwarte, Kremsmünster.
 Reuter, Jakob, k. k. Rath, Professor.
 Riedl, Edler v. Leuenstern, Jos., k. k. Central-Mappen-Archivars-Adjunct.
 Riepl, Franz, k. k. Professor.
 Rikli, Rud., Fabriksbesitzer, Seebach bei Gmünd, Kärnten.
 Rochel, Alois, k. k. Bergrath, Schmöllnitz.
 Rösler, Gustav, k. k. Oberbergamts-Assessor.
 Rosthorn, Franz Edler v., Werksbesitzer, Klagenfurt.
 Rothschild, Salomon Meyer, Freiherr v.
 Rumler, Karl, k. k. Custos-Adjunct.
 Russeger, Jos., k. k. Ministerialrath, Schemnitz.
 Scheuchenstuel, Karl Edler v., k. k. Sectionschef.
 Schmidl, Ant., Lehrer an der k. k. Normal-Hauptschule bei St. Anna.
 Schwarz v. Mohrenstern, Gustav.
 Schwarzenberg, Se. Durchlaucht Johann Adolph, Fürst v.
 Schwarzhuber, Anton Ritter v., k. k. Sectionschef.
 Sedlacek, Se. Hochw. Wilhelm, Propst zu Klosterneuburg, k. k. Rath, Erbhofcaplan.
 Serényi, Gabriel Graf v.
 Seybel, Emil, Fabriksbesitzer, Liesing, Oesterreich.
 Sieber, Karl, Prag.
 Simony, Friedrich, k. k. Professor.

Die Herren :

Streffleur, Valentin, k. k. Ministerialsecretär.
 Thunfeld, Ferdinand Edler Herr v., k. k. Minister.
 Thun-Hohenstein, Se. Exc. Leo Graf v., k. k. wirkl. Geheimer Rath, Kämmerer, Minister.
 Verneuil, Eduard von, Präsident der geolog. Gesellsch., Paris.
 Vogel, Joseph, Med. Dr.
 Waldauf Ritter v. Waldenstein, Jos., k. k. Hofcommissionsrath.
 Wedl, Karl, Med. Dr.
 Well, Wilhelm Edler v., Med. Dr., k. k. Ministerialrath, Präses der medicinischen Facultät.
 Werdmüller v. Elgg, Phil. Heinrich, Fabriks-Besitzer, Pitten, Oesterreich.
 Witteczek, Joseph, k. k. Ministerialrath.
 Zeidler, Se. Hochw. Hieronymus Joseph, Abt des hochw. Prämonstratenser-Stiftes Strahow, Prag.
 Zepharovich, Victor Ritter v.
 Zeuschner, Ludwig, k. k. Professor, Krakau.

Bibliotheken, Gesellschaften, Museen
 II. S. W.

Brünn, k. k. Mährisch-schlesische Gesellschaft des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde.
 Eisenerz, k. k. Steiermärkisch-österreichische Eisenwerks-Direction.
 Gmunden, k. k. Salinen- und Forst-Direction.
 Gratz, k. k. Berg- und Forst-Direction.
 Hall, k. k. Berg- und Salinen-Direction.
 Hermannstadt, k. k. Ministerial-Commission für Berg-, Salinen- und Forstwesen.
 Joachimsthal, k. k. Berg-Oberamt.
 Laibach, k. k. Ober-Gymnasium.
 Lemberg, k. k. galizische Ackerbau-Gesellschaft.
 Lemberg, k. k. Ober-Gymnasium.
 Leoben, k. k. montanistische Lehranstalt.
 Linz, Museum Francisco-Carolinum.
 Nagyág, k. k. Bergverwaltung.
 Nagybánya, k. k. Bergwesens-Inspectorat-Oberamt.
 Neusohl, k. k. Kammerverwaltung.
 Oravitza, k. k. Bergdirection.
 Padua, k. k. Universität.
 Pribram, k. k. Berg-Oberamt.
 Pribram, k. k. montanistische Lehranstalt.
 Reschitza, k. k. Werksdirection.
 Salzburg, k. k. Berg- und Forst-Direction.
 Schemnitz, k. k. Berg-, Forst- und Güter-Direction.
 Schemnitz, k. k. Berg- und Forst-Akademie.
 Schmöllnitz, k. k. Bergwesens-Inspectorat-Oberamt.
 Seitenstätten, Hochw. Stift.
 Steierdorf, k. k. Werksdirection.
 Wieliczka, k. k. Berg-, Salinen- und Forst-Direction.
 Wien, k. k. Finanzministerium.
 Zalathna, k. k. Montan-Administration.

IV. AUSSERORDENTLICHE SUBSCRIPTION

einschliesslich des Jahresbeitrages von 20 fl. C. M.

Für das Subscriptionsjahr vom 1^{sten} Jänner bis zum 31^{sten} December 1850.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlauchtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG STEPHAN 180 fl. Conv.-Mze.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlauchtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG JOHANN 100 fl. Conv.-Mze.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlauchtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG RAINER 100 fl. Conv.-Mze.

Seine k. k. Hoheit, der Durchlauchtigste Prinz und Herr
ERZHERZOG LUDWIG 100 fl. Conv.-Mze.

Die Herren :

Brunner, August Graf	100 fl. Conv.-Mze.
Colloredo-Wallsee, Franz Graf v.	50 » » »
Miesbach, Alois	50 » » »
Schwarzenberg, Johann Adolph Fürst v.	50 » » »

VORBERICHT.

V. Als

EHRENGABE

wurden die Abhandlungen und Berichte gesandt

an Seine Excellenz, Freiherrn

ALEXANDER VON HUMBOLDT.**VI. THEILNEHMER**

AN DEN ARBEITEN FÜR DEN VIERTEN BAND DER ABHANDLUNGEN.

Die Herren:

Brauer, Friedrich.
 Ettingshausen, Dr. Constantin v.
 Kenngott, Dr. Gustav Adolph.
 Koch, Dr. Albert.
 Massalongo, Dr. Abramo.

Morlot, Adolph v.
 Peche, Dr. Ferdinand.
 Reuss, Professor August Em.
 Riedl v. Leuenstern, Joseph.
 Schmidt, Gustav.

Spitzer, Simon.
 Suess, Eduard.
 Weber, C. O.
 Zigno, Achill De.

VII. THEILNEHMERAN DEN ARBEITEN FÜR DEN SIEBENTEN BAND DER BERICHTE DURCH VORTRÄGE ODER
SCHRIFTLICHE MITTHEILUNGEN.**Die Herren:**

Althaus, Freiherr v., Baden.
 Barrande, J., Prag.
 Boué, Dr. A.
 Brauer, Fr.
 Columbus, Prof. D., Linz.
 Czjžek, J.
 Emmrich, Prof. H., Meiningen.
 Ettingshausen, Dr. C. v.
 Foetterle, Fr.
 Frauenfeld, G.
 Glocker, Prof. E., Breslau.
 Gözsy, G. v.
 Haeufler, J. V.
 Haidinger, W.
 Hauer, Fr. Ritter v.
 Hingenau, O. Freiherr v.

Hörnes, Dr. M.
 Hubert, A. v., Agordo.
 Kenngott, Dr. G. A., Pressburg.
 Koch, Dr. A., Dresden.
 Marschall, A. F. Graf.
 Meyer, H. v., Frankfurt.
 Morlot, A. v., Bern.
 Müller, R.
 Neugeboren, J. L., Hermannstadt.
 Peche, Dr. F.
 Petko, J. v.
 Pöschl, E.
 Prettnner, J., Klagenfurt.
 Reuss, Prof. A. E., Prag.
 Riedl v. Leuenstern, J.

Rumler, K.
 Schlagintweit, Dr. A., Berlin.
 Schmidt, G., Joachimsthal.
 Seeland, F., Leoben.
 Senoner, A.
 Simony, Prof. Fr.
 Spitzer, S.
 Steiner, Fr.
 Suess, E.
 Szabó, Prof. J., Pesth.
 Voigt, Prof. Dr., Lemberg.
 Weber, C. O., Bremen.
 Zelebor, J.
 Zeuschner, Prof. L., Krakau.
 Zhishman, Dr. J.

Die verehrten Herren Theilnehmer an den Arbeiten für die „Naturwissenschaftlichen Abhandlungen“ erhalten den Band, der ihre Abhandlung enthält, wenn auch ihre Namen sich nicht in der Subscriptionliste finden, nebst dem Jahrgange der „Berichte über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften“, ebenso wie sie den Theilnehmern an der Subscription zukommen. Ein Exemplar des Jahrgangs der Berichte wird gleicherweise an die verehrten Herren Theilnehmer an den Arbeiten dieser durch Vorträge oder Mittheilungen zur Disposition gestellt.

VIII. Verzeichniss

der naturwissenschaftlichen Institute und Redactionen, an welche die „Abhandlungen“ und die „Berichte“ versendet werden.

- Altenburg.** Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes.
- Amsterdam.** Königl. Niederländ. Institut für Wissenschaften.
- Athen.** Naturforschende Gesellschaft.
- Bamberg.** Naturforschende Gesellschaft.
- Basel.** Naturforschende Gesellschaft.
- Berlin.** 1. Königl. Akademie der Wissenschaften.
2. Physikalische Gesellschaft.
3. Deutsche geologische Gesellschaft.
4. Redaction des Archivs für Mineralogie, Geognosie, Bergbau und Hüttenkunde von Karsten und v. Dechen.
5. Redaction des Repertoriums der Physik.
- Bern.** 1. Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften.
2. Naturforschende Gesellschaft.
- Bologna.** Herausgeber der „Annali di scienza“ u. s. w.
- Bonn.** Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande.
- Breslau.** 1. Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Akademie der Naturforscher.
2. Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.
- Brünn.** 1. Mähr.-Schles. Gesellschaft zur Beförderung der Natur- und Landeskunde.
2. Werner-Verein.
- Danzig.** Naturforschende Gesellschaft.
- Dürkheim.** Pollichia, naturwissenschaftlicher Verein der bairischen Pfalz.
- Edinburgh.** 1. Royal Society.
2. Wernerian Society.
3. Editor of the Edinburgh New Philosophical Journal.
- Emden.** Naturforschende Gesellschaft.
- Frankfurt.** 1. Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.
2. Physikalischer Verein.
- Genf.** 1. Société de Physique et d'histoire naturelle.
2. Redaction de la Bibliothèque universelle.
- Gießen.** Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
- Görlitz.** Naturforschende Gesellschaft.
- Göttingen.** 1. Königl. Gesellschaft der Wissenschaften.
2. Verein bergmännischer Freunde.
- Graz.** Geognostisch-montanistischer Verein für Steiermark.
- Greifswald.** Redaction des Archivs für Skandinavische Naturgeschichte.
- Haarlem.** Königl. Holländische Gesellschaft der Wissenschaften.
- Halle.** 1. Naturforschende Gesellschaft.
2. Naturwissenschaftlicher Verein.
- Hamburg.** Naturwissenschaftlicher Verein.
- Hermannstadt.** Naturhistorischer Verein.
- Innsbruck.** Geognostisch-montanistischer Verein.
- Klagenfurt.** K. k. Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues und der Industrie in Kärnten.
- Königsberg.** Naturforschende Gesellschaft.
- Leipzig.** 1. Kön. Sächs. Akademie der Wissenschaften.
2. Fürstl. Jablonowskische Gesellschaft.
3. Journal für praktische Chemie von Erdmann.
- Lemberg.** K. k. galizische Ackerbaugesellschaft.
- Linz.** Museum Francisco-Carolinum.
- London.** 1. Royal Society.
2. Government Geological Survey and Museum of Practical Geology.
3. Geographical Society.
4. Geological Society.
5. Palaeontographical Society.
6. Zoological Society.
7. Linnean Society.
8. Chemical Society.
- Lüttich.** Société Royale des Sciences.
- Mägdesprung bei Harzgerode.** Naturwissenschaftlicher Verein des Harzes.
- Mailand.** I. R. Istituto delle Scienze.
- Mannheim.** Verein für Naturkunde.
- Marburg.** Gesellschaft zur Beförderung der Naturwissenschaften.

- Minden.** Westphälische Gesellschaft zur Beförderung vaterländischer Cultur.
- Moskau.** Kaiserliche Gesellschaft der Naturforscher.
- München.** 1. Königl. Akademie der Wissenschaften.
2. Redaction der astronomischen, magnetischen und meteorologischen Arbeiten der königl. Sternwarte.
- Neapel.** Reale Accademia delle Scienze.
- Neubrandenburg.** Verein der Freunde der Naturgeschichte.
- Neufchatel.** Sociéte des sciences naturelles.
- Nürnberg.** Naturforschende Gesellschaft.
- Paris.** 1. Académie des Sciences.
2. Sociéte géologique de France.
3. Redaction des Annales des Mines.
- Pesth.** 1. Königl. Ungarische Naturforscher-Gesellschaft.
2. Geologischer Verein für Ungarn.
- Philadelphia.** Academy of natural sciences.
- St. Petersburg.** 1. Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.
2. Kaiserliches Corps der Bergwerks-Ingenieure.
- Prag.** 1. Königl. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
2. Patriotisch-ökonomische Gesellschaft.
3. Lotos. Naturhistorischer Verein.
- Regensburg.** 1. Redaction der botanischen Zeitschrift „Flora.“
2. Zoologisch-mineralogischer Verein.
- Riga.** Naturwissenschaftlicher Verein.
- Rostock.** Mecklenburgischer Patriotisch-Ökonomischer Verein.
- Rovigo.** Accademia dei Concordi.
- Solothurn.** Naturforschende Gesellschaft.
- Stettin.** Redaction der entomologischen Zeitung.
- Stockholm.** Königl. Schwedische Akademie der Wissenschaften.
- Stuttgart.** 1. Württembergischer Verein für Naturkunde.
2. Redaction des Jahrbuchs für Mineralogie, Geognosie u. s. w. von v. Leonhard und Bronn.
- Trier.** Gesellschaft nützlicher Untersuchungen.
- Venedig.** I. R. Istituto delle Scienze.
- Wien.** 1. Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.
2. K. k. Meteorologisches Institut.
3. K. k. Gartenbau-Gesellschaft.
4. K. k. Landwirthschafts-Gesellschaft.
5. N. ö. Gewerbe-Verein.
6. Zoologisch-botanischer Verein.
- Wiesbaden.** Verein für Naturkunde.
- Zürich.** Naturforschende Gesellschaft.

Von mehreren Instituten, welchen der erste Band der Abhandlungen zugesandt wurde, sind selbst bis jetzt noch die Rückantworten nicht eingelangt.

Ausdehnung und Inhalt lassen sich bei Tauschen mit Druckwerken von der Art des gegenwärtigen nicht genau abwägen. Grosse Institute werden gerne mehr geben als empfangen, so wie auch diese Abhandlungen und Berichte dort wo sie vielleicht durch weniger ausgedehnte Publicationen entgegnet werden, ihrerseits günstig aufgenommen werden, und wieder Anregung zu Arbeit geben mögen. Der Kreis der einzuladenden naturwissenschaftlichen Institute soll nach und nach erweitert werden; an solche die früher selbst einen Vorschlag zum Austausch machen wollen, ergeht dazu hier die freundlichste Einladung.

Die Einsendungen bitte ich gefälligst an Hrn. Wilhelm Braumüller, Buchhändler des k. k. Hofes und der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, zu richten.

IX. Summarischer Ausweis des Activ- und Passivstandes der Herausgabe.

1. Rechnung für das Subscriptionsjahr vom 1. Jänner bis 31. December 1850.

Activ.		I n B a a r e m :	Passiv.	
		Conv. - Mze.		
Vortrag vom Jahre 1848—49. Band III.			Vortrag vom Jahre 1848—49. Band III.	
Seite XIX			Seite XIX..... 4660 fl. 32 kr.	
9	Subscriptionsreste für 1846—47..	180 fl. — kr.	Subscribenten sind ausgetreten:	
34	» » » 1847—48..	680 » — »	3	für 1846—47 a 20 fl. 60 » — »
72	» » » 1848—49..	1440 » — »	7	» 1847—48 » » 140 » — »
1	Mehrzahlung von » » » 1848—49..	10 » — »	11	» 1848—49 » » 220 » — »
Neue Subscriptionsen :			Rechnungen : der Buchdruckerei 2921 » 53 »	
29	für 1846—47	580 » — »	für Holzschnitte	25 » — »
29	» 1847—48	580 » — »	» lithographische Zeichnungen.	675 » — »
32	» 1848—49	640 » — »	» lithographischen Druck	1326 » 38 »
	Mehrzahlungen	173 » 20 »	» Kupferdruck	58 » 12 »
89	für 1850 bezahlt	1780 » — »	» Verfertigte und angekaufte	
6	Mehrzahlungen bezahlt ...	410 » — »	Karten	763 » 20 »
89	für 1850 Rest	1780 » — »	» für Buchbinderarbeiten.....	30 » 51 »
2	Mehrzahlungen Rest	160 » — »	» Kanzleibedürfnisse, Frachten,	
5	Vorauszahlungen für 1851 ...	100 » — »	Spesen, Porto u. s. w.....	189 » 13 »
Für verkaufte Druckwerke		1176 » 31 »	Subscriptionsreste :	
Saldo an Passivrest		4700 » 48 »	6	für 1846—47
			22	» 1847—48
			41	» 1848—49
			89	» 1850
			2	Mehrzahlungen
		14390 fl. 39 kr.		14390 fl. 39 kr.

I n D r u c k w e r k e n :

Vortrag vom Jahre 1848—49. III. Band.		Verkauf	1688 fl. 20 kr.
Seite XIX.....		Zur Disposition an 178 Subscribenten	4450 » — »
22809 fl. 40 kr.		an 29 neue Subscr. pro 1846—47	580 » — »
Neue Auflage von		» 29 » » » 1847—48	696 » — »
600	Ex. Abhandlungen IV. Bd.	» 32 » » » 1848—49	1034 » 40 »
	zu 23 fl.	» 99 Institute	2475 » — »
	13800 » — »	» 1 als Ehrengabe und an 10 Theil-	
750	Ex. Berichte VII Bd. a 2 fl.	nehmer an den Arbeiten für	
	1500 » — »	die Abhandlungen	275 » — »
	angefertigte und erkaufte Karten	» 40 dto für Berichte.....	80 » — »
	1376 » 20 »	» A. v. Morlot 50 Karten.....	100 » — »
Von dem bis Ende 1849 zur Disposition		Dem Herausgeber zur Disposition ...	181 » 40 »
Gelassenen noch nicht verabfolgt		Die Abgabe an ausgetretene Subscri-	
	1562 » 40 »	benten	200 » 20 »
		An verschiedene Correspondenten ...	271 » 20 »
		An später zugewachsene Institute ...	924 » 20 »
		Saldo — Vorrath —	28092 » — »
		41048 fl. 40 kr.	41048 fl. 40 kr.

2. Vortrag auf das Subscriptionsjahr vom 1. Jan. bis 31. Dec. 1851.

In B a a r e m :

Activ.	Conv. - Mze.	Passiv.	Conv. - Mze.
Subscriptionsreste:		Zahlungsrest	4700 fl. 48 kr.
6 Beträge für 1846—47.....	120 fl. — kr.		
22 Beträge für 1847—48.....	440 » — »		
41 Beträge für 1848—49.....	820 » — »		
89 Beträge für 1850	1780 » — »		
2 Mehrbeträge	160 » — »		

In D r u c k w e r k e n :

Saldo - Vortrag .. 28092 fl. — kr.

Geschlossen den 1. November 1851.

J. Czjzek m. p.

W. Haidinger m. p.

X. Verzeichniss der den Theilnehmern an der Subscription bisher zur Disposition gestellten Druckwerke.

1. Für das Subscriptionsjahr vom 1. Juli 1846 bis 1. Juli 1847.

	Conv. - Mze.
Naturwissenschaftliche Abhandlungen u. s. w. I. Band. Mit XXII Tafeln	15 fl. — kr.
Berichte über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften. I. Band 1 fl. 40 kr.	
II. Band 3 fl. 20 kr.	5 » — »
	20 fl. — kr.

2. Für das Subscriptionsjahr vom 1. Juli 1847 bis 1. Juli 1848.

Naturwissenschaftliche Abhandlungen u. s. w. II. Band. Mit XXX Tafeln	18 fl. — kr.
Berichte u. s. w. III. Band 3 fl. 20 kr. IV. Band 2 fl. 40 kr.	6 » — »
J. Czjzek's Geognostische Karte der Umgebungen von Wien	5 » — »
	29 fl. — kr.

3. Für die Subscriptionsperiode vom 1. Juli 1848 bis 31. December 1849.

Naturwissenschaftliche Abhandlungen u. s. w. III. Band. Mit XXXIII Tafeln	20 fl. — kr.
Berichte u. s. w. V. Band 1 fl. 40 kr. VI. Band 1 fl. 20 kr.	3 » — »
J. Czjzek. Erläuterungen zur geognostischen Karte der Umgebungen Wiens	1 » 40 »
Dr. Fr. Rossi. Systematisches Verzeichniss der zweiflügelichten Insecten (Dipteren) des Erzherzogthums Oesterreich	1 » 40 »
A. v. Morlot. Die Umgebungen von Leoben, VIII. Section der Generalstabskarte, geologisch colorirt	2 » — »
	27 fl. 20 kr.

4. Für das Subscriptionsjahr vom 1. Januar bis 31. December 1850.

Naturwissenschaftliche Abhandlungen u. s. w. IV. Band. Mit XXX Tafeln	23 fl. — kr.
Berichte u. s. w. VII. Band	2 » — »
	25 fl. — kr.
Gesamtsumme	101 fl. 20 kr.

I n h a l t.

	Seite
Vorbericht	III
I. Subscriptionsliste Nachtrag für die drei verfloßenen Subscriptionsperioden vom 1. Juli 1846 bis letzten December 1849	V
II. Subscription für die Periode vom 1. Juli 1848 bis 31. December 1849	—
III. Subscriptionsliste auf das Jahr vom 1. Jänner bis 31. December 1850	VI
IV. Ausserordentliche Subscription auf das Jahr vom 1. Jänner bis 31. December 1850	IX
V. Ehrengabe	X
VI. Theilnehmer an den Arbeiten der Abhandlungen	—
VII. Theilnehmer an den Arbeiten der Berichte	—
VIII. Verzeichniß der naturwissenschaftlichen Institute und Redactionen, an welche die Abhandlungen und Berichte versendet werden	XI
IX. Summarischer Rechnungsausweis.	XIII
X. Verzeichniß der bisher herausgegebenen Druckwerke	XIV

I. Abtheilung.

	Abth. Seite
I. Achille de Zigno. Coup d'oeil sur les terrains stratifiés des Alpes Venitiennes. Mit I lithographirten Tafel	I. 1
II. Dr. August E. Reuss. Die Foraminiferen und Entomostraceen des Kreidemergels von Lemberg. Mit V lithographirten Tafeln	» 17
III. Dr. Albert Koch. Das Skelet des <i>Zeuglodon macrospodylus</i> . Mit I lithographirten Tafel	» 53
IV. Dr. Constantin v. Ettingshausen. Beiträge zur Flora der Vorwelt. Mit VI lithographirten Tafeln	» 65

II. Abtheilung.

I. Adolph v. Morlot. Ueber erratisches Diluvium bei Pitten. Mit II lithographirten Tafeln.	II. 1
II. C. O. Weber. Ueber die Süßwasserquarze von Muffendorf bei Bonn. Mit II lithographirten Tafeln	» 19
III. Joseph Riedl v. Leuenstern. Ueber Raute, Prisma und Kegel in akrometrischer Beziehung. Mit II Kupfertafeln.	» 47
IV. Dr. Gustav Adolph Kenngott. Ueber die Achatmandeln in den Melaphyren, namentlich die von Theiss in Tirol. Mit II lithographirten Tafeln	» 71

III. Abtheilung.

I. Simon Spitzer. Skizzen aus dem Gebiete der höheren Gleichungen	III. 1
II. Dr. Ferdinand Peche. Integration der elliptischen Functionen in geschlossener Form	» 19
III. Dr. Ferdinand Peche. Allgemeine Auflösung der Gleichungen dritten Grades mit Vermeidung imaginärer Formen im irreducibeln Fall	» 125

IV. Abtheilung.

I. Friedrich Brauer. Beschreibung und Beobachtung der österreichischen Arten der Gattung <i>Chrysopa</i> . Mit II lithographirten Tafeln	IV. 1
II. Gustav Schmidt. Punct, Linie und Ebene im Raume, mit Zugrundelegung eines gleichwinklig-schiefwinkligen Coordinaten-Systems. Mit Vorwort von Johann v. Pettko	» 13
III. Dre. Abrao Massalongo. Osteologia degli Orsi del Veronese. Mit IV lithographirten Tafeln	» 31
IV. Eduard Suess. Ueber böhmische Graptolithen. Mit drei lithographirten Tafeln	» 87

An den Buchbinder.

Die Tafeln werden eingebunden wie folgt:

I. Abtheilung.

Tafel I. DE ZIGNO, Alpes Venitiennes	gegenüber der Seite	16
» II — VI. REUSS, Foraminiferen	» » »	52
» VII. KOCH, Zeuglodon	» » »	64
» VIII — XIII. v. ETTINGSHAUSEN, Flora der Vorwelt	» » »	100

II. Abtheilung.

Tafel I — II. v. MORLOT, Pitten	gegenüber der Seite	18
» III — IV. WEBER, Muffendorf	» » »	46
» V — VI. RIEDL v. LEUENSTERN, Raute, u. s. w..	» » »	70
» VII — VIII. KENNGOTT, Achatmandeln	» » »	104

III. Abtheilung. Keine Tafeln.

IV. Abtheilung.

Tafel I — II. BRAUER, Chrysopa	gegenüber der Seite	12
» III — VI. MASSALONGO, Orsi fossili	» » »	86
» VII — IX. SUSS, Graptolithen	» » »	132
Die Tafel der Errata	» » »	86

D r u c k f e h l e r.

Seite	Zelle	statt	lies
53	4 v. u.	Jos.	Joh.

I. Coup d'oeil sur les Terrains stratifiés des Alpes Venitiennes.

Par

Achille De-Zigno,

Membre de la Société géologique de Londres, de l'Académie impériale et royale des sciences, belles lettres et arts de Padoue, de la Société géologique de France, de l'Académie royale des sciences de Turin, des Académies de Verone et Udine, des Athénées de Florence et de Venise etc. etc.

Présenté à la séance de l'Institut I. R. géologique du 16. Avril 1850.

La région qui forme l'objet de ce travail renferme plusieurs localités importantes qui attirèrent en tout temps l'attention et les études des naturalistes les plus éminents.

Les hautes montagnes qui la bordent au nord, et les collines éparses dans la plaine sillonnées en toutes les directions par des vallées et des torrents nous présentent une étendue de terrain facile à exploiter, et remplie de faits d'un haut intérêt scientifique.

Quoique les progrès de la géologie ne datent que d'environ un demi siècle, nous voyons cependant que les phénomènes présentés par nos Alpes n'échappèrent pas aux observations des savants de cette partie de l'Italie, même à une époque assez reculée et bien avant que la géologie ne fût élevée au rang d'une science.

FRACASTORO, ZANNICHELLI, VALLISNIERI, LAZZARO MORO, et le célèbre ARDUINI nous laissèrent des écrits précieux que nous devons aux études qu'ils entreprirent sur nos montagnes. Le dernier surtout devança son époque et nous laissa entrevoir les principes de la belle théorie qui fût depuis développée si savamment par l'illustre DE BUCH sur l'action modifiante des roches ignées.

FESTARI écrivit de bons mémoires sur les différentes roches qu'il observa dans nos Alpes. FORTIS illustra de bonne heure les fossiles du Veronais et du Vicentin et les phénomènes présentés par les basaltes. Il voyagea, compara nos terrains à ceux des autres pays et répandit le gout de la géologie dans la société de son temps.

STRANGE et OROLOGIO publièrent des ouvrages intéressants sur les Monts Euganéens sur le Vicentin et sur le Frioul. Plus tard BROCCHI, MARZARI, et DA RIO poursuivirent et développèrent sur une plus grande échelle les recherches de leurs antecesseurs.

En attendant deux grandes collections de fossiles se formaient l'une par les soins du Comte GAZZOLA à Verone, et l'autre par ceux de Mr. CASTELLINI à Castelgomberto.

Ces nobles exemples furent bientôt suivis par d'autres et nous vîmes paraître en peu de temps les collections de Mr. SCORTIGAGNA à Vicence, de Mr. PAROLINI à Bassano, de

MR. MARASCHINI à Schio, de MR. DA RIO à Padoue, outre celles que BROCCHI, MARZARI-PENCATI, et BREISLACK préparèrent par ordre du gouvernement.

Après les beaux travaux publiés par BRONGNIART, BERTRAND-GÉSLIN, MARASCHINI, TRETTENERO, BOUÉ sur la structure des Alpes du Vicentin, du Bellunais et du Tyrol méridional, le Prof. CATULLO, MR. PASINI et MR. FUCHS en firent pendant plusieurs années leur domaine exclusif et enrichirent la science de plusieurs ouvrages intéressants sur la géologie de ces contrées.

Mais la classification de nos terrains secondaires et tertiaires était bien loin de se montrer au niveau des connaissances actuelles. Car on n'avait pas eu la patience d'en étudier les fossiles et de les comparer consciencieusement à ceux des formations déjà bien connues dans les autres pays.

Convaincu que l'étude des faits présentés par cette partie des Alpes, nous donnera la clef de la géologie d'une grande partie de l'Italie, je poursuivis pendant plusieurs années mes recherches, me donnant particulièrement pour but de comparer les terrains stratifiés des Alpes Venitiennes avec ceux des endroits les plus classiques de l'Europe. De cette manière je suis parvenu à reconnaître et fixer quelques horizons géologiques de nos terrains, à rectifier plusieurs observations qu'on avait faites avant moi, à reconnaître la justesse de celles qui s'accordent avec les faits découverts postérieurement.

J'ai dû tour à tour me servir d'observations stratigraphiques et d'observations paléontologiques selon les localités; j'ai dû étudier les rapports entre plusieurs faits isolés et plusieurs observations détachées, chercher la cause des différences qui paraissaient exister entre les faits observés ici et les lois de la science qui se montrent constantes dans les autres pays, enfin je crois être parvenu à trouver l'accord de toutes les observations, et une généralisation plus rationnelle des connaissances géologiques de nos montagnes aura été, je l'espère, le fruit de nos études. Jettant les yeux sur la région sur laquelle j'entreprends de vous entretenir, nous voyons que ses bornes naturelles sont à peu près le Tagliamento à l'est, au nord la Carinthie et le Tyrol, à l'ouest l'Adige, au sud la plaine qui s'étend vers le Po. Le Tagliamento, après avoir couru de l'ouest à l'est par une vallée parallèle à la chaîne, et qu'on appelle Canal de Sochieve en recevant plusieurs torrents qui descendent par des vallées qui courent du nord au sud tels que le Lumiei, le Degan, le But, et la Fella, tourne brusquement au sud et débouche dans la plaine entre S. Daniele et Spilimbergo, après avoir tour à tour traversé les terrains jurassiques, crétacées et tertiaires, tandis que les vallées par où descendent les torrents que je viens de nommer laissent à découvert les terrains plus anciens que je n'hésite pas de rapporter au trias. Le célèbre DE BUCH avait publié depuis 1824, que le Tagliamento depuis sa source jusqu'au confluent de la Fella forme la limite septentrionale des montagnes calcaires et la limite méridionale du terrain qu'il appelait alors terrain de Grauwacke. Or comme cette partie de la vallée est comprise dans le canal de Sochieve qui court en ligne parallèle à la direction de la chaîne, les couches de laquelle ont une inclination générale du nord-ouest vers le sud-est, il est aisé de

reconnaître la justesse de ce que Mr. DE BUCH avait avancé à cette époque, car les couches calcaires s'arrêtent ici en échelon, tandis que les couches des terrains plus anciens se trouvent à découvert remontant les vallées qui débouchent sur la rive gauche du Tagliamento et qui conduisent les torrents formés par les eaux qui découlent de la crête principale. C'est dans ces vallées que des grés micacées, des schistes argileux et une puissante formation arénacée accompagnée par des dépôts de gypses et de calcaires magnésifères et bitumineux, nous annonce la présence des formations plus anciennes. On a trouvé des couches de houille dans le calcaire que je viens de nommer. Il paraît même constant que la houille se trouve ici intercalée aux couches de calcaire magnésifère, et le Prof. MENEGHINI botaniste distingué, qui s'occupa de l'étude de ce combustible ne saurait décider si cette formation appartient au trias, ou au zechstein. Quant à moi je pense que cette formation puisse se rapporter au trias d'après les fossiles que j'ai pu y reconnaître. Ce sont des *Avicules* parmi lesquelles l'*Avicula socialis*, la *Terebratulula vulgaris*, et d'autres coquilles peu déterminables et à facies éminemment triassiques. Il est vrai qu'on n'a pas trouvé ces fossiles dans les puissantes couches calcaires qui sont inférieures aux grès, ce qui me fait soupçonner qu'elles puissent appartenir à une formation plus ancienne que celle du muschelkalk, ou qu'elles sont inférieures aux couches à *Avicula socialis* et qu'elles ne sont pas caractérisées par aucune trace des mêmes fossiles. Il n'en est pas moins vrai pourtant que les couches de psammite qui recouvrent le calcaire n'appartiennent à la formation triassique. Dans la carte de DECHEX publiée en 1839 on voit tracée dans la partie au nord du Tagliamento entre les sources de la Piave et du Degan, une puissante formation de schistes argileux qui se prolonge entre le massif jurassique du Frioul et les terrains péciiliens des alpes carniques. En poussant mes recherches de ce côté je ne doute pas que je parviendrai à découvrir les terrains plus anciens de cette chaîne, quoique du côté de Paluzza, Rigolato, Sapada, jusque vers l'origine de la Piave prédominant dans la partie supérieure des montagnes les couches puissantes des étages de la formation jurassique. Ces couches composent tous les différents massifs qui bordent les vallées par où descendent les torrents Argino, Meduna, Zelline, et forment les cimes des hautes montagnes du Frioul, dans la partie inférieure desquelles nous avons vu au nord paraître le trias, et nous voyons dans certains bassins et dans la partie méridionale se manifester supérieurement les couches néocomiennes et les couches de la craie. Le terrain tertiaire se développe au contraire dans les collines qui entourent les bords du Tagliamento à sa sortie des hautes Alpes et particulièrement à l'orient de sa rive gauche en deça de Venzona, et Gemona, au sud de laquelle entre S. Daniele et Trigesimo des collines fertiles et embellies par des verdoyants pâturages renferment des terrains plus recents composés de sables et de cailloux qui se lient au terrain tertiaire dans la partie inférieure, tandis que supérieurement ils présentent les caractères du terrain diluvien. Dans la partie septentrionale du Frioul le trias continue à se montrer sous le banc jurassique jusque dans les vallées qui entourent l'origine de la Piave, et dévoilent la

base des éminences du Comelico dans la partie septentrionale du Cadore mais dans cette partie de nos montagnes les bancs arénacés inférieurs acquièrent une plus grande puissance et reposent sur le micaschiste qui forme la base plus ou moins visible de toutes les montagnes de la Lombardie et de la Venetie et qui se montre particulièrement sur le versant septentrional de ce grand contrefort des Alpes du Tyrol et de la Carinthie. Le micaschiste et les grès du trias se découvrent aussi dans les vallées qui tournent vers le sud et bordent celle de la Piave d'où on peut le suivre dans le Cadore. Ces formations se voyent bien développées dans les montagnes qui sont comprises entre la vallée de Sexter et celle de la Boite, dans quelques endroits de laquelle on voit le trias recouvert par des schistes argileux et un calcaire grisâtre que je crois pouvoir rapporter au lias à cause de sa position, mais qui ne m'a pas encore dévoilé de fossiles. Descendant la vallée de la Boite et tournant au sud on voit que les couches des terrains plus anciens sont disparues sous les bancs jurassiques qui forment le massif des montagnes qui composent les flancs de cette dernière vallée jusqu'au bassin de Belluno, tandis que les vallées de Zoldo et du Cordevole, qui viennent à déboucher sur la rive droite de la Piave offrent l'opportunité de revoir notre plus ancienne formation fossilifère reparaitre sur une ligne parallèle à celle où nous la vîmes se montrer dans la vallée de la Boite. On peut continuer à observer cette ligne dans le district d'Agordo, dans celui de Primiero jusqu'à la Valsugana et au bassin de Trente sur une ligne qui court de nord-est, au sud-ouest, et qui forme angle droit avec l'inclination générale des terrains stratifiés de nos montagnes qui penche au contraire du nord-ouest, au sud-est. Tous les massifs au nord de cette ligne, montrent la préminence des formations plus anciennes le plus souvent bouleversées par le granit et le porphyre, qui sont une ramification de ceux du Tyrol, et par le melaphyre. Au contraire au sud de cette ligne s'élève le grand massif ou contrefort qui renferme en stratification concordante les terrains oolitique, néocomien, crétacé, eocène, miocène et pliocène (?). Jusqu'ici mes observations tendent à confirmer ce que l'illustre Sir Rod. IMPEY MURCHISON avait avancé depuis 1829, c'est à dire la concordance dans nos montagnes des bancs jurassiques, crétacés, et tertiaires. Nous voyons cette concordance se dévoiler même dans les endroits où les roches éruptives ont le plus bouleversé nos terrains et s'étendre aussi aux formations inférieures, car il est facile de reconnaître le parallélisme des couches depuis le micaschiste jusqu'au jura, même dans le district de Recoaro, qui forme une espèce d'îlot triassique soulevé par les éruptions doléritiques au sud de la ligne que je viens de marquer et au milieu du grand massif jurassique du Vicentin. Par les observations que j'ai pu faire dans le Bellunais et qui confirment en partie celles de Mr. CATULLO nous pouvons fixer la limite méridionale du micaschiste et du terrain triassique du Tyrol depuis le bassin de Trente le long de la Brenta dans la Valsugana, puis à travers le canal de S. Bovo, la vallée du Cismon, celle du Mis, celle du Cordevole, celle du Maé, celle de la Boite, puis dans la partie supérieure du Cadore, où elle tourne à l'est et suit la rive gauche du Tagliamento. Il est vrai que même au delà de cette

limite les terrains jurassiques forment souvent la partie la plus haute des montagnes, mais le fond des vallées dévoile toujours les couches plus anciennes qui s'étendent de ce point à former la partie principale des montagnes qui bordent les vallées de Fiemme et de Fassa de manière que dans ces deux vallées, ainsi que dans les vallées transversales de Travignolo, de S. Pellegrino, de Livinalungo, et dans la célèbre localité de S. Cassiano on trouve partout la formation triassique bien développée et marquée par des fossiles les plus caractéristiques. La ligne que je viens de tracer et qui est constatée par les observations locales les plus diligentes que j'ai entrepris moi même, et par celles qui se trouvent éparses dans les écrits des MM. PASINI, FUCHS et CATULLO, nous forcera d'ajouter à l'extension des terrains plus anciens, une partie comprise dans les terrains jurassiques des cartes générales de Mr. DECHEN et de Mr. MORLOT. Les profondes vallées qui coupent en plusieurs directions les montagnes du Bellunais présentent l'opportunité d'observer l'extension de ces terrains et leur concordance avec les couches de tous les terrains qui leur sont superposés. Effectivement les masses jurassiques qui forment les crêtes des hautes montagnes du Tyrol, du Bellunais, du Cadorn et du Frioul, descendent jusqu'au fond des vallées de la Piave et de la Brenta, jusqu'aux collines crétacées et tertiaires avec lesquelles s'effacent peu à peu les éminences qui bornent au nord la plaine de la Venetie. C'est en remontant la vallée de la Brenta, de Bassano à Borgo di Valsugana, celle de la Piave, de Belluno, à Perarolo, la vallée Pantena dans le Veronais, la route qui de Vallarsa conduit à Roveredo et de Roveredo à Trente ou la vallée de l'Astico dans les Sette-comuni, ainsi que les vallées secondaires qui traversent ce grand plateau calcaire, qu'on peut étudier dans les escarpements de la route et des torrents la série oolitique de cette région. Mais avant de m'occuper du jura proprement dit, il faut que je rappelle l'attention sur les couches qui semblent appartenir à une époque plus ancienne que le jura et plus récente que le trias. Au dessus des couches de cette dernière formation on voit paraître en plusieurs points de nos Alpes des schistes argileux, bruns ou verdâtres accompagnés d'un calcaire gris bleuâtre avec des veines spathiques qui semblent former un groupe inférieur au système oolitique et qu'on puisse rapporter au lias. Dans le Cadorn, dans le Bellunais, et dans le Tyrol il est facile de rencontrer ces formes qui d'ailleurs nous laissent en doute par le manque des fossiles sur la place qu'elles occupent dans la série chronologique des terrains. Dans les grandes vallées de la Piave, de la Brenta, de l'Astico, de l'Agno, de l'Adige, ces apparences manquent, au contraire dans ces localités on trouve au dessous des couches qui appartiennent, selon moi, décidément à l'oolite inférieure des bancs de calcaire compacte et de calcaire cristallin qui alternent entre eux, et qui semblent dues à une alteration du terrain qui doit avoir été déposé entre le keuper et le système bathonien. La forme cristalline serait suffisante à nous annoncer un sédiment altéré par des causes plutooniques, mais par tout où on voit ces couches reposer sur celles du système triassique, ce dernier ne montre aucune trace de métamorphisme, il est même nécessaire d'observer que tous les bancs sédimentaires qui gisent dans nos montagnes entre le micaschiste et

le calcaire cristallin que je viens de nommer montrent de la manière la plus claire qu'ils n'ont souffert aucune alteration dans leur structure par le moyen de l'action plutonique, dans le nombre desquels ne sont pas à placer les alterations partielles dues à des phénomènes produits par le contact des roches ignées et qui sont circonscrits à des localités particulières et n'influèrent pas sur le facies général de ces terrains considérés dans leur ensemble.

Sur les bancs calcaires cristallins qu'on voit dans toutes les vallées de nos montagnes et qui semblent indiquer la limite inférieure de la formation jurassique, se développe partout la forme oolitique qui alterne souvent avec un calcaire gris compacte et avec des brèches à éléments toujours calcaires. Dans les couches de calcaire cristallin ou saccharoïde les fossiles sont rares, comme aussi dans la formation oolitique. On commence à en voir seulement dans les couches de calcaire gris, jaunâtre et rougeâtre interposé à l'oolite, dans laquelle on trouve aussi quelquefois des moules de troques et de mélanies, qui ressemblent assez aux espèces caractéristiques de l'Oolite inférieure de l'Angleterre, de la France et de l'Allemagne. Ces couches compactes et grisâtres renferment aussi des échantillons plus ou moins conservés d'une nouvelle espèce de perne dont la configuration extérieure ressemble assez à celle de la *Gervillia Renauxiana* ORB. C'est supérieurement à ce groupe composé de couches alternantes de calcaire oolitique et de calcaire compacte, que se trouvent des couches grises coquillères et celles qui renferment les célèbres phytolites de Rotzo dans les Sette Comuni.

Personne, que je sache, ne s'est occupé de l'étude de ces empreintes végétales desquelles je donnerai les figures et la description dans mon ouvrage sur nos Alpes, je puis en attendant annoncer que ce banc appartient aussi, selon moi à l'oolite inférieure. Une marne alternante avec des couches couleur de cendre qui renferment parmi des restes mal conservés d'autres fossiles, la *Terebratula ornithocephala*, la *Terebratula bullata*, une astarte et une nérinée, nous annonce le commencement de l'Oolite moyenne. C'est ici que commencent les couches d'un marbre lumachelle blanc, jaune, et rouge qui ressemble à celui d'Arzo en Lombardie où il contient la *Terebratula ornithocephala*, mais dans lequel je n'ai pas trouvé ici d'autres fossiles hormis les traces d'une petite Astarte. C'est au dessus de cette lumachelle qui est constante dans toutes nos montagnes, qu'on trouve le calcaire, rouge, blanc, ou gris qu'on appelle chez nous calcaire ammonitifère à cause de l'innombrable quantité d'ammonites qui peuplent ses couches.

Dans le bassin de Trente, dans les montagnes qui bordent les vallées par où descend l'Adige, dans le bassin de Roveredo, dans les hautes montagnes du Veronais, dans toute la grande masse calcaire des Sette Comuni et dans celle que depuis la rive gauche de la Brenta s'étend jusqu'au Bellunais et au Frioul on peut suivre partout cet horizon bien marqué par ces fossiles et même dans le groupe des monts Euganéens qui surgit comme un îlot au milieu de la plaine, et qui est éloigné de trente milles environs de la chaîne, je suis parvenu à reconnaître au milieu des bouleversements produits par les trachytes

et par les basaltes, la formation jurassique par la présence du calcaire ammonitifère riche en fossiles. Les fossiles de ce banc nous dévoilent sa correspondance avec les terrains oxfordien et corallien de l'Angleterre et ne peuvent être confondus avec ceux des autres calcaires rouges de l'Italie qui ont été rapportés au lias. On y trouve en grande quantité

L' *Ammonites anceps*,
 „ *Athleta*,
 „ *Viator* ORB.,
 „ *Honnairei* ORB.,
 „ *Zignodianus* ORB.,
 „ *Tatricus* PUSCH,

Le *Cidaris coronata*,
 L' *Ananchites bicordata*,
 Le *Glypticus hieroglyphicus* ;

et dans les couches les plus supérieures

L' *Ammonites perarmatus*,
 „ *biplex* Sow.

beaucoup d'*Aptychus* de la famille des lamellosi et enfin la *Terebratula diphya*, et une autre la *Terebratula triangulus*. Il paraîtrait donc qu'on puisse voir dans les couches les plus superficielles du calcaire ammonitifère qui sont aussi les plus argileuses un représentant du jura supérieur. C'est au dessus du calcaire ammonitifère que nous voyons paraître en stratification concordante, tant sur les plateaux que sur le versant méridional de la chaîne, les différents groupes de la formation crétacée.

Jusqu'à présent les géologues Italiens en avaient compris toutes les stratifications sous la dénomination de *scaglia* qu'ils calculaient être un équivalent des bancs crétacés supérieurs, tandis que le calcaire ammonitifère pour plusieurs d'entre eux était le représentant du grès vert inférieur. Mr. DE BUCH à la réunion des naturalistes Italiens qui eut lieu à Milan en 1844 démontra, que le calcaire ammonitifère appartient au jura. et les fossiles que j'y ai découverts depuis, m'ont mis à même d'établir son appartenance au groupe oxfordien.

Egalement par les fossiles je suis parvenu à distinguer d'une manière incontestable les différents bancs du terrain crétacé qui lui sont supérieurs et qui commencent par un calcaire blanc, quelquefois grisâtre à fractures conchoïde qu'on appelle chez nous *biancone*.

La concordance de ces couches qui reposent immédiatement sur les stratifications supérieures du terrain ammonitifère l'avait fait classifier comme appartenant au jura supérieur par quelques géologues qui n'en avaient pas connus les fossiles, tandis que d'autres se basant sur les caractères minéralogiques le confondaient avec certains couches de la *scaglia*, qui quoique plus minces ont beaucoup d'analogie avec le *biancone* et ne peuvent en être distingués que par les fossiles.

C'est dans le biancone des Monts di Vignola, dans les Monts Euganéens que je trouvai pour la première fois des Criocéras, et précisément le *Crioceras Emerici* qui caractérise le terrain néocomien inférieur.

Des lors je soupçonnai que cette roche fut chez nous le représentant du terrain néocomien et je ne tardai pas à en acquérir l'assurance par l'étude des fossiles du biancone que je recueillis moi même, et par ceux que j'eus l'opportunité de voir dans les collections de l'université et du séminaire de Padoue, et dans celles de Mr. DA RIO et de Mr. PAROLINI.

Ainsi moyennant des recherches suivies j'ai pu reconnaître dans le biancone des Monts Euganéens dans le Padouan, dans celui qui couvre le plateau jurassique des Sette Comuni, dans celui qui forme la base des collines subalpines du Vicentin et qui s'étend tout le long des montagnes jusqu'au Bellunais et au Frioul, les fossiles les plus caractéristiques du terrain néocomien. Ce sont

- Les *Belemnites Latus*,
 „ *Dilatatus* DE BLAINVILLE,
 Les *Ammonites Incertus* ORB.,
 „ *Difficilis* ORB.,
 „ *Quadrisculatus* ORB.,
 „ *Grasianus* ORB.,
 „ *Morchianus* ORB.,
 „ *Cryptoceras* ORB.,
 „ *Subfimbriatus* ORB.,
 „ *Recticostatus* ORB.,
 „ *Juillieti* ORB.,
 „ *Astierianus* ORB.,
 „ *Inaequulicostatus* ORB.,
 „ *Infundibulum* ORB.

Les *Crioceras Villiersianus*, *Duvali*, *Emerici* de LEYMERIE, les *Ancycloceras pulcherrimus*, *Puzosianus* ORB., les *Aptychus diday*, et *radians* COQUAND. Dans les couches plus supérieures j'ai trouvé même l'*Hippurites néocomiensis* de Mr. d'ORB. qui serait un indice du terrain aptien ou néocomien supérieur de manière qu'il est ainsi prouvé par mes observations que les deux étages du terrain néocomien se trouvent dans les Alpes Venitiennes et qu'ils y sont représentés par notre biancone. Mes études paléontologiques après m'avoir aidé à distinguer le véritable terrain néocomien de nos contrées m'ont mis à même de découvrir quelques traces d'une formation que jusqu'ici les géologues Italiens n'avaient pu reconnaître dans nos Alpes. Je veux parler de l'étage du gault ou du terrain albien de Mr. d'ORBIGNY. Quelques céphalopodes qui se trouvent dans un calcaire argileux, blanchâtre et qu'on observe superposé aux couches néocomiennes dans les plateaux des montagnes des Sette Comuni dans le Vicentin,

m'ont offert les indices de cet étage. D'abord ce sont des traces d'un *Hamites* que j'ai trouvé près de Galio et qui pourrait bien être le *Hamites Bouchardianus* d'ORB. qui a été trouvé par Mr. d'ORBIGNY et Mr. BOUCHARD de Chantereaux à Wissant dans les argiles du gault. Ensuite un jeune individu de l'*Ammonites Velledae* MICHELIN, qu'on m'a apporté des environs de Canove, un autre ammonite trouvée dans le Val Frenzena, et qui est bien l'*Ammonites Roissyanus* d'ORB. enfin l'*Ammonites nodosocostatus* d'ORB. qui a été trouvé dans le gault à Escarnolle dans le Var par M. ASTIER et qu'on a trouvé ici dans les environs de Galio.

Ce peu de fossiles peuvent cependant nous autoriser à annoncer que les couches argileuses, blanchâtres, supérieures au biancone à fossiles néocomiens renferment dans les *Sette Comuni* des espèces du gault, et que cette formation existe par consequence dans nos montagnes quoique les couches qui la composent puissent être facilement confondues avec celles des bancs supérieurs et celles des bancs inférieurs à cause de l'analogie et même de l'identité de leur composition minéralogique. Les fossiles seuls peuvent signaler cet horizon. Entre les bancs que nous venons de décrire et ceux de la scaglia que je rapporte au terrain sénonien, se développe un étage calcaire dont la puissance varie selon les localités et qui est composé par un assemblage de couches d'une roche très dure, brechoïde, qui renferme dans sa pâte des cailloux également calcaires et une grande quantité de petits fragments informes et spathifiés qui pourraient bien être des débris de coquilles et qui donnent à la roche particulièrement dans le Trévisan sur la montagne appelée la *Monfenera* une apparence cristalline. Ce banc est bien plus développé dans le Bellunais que dans les autres provinces. C'est dans les montagnes qui entourent le lac de S. Croce et forment les éminences de l'Alpago qu'il a été signalé par MM. CATULLO et PASINI. Le premier le rapporte au terrain néocomien, le second lui attribuait une plus grande ancienneté, quant à moi, je crois pouvoir le rapporter au terrain turonien autant par sa position géologique que par les fossiles qu'il renferme, car parmi un bon nombre d'espèces nouvelles que le Prof. CATULLO a illustrées nous en trouvons d'autres bien connues comme caractéristiques de la craie chloritée. Les espèces nouvelles de Mr. CATULLO sont les suivantes :

Nerinaea Borsoni,
Hippurites Nannus,
 „ *Contortus*,
 „ *Maximus*,
 „ *Fasciatus*,
 „ *Rugulosus*,
 „ *Fortisii*,
 „ *Turricula*,
 „ *Dilatatus*,

A. DE-ZIGNO.

- Hippurites Imbricatus*,
 „ *Zoveti* ;
Sphaerulites Duplovalvata,
 „ *Umbellata*,
 „ *Da Rio*,
 „ *Gazola* ;
Baculites Alpaghina,
 „ *Flexuosa*.

Celles qui m'ont décidé à classer ce banc comme appartenant à l'étage turonien de Mr. d'ORBIGNY sont les suivantes :

- Actaeonella Laevis*,
 „ *Gigantea* ;
Actaeon Ovum,
Hippurites Cornu-pastoris,
 „ *Organisans*,
Radiolites Pousiana.

Je crois que les caractères paléontologiques ne peuvent faire admettre une classification de ce terrain différente de celle que je propose et qui confirme ce que Mr. d'ORBIGNY avait annoncé depuis long temps, que les rudistes de l'Italie appartiennent à sa troisième zone. On a soutenu que les rudistes de cette partie de l'Italie appartiennent au terrain néocomien, mais cela avant ma découverte du véritable terrain néocomien. Il est facile en parcourant les écrits de ceux qui m'ont précédé de voir comme leurs classifications reposent sur des observations superficielles. Il est même assez étonnant de voir comme les rudistes pendant quelque temps ont été placés parmi nous dans une position inférieure au calcaire ammonitifère qui contient un grand nombre de fossiles jurassiques, et ces bornes ont été répétées et soutenues avec chaleur dans les premiers congrès des savans italiens.

Depuis que Mr. DE BUCH au congrès de Milan a établi la place du calcaire ammonitifère d'Italie dans le jura, on s'aperçu que le calcaire rouge superposé au banc à rudistes de S. Croce ne pouvait être que de la scaglia, cette même scaglia que les fossiles m'obligèrent de placer dans le terrain sénonien. Une étude tant soit peu approfondie des fossiles de ce calcaire à rudistes aurait pu dès-lors faire connaître la justesse de la classification géographique de M. d'ORBIGNY. Le groupe supérieur de la craie se montre composé dans nos régions ou par un calcaire sableux rouge de brique, ou par les couches rouges, blanches et grises de ce calcaire argileux que les géologues italiens appellent du nom de scaglia. Ces couches sont caractérisées par des fossiles du terrain sénonien, tels que les suivantes

- Ananchyles Ovata*,
 „ *Tuberculata*,

Holaster Natica,
Inoceramus Cuvieri,
 .. *Lamarckii.*

Elles varient d'épaisseur mais en général elles sont très-minces, d'une structure presque schisteuse et très-fragiles ce qui leur a fait donner le nom de *scaglia*. Elles passent inférieurement à des couches grises bariolées par des taches d'une couleur plus foncée causées par les empreintes de fucoides indeterminables. On trouve souvent subordonné à ces couches grisâtres une couche de calcaire noir bitumineux. C'est avec cet ensemble de couches qu'on peut observer dans toutes nos Alpes et dans les collines qui les bordent que se termine le système crétacé. Sans le secours de la paléontologie ç'aurait été difficile de tracer ces limites à cause de la concordance générale de la stratification, ce qui nous autorise à reconnaître une longue période de tranquillité dans cette partie de l'Europe, depuis la déposition des bancs les plus inférieurs de la formation pécelienne jusqu'aux terrains les plus récents. Il est vrai que durant la déposition de ces terrains des éruptions eurent lieu qui les ont sillonnées de filons et qui ont déposé les conglomérats dont elles sont intercalées, mais ces éruptions n'ont causé que des dislocations circonscrites à certains points de la chaîne et n'ont aucun rapport avec le grand soulèvement final qui a dû dépendre de l'action soulevante des roches ignées du Tyrol. À ces éruptions partielles causées ou par le mélaphyre, ou par la dolérite, ou par le basalte, ou par les trachytes sont dues à l'émersion du mica-schiste et du trias dans le bassin de Trente, celles de ces mêmes formations dans le district de Recoaro, le petit soulèvement qui a produit les monts Euganéens, et la grande puissance des terrains tertiaires du Vicentin où on voit intercalées des breccioles basaltiques aux couches calcaires et arénacées. Les éruptions basaltiques qui ont eu lieu vers la fin de l'époque secondaire et continuèrent durant l'époque tertiaire produisirent les phénomènes stratigraphiques dont nous possédons une excellente description dans l'ouvrage de M. BRONGNIART sur les terrains calcareo-trappéens du Vicentin. Je ne m'arrêterai donc pas pour à-présent à former d'autres détails sur cet argument; je me bornerai seulement à faire observer que les breccioles basaltiques ont en plusieurs endroits recouvert les bancs sénoniens se mêlant à la matière calcaire qui se déposait au commencement de l'époque successive de manière que la ligne de démarcation n'est pas toujours facile à démêler tandis que dans d'autres localités les éléments basaltiques réduits à une grande ténuité ont pu se mêler aux sédiments tertiaires, et former un grès calcarifère qui contient des fossiles éocènes.

Pour citer un exemple je dirai comme sur les monts Euganéens ce grès superposé à la craie avec *Ananchytes tuberculata*, et *Inoceramus Lamarckii*, contient l'*Operculina complanata* des bancs nummulitiques avec des articulations d'un crinoïde que je n'ai pu déterminer, et le *Pentacrinites didactylus* D'ORB.

Dans les monts Berici ces grès et la brecciole passent au calcaire grossier avec *Cerithium giganteum*, à Montecchio-Maggiore, à Ronca, à Bolca dans le Veronais, la brecciole et le calcaire contiennent cette innombrable quantité de fossiles qui sont décidément éocènes, et qui se répètent à Castelgomberto dans la val de Lonte, et dans toute la partie inférieure de la zone tertiaire, qui forme la base des collines qui s'étendent depuis Verone, jusqu'au Frioul au sud des Alpes, car on signale ces mêmes fossiles dans les environs de Bassano. dans les collines de l'Asolan, et dans celles qui se prolongent au-delà de la Piave. Des lambeaux de terrain éocène se rencontrent çà et là sur les plateaux de la chaîne dont le plus intéressant à étudier est celui qu'on remarque sur les Sette Comuni au village de Galio où à une hauteur d'à-peu-près trois mille pieds on trouve un calcaire à *Cerithium giganteum* superposé et concordant avec les couches du terrain sénonien.

Ce contact immédiat se peut observer dans les environs de Bassano le long des escarpements qui bordent la vallée de la Brenta ainsi que le célèbre M. MURCHISON le fit connaître en 1829.

Toutes les observations et les études que j'ai faites depuis n'ont fait que confirmer les idées émises depuis lors par cet illustre naturaliste ainsi que je l'ai publié depuis 1841 dans une brochure dont j'ai fait hommage à la société, et dans une note insérée au bulletin de la société géologique de France.

Une localité remarquable pour observer ce contact se trouve dans la crête des collines qui séparent la vallée de l'Agno de celle de Schio. Descendant de ces collines vers Magrè à travers les couches nummulitiques et les breccioles on rencontre un calcaire rouge de brique qui ressemble assez à la scaglia de notre terrain sénonien, mais qui contient des petites nummulites qui disparaissent bientôt et qui font place aux ananchites et aux inocerames propres de la craie. Se dirigeant plus au sud vers les collines de Malo. et descendant vers Emichelina on trouve une couche pleine de nummulites de toutes les grandeurs dont le diamètre en sens horizontal varie depuis trois millimètres jusque à 45 et dans le sens vertical de deux millimètres à huit. Comme de coutume plus elles sont petites plus elles sont bombées, car les plus grandes ont à peine deux millimètres d'épaisseur.

MM. DE VERVEUIL et D'ARCHIAC auxquels je les ai envoyé ont cru distinguer parmi ces espèces la variété globuleuse du *Nummulites Biaritziana*. et rapportèrent les plus grandes au *Nummulites polygiratus*, et au *Nummulites distans* de la Crimée.

Ces couches contiennent aussi des *Trochus cumulans*, deux espèces de *Bulla* dont l'une voisine de la *Bulla tiquaria*, le *Terebellum obvolutum* BROGN., des petites Cyprées, des moules de Cérètes, de Natica, de Conus, de Mactra etc. etc. et le beau *Nautilus* qui caractérise nos couches nummulitiques du Vicentin.

J'ai trouvé ici mêlées aux nummulites des articulations de l'*Apiocrinites ellipticus*.

Il paraîtrait donc qu'il y eût ici un passage de ce fossile crétacé dans les couches de l'époque tertiaire à moins que ce banc ne fut composé par les détritits remanié lors

des éruptions basaltiques de la partie supérieure du terrain crétacé, et inférieure du terrain tertiaire ce que la localité ne permet pas de décider.

Je crois toutefois que les progrès de la paléontologie parviendront à découvrir des faits qui nous forceront d'admettre des passages graduels, ou des époques de transition particulièrement moyennant l'étude des localités où les différentes formations gisent en stratification concordante l'une sur l'autre.

Moyennant ces observations on pourra trancher bien des questions et le terrain étrurien de feu mon ami M. PILLA se trouvera peut-être, comme je l'avais d'abord avancé, composé aux dépens de la partie supérieure du terrain crétacé, et de la partie inférieure du terrain tertiaire.

À l'est de la Brenta le terrain tertiaire n'est plus intercalé par les roches trap-piques et les breccioles. Il est composé par une alternation de marne couleur de cendre pleines de fossiles éocènes qui alternent avec des couches calcaires avec des nummulites, des miliolites, et les fossiles du calcaire grossier des environs de Paris. Ces couches qui donnent une bonne pierre à bâtir sont recouvertes par des bancs alternants d'argiles, de sables, et de molasse avec des scutelles et des pectens de l'époque miocène et qui sont eux mêmes recouverts par des bancs de lignites, et par des conglomérats caillouteux dans lesquels j'ai signalé l'*Ostrea virginica*, et l'*Ostrea longirostris*.

Dans les environs de Schio des petites collines sont aussi formées par une molasse miocène qui renferme le *Spatangus Hoffmanni*, et le *Pecten opercularis*.

Dans cette localité le terrain éocène est caché, on ne le revoit qu' à St. Georges de Polco où un renversement de couches a ensevelis les terrains tertiaires plus récents, et inverti la série de manière qu'on voit au bas le terrain éocène nummulitique recouvert par le terrain sénonien et celui-là par les autres étages crétacés, le tout intercalé par des tufs basaltiques. Ces apparences ont fait croire pendant plusieurs années à des naturalistes qu'il y eut des couches nummulitiques sous le groupe crétacé ou dans sa partie inférieure; M. PASINI a été le premier à reconnaître ce renversement et à rectifier cette erreur.

Dans toutes les collines du Trevisan, les couches miocènes passent par degrés à des conglomérats et des sables concrétionés qui paraissent appartenir à une époque plus récente. Des conglomérats composés des cailloux de toutes les grandeurs et cimentés par une pâte calcaire très-dure forment le versant méridional de toutes ces collines jusqu'au Frioul, et composent des éminences dans la plaine.

C'est probablement dans cet étage qu'on a trouvé il y a un demi-siècle la dent de *Mastodon angustidens* citée par CUVIER et qui se trouve dans le cabinet de feu mon ami M. DA RIO auquel on l'a apportée des environs de Soligo.

J'ai fait des recherches en plusieurs localités dans ce conglomérat sans pouvoir parvenir à découvrir le moindre fossile.

Il y a dans la colline qu'on appelle **Bosco del Montello** des petites cavernes dans lesquelles j'espérai pouvoir trouver des ossements, mais toutes mes recherches furent inutiles.

Nous avons au contraire un exemple d'une petite caverne remplie par une boue argileuse pétrie d'ossements fossiles et creusée dans les couches du terrain éocène dans les collines tertiaires qui se trouvent au-delà des **Colli Berici** entre **Montebello** et **Verone**.

Dans le district de **Soave** les collines de **Sopega** et **St. Lorenzo** sont formées de calcaire grossier dont les couches inférieures sont pétries de nummulites.

C'est au bas de la dernière de ces collines qu'on a découvert une cavité remplie d'une quantité considérable de ces restes.

Le docteur **SCORTIGAGNA** qui fit l'acquisition de ces ossements en publia l'illustration et y reconnut des dents et des ossements d'hippopotames et de rhinoceros.

Le professeur **CATULLO** publia il y a quelques années une brochure sur les ossements qui se trouvent dans les cavernes du **Veronais** et d'autres localités des provinces **Venetiennes**. Il les rapporte aux espèces suivantes :

Elephas primigenius,

Equus adamiicus,

Ursus spelaeus,

Cervus euryceros,

Canis vulpes,

Sus prisca.

Des bois de cerf ont été trouvés assez souvent dans les argiles de nos plaines ; et les tourbières qui sont fréquentes aux pieds des **Monts Euganéens** dans le **Padouan** renferment des dents de sanglier, de cheval, et d'un petit animal voisin du castor.

Ce court aperçu sur les terrains stratifiés de nos Alpes et sur les fossiles qu'ils renferment, a pour but de faire connaître le résumé de nos connaissances géologiques sur la structure de cette partie de l'Italie boreale où l'argument paléontologique, moyennant les observations et les études que j'ai pu y faire dernièrement reçoit une confirmation nouvelle m'ayant aidé à déchiffrer les anomalies qu'ont y avait citées, et à distinguer moyennant les fossiles, les différents étages des formations dans une suite de couches concordantes depuis le micaschiste jusqu'au terrain moderne, et dont plusieurs zones, d'ailleurs minéralogiquement identiques, renferment des formations ou des étages divers que les fossiles seuls ont pu m'aider à reconnaître même dans des localités assez éloignées l'une de l'autre.

De cette manière j'ai pu tracer les limites du trias et découvrir dans notre formation oolitique les étages inférieur et moyen et quelques traces de l'étage supérieur.

En suite j'ai pu signaler et déterminer dans le terrain crétacé l'étage néocomien et l'étage albien ainsi que les deux divisions de l'étage de la craie auxquelles **M. D'ORBIGNY** a donné le nom de terrain turonien et de terrain sénonien.

Les terrains tertiaires très-mal étudiés chez nous dans le dernier temps étaient tous confondus ensemble et placés dans le terrain tertiaire moyen. Je suis parvenu à y distinguer les étages, éocène, miocène, et à m'assurer que notre grande formation nummulitique appartient sans aucun doute à la période éocène.

En adoptant la route que je viens de tracer, j'espère que la géologie du royaume Lombardo-Vénitien et du reste de l'Italie sortira bientôt du chaos où elle se trouve ensevelie, par un grand nombre d'observations faites sur des petites étendues de terrain et dont on a adopté la généralisation sans avoir auparavant étudié assez de types de comparaison.

Explication de la Planche.

Je joins au court aperçu sur les terrains stratifiés des Alpes Venitiennes dont j'ai fait l'hommage à l'Institut I.-R. Géologique une Coupe prise de la Cima d'Asta à la plaine Venitienne par les plateaux des Sette Comuni dressée sur l'échelle de la grande carte du royaume Lombardo-Venitien de l'Institut I.-R. Géographique.

J'ai taché de conserver à peu-près la même proportion pour les hauteurs. Cette coupe peut être considérée comme présentant la succession réelle des couches qui composent les différentes formations de nos montagnes. Elles conservent à peu-près la même inclinaison sur tout le versant méridional depuis Bassano jusqu'au Frioul tandis qu'entre Schio et Recoaro, l'inclinaison générale a été accidentée en sens invers par les éruptions de dolérite et de Mélaphyre.

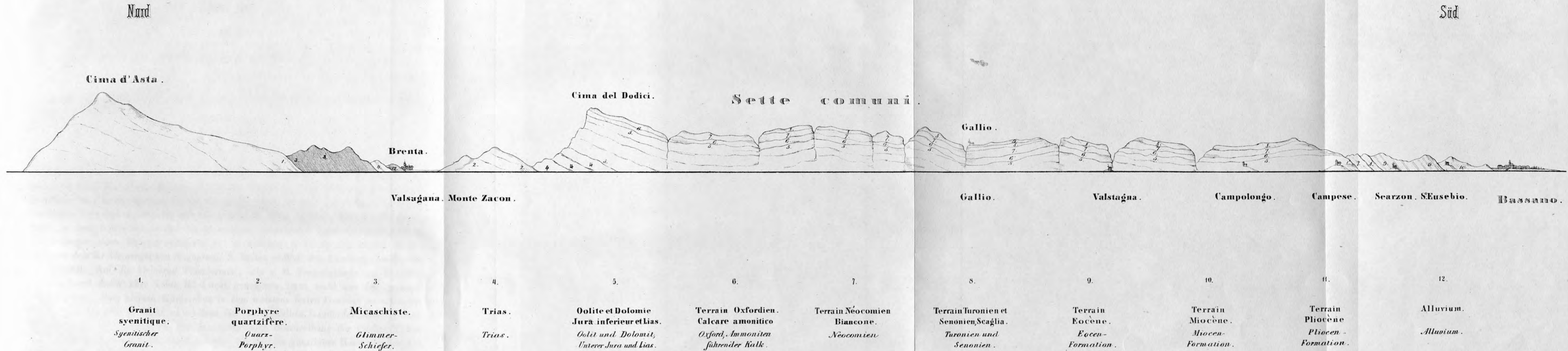
Poursuivant cette coupe plus au Nord on rencontre le micaschiste, le porphyre quartzifère puis le trias, le jura, et le granit de la vallée de Fiemme.

Sur le granit de la Cima d'Asta s'appuient la chaîne de micaschiste qui de Roncegno va jusque à Pergine. Dans la Valsugana une butte de porphyre quartzifère perce à travers le trias sur lequel s'appuient les bancs jurassiques de monte Soglio, Cima del Dodici, Campo Manderiolo qui contiennent dans leur partie supérieure les couches oxfordiennes du Calcare ammonitico.

Ces dernières sont recouvertes par les couches néocomiennes, turoniennes et sénoniennes dans les plateaux de Rotzo, Asiago et Galio et même dans cette dernière localité par celles du terrain éocène.

Le jura et le système crétacé coupés par des failles et des crévasses par où descendent plusieurs torrents se prolongent avec une légère ondulation des couches jusque sur la ligne de Campese et Sazon où ils plongent presque verticalement et concordants sous le terrain éocène lequel est recouvert par les couches miocènes et celles-ci par des sables et des conglomérats qui manquent de fossiles et que je rapporte avec quelque doute, au terrain pliocène.

Durchschnitt von der Cima d'Asta bis Bassano über die Hochebene der Sette comuni.
 Esquisse d'une Coupe de Cima d'Asta à Bassano à travers le plateau des Sette comuni



Maisstab der k.k. General-Quartiermeisterstabs-Detailkarten der Lombardie und Venedigs von 1:86,400 oder 1,200 Klaftern auf den Zoll.

Lith. gedr. in d. k. k. Hof- u. Staats-Druckerei, unter d. Leitung v. A. Hartinger.

II. Die Foraminiferen und Entomostraceen des Kreidemergels von Lemberg.

Beschrieben von

Professor Dr. August Em. Reuss

in Prag.

Mitgetheilt am 6. August 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

I.

Obwohl man schon seit einer längeren Reihe von Jahren auf den grossen Petrefactenreichthum des oberen Kreidemergels der Umgebung von Lemberg aufmerksam geworden ist, so hat es doch bis auf die jüngste Zeit an einer sorgfältigern und umfassendern Untersuchung dieser Fossilreste gemangelt. Erst im Jahre 1849 hat Professor KNER in dem dritten Bande der von HAIDINGER gesammelten naturwissenschaftlichen Abhandlungen einen Aufsatz veröffentlicht, in welchem er 92 Species fossiler Thierreste aus dem Kreidemergel von Nagorzani, 2 Meilen südlich von Lemberg, beschreibt und abbildet. Auf die kleineren Thierformen, wie z. B. Foraminiferen und Entomostraceen wird darin aber keine Rücksicht genommen, was wohl aus der grossen Schwierigkeit, diese kleinen Körperchen in dem meistens festen Gesteine zu erkennen und aus ihm auszulösen, leicht zu erklären ist. In demselben Bande der oben erwähnten Abhandlungen liefert ALTH eine monographische Beschreibung der fossilen Thierreste des obern Kreidemergels von Lemberg. Da hier die günstigere Beschaffenheit des Gesteines, das wiewohl selten, einzelne schlemmbare Schichten einschliesst, eine genauere Untersuchung selbst der kleineren Versteinerungen erlaubt, so finden wir in der ALTH'schen Abhandlung auch eine Anzahl (25 Species) von Foraminiferen näher beschrieben und abgebildet. Wahrscheinlich wegen des Mangels zahlreicherer deutlicher Exemplare scheint aber ein Theil derselben verkannt und nicht vollkommen richtig bestimmt zu sein.

Durch die bereitwillige Güte des um die paläontologische Ausbeutung der genannten Localität hochverdienten Herrn Hofrathes und Stadthauptmannes Ritters von SACHER-MASOCH und des Herrn Lottoadministrators SPACHHOLTZ in Prag stand mir ein

reichlicheres Material zu Gebote, in dem ich bisher 68 wohl bestimmbare Foraminifere-species entdeckte, ohne mehrere wegen Unvollkommenheit der Exemplare zweifelhaft gebliebene Arten mit in Rechnung zu bringen. Ich bin aber überzeugt, dass der Kreidemergel von Lemberg weiteren Forschungen noch durch das Auffinden zahlreicher neuer Arten lohnen wird, besonders wenn es bei sorgfältiger Untersuchung an Ort und Stelle gelingen sollte, in dem leider meist festen Gesteine einzelne weichere leichter schlemmbare Schichten aufzufinden. Bisher eignete sich dazu nur eine dünne Lage eines sehr thonigen dunkel blaugrauen weichen Mergels, welcher bei dem Bade Kiselka unweit Lemberg zwischen die härteren Schichten eingeschoben ist. Diese weichere Schichte ist es übrigens auch, welche den grössten Theil der reichen Lemberger Foraminiferenfauna einzuschliessen scheint. Weit geringer ist sowohl die Arten- als auch die Individuenanzahl in den festern graulich- und gelblichweissen Kalkmergeln, welche der Angabe des Herrn SPACHHOLTZ zu Folge gewöhnlich zu oberst über dem grauen festen Gesteine auftreten.

Von den oben erwähnten 68 spezifisch bestimmten Foraminiferenarten gehören nur zwei den Monostegiern und zwar der Gattung *Oolina*, die übrigen 66 alle den Pleio-stegiern an und zwar vertheilen sie sich auf die einzelnen Abtheilungen derselben auf folgende Art: Man zählt

22 Species	Stichostegier,	
33	„ Helicostegier	} 12 Sp. Nautiloideen, 21 „ Turbinoideen,
10	„ Enallostegier	
		} 3 Sp. Cryptostegier. 4 „ Polymorphinideen, 3 „ Textularideen,
1	„ Agathistegier;	

woraus sich das Vorherrschen der Helicostegier und zunächst der Stichostegier in der Lemberger Foraminiferenfauna von selbst ergibt.

Sehr merkwürdig ist das Auftreten der *Adelosina cretacea* aus der Ordnung der Agathistegier, da dieselben bisher noch nie in Gesteinen der Kreideformation aufgefunden worden waren, so dass man es für ein allgemein gültiges Gesetz hielt, dass ihre Entwicklung zuerst in der Tertiärperiode begann, dann aber gleich mit einem sehr grossen Formenreichthum und mit einer oft ungemeinen Individuenzahl. Auch Foraminiferen aus der Abtheilung der Monostegier sind bei Lemberg zum ersten Male in einem Gebilde der Kreideformation entdeckt worden. Bisher glaubte man allgemein, dass sie in den Tertiärgebilden zuerst auftreten.

Der bei weitem grössere Theil der aufgefundenen Arten kommt nur selten und sehr vereinzelt vor; nur wenige Arten entfalten einen grösseren Reichthum an Individuen. Hierher gehören besonders: *Flabellina simplex m.*, *Spirolina Sacheri m.*, *Rotalina umbilicatu* und *crassa d'O.*, *Bulimina variabilis d'O.*, *obesa* und *imbricata m.*, *Gau-*

dryina ruthenica m., und zum Theil auch *Robulina trachyomphala* m. und *Truncatulinina convexa* m.

Die artenreichsten Gattungen sind: *Dentalina* (11 Sp.), *Bulinina* (8 Sp.), *Cristellaria* (5 Sp.) und *Rotalina* (4 Sp.); in Beziehung auf die Zahl der Individuen herrschen aber *Bulinina*, *Rotalina* und *Gaudryina* über die Uebrigen vor.

Vergleichen wir die Foraminiferen des Lemberger Kreidemergels mit denen anderer Kreidesteine, so finden wir, dass von 68 Arten 24, also 0,352 der Gesamtsumme mit denen des Plänermergels und Plänerkalkes Böhmens, dagegen 8, also 0,117 mit denen der weissen Kreide Frankreichs und 11 oder 0,162 mit denen der weissen Kreide überhaupt übereinstimmen, wie sich diess aus der angehängten Tabelle ergibt. Mit den von CORNUEL (*Mem. de la soc. géol. de France.* 2 Ser. III. p. 241 sqq.) beschriebenen Foraminiferen aus den *argiles ostréennes* (Neocomien) von Wassy stimmt keine einzige der Lemberger Arten überein.

Aus der weissen Kreide Frankreichs und Englands überhaupt sind bis jetzt nur 54 Foraminiferenspecies bekannt, von denen 8, also 0,149 auch bei Lemberg vorkommen. Böhmen hat nach meinen Untersuchungen bisher 118 Species geliefert, von denen 24, also beinahe 0,2 sich bei Lemberg wiederfinden. Von den durch MÜNSTER und RÖMER aus den deutschen Kreidesteinen beschriebenen Formen konnte ich keine einzige in den Lemberger Arten wieder erkennen.

Unter den von HAGENOW aus der weissen Kreide von Rügen angeführten Arten konnte ich nur die Uebereinstimmung einer einzigen Art, der *Rotalina umbilicata* d'Orb. (*Rot. turgida* v. Hag.) mit einer Lemberger nachweisen. Da jedoch nur ein sehr geringer Theil derselben abgebildet ist, die übrigen aber sehr mangelhaft und unzureichend beschrieben sind, so wäre es sehr leicht möglich, dass die Zahl der beiden Localitäten gemeinschaftlichen Arten grösser wäre.

Dass die Zahl der mit denen der weissen Kreide übereinstimmenden Arten überhaupt so gering erscheint, hat seinen Grund eines Theiles darin, dass die Foraminiferen der weissen Kreide im Ganzen noch viel zu wenig gekannt sind, während bei den vollständiger untersuchten Formen der mittleren Kreide Böhmens die Uebereinstimmung desshalb viel grösser seyn muss. Anderen Theils haben aber die weisse und die mittlere Kreide überhaupt viele Species gemeinschaftlich, so dass es gar nicht auffallend erscheinen kann, dass diese Identität auch bei den Arten des oberen Kreidemergels von Lemberg sich mehrfach nachweisen lässt. Daraus aber auf eine gleichzeitige Bildung des Lemberger Kreidemergels mit dem böhmischen Pläner schliessen zu wollen, wie es ALTH in der eben genannten Abhandlung pag. 109 thut, dürfte wohl sehr voreilig sein, um so mehr, da das häufige Auftreten von *Belemnitella mucronata*, der grossen typischen Varietät von *Ostrea vesicularis*, von *Ananchytes ovata*, *Baculites Faujasi* und a. m. im galizischen Kreidemergel denselben unzweifelhaft der weissen Kreide zuweisen.

Namen der Lemberger Arten	Tertiär- schichten	Böhmen	Rügen weisse Kreide	Maestricht Kreideluff	Frankreich weisse Kreide	England weisse Kreide
1. <i>Oolina apiculata</i> m.						
2. „ <i>simplex</i> m.	Wieliczka					
3. <i>Glandulina pygmaea</i> m.						
4. „ <i>manifesta</i> m.						
5. „ <i>cylindracea</i> m.		Plänermergel				
6. <i>Nodosaria proboscidea</i> m.						
7. „ <i>inops</i> m.						
8. <i>Dentalina sulcata</i> d'Orb.					Kreide von Sens, Meu- don, St. Ger- main; Grün- sand v. Mans	Eng- land
9. „ <i>crassula</i> m.						
10. „ <i>subnodosa</i> m.						
11. „ <i>oligostegia</i> m.		Plänermergel				
12. „ <i>Lilli</i> m.						
13. „ <i>marginuloides</i> m.						
14. „ <i>annulata</i> m.		Plänerkalk u. Mergel				
15. „ <i>communis</i> d'Orb.		Plänermergel			Meudon	
16. „ <i>legumen</i> m.		Plänermergel				
17. „ <i>gracilis</i> d'Orb.		Plänermergel			Sens	Eng- land
18. „ <i>acus</i> m.						
19. <i>Marginulina ensis</i> m.		Plänerkalk u. Mergel				
20. „ <i>elongata</i> d'Orb.?		Plänermergel		Ciply	Sens, Meu- don, St. Ger- main	
21. „ <i>apiculata</i> m.						
22. <i>Vaginulina Zeuschueri</i> m.						
23. <i>Frondicularia capillaris</i> m.						
24. „ <i>amoena</i> m.						
25. <i>Flabellina reticulata</i> m.						
26. „ <i>simplex</i> m.						
27. <i>Spirolina Sacheri</i> m.						
28. „ <i>inflata</i> m.						
29. <i>Cristellaria angusta</i> m.		Plänermergel				
30. „ <i>truncata</i> m.						
31. „ <i>multiseptata</i> m.						
32. „ <i>Spachholtzi</i> m.						
33. „ <i>obvelata</i> m.						
34. <i>Robulina trachyomphala</i> m.						
35. <i>Nonionina quaternaria</i> m.						

A. *Monostegia* D'ORB.*Oolina* D'ORB.

1. *O. apiculata* m. (T. I. f. 1), *testa ovata, superne acuminata, basi breviter apiculata, laevi; ostio radiato. Long. = 0,6 mm.*

Schale eiförmig, oben sich allmählig in eine schnabelförmige Spitze verschmälernd, welche die von einem Strahlenkranze umgebene Mündung trägt. Unten ist sie mit einem kurzen centralen Stachel versehen. Oberfläche glatt und glänzend.

Sehr selten *).

2. *O. simplex* m. (T. I. f. 2), *testa subglobosa, non apiculata, laevi; ore radiato. Long. = 0,4 — 0,5 mm.*

Schale kugelförmig, oben rasch zur sehr kurzen stumpfen Spitze zusammengezogen; die runde Mündung von einem Strahlenkranze eingefasst. Oberfläche glasig glänzend.

Sehr selten. Exemplare aus dem Salzthone von Wieliczka konnte ich davon nicht unterscheiden.

B. *Pleiostegia*.I. *Stichostegia* D'ORB.*Glandulina* D'ORB.

1. *Gl. pygmaea* m. (T. I. f. 3), *testa ovali, utrinque acuta, convexa; ore radiato; loculis paucis; suturis obsoletis. Long. = 0,3 — 0,45 mm.*

Im Umriss sehr ähnlich der tertiären *Gl. laevigata* D'ORB. (D'ORBIGNY *foram. foss. du bass. tert. de Vienne* p. 29. T. I. f. 4, 5), nur durch sparsamere, mittelst kaum sichtbarer Näthe angedeutete Kammern und das weniger verschmälerte obere Ende davon verschieden. Auch ist das Gehäuse stets viel kleiner. Es ist oval, an beiden Enden zugespitzt, unten jedoch spitziger. Die Oeffnung von einem Strahlenkranze umgeben, die Schalenoberfläche glatt, glänzend.

Gl. ovalis ALTH (l. c. II. p. 270. T. 13. f. 31) soll sich durch den Mangel der untern Spitze und des Strahlenkranzes um die Mündung unterscheiden. Ich war nicht so glücklich, sie aufzufinden.

Sehr selten.

2. *Gl. manifesta* m. (T. I. f. 4), *testa elongato-obconica, basi acuminata; loculis altis; suturis superioribus manifestis, inferioribus linearibus; ore radiato. Long. = 0,8 mm.*

Zeichnet sich durch seine verkehrt-kegelförmige Gestalt aus. Unten verschmälert

*) Wo kein Fundort namentlich angeführt wird, sind jedes Mal die tieferen grauen Schichten des Lemberger Kreidemergels zu verstehen.

sich das Gehäuse allmählig zur scharfen Spitze; oben zieht es sich rasch zur kurzen Spitze zusammen, welche die von einem Strahlenkranze umgebene Mündung trägt. Kammern wenig zahlreich, hoch. Die oberen schwach gewölbt und durch eine deutlich vertiefte Nath geschieden, ja selbst treppenartig abgesetzt; die übrigen Näthe sind flach und nur durch Linien angedeutet. Bei den meisten Exemplaren ist die Schale weiss, porzellanartig, undurchsichtig.

Gl. subconica ALTH (l. c. p. 270. T. 13. f. 32) stimmt wohl in den allgemeinen Umrissen überein, hat aber ein weniger regelmässiges, unten stumpfes Gehäuse. Auffallend ist es übrigens, dass ich keine der von ALTH abgebildeten Species trotz des eifrigsten Nachsuchens auffinden konnte, während ihm dagegen die von mir beschriebenen Formen fremd geblieben sind.

3. *Gl. cylindracea* n. (T. I. f. 5), *testa elongata, cylindrica, utrinque acutiuscula, laevi; loculis parvis; suturis vix constrictis; apertura radiata*. Long. = 0,8—0,9 mm.

Reuss die Verstein. der böhm. Kreideform. I. p. 25. T. 13. f. 1, 2. — ? ALTH l. c. p. 271. T. 13. f. 30.

Die längste unter den bekannten Glandulinen, dabei fast regelmässig walzenförmig, mitunter etwas schief oder gekrümmt. An beiden Enden spitzt sich das Gehäuse kurz zu und ist in der Mitte zuweilen etwas eingeschnürt. Wenige, (5—6) ziemlich hohe Kammern, die oberen manchmal mit etwas vertieften Näthen. Die Mündung von einem Strahlenkranze umgeben. Die Schalenoberfläche glatt, glänzend.

Die galizischen Exemplare sind fast durchgängig regelmässiger, gerader, weniger eingebogen als die böhmischen.

Sehr selten. Auch im Plänermergel von Lusnitz und Kystra in Böhmen.

Nodosaria LAMK.

1. *N. proboscidea* n. (T. I. f. 6), *testa brevi, obovato-oblonga, basi obtusa, superne longe rostrata, longitudinaliter costata; costis 13—14 angustis; loculis latis, parum convexis; suturis planiusculis; loculo primo minimo, obtuso, ultimo longe rostrato*. — Long. = 1,85 mm.

Eine sehr ausgezeichnete Form, auffallend durch das kurze dicke Gehäuse und den langen dünnen, die runde Mündung tragenden Schnabel. Das Gehäuse ist langverkehrt-eiförmig, im Verhältniss zur Länge sehr dick, unten stumpf. Der Querdurchmesser nimmt nach unten erst langsam, dann ziemlich rasch ab. Es sind nur 3—4 dicke, wenig convexe, durch schwache Näthe angedeutete Kammern vorhanden, deren unterste klein und stumpf, die oberste sehr gross ist, fast die Hälfte des ganzen Gehäuses ausmacht und sich überdiess oben in einen laugen dünnen centralen Schnabel fortsetzt. 13—14 schmale, aber ziemlich hohe Rippen laufen der Länge nach über das ganze Gehäuse herab; nur der Schnabel bleibt davon frei.

Sehr selten.

2. *N. inops* m. (T. I. f. 7), *testa brevi, subcylindrica, utrinque fere obtusa; loculis 3 convexiusculis, primo maximo; duobus infinis longitudinaliter rare costatis.* — *Long.* = 0,83 mm.

Kurz, in der ganzen Länge fast gleich dick. Nur drei mässig gewölbte Kammern, von denen die mittlere die kleinste, die unterste die höchste ist. Sie verschmälert sich an der Basis rasch, ohne eine Spitze zu bilden. Die oberste trägt auf kurzer stumpfer Spitze die von einem Strahlenkranze umgebene Mündung. Ueber die zwei untern Kammern laufen 7—8 entfernte niedrige und schmale Längsrippen. Die Näthe sind schmal, aber ziemlich tief.

Sie ähnelt der *N. paupercula* REUSS (die Verst. der böhm. Kreideform. I. p. 26, T. 12, f. 12), ist aber kürzer, hat weniger Kammern, seichtere Näthe und nimmt nach oben gar nicht an Dicke zu.

Sehr selten.

Dentulina D'ORB.

1. *D. sulcata* D'ORB. (D'ORBIGNY in *Mémoires de la société géolog. de France.* 1840. IV. I. p. 15, T. 1, f. 10—13.)

Nodosaria Zippii ALTH l. c. p. 270.

Selten. — Gemein in der weissen Kreide von Sens, Meudon, St. Germain und von England, so wie auch im Grünsande von Mans.

D'ORBIGNY führt bei seiner *D. sulcata* die *Nodosaria sulcata* NILSSON (Petraefacta Suecana T. 9, f. 19) als Synonym auf, welche aber, wie ich schon früher (Kreideverst. Böhmens I. p. 27) erwähnte, davon sehr verschieden ist.

2. *D. crassula* m. (T. I. f. 8), *brevis, subcylindrica, subrecta, utrinque acuta; loculis tribus, ultimo acuto; primo paullulum majore, breviter apiculato; medio superiorique parte infini loculi longitudinaliter tenui-costatis; apertura radiata.* — *Long.* = 1,5 mm.

Gehäuse nur sehr wenig gebogen, kurz und verhältnissmässig ziemlich dick, fast cylindrisch. Drei Kammern, die erste wenig grösser als die übrigen, gewölbt und unten in eine kurze centrale Spitze endigend; die mittlere am schmalsten, wenig gewölbt; die oberste eiförmig, etwas schief und oben zugespitzt. Die mittlere Kammer und die obere Hälfte der untersten Kammer sind mit 7—8 sehr dünnen Längsrippen bedeckt. Die Näthe schmal, wenig vertieft; die Mündung von einem Strahlenkranze umgeben.

Sehr selten.

3. *D. subnodosa* m. (T. I. f. 9), *elongata, subrecta; loculis fere regulariter incrementibus, parum convexis, ultimo maximo, convexo, breviter acuto; primo minimo obtusiusculo; apertura nuda.* — *Long.* = 1,15 mm.

Gehäuse fast gerade, nach abwärts sich allmählig und regelmässig verdünnend. Die

7—9 Kammern wenig gewölbt, die unteren fast cylindrisch, durch sehr schmale und seichte Nätze geschieden. Die erste Kammer sehr klein, nicht zugespitzt; die letzte gewölbt, fast kugelig, oben sehr rasch zur kurzen Spitze zusammengezogen. Mündung nackt.

D. nodosa D'ORB. (*mem. d. l. soc. geol. de Fr.* 1840. IV. 1. p. 14, T. 1, f. 5. — REUSS l. c. p. 28, T. 13, f. 22) unterscheidet sich durch tiefere Nätze, im untern Theile stärker gewölbte Kammern, die, wenigstens an den böhmischen Exemplaren, oft sehr ungleich und unregelmässig sind.

Sehr selten.

4. *D. oligostegia* m. (T. I, f. 10), *testa brevi, subrecta; loculis 3—4 convexis, laevibus, primo breviter apiculato, ultimo acuminato; suturis profundis; apertura radiata.* — Long. = 1,0 — 1,6 mm.

REUSS Kreideverst. Böhmens I. p. 27, T. 13, f. 19, 20.

Mit den böhmischen Exemplaren ganz übereinstimmend. Gehäuse kurz und ziemlich dick, gewöhnlich fast gerade. Kammern 3—4, eiförmig, gewölbt, glatt, durch tiefe Nätze geschieden. Die erste Kammer endet unten in einen sehr kurzen centralen Stachel; die letzte ist zu einem nur wenig excentrischen Schnabel ausgezogen, der die von einem Strahlenkranze umgebene Mündung trägt.

Sehr selten. — Nicht selten im Plänermergel von Lusnitz und Brozan, selten in denselben Schichten von Rannai in Böhmen.

5. *D. Lilli* m. (T. I. f. 11), *testa parum arcuata, subcylindrica; loculis 4 subaequalibus, convexiusculis, primo paullulum majore, obtuso, ultimo maximo, ovato, acuto; apertura nuda.* — Long. = 2,1 mm.

Gehäuse nur wenig gebogen, fast walzig. Vier mässig gewölbte, durch nicht sehr tiefe Nätze gesonderte glatte Kammern. Die erste wenig grösser als die nächstfolgenden, unten stumpf, gerundet; die letzte am grössten, eiförmig, oben zugespitzt. Mündung nackt.

Mit diesen typischen Exemplaren finden sich andere, deren Kammern weniger gewölbt, die Nätze daher auch weniger tief sind. Sie dürften wohl nur eine Varietät darstellen.

Sehr selten.

6. *D. marginuloides* m. (T. I. f. 12), *testa elongata, subcylindrica, parum arcuata, basi obtusa; loculis 4 convexiusculis; superficie laevi.* — Long. = 0,75 mm.

Der *D. brevis* D'ORB. aus den Wiener Tertiärschichten verwandt. (D'ORBIGNY *Foram. foss. du bass. tert. de Vienne* p. 48, T. 2, f. 9, 10.) Gehäuse kurz, ziemlich dick, fast walzig, nach abwärts sich nur wenig verdünnend. Vier wenig gewölbte und durch mässig tiefe Nätze gesonderte Kammern; die erste am kleinsten, stumpf; die letzte

eiförmig und an der Rückenseite kurz und stumpf zugespitzt. Oberfläche glatt und glänzend.

Sehr selten.

7. *D. annulata* m. (T. I, f. 13), *testa elongata, arcuata, tenui, cylindrica, superne acuminata, basi obtusa; loculis numerosis, supremo convexo; reliquis cylindricis.* — *Long.* = 1,8 — 2,25 mm.

REUSS die Kreideverst. Böhm. I. p. 27. T. 8. f. 4, 67; T. 13, f. 21.

Das verlängerte walzenförmige Gehäuse ist schwach gebogen, mit zugespitztem obern und stumpfem unteren Ende. Es verdünnt sich daher nach unten nur sehr langsam. Die zahlreichen (14—16) Kammern sind fast alle gar nicht gewölbt, vollkommen walzenförmig, breiter als hoch. Ihre Näthe sind nur durch durchscheinende nicht vertiefte Linien angedeutet. Nur die oberste Kammer ist convex, von den übrigen durch eine eingeschnürte Nath getrennt und oben in einen nicht ganz centralen spitzigen Schnabel verlängert. Die erste Kammer ist die kleinste und unten stumpf. Nur bei ganz alten Individuen sind die zwei oder drei obersten Kammern gewölbt und durch vertiefte Näthe getrennt. Bei ihnen treten dann die Scheidewände der übrigen Kammern an der Schalenoberfläche als etwas erhabene Ringe hervor, wie l. c. p. 27 erwähnt und T. 8, f. 4 abgebildet wurde.

Nicht gar selten in den tiefern und höhern Schichten des Lemberger Kreidemergels. — Im untern und obern Plänerkalk und in den Baculitenthonen Böhmens gemein.

ALTH bildet die *D. annulata* ebenfalls l. c. T. 13, f. 29 ab; jedoch ist die Abbildung ganz unrichtig, da die ältern Kammern viel höher gezeichnet sind als die jüngern, der gewöhnlichen Zunahme der Kammern zuwider. Das charakteristische Merkmal der Species, die walzenförmigen Kammern, die gar nicht vertieften Näthe; ist in dem Bilde nicht ausgedrückt. ALTH scheint also wohl eine andere Species vor sich gehabt zu haben.

8. *D. communis* d'ORB. (*Mém. de la soc. géol. de Fr.* 1840. IV. 1. p. 13. T. 1, f. 4. — REUSS l. c. I. p. 28, T. 12, f. 21.)

Selten. — Selten im Plänermergel Böhmens; so wie auch in der weissen Kreide von Meudon in Frankreich.

9. *D. legumen* m. (T. I. f. 14), *testa elongata, tenui, arcuata, subcompressa; loculis regularitèr increscentibus, inaequilateris; primo minimo apiculato, ultimo in rostrum dorsale tenue producto; suturis conspicuis.* — *Long.* = 1,6 mm.

REUSS l. c. I. p. 28, T. 13, f. 23, 24.

Uebereinstimmend mit den böhmischen Exemplaren. Gehäuse verlängert, schlank, stark gebogen, seitlich etwas zusammengedrückt, nach unten sich regelmässig verdünnend. Die Kammern sind wenig gewölbt, etwas stärker an der convexen Seite des Gehäuses. daher ungleichseitig. Die erste Kammer ist die kleinste und am untern Ende

mit einer kurzen dünnen Spitze versehen; die letzte dagegen ist oben in einen an der Rückenseite gelegenen ziemlich langen dünnen Schnabel ausgezogen. Die Näthe wenig tief; die Mündung nackt.

Selten. — Ebenfalls selten im Plänermergel Böhmens.

10. *D. gracilis* D'ORB. (D'ORBIGNY l. c. p. 14, T. I, f. 5. — REUSS l. c. I. pag. 27, 28, T. 8, f. 6.)

Selten. — Ebenfalls selten im böhmischen Plänermergel; überdiess in der weissen Kreide von Sens in Frankreich und von England.

11. *D. acus m.* (T. I, f. 15), *testa tenuissima, aciculari, utrinque acuminata, compressiuscula; loculis 4 altis, angustis, perobliquis; primo minimo acuminato.* — *Long.* = 0,9 — 1,0 mm.

Das Gehäuse sehr klein und dünn, unten in eine Spitze auslaufend, fast nadelförmig, etwas gebogen. Vier Kammern, welche im Verhältniss zur Dicke sehr hoch sind und nach aufwärts schnell zunehmen. Die erste sehr kleine stellt nur eine dünne Spitze dar, die letzte läuft in einen an der Rückenseite gelegenen Schnabel aus, der die feine Mündung trägt. Die deutlichen Näthe sind sehr schief. Alle Kammern sind seitlich etwas zusammengedrückt, am meisten am Rücken.

Dadurch und durch die Form des ganzen Gehäuses weicht unsere Species von den übrigen Dentalinen bedeutend ab und nähert sich sehr den Vaginulinen. Mit ihnen kann sie aber nicht verbunden werden, weil die letzte Kammer in einen deutlichen Schnabel übergeht, der den Vaginulinen stets fehlt. Es ist diess ein neuer Beweis von den schwankenden, wenig scharf umschriebenen Grenzen so vieler Gattungen des nur auf die Form des Gehäuses basirten künstlichen D'ORBIGNY'schen Systemes. So wie sich einerseits zwischen *Marginulina* und *Cristellaria*, so lässt sich anderer Seits zwischen *Nodosaria*, *Dentalina* und *Vaginulina* keine scharfe Grenze ziehen. — Sehr selten.

Ausser den eben beschriebenen beherbergt der Kreidemergel von Lemberg noch einige andere Species von Dentalina, von denen ich aber bisher nur vereinzelte Bruchstücke auffand, welche zur sichern specifischen Bestimmung nicht hinreichten. Einzelne derselben mit gewölbten, durch tiefe Näthe geschiedenen, perlenschnurartig an einander gereihten Kammern dürften der *D. monile* HAGEN (REUSS l. c. I. p. 27, T. 8, f. 7) angehören, welche Species auch ALTH (l. c. p. 101, T. 13, f. 28) anführt.

Marginulina D'ORB.

1. *M. ensis m.* (T. I, f. 16), *testa elongata lineari, vix attenuata, parum compressa, superne acutiusscula, basi antrorsum subinflexa; loculis numerosis parum obliquis, angustis, planis; ultimo convexiusculo; suturis plerumque obsoletis.* — *Long.* = 2,0 — 3,5 mm.

REUSS l. c. I. p. 29, T. 12, f. 13; T. 13, f. 26, 27; T. 24, f. 30. — ALTH l. c. p. 101.

Gehäuse verlängert, scheidenförmig, wenig zusammengedrückt, fast in seiner gan-

zen Länge gleich breit, oben kurz zugespitzt, unten stumpf und schwach vorwärts eingebogen. Der Rücken ist gerundet, die Bauchseite eben so oder etwas verschmälert. Die Kammern sehr zahlreich (bis 20), breiter als hoch, wenig schief. Nur die oberste oder bei sehr alten Exemplaren die zwei obersten sind etwas gewölbt und durch vertiefte Näthe gesondert; die übrigen flach, ihre Näthe nicht vertieft. Die Scheidewände scheinen nur als dunkle Linien durch. Bei alten Exemplaren, wie sie in Böhmen häufig vorkommen, ragen die Scheidewände der mittlern Kammern ringförmig vor und die Kammern erscheinen dann etwas ausgehöhlt. Die Mündung ist mit einem sehr feinen Strahlenkranze umgeben; die Schalenoberfläche glatt.

Sehr selten. Im Plänerkalk und Plänermergel Böhmens dagegen ziemlich gemein.

2. *M. elongata* D'ORB. (T. 1, f. 17)?

D'ORBIGNY l. c. p. 17, T. 1, f. 20—23. — REUSS l. c. p. 29, T. 13, f. 28—32.

Obwohl *M. elongata* eine in der Form sehr veränderliche Species ist, so rechne ich doch einige Exemplare aus dem Lemberger Kreidemergel nur mit Zögern dazu, und die Untersuchung zahlreicherer Exemplare muss erst lehren, ob sie wirklich hierher gehören oder eine abgesonderte Species bilden. Sie sind verlängert, cylindrisch, unten stumpf, oben scharf zugespitzt, wenig gebogen. Die letzte Kammer ist sehr hoch, die mittleren sind niedrig, breiter als hoch, sehr schräg, die ältesten sind selbst bei starker Vergrößerung äusserlich nicht zu unterscheiden. Auch bei den übrigen sind die Näthe nur durch sehr feine Linien angedeutet. Die Mündung ist mit einem feinen Strahlenkranze geziert; die Schalenoberfläche glasis glänzend. — Long. = 0,8—0,85 mm.

3. *M. apiculata* m. (T. 1, f. 18), *testa elongata, arcuata, basi acuminata; loculis 5—6 obliquis, vix convexis; primo minimo, apice untrorsum incurvo instructo; ultimo magno convexiusculo; ore radiato.* — Long. = 0,65 mm.

Schale verlängert, gebogen, unten scharf zugespitzt. 5—6 schräge Kammern, kaum gewölbt; die untern mit nur durch Linien angedeuteten Näthen; die erste unten in eine scharfe vorwärts gerichtete Spitze übergehend; die letzte am grössten, mässig gewölbt, auf einem kurzen excentrischen Schnabel die von einem Strahlenkranze umgebene Mündung tragend. Gehäuse glänzend glatt.

Sehr selten.

Vaginulina D'ORB.

1. *V. Zeuschneri* m. (T. 1, f. 19), *elongata, linearis, valde compressa, dorso truncata et bicarinata, ventre acutangula; loculis planiusculis; suturis latiusculis, striolatis.*

Von dieser ausgezeichneten Art habe ich bisher nur das abgebildete Bruchstück gefunden, dessen hervorstechende Merkmale aber hinreichen, um sie als selbstständige Species zu charakterisiren. Das verlängerte schmale Gehäuse ist stark seitlich zusam-

mengedrückt, an der Bauchseite scharfwinklig, am Rücken abgestutzt und jederseits mit einer Längsleiste besetzt. Die Kammern sind sehr wenig gewölbt; die letzte verlängert sich oben in eine rückenständige Spitze. Die breiten aber sehr seichten Näthe sind mit feinen kurzen Längsstreifen geziert, während die übrige Schalenoberfläche glatt ist.

In Gesellschaft der eben beschriebenen Species fand ich auch noch einige Exemplare einer andern sehr schmalen glatten sichelförmig gebogenen *Vaginulina*, die aber nicht wohl genug erhalten waren, um die Zahl und Beschaffenheit der Kammern daran unterscheiden zu können.

Frondicularia DEFR.

1. *Fr. capillaris* m. (T. I, f. 20), *testa elongata, lanceolata, valde compressa, superne acuta, basi brevissime apiculata, margine truncata et subcanaliculata; loculis 7 latiusculis, angulatis; primo globuloso, triplicato; ultimo nudo, reliquis longitudinaliter tenuissime striolatis.* — Long. = 2,0—2,2^{mm}.

Im Umriss der *Fr. canaliculata* m. (REUSS Kreideverst. Böhm. I. p. 30, T. 8, f. 20, 21) aus dem böhmischen Pläner am ähnlichsten. Gehäuse schmal, verkehrt lanzettlich, über der Mitte am breitesten, nach oben sich rasch zur kurzen Spitze, nach abwärts sich langsam verschmälernd, sehr zusammengedrückt; der abgestutzte Rand mit einer seichten Längsfurche versehen. Sieben ziemlich hohe, oben winklige, nur durch sehr schwache lineare Näthe gesonderte Kammern; die erste klein, fast kugelig, jederseits mit drei Längsrippen geziert, und unten in eine kurze feine Spitze auslaufend; die Oberfläche des Gehäuses ist mit Ausnahme der letzten glatten Kammer mit haarfeinen gedrängten Längslinien bedeckt, welche sich auch über die erste Kammer und deren Längsrippen erstrecken.

Sehr selten.

2. *Fr. amoena* m. (T. I, f. 21), *testa elongata tenui tricarinata, superne acuminata, laevi; loculis tricarinatis, lateribus excavatis, non marginatis, ultimo longissimo.*

Gehäuse sehr schlank und schmal, dreikantig, mit etwas gerundeten ungesäumten Rändern. Die Kammern nehmen sehr rasch zu, so dass die letzte sehr lang ist. Jede besteht aus drei um 120° von einander abstehenden, in der Mittellinie verbundenen Armen. Sie sind an den Seitenflächen ausgehöhlt, glatt; die Näthe wenig schief, deutlich; die runde Mündung am Ende der in eine lange Spitze ausgezogenen letzten Kammer. Die Beschaffenheit der ersten Kammer ist bisher unbekannt, da ich noch kein vollständigeres Bruchstück, als das abgebildete, auffand.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass *Fr. amoena*, so wie auch die *Fr. tricarinata* D'ORB. (l. c. p. 21, 22, T. 2, f. 1—3) aus der Kreide von Sens in Frankreich und wie alle übrigen dreiarmligen Frondicularien, nur monströse Bildungen sind. Wenigstens bei

Fr. turgida m. (Kreideverst. Böhm. II. p. 107, 108, T. 24, f. 41, 44) und *Fr. Cordai* m. (ebenda I. p. 31, T. 8, f. 26—28; T. 13, f. 41; II. p. 108, T. 24, f. 38) aus den böhmischen Baculitenthonen ist dasselbe erwiesen, da beide Species sowohl in ihrer normalen Form mit zwei in einer Ebene gelegenen Kammerarmen, als auch in der dreiarmligen monströsen Form vorkommen. Selbst der Winkel, unter welchen die drei Arme jeder Kammer zusammenstossen, ist nicht constant, da ich Exemplare von *Fr. turgida* besitze, an denen der dritte Arm auf den beiden andern in einer Ebene liegenden senkrecht steht.

Eine dritte Species von *Frondicularia*, welche in dem obern Kreidemergel von Lemberg beschrieben wird, ist *Fr. folium* ALTH, welche ich aber noch nicht selbst auffand und daher auch nicht näher untersuchen konnte. Nach der gegebenen Abbildung (ALTH l. c. II. p. 268, T. 13, f. 25) muss sie mit *Fr. mucronata* m. (Kreideverst. Böhm. I. p. 31, T. 13, f. 43, 44) Aehnlichkeit besitzen.

II. *Helicostegia* D'ORB.

1. *Nautiloidea* D'ORB.

Flubellina D'ORB.

1. *Fl. reticulata* m. (T. I, f. 22), *testa subdeltoidea, superne acuta, basi in lobum medianum producta, valde compressa; margine angusto truncato, sulcatulo; loculis primis minimis spiralibus, superioribus equitantibus angulatis; superficie subtilissime reticulata.* — Long. = 0,85^{mm}.

Die zierlichste aller bisher bekannten Arten dieser Gattung. Das dünne blattförmige Gehäuse ist fast dreieckig, aber in der Mitte der untern Seite in einen schmalen stumpfen Lappen mit ausgeschweiften Seitenrändern vorspringend, oben zugespitzt. Der Rand dünn, abgestutzt, in der Mitte mit einer sehr seichten Längsfurche versehen. Die untersten sehr kleinen Kammern bilden eine kleine Spirale, die kaum dicker ist als das übrige Gehäuse. Die andern Kammern reitend, oben winklig, niedrig. Ihre Begrenzung wird durch keine vorspringenden Leisten, sondern nur durch die eigenthümliche sehr zierliche Sculptur angedeutet. Jede Kammer zeigt nämlich auf der äussern Fläche eine Reihe paralleler Quergrübchen, die durch sehr schmale und niedrige Zwischenwände geschieden werden. Alle zusammengenommen bilden von der Mittellinie des Gehäuses aus gegen die Seitenwände divergirende etwas gebogene Reihen. Bei starker Vergrößerung ergibt es sich, dass sie eine in die Quere verlängerte sechseckige Gestalt haben und dass ihre Zwischenwände in den benachbarten Kammern jedesmal alterniren (f. 22, c.).

Im Umriss stimmt die *Fl. reticulata* ganz mit der *Frondicularia cordata* RÖM. (RÖMER die Verstein. des norddeutschen Kreidegeb. p. 96, T. 15, f. 8) aus dem obern Kreidemergel von Gehrden überein. Die Abbildung aber sowohl, als die Beschreibung

derselben ist viel zu unvollkommen, als dass über die etwaige Uebereinstimmung mit unserer Species ein Ausspruch gethan werden könnte.

Bisher wurde ein einziges, aber ganz vollkommen erhaltenes Exemplar in dem grauen Kreidemergel von Lemberg aufgefunden.

2. *Fl. simplex* m. (T. II, f. 1, 2), *valde compressa, margine attenuata, obovata, superne acuta, basi in spiram sat magnam involuta; loculis majusculis, arcuatis; suturis vix conspicuis; superficie asperula.* — Long. = 0,33 — 1,0^{mm}.

Fronicularia obliqua ALTH I. c. II. p. 268, T. 13, f. 26.

Sehr ausgezeichnet durch die grosse fast regelmässige, kaum verdickte Spirale, in welcher die ersten 6—7 Kammern eingerollt sind. Das Gehäuse ist sehr dünn, an den Rändern zugeschärft, mit sehr feinen Rauigkeiten bedeckt. Die obern in gerader Linie über einander stehenden Kammern sind ziemlich hoch, bogenförmig, am Gipfel nicht winklig, durch kaum sichtbare linienförmige Näthe gesondert.

Ofters kommen jugendliche, vollkommen spiral gewundene Individuen (f. 2) vor, welche eine beinahe kreisförmige dünne Scheibe darstellen.

Diese Species ist nicht zu selten in den grauen und gelblichen Schichten des Lemberger Kreidemergels. Sehr selten ist sie aber so gut erhalten, um die Näthe deutlich wahrnehmen zu können. Diess mag auch die Ursache seyn, dass ALTH die Species verkannt und ganz unrichtig gezeichnet hat.

Spirolina D'ORB.

1. *Sp. Sacheri* m. (T. II, f. 3, 4), *testa juvenili subregulari spirali, elliptica, compressa, margine subangulato, loculis 7—8 convexiusculis, arcuatis, superficie aspera; testa adulta sursum in lineam rectam projecta, compressa.* — Long. = 0,5 — 1,5^{mm}.

Cristellaria aspera ALTH I. c. II. p. 268, T. 13, f. 24.

Am häufigsten sind junge, vollkommen spiral eingerollte Individuen, welche der *Sp. Humboldti* m. aus dem eocänen Septarienthon von Hermsdorf bei Berlin sehr ähnlich sehen. Sie sind im Umriss elliptisch, seitlich ziemlich stark zusammengedrückt, mit gerundet-winkligem Rande. Die 7—8 Kammern mässig gewölbt, bogenförmig, durch deutliche, etwas vertiefte Näthe gesondert. Die Mundfläche der letzten Kammer ist langelliptisch, mit fast parallelen Seitenrändern, gewölbt, trägt am obern Ende die runde Mündung. Gewöhnlich ist sie jedoch schon etwas mehr nach aufwärts gegen die Axe des Gehäuses gerückt und deutet dadurch die spätere Stellung im erwachsenen Zustande des Gehäuses an. Die Oberfläche ist dicht mit starken Rauigkeiten besät.

Sehr selten sind erwachsene Individuen mit 2—3 in gerader Reihe über einander stehenden seitlich zusammengedrückten Kammern und centraler Mündung auf der obern Fläche der letzten Kammer.

ALTH, der nur die Jugendform kannte, hat sie mit der Gattung *Cristellaria* zusammengeworfen, was schon wegen der sehr rauhen, nicht glässig glänzenden Schale nicht hätte geschehen sollen.

Ziemlich häufig in den grauen und gelblichen Schichten.

2. *Sp. inflata* m. (T. II, f. 5, 6), *testa juvenili subrotunda, subumbilicata, inflata, asperrima; loculis 5—6 magnis, convexis, vix arcuatis; ultimo inflato, dilatato.* — Long. = 0,7 — 1,4 mm.

Nonionina inflata ALTH l. c. II. p. 266. T. 13, f. 22.

Bisher wurden fast durchgehends jugendliche Exemplare gefunden. Diese sind fast kreisrund, im Umfange gelappt, gewölbt, aufgeblasen, in der Mitte schwach genabelt. Die spiral eingerollten 5—6 Kammern sind gross, ziemlich gewölbt, durch schmale vertiefte Näthe geschieden, kaum gebogen. Die letzte aufgeblasen, in die Breite ausgedehnt, mit breiter, von oben nach unten stark gewölbter vorderer Fläche, in deren Mitte die senkrecht elliptische Mündung steht. Niemals hat sie die Lage, welche ALTH ihr zuteilt, welcher unsere Species irrthümlich als eine *Nonionina* beschreibt, was schon aus der Betrachtung ausgewachsener Exemplare unwiderleglich hervorgeht. Die Oberfläche ist mit groben Rauigkeiten bedeckt.

Nur ein einziges Exemplar besitze ich, bei welchem sich auf den spiralen Theil des Gehäuses noch eine beinahe horizontale Kammer aufsetzt, deren obere Fläche die centrale Mündung trägt, wie sie der Gattung *Spirolina* eigen ist.

Wie ALTH die nur 0,125—0,25 mm. grosse und, wie ausdrücklich erwähnt wird, ungleichseitige *Rosalina (Anomalina) moniliformis* m. aus dem böhmischen Plänermergel (REUSS l. c. I. p. 36, T. 13, f. 67) damit vereinigen kann, ist nicht einzusehen.

Ziemlich gemein in den grauen und gelblichen Schichten.

Cristellaria LAMK.

1. *C. angusta* m. (T. II, f. 7), *testa elongata, angusta, subarcuata, compressa, nitida, utrinque attenuata; loculis 8—9 elongatis, obliquis; ultimo superne convexo; suturis vix conspicuis; apertura radiata.* — Long. = 0,65 — 0,8 mm.

Aehnlich der *C. cymboides* D'ORB. (*Foram. foss. du bass. tert. de Vienne* p. 85, T. 3, f. 30, 31) aus den Wiener Tertiärschichten. Gehäuse verlängert, schmal, an beiden Enden verschmälert, jedoch oben mehr; von den Seiten zusammengedrückt. 7—8 niedrige schräge Kammern, welche nur durch undeutliche linienförmige Näthe gesondert sind. Die Mundfläche der letzten Kammer lang-elliptisch, gewölbt. Die Mündung gestrahlt.

Sehr selten. Auch im Plänermergel des nordwestlichen Böhmens.

2. *C. truncata* m. (T. II, f. 8), *testa ovata, antice truncata, valde compressa, superne acuta, basi rotundata, dorso acutangula; loculis angustis obliquis, sed*

non arcuatis; suturis vix conspicuis; facie antica loculi ultimi lanceolata, planiuscula; apertura nuda. — Long. = 0,4 mm.

Schale eiförmig, vorne gerade abgestutzt, am Rücken scharfwinklig, sehr zusammengedrückt, oben zugespitzt, unten breit gerundet. Die Kammern niedrig, schräge, aber nicht gebogen. Die letzte erreicht die Spira nicht; ihre Mundfläche lanzettlich, fast eben. Die Näthe linienförmig, an den ersten Kammern kaum sichtbar. Mündung nackt.

Sehr selten.

3. *C. multiseptata m.* (T. II, f. 9), *testa subelliptica, superne acuta, valde compressa, dorso acutangula; loculis numerosis 12—14 angustis, obliquis; suturis linearibus; facie loculi ultimi antica lanceolata, parum convexa; apertura nuda. — Long. = 1,3 mm.*

Gehäuse fast elliptisch, oben kurz zugespitzt, unten schief gerundet, stark zusammengedrückt, am Rücken scharfwinklig. Kammern zahlreich (12—14), niedrig, sehr schräge, ganz flach; die Scheidewände nur als dunkle Linien durchscheinend. Die Mundfläche der letzten Kammer lanzettförmig, wenig gewölbt. Die Mündung nackt. Die Schalenoberfläche glatt, glänzend.

Sehr selten.

Vielleicht gehört hierher die *Cr. intermedia* (REUSS) ALTH (l. c. II. p. 267, T. 13, f. 23). Von *Cr. intermedia m.* (REUSS l. c. I. p. 33, T. 13, f. 57, 58; II. p. 108, 109. T. 24, f. 50, 51) aus dem böhmischen Pläner unterscheidet sie sich beim ersten Anblick wesentlich.

4. *Cr. Spachholtzi m.* (T. II. f. 10), *testa suborbiculari, compressa, dorso acutangula, centro umbilicata; loculis 9—10 angustis, subarcuatis, ultimis convexiusculis; suturis prope centrum profundioribus; apertura nuda. — Long. = 1,3 mm.*

Gehäuse scheibenförmig, fast kreisrund, mit scharfwinkligem Rücken und einer Andeutung eines Nabels im Centrum. Die 9—10 Kammern niedrig, schwach gebogen; die ersten fast eben, die letzten etwas gewölbt, besonders in der Nähe des Centrums des Gehäuses, wo sie in Form einer Falte vortreten. Die Mundfläche der letzten Kammer schmal verkehrt-herzförmig, mässig gewölbt.

Sehr selten.

5. *Cr. obvelata m.* (T. II. f. 11), *testa ovata, inflata, superne acuta, basi late rotundata; loculis paucis (5) subarcuatis; ultimo maximo, reliquos semiamplectente, facie antica valde convexo; apertura radiata. — Long. = 0,45 mm.*

Ganz eigenthümlich gebildet, von allen übrigen Cristellarien wesentlich abweichend.

Das Gehäuse eiförmig, stark gewölbt, fast aufgeblasen, oben zugespitzt, unten breit gerundet. Fünf Kammern; die ersten 4 niedrig, wenig gebogen, durch kaum sichtbare linienförmige Näthe geschieden; die letzte sehr gross, aber in der untern Hälfte schmal, die übrigen an der Vorderseite umfassend. Ihre Mundfläche stark gewölbt. Die Mündung gestrahlt.

Sehr selten.

Robulina D'ORB.

1. *R. trachyomphala* m. (T. II, f. 12), *testa orbiculari compressa, dorso acutangula, disco umbilicali suturisque linearibus aspera; loculis 8 arcuatis, planis; apertura radiata.* — Long. = 0,4—2,0^{mm}.

Gehäuse kreisrund, linsenförmig, scharfrandig, an der kleinen Nabelscheibe mit gröbern, an den sehr seichten linienförmigen Näthen mit sehr feinen Rauigkeiten bedeckt. Der letzte Umgang mit 8 gebogenen flachen Kammern. Die Mundfläche der letzten Kammer breit dreieckig, beiderseits von einer erhabenen Leiste eingefasst, in der Mitte wenig gewölbt. — Nicht zu selten.

ALTH scheint diese Species für *Cristellaria rotulata* LAMK. zu nehmen (l. c. II. p. 267). Letztere scheint merkwürdiger Weise dem Lemberger Kreidemergel zu fehlen oder darin doch selten zu sein, da ich unter einer bedeutenden Anzahl von Foraminiferen sie aufzufinden nicht so glücklich war.

Nonionina D'ORB.

1. *N. quaternaria* m. (T. II. f. 13), *testa circulari, subquadriloba, convexa, parum compressa; loculis 4 triangularibus; suturis superficialibus; apertura angusta, latissima, semicirculari.* — Long. = 0,4^{mm}.

Steht der *N. quadriloba* m. aus dem Salzthone von Wieliczka nahe, unterscheidet sich aber durch die viel weniger tiefen Näthe und den daher nicht deutlich vierlappigen Umriss davon. Das Gehäuse ist fast kreisrund, dick, wenig zusammengedrückt; der Rand breit gerundet. Vier flache, nur durch sehr schmale und seichte Näthe gesonderte dreieckige Kammern im letzten Umgang. Das Centrum beider Schalenflächen ist nur sehr wenig vertieft, nicht genabelt. Die Mundfläche der letzten Kammer wenig gewölbt, niedrig, quer halbmondförmig. Dieselbe Gestalt besitzt die sehr enge, mehr als die Hälfte des vorletzten Umganges umfassende Mündung.

Sehr selten in den grauen und gelblichen Schichten.

2. *N. bulloides* D'ORB.

D'ORBIGNY Foram. foss. du bassin tert. de Vienne p. 107, T. 5, f. 9, 10.

Diese Species, welche ich von der in den Tertiärmergeln des Wiener Beckens und von Siena nicht zu unterscheiden vermag, findet sich nur selten in den grauen und gelblichen Schichten des Lemberger Kreidemergels.

2. *Turbinoidea* D'ORB.*Rotulina* D'ORB.1. *R. umbilicata* D'ORB. — *Diam.* = 0,33 — 0,5 mm.

D'ORBIGNY in Mém. de la soc. géol. de France 1840. IV. 1. p. 32, T. 9, f. 4—6.

R. targida v. HAGENOW in LEONHARD'S und BRONN'S Jahrbuch 1842. H. 5, p. 570. T. 9. f. 22.*R. nitida* REUSS Kreideverst. Böhmens. I. p. 35, T. 8, f. 52. T. 12, f. 20. — ALTH I. c. p. 265.

Gemein in den grauen und gelblichen Schichten. Häufig auch im Plänermergel, selten im Plänerkalk Böhmens; in der weissen Kreide Rügens; häufig in denselben Schichten von Meudon, St. Germain, selten von Sens in Frankreich und in England. — Soll nach D'ORBIGNY auch lebend im adriatischen Meere bei Rimini vorkommen (?).

2. *R. crassa* D'ORB. — *Diam.* = 0,35 — 0,85 mm.

ORBIGNY I. c. p. 32, T. 9, f. 7, 8.

Weniger häufig als die vorige Species in den grauen und gelblichen Schichten. Ueberdiess selten in der weissen Kreide von St. Germain und Meudon in Frankreich und in England.

3. *R. involuta* m. (T. II, f. 14), *orbiculata, angulata, superne convexa, subtus planiuscula; anfractus duo, ultimus maximus; loculi ejus 8 latiusculi arcuati.* — *Diam.* = 0,4 — 0,5 mm.

Kreisförmig, am Rande ziemlich scharfkantig, unten beinahe flach, oben gewölbt, ohne Nabelscheibe. Zwei Umgänge; der letzte sehr breit, umfassend, der erste in der Mitte der untern Fläche nur ein kleines sehr flaches Knöpfchen bildend. Im äussern Umgange 8 breite bogenförmige, durch sehr schwache und schmale Nätze geschiedene Kammern.

Ziemlich selten.

4. *R. polyrraphes* m. (T. III, f. 1), *orbiculata, subtus subplana, superne convexa, margine angulata; anfractus 3 manifesti; loculi ultimi aufractus 10 arcuati, superne subrecti angusti; suturae obsoletae.* — *Diam.* = 0,4 mm.

REUSS Kreideverst. Böhm. I. p. 35, T. 12, f. 18.

R. depressa ALTH I. c. II. p. 266. T. 13, f. 21.

Bald rechts, bald links gewunden, im Umriss kreisförmig und ziemlich scharfwinklig, unten fast flach, oben mässig gewölbt, ohne Nabel. Drei deutliche wenig abnehmende Umgänge, der letzte mit 10 schmalen, unten bogenförmigen, oben beinahe geraden Kammern. Nur die letzten sind durch etwas deutlichere Nätze gesondert, die übrigen Nätze sind nur mit bewaffnetem Auge als feine Linien wahrnehmbar. Die Schalenoberfläche sehr fein punktirt.

Selten. — Nicht selten im böhmischen Plänermergel.

Rosalina D'ORB.

1. *R. ammonoides* m. (T. III, f. 2), *testa orbiculari, depressa, subtus parum convexa, medio subconca, superne convexiuscula, umbilicata; anfractibus 3, subinvolutis; loculis ultimi 9—10 angustis, subtus arcuatis, superne subrectis et in umbilico in processum brevem linguiformem productis; loculo ultimo convexo.* — *Diam.* = 0,4—0,5 mm.

REUSS l. c. I. p. 36, T. 13, f. 66.

Im Umkreise rund, stark niedergedrückt, unten wenig gewölbt, in der Mitte selbst etwas vertieft; oben etwas stärker gewölbt und deutlich genabelt, am Rande fast gerundet. Die Spira unten etwas concav, aus 3 deutlichen Umgängen bestehend; der letzte mit 9—10 schmalen, auf der untern Fläche bogenförmigen, auf der obern mehr geraden Kammern. Die letzte Kammer ist zuweilen stark gewölbt und ragt besonders auf der obern Fläche halbkugelig vor. Die Näthe sind nur auf dem letzten Umgang etwas vertieft, auf dem zweiten nur als feine Linien, auf dem innersten gar nicht sichtbar.

Ziemlich selten. — Nicht selten in den böhmischen Baculitenthonen.

Anomalina D'ORB.

1. *A. complanata* m. (T. III. f. 3), *suborbiculata, maxime depressa, superne convexiuscula, subtus complanata, margine subcarinata, medio utrinque umbilicata; loculis 12 angustis arcuatis.* — *Diam.* = 0,4 mm.

Das der *A. rotula* D'ORB. aus dem Leithakalke von Nussdorf (ORBIGNY l. c. p. 172, T. 10, f. 10—12) ähnliche Gehäuse ist ziemlich kreisförmig, sehr niedergedrückt, oben wenig gewölbt, unten fast flach, am Rande beinahe gekielt. Beide Flächen sind sehr seicht genabelt; die untere lässt die innern Umgänge in viel weiterem Umfange sehen als die obere. Im letzten Umgange 12 schmale gebogene flache Kammern mit sehr seichten engen Näthen, die nur zwischen den letzten Kammern etwas deutlicher sind. Die Schalenoberfläche punktirt.

Sehr selten.

Truncatulina D'ORB.

1. *T. convexa* m. (T. III, f. 4), *testa subrotundata, superne valde convexa, subtus medio concava; margine acutangulo; loculis 5, superne convexis, subdelloideis, subtus planis arcuatis; superficie grosse punctata.* — *Diam.* = 0,5—1,0 mm.

Zeichnet sich vor den übrigen verwandten *Truncatulina*-Arten durch die starke Wölbung der obern Schalensfläche aus. Das Gehäuse ist beinahe kreisrund, etwas fünflappig, mit sehr gewölbter oberer, flacher, in der Mitte selbst vertiefter unterer Fläche und ziemlich scharfwinkligem Rande. Fünf Kammern, welche oben fast gerade dreiseitig, gewölbt und durch vertiefte Näthe geschieden sind. Besonders die letzte ist sehr

convex, fast kugelig. Auf der untern Fläche dagegen erscheinen sie bogenförmig, ganz flach. Die Näthe sind daselbst nur durch feine vertiefte Linien angedeutet und diess nur am äussersten Umgange. Auf der übrigen Spira lassen sich gar keine Kammern unterscheiden. Die Oberfläche ist mit nicht sehr gedrängten groben Grübchen bedeckt.

Nicht zu selten in den grauen und gelblichen Schichten.

Globigerina D'ORB.

1. *Gl. trochoides* m. (T. III, f. 5), *testa trochiformi, convexa, inflata, basi acuta, subtiliter punctata; anfractibus 4, ultimo maximo inflato; loculis ternis, ultimis globulosis; apertura ad marginem internum loculi ultimi fissa lata aut nulla.* — Long. = 0,35 — 0,4 mm.

REUSS l. c. I. p. 36, T. 12, f. 22.

So sehr sich diese Species von allen übrigen Globigerinen unterscheidet, so lässt sie sich doch nicht wohl einer andern Helicostegiergattung unterordnen. Die Mündung fehlt meistens ganz oder erscheint als eine enge aber breite Querspalte am innern Rande der letzten Kammer, wo diese mit den beiden übrigen Kammern des letzten Umganges zusammenstösst.

Das Gehäuse ist stark gewölbt, kreiselförmig, im obern Theile aufgeblasen, fast eben so breit als hoch, unten kurz zugespitzt. Vier Umgänge, von denen die untern drei sehr klein, sehr rasch an Grösse zunehmend; der letzte sehr gross, mehr als zweimal so gross als die übrigen zusammengenommen. Die Kammern der untern Umgänge sind durch wenig vertiefte Näthe geschieden; die letzten drei dagegen stark gewölbt, kugelig, mit tiefen Näthen. Die letzte Kammer ist fast so gross, als das ganze übrige Gehäuse. Die glänzende Schalenoberfläche zeigt bei starker Vergrösserung feine vertiefte Punkte.

Sehr selten. Selten auch im böhmischen Plänermergel und im Kreidetuff von Maestricht.

Bulimina D'ORB.

1. *B. Puschii* m. (T. III, f. 6), *testa elongato-ovata, deorsum parum attenuata, utrinque obtusa, aspera; anfractibus 6 angustis manifestis; loculis ternis convexiusculis; suturis paullulum excavatis.* — Long. = 0,65 — 1,0 mm.

Das verlängert-eiförmige sehr rauhe Gehäuse verschmälert sich nach abwärts nur sehr wenig und ist an beiden Enden stumpf, zugerundet. Sechs niedrige Umgänge, welche mit Ausnahme etwa der zwei ersten deutlich unterscheidbar sind. Jeder besteht aus drei schwach gewölbten, durch zwar schmale und wenig tiefe, aber deutliche Näthe geschiedenen Kammern, welche breiter als hoch sind. Die Mündung schmal, comma-förmig. Aehnlich der *B. Orbigny* und *polyrraphes* m. aus dem böhmischen

Pläner (REUSS l. c. I. p. 38, T. 13, f. 74; II. p. 109, T. 24, f. 53), aber wohl unterschieden. Junge Exemplare sind viel weniger langgezogen, eiförmig mit nur 4—5 Windungen.

Häufig.

2. *B. imbricata* m. (T. III, f. 7), *elongato-ovata, subcylindrica, deorsum parum attenuata, utrinque obtusa, subtilissime punctata; loculis planis imbricatis majusculis; suturis linearibus; anfractibus 5; spira majuscula.* — Long. = 0,6 — 0,65 mm.

Verlängert-eiförmig, nach abwärts sich nur sehr allmähig und wenig verdünnend, an beiden Enden stumpf, äusserst fein punktirt. Fünf Umgänge, deren letzter die Hälfte der Länge des ganzen Gehäuses einnimmt. Die Kammern nicht gewölbt, dachziegelförmig an einander schliessend; die Näthe sehr fein, linienförmig, besonders die untern mit freiem Auge kaum wahrnehmbar. Sehr ähnlich der *B. squamigera* D'ORB. (D'ORBIGNY *Foraminif. des iles Canaries* in *Histoire nat. des iles Canaries par WEBB et BERTHELOT* pag. 137, T. 1, f. 22—24), ja fast identisch; nur sind die Kammern etwas weniger lang.

Nicht selten in den grauen und gelblichen Schichten.

3. *B. acuta* m. (T. III, f. 8), *testa oblongo-ovata, basi acuta, superne obtusa, subtilissime punctata; anfractibus 6, ultimo maximo; loculis planis imbricatis; suturis obsoletis.* — Long. = 0,65 mm.

Der vorigen Species sehr ähnlich, von ihr nur durch die dünnere unten zugespitzte Form des Gehäuses, die zahlreichern (8) Umgänge, von denen der letzte sehr gross ist, mehr als die Hälfte des ganzen Gehäuses einnimmt und endlich durch die kaum vertieften linienförmigen Näthe unterschieden.

Sehr selten.

4. *B. ovulum* m. (T. III, f. 9), *ovalis, utrinque acuta, nitida, subtilissime punctulata; anfractus 4, ultimus reliquos aequans, imo superans; loculi terni, parum convexi; suturae conspicuae.* — Long. = 0,33 — 0,5 mm.

REUSS l. c. I. p. 37, T. 8, f. 57; T. 13, f. 73. — ALTH l. c. II. p. 261, T. 13, f. 18.

Eiförmig, beiderseits etwas zugespitzt, oben jedoch stets stumpfer. Vier deutliche Umgänge, der letzte so hoch oder höher als die übrigen zusammengenommen. Die Kammern sehr wenig gewölbt, dachziegelförmig, durch seichte aber deutliche Näthe geschieden. Die Oberfläche der Schale glasig glänzend, lässt jedoch bei starker Vergrößerung äusserst feine Punkte wahrnehmen.

Die von ALTH l. c. T. 13, f. 18 gegebenen Abbildungen stellen die Vertheilung der Kammern nicht richtig dar.

Sehr selten; häufig in den Plänerschichten Böhmens.

5. *B. Presli m.* (T. III, f. 10), *testa late obovatu, inflata, superne truncata, basi acuta; anfractibus 4, ultimo maximo; loculis quaternis, unguistis arcuatis, ultimo superne semilunari, truncato; apertura parva semielliptica.* — Long. = 0,33 — 1,0 mm.

REUSS l. c. I. p. 38, T. 13, f. 72.

Bald rechts, bald links gewunden, die böhmischen Exemplare meist links, die galizischen rechts. Schale aufgeblasen, verkehrt-eiförmig, bei ältern Individuen eben so breit als hoch, unten rasch zur kurzen Spitze zusammengezogen. Vier Umgänge, der letzte sehr gross, viel grösser als die übrigen zusammengenommen. In jedem Umgang vier schmale gebogene Kammern. Die letzte Kammer mit einer obern halbmondförmigen fast ebenen Fläche. Oberfläche der Schale nur mit sehr feinen Rauigkeiten bedeckt.

Sehr ähnlich der *B. obliqua* D'ORB. (*Mém. de la soc. géol. de France* 1840. IV. 1. p. 40, T. 4, f. 7, 8) aus der weissen Kreide von Meudon, St. Germain, Sens in Frankreich und von England, aber stumpfer, dicker, weniger schlank.

Häufig in den grauen und gelblichen Schichten des Lemberger Kreidemergels. — Häufig im böhmischen Pläner.

6. *B. intermedia m.* (T. III, f. 11), *testa brevi ovata, basi acuta, superne inflata; anfractibus 4—5, ultimo maximo, reliquos superante; loculis inferioribus parum convexis, ultimis tribus inflatis globulosis; apertura elliptica.* — Long. = 0,5 — 0,66 mm.

REUSS l. c. I. p. 37, 38, T. 13, f. 71.

Aehnlich in der Form der *B. Murchisoniana* D'ORB. (l. c. p. 41, 42, T. 4, f. 15, 16), aber viel breiter eiförmig, fast so breit als hoch, unten in eine kurze mitunter stumpfe Spitze verschmälert, am obern Ende am breitesten, stark gewölbt. Vier bis fünf Umgänge, von denen der letzte alle übrigen zusammen an Grösse übertrifft. Die Kammern der ersten Umgänge sind klein, wenig gewölbt und nur durch schwache Näthe gesondert, die letzten drei aber gross, kugelig aufgeblasen, mit ziemlich tiefen Näthen. Die Mündung weit, elliptisch, fast senkrecht gegen den innern Rand der letzten Kammer gestellt; die Schalenoberfläche sehr fein punktirt.

Sehr selten.

7. *B. variabilis* D'ORB. — Diam. = 0,4 — 1,0 mm.

D'ORBIGNY l. c. p. 40, 41, T. 4, f. 9—12.

REUSS l. c. p. 37, T. 8, f. 56, 76, 77. — ALTH p. 264.

Bald rechts, bald links gewunden, in der Art der Aufrollung sehr wechselnd.

Gemein in den grauen und gelblichen Schichten. — Gemein auch im Plänermergel und Plänerkalk Böhmens; in der weissen Kreide von Sens, Meudon und St. Germain in Frankreich und von England.

8. *B. obesa* m. (T. III. f. 12, T. IV. f. 1), *testa subglobosa, inflatu, asperula; anfractibus duobus, primo minimo obsoleto, altero maximo, e loculis 4 convexis conflato; loculo ultimo maximo, semigloboso; apertura virgulari.* — *Diam.* = 0,5 — 1,0 mm.

Das Gehäuse ist aufgeblasen, fast kugelig. Nur zwei Umgänge, der erste sehr klein, undeutlich, sitzt nur in Form eines kleinen, zuweilen kaum vortretenden Knötchens auf der untern Fläche des zweiten sehr grossen Umganges, welcher aus vier gewölbten Kammern besteht. Die letzte ist sehr gross, halbkugelig, auch oben gewölbt, mit commaformiger Mündung. Die Schalenoberfläche mit feinen Rauigkeiten bedeckt.

Nicht selten in den grauen und gelblichen Schichten.

Verneuilina D'ORB.

1. *V. Bronni* m. (T. IV. f. 2), *testa pyramidata, acute trigona, superne convexiuscula, basi acuta, lateribus subplana; anfractibus 9—10; loculis angustis, obliquis, planis; suturis vix arcuatis, obsoletis; superficie asperula.* — *Long.* = 0,45 mm.

REUSS l. c. I. p. 38, T. 12, f. 5.

Gehäuse dreiseitig-pyramidal, scharfwinklig, unten zugespitzt, oben mässig gewölbt, mit ebenen in der Mitte kaum vertieften Seitenflächen. Neun bis zehn dreikammerige Umgänge; die Kammern niedrig, schräge, eben, durch kaum gebogene, sehr undeutliche Näthe gesondert. Die letzten Kammern oben mässig gewölbt. Die Schalenoberfläche rau.

Die ähnliche *Vern. spinulosa* m. (Neue Foraminiferen des österreich. Tertiärbeckens. Aus den Denkschriften der k. Akad. d. Wissenschaft. I. Bd. p. 10, T. 2, f. 12) unterscheidet sich durch die stacheligen Seitenkanten und die bogenförmigen Näthe.

Sehr selten. — Auch im böhmischen Plänermergel.

2. *V. dubia* m. (T. IV. f. 3), *testa asperrima, elongato-elliptica, triquetra, tricarinata, utrinque attenuata, lateribus concaviuscula; suturis obsoletis; apertura parva subelliptica.* — *Long.* = 1,0 — 1,5 mm.

Das ziemlich grosse sehr raue Gehäuse ist lang-elliptisch, an beiden Enden verschmälert, ziemlich scharf dreikantig, an den Seitenflächen der Länge nach seicht ausgehöhlt. Die Näthe sind nur sehr undeutlich, so dass sich ihre Zahl und Richtung nicht mit Bestimmtheit ermitteln lässt; die an der Spitze des Gehäuses befindliche Mündung ist klein und wenig in die Quere verlängert, mitunter fast rundlich.

Die Beziehung der Mündung zu den letzten Kammern lässt sich, da diese nicht mit Sicherheit zu unterscheiden sind, nicht ermitteln. Es bleibt daher ungewiss, ob unsere Species wirklich zur Gattung *Verneuilina* gehöre, obwohl diess durch die im Querschnitte mancher Exemplare in einer schiefen Ebene deutlich sichtbaren drei Kammern sehr wahrscheinlich wird.

Auch die *Textularia tricarinata* m. (l. c. I. p. 39, T. 8, f. 60) aus dem böhmischen Pläner gehört wohl zu derselben Gattung. Von *Textularia triquetra* MÜNST. (REUSS l. c. I. p. 39, T. 13, f. 17) kann diess mit Sicherheit behauptet werden, da an manchen Exemplaren die Kammern des letzten Umganges sich ganz wohl unterscheiden lassen.

Verneuilina dubia findet sich nur sehr selten in den tieferen grauen Schichten des Lemberger Kreidemergels; eben so selten im böhmischen Pläner.

Gaudryina D'ORB.

1. *G. rugosa* D'ORB.

D'ORBIGNY l. c. p. 44, T. 4, f. 20, 21.

Selten. — Gemein im Plänermergel Böhmens, in der weissen Kreide von Meudon, St. Germain und Sens in Frankreich.

2. *G. ruthenica* m. (T. IV, f. 4), *elongato-conica, utrinque obtusa, inferne parum attenuata, compressa; loculis inferioribus spirali-turriculatis, vix conspicuis; superioribus distichis, parum convexis; apertura brevi in apice obtuso loculi ultimi; superficie asperula.* — Long. = 0,6 — 1,33 mm.

Gehäuse verlängert, nach unten nur sehr allmähig und wenig verschmälert, an beiden Enden stumpf, wenig zusammengedrückt. Die untern kaum erkennbaren Kammern stehen in schraubenförmiger Spirale. Die obern zweireihigen sind durch etwas vertiefte wenig schiefe Näthe geschieden. Die letzte Kammer läuft oben in eine sehr stumpfe gerundete Spitze aus, welche die kleine, nur wenig in die Quere verlängerte Mündung trägt. Die Oberfläche ist mit feinen Rauigkeiten bedeckt.

So sehr unsere Species in der Form und Anordnung der Kammern den Charakter der echten typischen Gaudryinen an sich trägt, so weicht sie doch in Beziehung auf die Stellung der Mündung wesentlich davon ab, so dass man im ersten Augenblicke leicht versucht sein könnte, darin den Typus einer besondern Gattung zu sehen. Es bietet aber die Stellung der Mündung bei mehreren von mir untersuchten Gaudryinenarten so viele Verschiedenheiten dar, welche eine zusammenhängende Reihe bilden, dass an eine generische Trennung nicht zu denken ist.

Während bei *G. rugosa* D'ORB. und *G. pupoides* D'ORB. (l. c. p. 44, T. 4, f. 22—24) die quere Mündung an dem innern Rande der letzten Kammer, dicht an die vorletzte angrenzend, liegt, ist sie schon bei *G. badenensis* m. (REUSS neue Foraminif. aus dem österreich. Tertiärbecken p. 10, 11, T. 2, f. 14) durch eine schmale lippenartige Brücke von der vorletzten Kammer geschieden. Bei *G. siphonella* m. aus dem Eocänthone von Hermsdorf bei Berlin wird diese Brücke schon breiter und die Mündung rückt daher an der letzten Kammer höher hinauf. Bei *G. ruthenica* endlich ist sie bis auf den

Scheitel derselben hinaufgedrängt, verräth aber an manchen Exemplaren doch noch eine schwache Neigung gegen die innere Seite derselben.

Wollte man strenge an der Gattungsdiagnose D'ORBIGNY's festhalten, so müsste man jede der genannten Species zum Typus eines besondern Genus erheben. Da diess aber rein willkürlich und ohne jeden vernünftigen Grund wäre, und da sich von der normalen Stellung der Mündung bis zu der bei *G. ruthenica* vorfindigen offenbare vermittelnde Zwischenglieder darbieten, so muss man dieselben sämmtlich mit der Gattung *Gaudryina* vereinigt lassen, den Gattungscharakter derselben aber in Beziehung auf die Lage der Mündung erweitern.

Gemein in den grauen und gelblichen Schichten.

Pyrulina D'ORB.

1. *P. acuminata* D'ORB.

D'ORBIGNY l. c. p. 43, T. 4, f. 18, 19.

Sehr selten in den grauen Schichten. — Gemein in der weissen Kreide von Meudon, selten in der von Sens und St. Germain in Frankreich.

III. *Enallostegia* D'ORB.

1. *Cryptostegia* m.

Allomorphina m. *)

1. *A. obliqua* m. (T. IV, f. 5), *testa oblique trigona, subangulata, convexa, marginibus rotundata; loculo ultimo maximo, reliquis duobus obsoletis minimis; apertura lata transversa submarginali.* — Long. = 0,5—0,6 mm.

Von den übrigen Arten der Gattung durch ihre winklige schief dreieckige Gestalt unterschieden. Das Gehäuse ist gewölbt, mit gerundeten Rändern und fast randlicher enger, aber breiter, gelippter Mundspalte. Die sehr grosse letzte Kammer nimmt fast das ganze Gehäuse ein; die übrigen zwei Kammern sehr klein, kaum wahrnehmbar. Die Näthe sehr undeutlich. Das Gehäuse fast glatt, glänzend.

Sehr selten.

2. *A. cretacea* m. (T. IV, f. 6), *testa subelliptica, compressa, utrinque late rotundata; loculis parum convexis, suturis manifestis; apertura lata, angustissima, labio tenuissimo munita.* — Long. = 0,33—0,5 mm.

Das Gehäuse ist breit-oval, an beiden Enden zugerundet, mässig zusammengedrückt.

*) Den Gattungscharakter, so wie auch den Familiencharakter der *Cryptostegier* kann man nachlesen in REUSS: Neue Foram. des österr. Tertiärbeckens p. 14—16.

Die Kammern sind schwach gewölbt, die Näthe daher etwas vertieft; die quere Mündung sehr breit, aber enge und durch eine dünne Lippe verdeckt.

Zuweilen wird auf der untern Seite des Gehäuses neben der dritten Kammer noch eine vierte sichtbar.

Selten.

3. *A. contraria* m. (T. IV, f. 7), *late ovata, convexa, lateraliter subcompressa; suturis complanatis; apertura in margine superiore angusta, tenuilabiata*. — Long. = 0,26 — 0,46 mm.

Unterscheidet sich von den übrigen Arten des Geschlechtes *Allomorphina* dadurch, dass das breit-ovale gewölbtte Gehäuse nicht, wie gewöhnlich, von oben nach unten, sondern, wiewohl schwach, von den Seiten zusammengedrückt ist. Auf dem dadurch entstandenen sehr stumpfwinkligen und gerundeten, nach aufwärts gekehrten Rande liegt die quere, hier stärker gebogene, sehr enge Mündung, welche ebenfalls von einer sehr dünnen Lippe überragt wird. Die Näthe sind linienförmig, kaum vertieft.

Selten.

2. *Polymorphinidea* D'ORB.

Globulina D'ORB.

1. *Gl. lacrima* m. (T. IV, f. 9), *testa elongato-ovata, superne acuminata, vitrea; suturis linearibus vix conspicuis; apertura parva radiata*. — Long. = 0,6 — 1,15 mm.

REUSS l. c. I. p. 49, T. 13, f. 83; T. 12, f. 6. — ALTH l. c. II. p. 263, T. 13, f. 16.

Gehäuse verlängert-eiförmig, oben zugespitzt, glasig glänzend, mit fast vollkommen rundem Querschnitt. Die linienförmigen feinen Näthe sind nur bei starker Vergrößerung wahrzunehmen. Die kleine runde Mündung ist mit einem Kranze feiner Strahlen umgeben.

Sehr selten.

2. *Gl. horrida* m. (Taf. IV, f. 8), *ovata, basi late rotundata, ubicunque hispida, superne irregulariter in spinas tubulosas divaricatas terminata; suturae vix conspicuae*. — Long. = 0,83 mm.

REUSS l. c. II. p. 110, T. 43, f. 14.

Aulostomella pediculus ALTH l. c. p. 264, T. 13, f. 17.

Eiförmig, unten breit gerundet, nach oben sich etwas verschmälernd und am obern Ende mit 5—6 nicht sehr langen, unregelmässig nach allen Seiten gerichteten röhri gen Dornen besetzt. Die ganze Oberfläche ist mit feinen zerstreuten spitzigen Rauigkeiten bedeckt, welche früher von mir übersehen worden waren. Die feinen linienförmigen Näthe sind nur bei starker Vergrößerung sichtbar.

ALTH (l. c. p. 263) bildet aus dieser Species wegen des Fehlens der gewöhnlichen Mündung und der wahrscheinlich ihre Stelle vertretenden röhri gen Dornen eine beson-

dere Gattung unter dem Namen *Aulostomella*. Mir scheint diess aber nicht wohl thunlich, nicht so sehr weil der übrige Bau ganz vollkommen mit dem der Globulinen übereinstimmt, als weil auch bei den Guttulinen ganz ähnliche Formen vorkommen, wie z. B. die von mir aus dem böhmischen Pläner beschriebene *Guttulina damaecornis* m. (l. c. I. p. 40, T. 13, f. 85), die man dann eben so zum Typus eines besondern Genus erheben müsste. Das ganz gleichmässige Vorkommen der verästelten Röhren am obern Ende bei beiden Gattungen scheint schon darauf hinzudeuten, dass dadurch wohl ein spezifischer, aber keineswegs ein generischer Unterschied bedingt werde. Ja es wäre sogar möglich, dass das Auftreten der eigenthümlichen Röhren am obern Ende des Gehäuses in manchen Fällen nur eine monströse Bildung sei, wie z. B. das dreiarmige Gehäuse mancher Frondicularien. Es wird diess um so wahrscheinlicher, da *Guttulina damaecornis* mit *G. trigonula* m. (l. c. p. 40, T. 13, f. 84) bis auf die Röhrenbildung vollkommen übereinstimmt.

Sehr selten.

Guttulina D'ORB.

1. *G. cretacea* ALTH (T. IV, f. 10), *testa late ovata, obtuse trigona, superne acuta, basi rotundata; loculis 5 parum convexis; suturis modice excavatis, angustis; ore radiato.* — Long. = 0,4 — 0,65 mm.

ALTH l. c. II. p. 262, T. 13, f. 14.

Breit-eiförmig, oben zur kurzen Spitze zusammengezogen, im untern Theile im Querschnitt stumpf dreieckig; 5 mässig gewölbte Kammern, durch schmale und seichte Nätze getrennt. Mündung mit einem feinen Strahlenkranze. — Ist der *G. trigonula* m. (l. c. I. p. 14, T. 13, f. 84) aus dem böhmischen Pläner sehr ähnlich und scheint, wie alle Guttulinen nicht unbedeutend in ihrer Gestalt zu wechseln.

Sehr selten.

Polymorphina D'ORB.

1. *P. leopolitana* m. (T. IV, f. 11), *testa subfusiformi, utrinque attenuata, superne acuta; loculis 4; suturis conspicuis; apertura radiata; superficie nitida.* — Long. = 0,5 mm.

Gehäuse spindelförmig, nicht zusammengedrückt, an beiden Enden, oben jedoch stärker verschmälert. Man unterscheidet äusserlich nur 4 Kammern, von denen nur die drei obern durch etwas vertiefte Nätze gesondert sind.

Sehr selten.

3. *Textularidea* D'ORB.

Virgulina D'ORB.

In dem Kreidemergel von Lemberg trifft man unter den übrigen Foraminiferen vereinzelt Bruchstücke einer *Virgulina*, welche Aehnlichkeit mit *Virg. Reussi* GRN.

aus dem böhmischen Pläner (REUSS l. c. I. p. 40, T. 8, f. 61) und mit *V. Schreibersana* CŹIŽ. (Beitrag z. Kennt. der foss. Foram. d. Wiener Beck. in HAIDINGER's naturw. Abhandl. II. 1. p. 147 T. 13, f. 18 — 21) aus den Tertiärschichten des Wiener Beckens verräth. Sie sind aber nicht vollständig genug, um eine genauere Bestimmung zu gestatten.

Bolivina D'ORB.

1. *B. tegulata* m. (T. IV, f. 12), *testa anguste lanceolata, superne obtusa, basi acuta, compressa, punctulata, margine subrotundata; loculis numerosis transversis.* — Long. = 0,8 — 1,0 mm.

Virgulina tegulata REUSS l. c. I. p. 40, T. 13, f. 81.

Gehäuse schmal, verkehrt lanzettförmig, unten spitz, oben stumpf, zusammengedrückt, am Rande wenig winklig, fast gerundet. Die zahlreichen Kammern (9 — 10 jederseits) sind nicht gewölbt, etwas höher als breit; die Näthe linienförmig, kaum vertieft, fast quer. Oberfläche fein punktirt. Die galizischen Exemplare sind gewöhnlich etwas grösser als die böhmischen. Einzelne sind mehr oder weniger verbogen.

Sehr selten. — Gemein im böhmischen Plänermergel.

2. *B. incrassata* m. (T. IV, f. 13), *testa late lanceolata, utrinque obtusiuscula, crassa, obtusangula, punctata; loculis planis, obliquis.* — Long. = 0,76 mm.

Ist viel breiter lanzettförmig als *B. antiqua* D'ORB. (D'ORBIGNY *Foram. foss. du bass-tert. de Vienne* p. 240, T. 14, f. 11 — 13) und *B. tegulata* m., ja selbst breiter als *B. dilatata* m. (REUSS neue Foraminif. aus dem Wiener Tertiärbecken p. 17, T. 3, f. 15). Zugleich ist das Gehäuse weniger zusammengedrückt, viel dicker als bei den eben genannten Arten. Der Rand ist sehr stumpfwinklig, besonders im obern Theile fast abgerundet. Jederseits 8 — 10 niedrige sehr schräge Kammern, die durch kaum sichtbare linienförmige Näthe gesondert sind. Schalenoberfläche fein punktirt.

Sehr selten.

Textularia DEFR.

1. *T. articulata* m. (T. IV, f. 14), *testa elongatissima, angustissima, compressa, ancipite, constricto-articulata, superne acuta; loculis obliquis; suturis obsoletis.*

Zeichnet sich vor allen andern bekannten Arten durch die sehr lange und schmale, zweischneidige, stark zusammengedrückte, stellenweise eingeschnürte, gleichsam gegliederte Schale aus. Die Kammern sind sehr zahlreich, schräge und besonders die untern, nur durch undeutliche lineare Näthe gesondert.

Bisher haben sich nur seltene Bruchstücke, aber kein einziges vollständiges Exemplar gefunden. Die Beschaffenheit des untern Endes ist daher noch nicht bekannt, das obere bildet eine kurze stumpfe Spitze.

Die von ALTH beschriebene *T. dentata* ALTH (l. c. II. p. 262, T. 13, f. 13) kenne ich nicht aus eigener Anschauung; zwei bis drei andere Arten von *Textularia* habe ich bisher nur in wenigen schlecht erhaltenen Exemplaren gefunden, so dass ich mich ausser Stande sehe, dieselben genauer zu beschreiben und zu bestimmen. Ueberhaupt verrieth der Kreidemergel von Lemberg eine auffallende Armut an Textularien, die in manchen andern Kreidegliedern, z. B. dem böhmischen Pläner, noch mehr aber in den Tertiärschichten in so reicher Fülle auftreten.

IV. *Agathistegia* D'ORB.

Adelosina D'ORB.

1. *A. cretacea* m. (T. IV, f. 15), *juvenilis suborbicularis*, *marginē acutangula*; *posteu ovalis*, *rostrō plicatella*, *dorso obtusungula*; *apertura unidentata*; *superficies laevigata*. — *Long.* = 0,6 mm.

Die erste Kammer ist fast kreisförmig, gewölbt, im Umfange scharfwinklig. Wenn die zweite Kammer sich ausbildet, wird das Gehäuse oval, oben in einen gebogenen, fein längsgefalteten Schnabel übergehend. Die Seiten sind gewölbt, besonders im untern Theile; der Rücken winklig, unten stumpf, bald gerundet. Die Mündung rund, mit einem einfachen Zahn. Die Schalenoberfläche glatt, ohne Verzierung.

Bei unserer Species, die ich nur in sehr wenigen Exemplaren in den grauen Schichten des Kreidemergels vorfand, ist die Lage der ersten Kammer gegen die zweite ganz eigenthümlich. Beide liegen nämlich mit ihrer breiten Fläche nicht wie gewöhnlich in einer Ebene, sondern in zwei sich fast rechtwinklig durchkreuzenden Ebenen. So sehr diese Lage dem generischen Charakter der Adelosinen zu widerstreben scheint, so kann doch die galizische Art wegen ihrer vollkommenen Uebereinstimmung in den übrigen Kennzeichen nur dieser Gattung beigezählt werden. Zahlreichere Exemplare werden lehren, ob diese anomale Stellung nicht vielleicht nur eine zufällige individuelle Bildung sei.

II.

In Begleitung der eben beschriebenen Foraminiferen kommen in dem Lemberger Kreidemergel auch nicht selten die fossilen Schalen mehrerer kleiner Entomostraceen-species vor, denen ich ebenfalls meine Aufmerksamkeit zuwandte. Eine gedrängte Schilderung derselben liefere ich in den nachfolgenden Zeilen.

Ihrer Anwesenheit in den galizischen Kreidesteinen that zuerst ALTH in der oben mehrfach besprochenen Abhandlung Erwähnung, in der wir 4 Arten beschrieben und, leider unvollkommen abgebildet finden. Frühere Schriften über einzelne

Theile der galizischen Kreideformation nehmen auf die Entomostraceen gar keine Rücksicht.

Mir gelang es, in dem spärlichen mir zu Gebote stehenden Materiale 12 Species aufzufinden und zwar 9 Cytherinen und nur 3 Cypridinen. Von ihnen stimmen 5 Arten (*Cytherina subdeltoidea* v. M., *C. parallela* m., *C. ovata*, *Hilseana* und *laevigata* Röm.), mit denen des böhmischen Pläners überein. Dieselben Arten, mit Ausnahme der *C. parallela* m., kommen auch in den norddeutschen Kreideschichten vor und zwar *C. subdeltoidea* und *ovata* im Kreidemergel von Lemförde, *C. laevigata* im Kreidemergel von Gehrden, *C. Hilseana* im Hilsthon des Hilses.

C. subdeltoidea v. M. beherbergt auch der Kreidetuff von Maestricht.

Von den durch CORNUEL beschriebenen Arten des *Argile ostréenne* des Departement de la haute Marne findet sich keine in dem galizischen Kreidemergel wieder (*Mém. de la soc. géolog. de France*, II Ser. I. 2. p. 193 ff. Tb. 7 und II Ser. III. 1. p. 241 ff. T. 3).

Die Entomostraceen der weissen Kreide Frankreichs, Englands, Dänemarks, Rügens u. s. w. sind bisher noch keiner Untersuchung gewürdigt worden. Ueber ihre grössere oder geringere Identität mit den galizischen Arten lässt sich daher auch nicht die leiseste Vermuthung äussern.

Cytherina LAMK.

1. *C. subdeltoidea* v. M.

V. MÜNSTER in LEONH. u. BRONN'S Jahrb. 1830, p. 64; 1835, p. 446. — RÖMER ebendasselbst 1838, p. 517. T. 6, f. 16. — RÖMER Kreideversteinerungen p. 105, T. 16, f. 22. — REUSS Kreideverst. Böhm. I. p. 16, T. 5, f. 38. — REUSS die foss. Entomostrac. des österr. Tertiärbeck. p. 9; T. 8, f. 1. — ALTH l. c. III. 2. p. 197, T. 10, f. 18.

Cythere trigona BOSQUET desc. des entomostr. foss. de la craie de Maestricht 1847. p. 8, T. 1, f. 3.

Nicht zu selten in den grauen und weissen Schichten. — Auch in der mittlern Kreide Böhmens und Sachsens, im Kreidemergel von Lemförde und im Kreidetuff von Maestricht. Ueberdiess in den Tertiärschichten Oesterreichs, Mährens, Böhmens, Ungarns und der Steiermark; in denen des nordwestlichen Deutschlands; im gelben Subapenninensande von Castell' arguato bei Parma, im Grobkalk von Bordeaux, nach MÜNSTER auch im Grobkalk von Paris.

2. *C. parallela* m. (Taf. V, f. 1), *testa elongata, elliptico-subtrayona, utrinque late rotundata, laevi; margine superiore recto, inferiore subrecto, utroque subparallelo.* — Long. = 0,8 mm.

REUSS Kreideverst. Böhmens. I. p. 16, T. 5, f. 38. — ALTH l. c. III. 2. p. 197, T. 10, f. 19.

Verlängert-elliptisch, etwas vierseitig, an beiden Enden flach bogenförmig zugerundet, glänzend, glatt. Der obere Rand ist vollkommen gerade, der untere nur wenig

in der Mitte eingebogen, dem obern fast parallel; der Rücken hinten stärker gewölbt und steil abfallend, gegen das vordere Ende hin sich allmählig verflächend.

Nicht selten in den grauen und gelblichen Schichten.

3. *C. ovata* RÖMER (T. V, f. 2), *ovata, utrinque rotundata, postice parum angustior, parum convexa, minime in parte antica; marginibus arcuatis; superficie laevi nitida.* — Long. = 0,9 mm.

RÖMER norddeutsche Kreideverst. p. 104, T. 16, f. 21. — REUSS l. c. I. p. 16, T. 5, f. 35.

Im Umriss eiförmig, mitunter hinten nur wenig verschmälert, an beiden Enden gerundet; beide Ränder gleichmässig bogenförmig; der Rücken im Ganzen wenig gewölbt, am stärksten am hintern Ende; die Schalenoberfläche glänzend glatt. — Selten.

4. *C. leopolitana m.* (T. V, f. 3), *testa subelliptica, utrinque aequaliter rotundata; margine utroque arcuato; dorsi parte postica gibba; superficie laevi, nitida.* — Long. = 0,7 mm.

Schale fast elliptisch, an beiden Enden beinahe gleichmässig gerundet. Beide Ränder bogenförmig, der obere jedoch stärker gebogen; der Rücken bildet im hintern Drittheil einen runden breiten Höcker, von dem sich eine stärkere Wölbung, allmählig sich abdachend, bis gegen das vordere Ende erstreckt, so dass die Schale neben ihr beiderseits oft etwas eingedrückt erscheint. Die Schalenoberfläche ist glatt und glänzend.

Gemein in den grauen und gelblichen Schichten.

5. *C. Hilsiana* RÖMER (T. V, f. 4), *testa subovata, convexa, postice paullulum attenuata, laevi, nitida; margine superiore arcuato, inferiore subrecto.* — Long. = 0,5 mm.

RÖMER l. c. p. 104, T. 16, f. 17. — REUSS l. c. I. p. 16, T. 5, f. 39.

Eiförmig, hinten etwas verschmälert, jedoch an beiden Enden gerundet, mit stark bogenförmigem oberen, nur sehr wenig gekrümmtem unteren Rande. Der Rücken stark gewölbt, am meisten in der Mitte. Die Schalenoberfläche glatt und glänzend. — Selten.

6. *C. impressa m.* (T. V, f. 5), *oblonga, angusta, convexa, utrinque obtusa; margine superiore arcuato, inferiore subrecto; facie inferiore subtruncata, late ovata, ad suturam impressa; superficie laevi.* — Long. = 0,4 mm.

Schale verlängert, schmal, an beiden Enden sich zur stumpfen Spitze verschmälern, der obere Rand bogenförmig, der untere fast gerade. Der Rücken gewölbt, am stärksten zunächst dem untern Rande, an welchem er steil abfällt. Dadurch entsteht eine abgestuzte, beinahe ebene, nur in der Mitte zunächst der Nath eingedrückte untere Fläche, welche bei Vereinigung beider Klappen eine breit eiförmige Gestalt hat. Nach oben dacht sich der Rücken allmählig ab. Schalenoberfläche glatt und glänzend.

Sehr selten.

7. *C. laevigata* RÖM. (Taf. V, f. 6), *testa oblonga, angusta, utrinque rotundata, convexa; margine superiore arcuato, inferiore subrecto; superficie laevi, nitida.* — Long. = 0,6 mm.

RÖMER l. c. p. 104, T. 16, f. 20.

Schale verlängert, schmal, an beiden Enden gerundet, mit bogenförmigem oberem, fast geradem, nur schwach eingebogenem unterem Rande. Rücken gewölbt und steil abfallend, so dass beide vereinigte Klappen einen beinahe kreisförmigen Querschnitt geben. Schalenoberfläche glänzend glatt. — Sehr selten.

8. *C. acuminata* ALTH (T. V, f. 7, 8), *testa oblongo-ovata, angusta, antice rotundata, postice oblique acuminata, convexa; margine superiore arcuato, inferiore subrecto; superficie laevi, nitida.* — Long. = 0,7 mm.

ALTH l. c. p. 198, T. 10, f. 16 (mala).

Schale verlängert-eiförmig, schmal, vorne breit zugerundet, hinten schräg zugespitzt. Der untere Rand ist immer fast gerade; der obere wechselt in seiner Richtung; bald ist er stark gebogen, bald bildet er nur einen sehr flachen Bogen und erscheint dem untern beinahe parallel. Ein so abweichendes Aussehen die extremen Formen dadurch erhalten, so werden sie doch durch eine Menge von Zwischenformen verbunden. Der Rücken ist gewölbt und fällt gegen beide Ränder ziemlich steil ab. Die Schalenoberfläche ist glatt und glänzend. — Selten.

9. *C. modesta m.* (T. V, f. 9), *elongata, anguste ovata, antice rotundata, postice acuminata; margine superiore arcuato, inferiore recto; dorso parum convexo, maxime in parte postica; superficie laevi, nitida.* — Long. = 0,4 mm.

Der vorigen Species in der Form sehr ähnlich, am hintern Ende ebenfalls schräg und scharf zugespitzt, am vordern gerundet, mit bogenförmigem oberem, fast geradem unterem Rande. Der Rücken ist jedoch nur wenig gewölbt und zwar am meisten am hintern Ende. Die Schalenoberfläche ist glatt und glänzend. — Sehr selten.

Cypridina M. EDW.

1. *C. Althi m.* (T. V, f. 10), *ovato-elliptica, convexa, utrinque rotundata; margine utroque arcuato; superficie laevi; facie inferiore subtruncata, subelliptica, utrinque triplicata.* — Long. = 0,65 mm.

Im Umriss eiförmig-elliptisch, an beiden Enden zugerundet und dünn gesäumt. Der obere Rand schwächer gebogen als der untere. Der Rücken gewölbt, nach unten steil abfallend, so dass dadurch eine abgestutzte, gegen die Nath hin etwas vertiefte, jederseits mit drei feinen Längsfalten versehene elliptische untere Fläche entsteht. Die Schalenoberfläche ist glatt und glänzend. — Sehr selten.

2. *C. leiptycha m.* (T. V, f. 11), *tetragono-elliptica, compressa, antice rotundata et late limbata, postice subbiloba; margine superiore subrecto, infe-*

riore parum inflexo, utroque subparallelo; dorso postice bituberculato, medio irregulariter plicato; superficie rare punctata, caeterum laevi. — Long. = 0,65 mm.

Vierseitig-elliptisch, stark zusammengedrückt, am vordern Ende flach gerundet, am hintern schwach zweilappig, ringsum mit einem Saum eingefasst, der besonders im vordern Schalentheile sehr breit und dick ist. Beide Ränder sind beinahe gerade und parallel, nur am untern bemerkt man hinter der Mitte eine schwache Einbiegung. Der Rücken der Schale zeigt am hintern Ende zwei über einander liegende verhältnissmässig grosse gerundete Höcker, deren oberer etwas stärker vorragt. Von dem untern läuft eine niedrigere fast gerade schmale Leiste vorwärts bis beiläufig zum vordersten Schalendrittel. Im obern Theile des Rückens nimmt man noch eine andere, ästig gebogene Falte wahr, von der gewöhnlich ein Zweig sich bogenförmig in Gestalt eines Hufeisens nach hinten biegt. Die Augengegend ist zu einem flachen breiten sich allmählig abdachenden Höcker erhoben. Der vordere Zahnhöcker ragt ziemlich stark vor.

Von vorne betrachtet erscheint das Profil bei den vereinigten Schalenklappen in Gestalt eines verlängerten Sechseckes.

Die Oberfläche der Schale ist glatt, nur bei starker Vergrösserung erscheinen einzelne entfernte vertiefte Punkte. — Selten.

3. *C. muricata m.* (T. V, f. 12), *ovato-subpentagona, antice rotundata, late limbata, postice in lobum compressum triangulurem terminata; marginibus rectis subparallelis spinosis; dorso convexo spinoso-tuberculato; tuberculo oculari majusculo spinuloso; facie testae inferiore subtruncata, biseriatio-spinulosa. — Long. = 0,95 mm.*

Der *C. ornatissima m.* (REUSS l. c. II. p. 104, T. 24, f. 12, 18) aus dem böhmischen Plänermergel ähnlich, aber hinlänglich davon verschieden.

Die Schale hat einen fünfseitig-eiförmigen Umriss, und gerade fast parallele dornige Ränder. Das vordere Ende ist breit, flach gerundet und mit einem dicken, ebenfalls stachelig-höckerigen Saume eingefasst; das hintere kurz zugespitzte Ende bildet einen zusammengedrückten dreieckigen Lappen, der von dem gewölbten Rücken scharf absetzt. Der Rücken ist nach unten am höchsten gewölbt und dort durch einen geraden dornig-höckerigen Kiel begrenzt, durch welchen die etwas ausgehöhlte, mit zwei Dornreihen besetzte untere Fläche der Schale davon abgegrenzt wird. Der Augenhöcker bildet eine ziemlich grosse rundliche, ebenfalls stachelige Hervorragung. Die übrige Schalenoberfläche ist mit grössern und kleinern Stachelhöckern besetzt, von denen die grössten über beiden Zahngenden und einer am hintern Ende des Rückens, da wo er steil abzufallen beginnt, sitzen. — Sehr selten.

Namenregister.

	Seite		Seite
<i>Adelosina cretacea</i> m.	46	<i>Flabellina reticulata</i> m.	30
<i>Agathistegia</i> D'ORB.	46	„ <i>simplex</i> m.	31
<i>Allomorphina contraria</i>	43	<i>Fronicularia amoena</i> m.	29
„ <i>cretacea</i> m.	42	„ <i>capillaris</i> m.	29
„ <i>obliqua</i> m.	42	<i>Gaudryina rugosa</i> D'ORB.	41
<i>Anomalina complanata</i> m.	36	„ <i>rutheica</i> m.	41
<i>Bolivina incrassata</i> m.	45	<i>Glandulina cylindracea</i> m.	23
„ <i>tegulata</i> m.	45	„ <i>manifesta</i> m.	22
<i>Bulimina acuta</i> m.	38	„ <i>pygmaea</i> m.	22
„ <i>imbricata</i> m.	38	<i>Globigerina trochoides</i> m.	37
„ <i>intermedia</i> m.	39	<i>Globulina horrida</i> m.	43
„ <i>obesa</i> m.	40	„ <i>lacrima</i> m.	43
„ <i>ovulum</i> m.	38	<i>Guttulina cretacea</i> ALTH.	44
„ <i>Presli</i> m.	39	<i>Helicostegia</i> D'ORB.	30
„ <i>Puschi</i> m.	37	<i>Marginulina apiculata</i> m.	28
„ <i>variabilis</i> D'ORB.	39	„ <i>elongata</i> D'ORB.	28
<i>Cristellaria angusta</i> m.	32	„ <i>ensis</i> m.	27
„ <i>nulliseptata</i> m.	33	<i>Monostegia</i> D'ORB.	22
„ <i>obvelata</i> m.	33	<i>Nautiloidea</i> D'ORB.	30
„ <i>Spachholtzi</i> m.	33	<i>Nodosaria inops</i> m.	24
„ <i>truncata</i> m.	32	„ <i>proboscidea</i> m.	23
<i>Cryptostegia</i> m.	42	<i>Nonionina bulloides</i> D'ORB.	34
<i>Cypridina Althi</i> m.	49	„ <i>quaternaria</i> m.	34
„ <i>leioptycha</i> m.	49	<i>Oolina apiculata</i> m.	22
„ <i>muricata</i> m.	50	„ <i>simplex</i> m.	22
<i>Cytherina acuminata</i> ALTH.	49	<i>Pleiostegia</i>	22
„ <i>Hilseana</i> RÖMER	48	<i>Polymorphina leopolitana</i> m.	44
„ <i>impressa</i> m.	48	<i>Polymorphinidea</i> D'ORB.	43
„ <i>laevigata</i> RÖMER	49	<i>Pyralina acuminata</i> D'ORB.	42
„ <i>leopolitana</i> m.	48	<i>Robulina trachyonphala</i> m.	34
„ <i>modesta</i> m.	49	<i>Rosalina ammonoides</i> m.	36
„ <i>ovata</i> RÖMER	48	<i>Rotalina crassa</i> D'ORB.	35
„ <i>parallela</i> m.	47	„ <i>involuta</i> m.	35
„ <i>subdeltoidea</i> V. M.	47	„ <i>polyrrhaphes</i> m.	35
<i>Dentalina acus</i> m.	27	„ <i>umbilicata</i> D'ORB.	35
„ <i>annulata</i> m.	26	<i>Spirolina inflata</i> m.	32
„ <i>communis</i> D'ORB.	26	„ <i>Sacheri</i> m.	31
„ <i>crassula</i> m.	24	<i>Stichostegia</i> D'ORB.	22
„ <i>gracilis</i> D'ORB.	27	<i>Textularia articulata</i> m.	45
„ <i>legumen</i> m.	26	<i>Textularidea</i> D'ORB.	44
„ <i>Lilli</i> m.	25	<i>Truncatulina convexa</i> m.	36
„ <i>marginuloides</i> m.	25	<i>Turbinoides</i> D'ORB.	35
„ <i>oligostegia</i> m.	25	<i>Vaginulina Zeuscheri</i> m.	28
„ <i>subnodosa</i> m.	24	<i>Verneuilina Bronni</i> m.	40
„ <i>sulcata</i> D'ORB.	24	„ <i>dubia</i> m.	40
<i>Enallostegia</i> D'ORB.	42	<i>Virgulina</i> D'ORB.	44

Erklärung der Abbildungen.

Tafel I.

- Fig. 1. *Oolina apiculata* m.
 „ 2. „ *simplex* m.
 „ 3. *Glandulina pygmaea* m.
 „ 4. „ *manifesta* m.
 „ 5. „ *cylindracea* m.
 „ 6. *Nodosaria proboscidea* m.
 „ 7. „ *inops* m.
 „ 8. *Dentalina crassula* m.
 „ 9. „ *subnodosa* m.
 „ 10. „ *oligostegia* m.
 „ 11. „ *Lilli* m.
 „ 12. „ *marginuloides* m.
 „ 13. „ *annulata* m.
 „ 14. „ *legumen* m.
 „ 15. „ *acus* m.
 „ 16. *Marginulina ensis* m.
 „ 17. „ *elongata* d'Orb.?
 „ 18. „ *apiculata* m.
 „ 19. *Vaginulina Zeuschneri* m.
 „ 20. *Fronicularia capillarum* m.
 „ 21. „ *amoena* m.
 „ 22. *Flabellina reticulata* m.

Tafel II.

- Fig. 1, 2. *Flabellina simplex* m.
 „ 3, 4. *Spirolina Sacheri* m.
 „ 5, 6. „ *inflata* m.
 „ 7. *Cristellaria angusta* m.
 „ 8. „ *truncata* m.
 „ 9. „ *multiseptata* m.
 „ 10. „ *Spachholtzi* m.
 „ 11. „ *obelata* m.
 „ 12. *Robulina trachyomphala* m.
 „ 13. *Nonionina quaternaria* m.
 „ 14. *Rotulina involuta* m.

Tafel III.

- Fig. 1. *Rotulina polyrrhaphes* m.
 „ 2. *Rosulina ammonoides* m.

- Fig. 3. *Anomalina complanata* m.
 „ 4. *Truncatulina convexa* m.
 „ 5. *Globigerina trochoides* m.
 „ 6. *Bulimina Puschi* m.
 „ 7. „ *imbricata* m.
 „ 8. „ *acula* m.
 „ 9. „ *ovulum* m.
 „ 10. „ *Presli* m.
 „ 11. „ *intermedia* m.
 „ 12. „ *obesa* m.

Tafel IV.

- Fig. 1. *Bulimina obesa* m.
 „ 2. *Verneuilina Bronni* m.
 „ 3. „ *dubia* m.
 „ 4. *Gaudryina ruthenica* m.
 „ 5. *Allomorphina obliqua* m.
 „ 6. „ *cretacea* m.
 „ 7. „ *contraria* m.
 „ 8. *Globulina horrida* m.
 „ 9. „ *lacrima* m.
 „ 10. *Guttulina cretacea* ALTH.
 „ 11. *Polymorphina leopolitana* m.
 „ 12. *Bolivina tegulata* m.
 „ 13. „ *incrassata* m.
 „ 14. *Textularia articulata* m.
 „ 15. *Adelosina cretacea* m.

Tafel V.

- Fig. 1. *Cytherina parallela* m.
 „ 2. „ *ovula* RÖMER.
 „ 3. „ *leopolitana* m.
 „ 4. „ *Hilseana* RÖMER.
 „ 5. „ *impressa* m.
 „ 6. „ *laevigata* RÖMER.
 „ 7, 8. „ *acuminata* ALTH.
 „ 9. „ *modesta* m.
 „ 10. *Cypridina Allhi* m.
 „ 11. „ *leioptycha* m.
 „ 12. „ *muricata* m.



Oolina apiculata. m.



Oolina simplex. m.



Glandulina pygmaea. m.



Gl. manifesta. m.



Gland. cylindracea. m.



Nodosaria proboscidea. a. m.



Nod. inops. m.



Dentalina crasula. m.



Dent. subnodosa. m.



Dent. oligostegia. m.



Dent. Lilli. m.



Dent. marginuloides. m.



Dent. annulata. m.



Dent. legumen. m.



15.



Dent. acus. m.



16.



Marginulina ensis. m.



17.

Març. elongata. D.Orb.



18.



Març. apiculata. m.



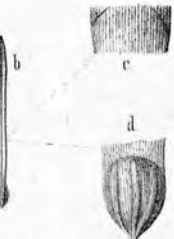
19.



Vaginulina Zeuschneri. m.



20.



Frondicularia capillaris. m.



21.



Frund. amoena. m.



22.

Flabellina reticulata. m.



Flabellina simplex, m.



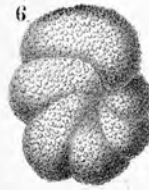
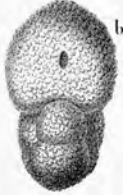
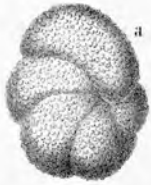
Spirolina inflata, m.



Spirolina Sacheri, m.



Cristellaria angusta, m.



Cristellaria truncata, m.



Crist. multiseptata, m.



Crist. Spachholtzi, m.



Crist. Spachholtzi, m.



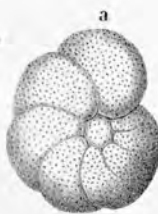
Crist. obvelata, m.



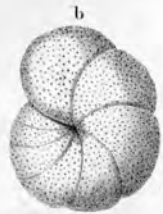
Robulina trachyomphala, m.

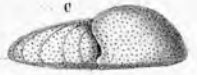
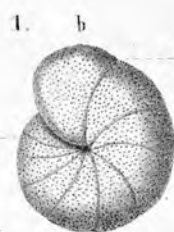
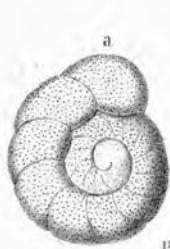


Nonionina quaternaria, m.

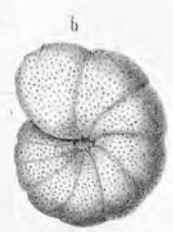


Rotalina involuta, m.

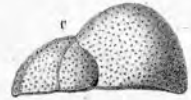
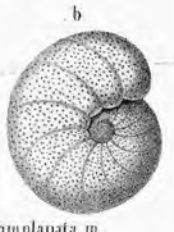
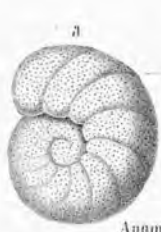




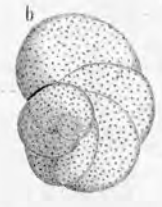
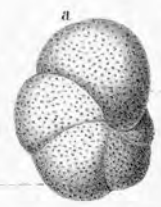
Botalina polyrrhaphes n.



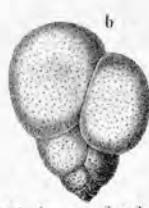
Botalina ammonoides n.



Anomalina complanata n.



Truncatulina convexa n.



Globigerina trochoides n.



Bulimina Puschi n.



Bulimina imbricata n.



Bulimina acuta n.



Bulimina ovulum n.



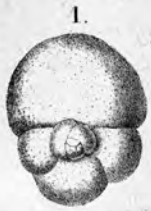
Bulimina Presli n.



Bulimina intermedia n.



Bulimina obesa n.



Bulimina obesa m.



Verneulina Bronni m.



Verneulina dubia m.



Gaudryina ruthenica m.



Allomorpha obliqua m.



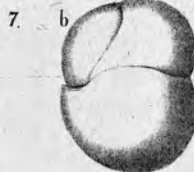
Allomorpha cretacea m.



Allom. cretacea m.



Allomorpha contraria m.



Globulina horrida m.



Glob. lacryma m.



Glob. lacryma m.



Globulina cretacea m.



Polymorphina leopolitana m.



Bolivina tegulata m.



Boliv. incrassata m.

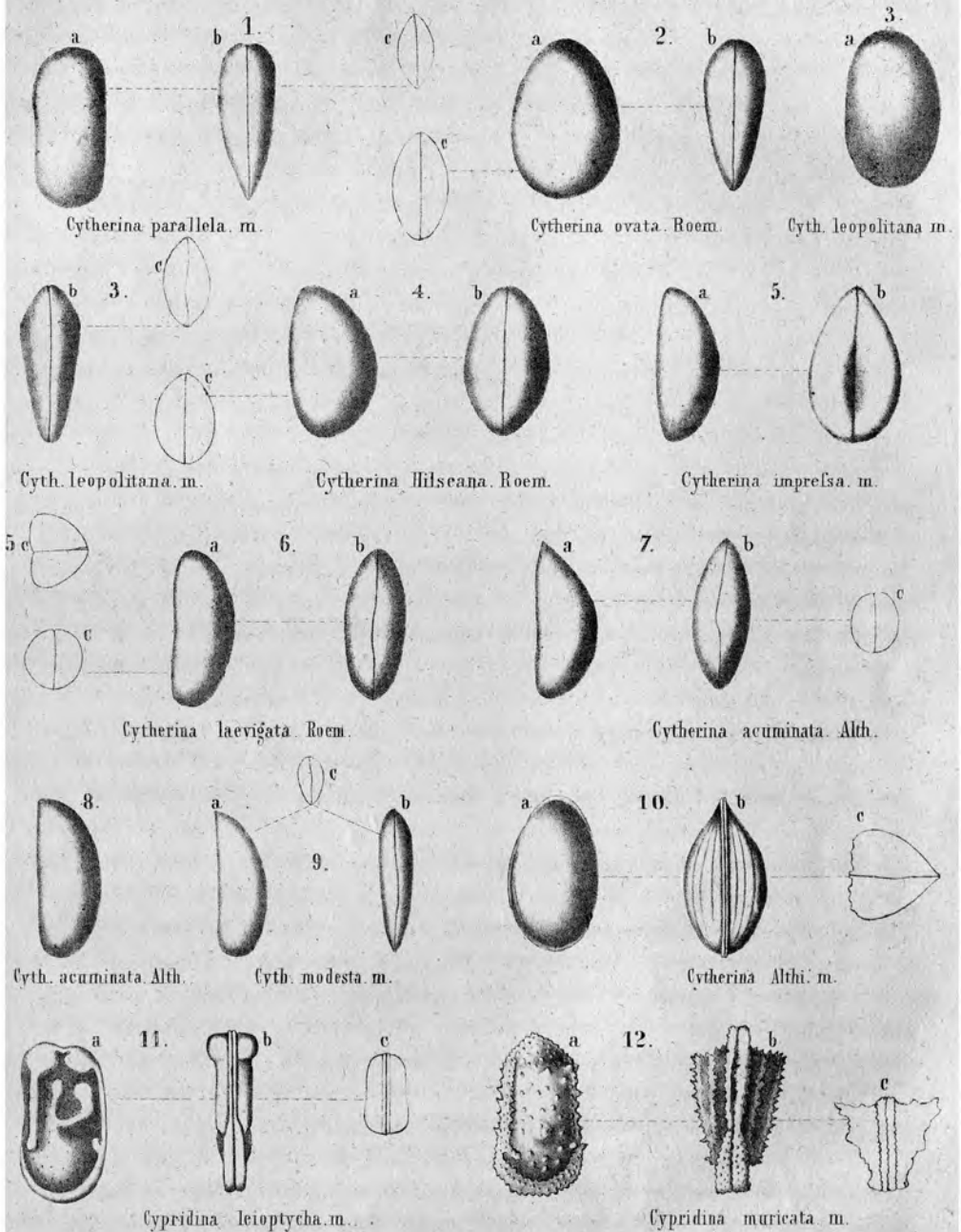


Textularia articulata m.



Adelosina cretacea m.





III. Das Skelet des *Zeuglodon macrospondylus*.

Von

Dr. Albert Koch.

Mit einer lithographirten Tafel.

Mitgetheilt am 23. November 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Ich übergebe hier (Tab. VII) den Freunden der Wissenschaft die Abbildung des Skeletes des *Zeuglodon macrospondylus*, so wie ich es jetzt zusammengesetzt und in Dresden, Breslau und Wien dem wissenschaftlichen Publikum gezeigt habe.

Reste dieses merkwürdigen Thieres wurden bekanntlich zum ersten Male von HARLAN in der Tertiärformation der Arkansas aufgefunden. Im Jahre 1835 beschrieb er die gefundenen Stücke, einen Oberkiefer, einen Unterkiefer, mehrere Wirbel und Rippen, und stellte es unter dem Namen *Basilosaurus* zu den Sauriern. Dieselben Stücke brachte HARLAN im Jahre 1839 nach London, wo sie von OWEN untersucht und als einem Säugethiere aus der Ordnung der Cetaceen angehörig, erkannt wurden. Der Letztere machte auf die Verwandtschaft des Thieres mit *Manatis* aufmerksam und nannte dasselbe *Zeuglodon*.

Im Jahre 1843 fand BUCKLEY weitere Theile des Skeletes in Alabama, die von EMMONS beschrieben wurden.

Zwei Jahre später entdeckte ich ungefähr 33 englische Meilen von dem Orte entfernt, an welchem BUCKLEY die von ihm aufgefundenen Reste gesammelt hatte, unweit des sogenannten Sintabouge River, westlich vom Tombeckbe-Flusse im südlichen Alabama eine ausserordentlich reiche Menge von Knochen des genannten Thieres. Ich stellte sie zu einem Skelete zusammen und brachte sie nach Europa, wo sie bald die allgemeinste Aufmerksamkeit erregten. Die Untersuchungen der hervorragendsten Naturforscher in Deutschland verbreiteten nun Licht über die anatomische Beschaffenheit desselben.

Im April 1847 erstattete Hr. Jos. MÜLLER an die kön. Akademie der Wissenschaften in Berlin einen vorläufigen Bericht über seine Untersuchungen. Im Mai desselben Jahres erschien das Werk: „Resultate geologischer, anatomischer und zoologischer Untersuchungen über das unter dem Namen *Hydrarchos* von Dr. A. KOCH zuerst nach

„Europa gebrachte und in Dresden aufgestellte fossile Skelet von Dr. C. G. CARUS in „Verbindung mit den Herren Dr. GEINITZ, Dr. GÜNTHER und Hofrath Dr. REICHENBACH“ mit 7 Tafeln Abbildungen. Weitere Mittheilungen über dasselbe erschienen von BURMEISTER im Juni 1847, von MÜLLER im Juli 1847, endlich MÜLLER's grosses Werk: „Ueber die fossilen Ueberreste der Zeuglodonten,“ und die Abhandlung von CARUS „über das Kopfskelet des *Zeuglodon Hydrarchus*“ in den Acten der k. Leopoldinisch-Carolinischen Academie Bd. XXII.

Zu allen diesen Untersuchungen jedoch konnte das Skelet, dessen erste vollständige Abbildung sich auf Tab. VII befindet, noch nicht benützt werden. Weder CARUS noch MÜLLER haben dasselbe aufgestellt gesehen. Als der Letztere in Gesellschaft des Hrn. Dr. PETERSEN von Berlin nach Dresden kam um es zu besichtigen, war ich eben mit der Ausmeisselung beschäftigt, und nur einzelne Theile konnten genauer untersucht werden.

Die Geschichte der Auffindung desselben habe ich in einer eigenen Brochüre: „Bemerkungen über die aus mehreren Arten bestehende Familie der Hydrarchen, nebst „einigen Worten über die Auffindung des grossen zu jener Familie gehörigen *Zeuglodon macrospodylus*“ mitgetheilt.

Nachdem ich durch den von Sr. Majestät dem Könige von Preussen angeordneten Ankauf meiner ersten Sammlung von Zeuglodonten-Resten für das kön. anatomische Museum in Berlin mit den nöthigen Geldmitteln versehen worden war, trat ich am 1. Juli des Jahres 1847 meine dritte Reise nach den Vereinigten Staaten Amerikas und meine zweite Forschungsreise nach Hydrarchen-Resten, an. Erst am 17. Jänner 1848 langte ich in Washington old Courthouse in Washington County im Staate Alabama an, einem Orte, den ich mir sowohl während meiner ersten Forschungsreise, als auch dieses Mal als Standquartier auserwählt hatte, als den Mittelpunkt derjenigen Gegend, die ich früher durchforschte und nun vor Neuen zu durchforschen wünschte.

Meine früher in Alabama mir erworbenen Ortskenntnisse, so wie die dort angeknüpften Bekanntschaften leisteten mir diessmal sehr gute Dienste. Seit meiner ersten Anwesenheit daselbst hatten mehrere Geognosten Amerika's und auch Europa's die dortige Gegend besucht, um Untersuchungen und Forschungen zu machen. Es gelang jedoch keinem dieser Herren einen Fund von Wichtigkeit zu machen, obgleich einige derselben, welche bis Washington County vordrangen, an vielen der Kalkfelsen dortiger Gegend Spuren ihrer Thätigkeit zurückliessen, die ich mitunter bis auf einige hundert Schritte Entfernung von dem Orte, wo ich das Glück hatte, das im beifolgenden Bilde dargestellte Zeuglodon zu finden, bemerkte.

In Washington old Courthouse angelangt, fasste ich den Entschluss meine Forschungen unmittelbar an derselben Stelle wieder anzufangen, wo ich selbe zur Zeit meines früheren hiesigen Aufenthaltes abgebrochen hatte. Zu meiner nicht geringen Freude und Verwunderung fand ich das Feld, wo ich die nunmehr in Berlin befindlichen Reste von Zeuglodonten gefunden und herausgearbeitet hatte, noch in demselben Zustande, in

dem ich es verlassen hatte, nur waren in der Zwischenzeit Gras und Gesträuche über den Ort der unmittelbaren Ausgrabung gewachsen.

Dass keiner der Naturforscher, welche nach mir die Umgegend von Washington old Courthouse besuchten, es der Mühe werth fand jene Stelle besonders aufzusuchen, mag wohl in den verläumderischen Angaben seinen Grund haben, die M. HOUSTON und Dr. LISTER über meine ersten Ausgrabungen verbreiteten, als hätte ich die Knochen zu meinem Skelete nicht an ein und derselben Stelle gefunden, sondern an, viele Meilen von einander entfernten, Punkten zusammengelesen. Gegen diese Beschuldigung mich zu rechtfertigen ist hier wohl nicht der Ort. Einzig und allein sey es mir gestattet zu bemerken, dass M. HOUSTON, ein Gastwirth in dem kleinen 14 engl. Meilen von Washington old Courthouse entlegenem Orte Baretown, nie den Ort meiner Ausgrabungen besuchte, ja selbst während der ganzen Dauer derselben nicht ein einziges Mahl nach Washington old Courthouse kam, und dass Dr. LISTER nur einmal auf der Durchreise einen Blick auf meine damals erst zum Theil gesammelten und in einem dunklen Gebäude ungeordnet aufbewahrten Gegenstände warf.

Uebrigens war es mir natürlich im höchsten Grade angenehm, dass Niemand den Ort meiner früheren Ausgrabungen berührt hatte und in freudiger Spannung fing ich mit eigenen Händen, ohne Hülfe, meine Arbeit da wieder an, wo ich sie vor mehreren Jahren verlassen hatte, nicht sowohl weil ich die Stelle schon für erschöpft hielt, als vielmehr weil jene Jahreszeit herannahte, welche den Nordländer in jener Gegend beinahe sicher mit Krankheiten bedroht.

In wenigen Wochen gelang es mir, mit Hülfe einiger Leute, eine bedeutende Anzahl sehr wichtige, zum Berliner Zeuglodon gehörende Wirbel zu finden und bei meiner Rückkunft nach Europa hatte ich das Vergnügen selbige dort abzuliefern.

Es war am 7. Februar 1848, als ich das unerwartete Glück hatte, das im beifolgenden Bilde dargestellte Zeuglodon zu entdecken und zu meinem nicht geringen Erstaunen nur eine deutsche Meile vom Orte entfernt, wo ich das Berliner Zeuglodon gefunden hatte, nämlich in einem etwas entlegenen, sogenannten ausgeworfenen oder nicht mehr als tragbar erachteten, wüst liegenden Felde des Hrn. Oberst PRINS. Dieses Feld liegt ungefähr 4 engl. Meilen von Washington old Courthouse entfernt, fast unmittelbar auf der Grenze zwischen Choctaws und Washington Counties und wird von drei Seiten durch kleine Bäche begrenzt, es ist mit hohem Grase, Fächerpalmen, so wie hie und da mit Strauchwerk überwachsen und von vielen mehr oder minder tiefen Schluchten nach verschiedenen Richtungen hin zerrissen, welche durch die von gewaltigem Sturzregen herrührenden Gewässer entstanden sind und jährlich vergrößert werden. Zugleich ist dieses Feld von allen Seiten mit Wald begrenzt, so dass es sehr versteckt liegt. Meine Aufmerksamkeit wurde durch zwei meiner Arbeitsleute — einen Weissen und einen Schwarzen — auf diesen Ort gezogen; ich hatte dieselben Tages zuvor, den 6. Februar, in jene Gegend auf Forschungen ausgesandt, während ich mit den Uebrigen eine andere Richtung forschend durchstreifte.

Am Abend kamen diese Leute mit der für mich höchst erfreulichen Nachricht, dass sie einen allem Anscheine nach für meine Zwecke viel versprechenden Ort gefunden hätten, wo sich eine Masse von Zeuglodonten-Resten wahrnehmen liessen, die zum Theil schon gänzlich entblösst auf der Oberfläche lägen, zum Theil aus dem sie enthaltenden Kalkfelsen hervorragten — unter letzteren glaubten sie sogar den Schädel zu bemerken.

Da mir schon früher oft günstig lautende Berichte ähnlicher Art zu Ohren gekommen waren, die theils gar nicht, theils nur zum geringeren Theil meine Erwartungen erfüllten; so glaubte ich auch diessmal, dass meine Leute, wenn auch nicht absichtlich, ihren Fund zu hoch angegeben hätten. Um so grösser war daher mein Erstaunen und meine Freude, als, an Ort und Stelle angekommen, meine kühnsten Erwartungen von der Wirklichkeit übertroffen wurden. Ich überzeugte mich bald, dass hier das fast vollständige Gerippe eines der grössten Zeuglodonten lag, wenn auch nicht in einer regelmässigen Reihenfolge, so doch in 2 bis 4 Ellen von einander entfernten kleineren oder grösseren zusammengeworfenen Massen, jede derselbe 2 bis 6 Rücken- oder andere Wirbel mit Rippen untermengt, enthaltend. Ziemlich in der Mitte der ganzen Gruppe bemerkte ich, nach einer angestellten genauen Untersuchung eine von dem Uebrigen verschieden gestaltete Knochenmasse, die, wenn gleich weniger entblösst, sich doch bald als der Schädel erwies.

Einige Monate reichten hin, das ganze Gerippe, welches in grösseren und kleineren Massen zusammenhing und zum Theil mit Stein umgeben war, an Ort und Stelle herauszuarbeiten und so brachte ich es mit mir nach Dresden, wo ich nach achtmonatlicher Arbeit am 6. Mai 1849 die Ausarbeitung und erste Aufstellung desselben beendet hatte.

Zum zweiten Male wurde es in Breslau aufgestellt, dann brachte ich es im Sommer 1850 nach Wien. Für den Sommer hatte, auf die besondere Fürsprache Sr. Excellenz des k. k. Unterrichtsministers Hrn. LEO Grafen von THUN, dem ich von Sr. Eminenz dem Hrn. Cardinal MELCHIOR von DIEPENBROCK empfohlen worden war, S. Durchlaucht Hr. ALOIS Fürst von LIECHTENSTEIN die Winter-Reitschule in dem ihm gehörigen ehemals Rasumowsky'schen Pallaste auf der Landstrasse mir gütigst zur Benützung überlassen. Lange scheiterten alle Bemühungen, für den Winter ein Locale in der innern Stadt oder doch in deren Nähe auszumitteln. Durch die freundliche Vermittlung des Herrn Baron von HOHENBRUCK gelang es mir aber die Theilnahme Sr. Excellenz des Herrn Civil- und Militär-Gouverneurs von Wien, Freiherrn von WELDEN, für die Sache zu erwecken; derselbe liess den zu Militär-Einquartierungen verwendeten grossen Saal im k. k. Universitäts-Gebäude räumen und mir zur Disposition stellen.

Die Abbildung, wie ich sie hier auf Tab.VII vorlege, wurde noch während der ersten Aufstellung im fürstl. Liechtenstein'schen Palais unter der Leitung des Hrn. A. HARTINGER ausgeführt. Die Veranlassung ihrer Herausgabe ist zu lockend, als dass ich mir versagen könnte, hier schon auf die Eigenthümlichkeiten im Bau des Skeletes hinzuweisen. Die Anatomen werden immer noch Wichtiges daran zu entdecken finden.

Es soll die gegenwärtige Mittheilung nur ein Vorläufer ihrer gründlichen Arbeiten seyn.

Die Zeuglodonten bilden bekanntlich ein aus mehreren Species bestehendes Genus, das seinen Platz ungefähr zwischen den Wallfischen und den Robben finden möchte. Sie gehören zu einer eigenen Sippe von Thieren, für welche Hr. Geheimrath CARUS, den von mir früher dem Geschlechte der Zeuglodonten allein gegebenen Namen der Hydrarchen beizubehalten vorschlug. Drei verschiedene zu dieser Sippe gehörende Genera, jedes derselben mit mehreren Species, haben sich schon jetzt herausgestellt. Die Reste des ersten, des *Zeuglodon*, haben sich bis jetzt nur in den Eöcen-Gebilden in Nord-America gefunden; die des Genus *Squalodon* fanden sich bis jetzt in Malta, in Bordeaux und bei Linz; die des dritten Genus, des *Balaenodon*, sind zuerst bei Suffolk in England, dann ebenfalls in der Gegend von Linz gefunden worden.

Alle zur Sippe der Hydrarchen gehörenden Genera und Species stimmen darin überein, dass sich aus der Bildung ihrer Zähne mit voller Bestimmtheit erweist, dass sie nur vom Raube leben konnten. Beim Genus *Squalodon* finden sich eine grössere Anzahl von Zähnen vor, als beim *Zeuglodon*, von welchem letzteren alle bis jetzt bekannten Species 36 Zähne haben, von denen sich 12 im Oberkiefer, 6 im Zwischenkiefer und 18 im Unterkiefer befinden; jedoch kommen rücksichtlich der Anzahl der Backen- und Schneidezähne bei den verschiedenen Arten, Abweichungen vor; so befinden sich im Oberkiefer der grössten Art, des *Zeuglodon macrospondylus*, 10 zweiwurzlige Backenzähne, nämlich an jeder Seite des Kiefers 5 derselben, diesen folgt ein zweiwurziger Hauzahn, gleichsam den Uebergang von den Backen- zu den Hauzähnen bildend, indem seine etwas nach hinten gekrümmte Krone oder Spitze dieselbe Gestalt hat, wie die ihm folgenden einwurzigen Hauzähne, während seine zwei Wurzeln ihn mit den Backenzähnen gleichstellen. In den sehr verlängerten Zwischenkiefern dieser Art finden sich zusammen 6 Schneidezähne, nämlich 3 derselben an jeder Seite. Beim *Zeuglodon Hydrarchus* (CARUS) dagegen finden sich im Oberkiefer nur 8 Backenzähne, dafür aber nicht 2, sondern 4 Hauzähne, von denen die den Backenzähnen zunächst stehenden zweiwurzlig sind und die übrigen so wie die ihnen folgenden 6 Hauzähne der Zwischenkiefer nur einwurzlig. Im Unterkiefer dieser kleinsten Art von *Zeuglodon*, bemerken wir 10 zweiwurzlige und 8 einwurzlige Hauzähne. Von den beiden andern *Zeuglodon*-Arten (von denen das Eine das *Zeuglodon trachyspondylus* (MÜLLER) ist und das zweite noch keinen Namen erhalten hat) sind bis jetzt nur Bruchstücke der Schädel und Unterkiefer bekannt geworden, so dass von diesen die vollständige Kenntniss des Zahnsystemes noch fehlt.

Die zwei langen flachgedrückten Wurzeln der Backenzähne aller Hydrarchen betragen mehr als zwei Drittel der ganzen Länge dieser Zähne, sie befinden sich in Zahnhöhlen. Die Kronen sind weniger zum Zermalmern, als zum Festhalten und Zerschneiden der gefangenen Beute eingerichtet, indem sie etwas rückwärts gebogen, breitge-

drückt und lanzettförmig gestaltet und mit 4 bis 9 sich von beiden Seiten pyramidenförmig übereinander erhebenden scharfen, ebenfalls lanzettförmigen Spitzen versehen sind. Die hintersten jener Backenzähne sowohl im Ober- als Unterkiefer sind die kleinsten und von da aus gezählt, die vierten die grössten; diese sind mehr als noch ein Mal so gross als jene. Im Oberkiefer stehen die zwei ersten Zähne (von hinten nach vorn gezählt) so dicht aneinander, dass nicht der geringste Raum zwischen ihnen bleibt; der dritte dagegen, so wie die folgenden lassen nach Verhältniss der Grösse der Kiefer, mehr oder weniger weite Zwischenräume; im Unterkiefer schliessen die vier hintersten Zähne ganz dicht an einander; der fünfte und die diesem folgenden Zähne stehen dagegen wie im Oberkiefer isolirt von einander.

Sind demnach die Kiefer geschlossen, so greifen die zwei hintersten Zähne des Ober- und Unterkiefers nicht in- oder zwischeneinander, sondern die des Unterkiefers werden von denen des Oberkiefers gänzlich gedeckt, während ihre Kronen in eigens dazu gebildete tiefe Knochenhöhlungen eingreifen; der dritte Backenzahn des Unterkiefers füllt den zwischen dem zweiten und dritten Backenzahn des Oberkiefers befindlichen leeren Raum aus; der vierte Backenzahn des Unterkiefers passt in den Zwischenraum zwischen den dritten und vierten Oberkieferzahn und alle folgenden greifen mit ihren Kronen sich nach Aussen wendend, immer zwischen einander ein und füllen auf diese Art die zu ihrem Empfang im Ober- und Unterkiefer vorfindlichen Knochenvertiefungen aus.

Die Schneid- und Hautzähne sind sichelförmig mit ihren Wurzeln und Kronen nach hinten gebogen; bei einigen ist nur ein Drittel, bei andern nur ein Viertel der ganzen Länge über der Maxilla sichtbar; dieser hervorragende Theil dieser Zähne ist wie der der Backenzähne mit einer dicken Lage von Schmelz bedeckt, der sich aber jetzt, im fossilen Zustande, sehr leicht ablöst.

Der lange schmale Schädel ist im Verhältniss zu dem Körper des Thieres nicht gross und ganz besonders auffallend erscheint die ausserordentliche Kleinheit des sehr zusammengedrückten Hirnkastens. Durch den von den Nasenhöhlungen sich sehr ausbreitenden und verlängerten Zwischenkiefer, so wie den sehr langen, schlanken und zugleich hohlen Unterkiefer erhält der vordere Theil des Kopfes ein schnabelartiges Ansehen.

Die Beschreibung, die CARUS in seiner 1849 erschienenen Abhandlung von dem Kopfskelet des *Zeuglodon Hydrarchus* gibt, passt genau auf das Kopfskelet des *Zeuglodon macrospondylus*. Ich erlaube mir folgende Stellen derselben wörtlich mitzutheilen. „Ich freue mich gegenwärtig die erste, wahrhafte und naturgetreue Abbildung dieser grossen Merkwürdigkeit dem gelehrten Publikum vorlegen zu können, eine Abbildung, welche auf den ersten Blick zeigt, wie irrig alle früheren Vorstellungen von dem Kopfbau dieser Thierfamilie waren, und welche namentlich beweisen wird, dass die von Hrn. GIBBES *) gegebene Zeichnung eines sogenannten Schädels des *Basilosaurus*,

*) Memoir on the fossil Genus *Basilosaurus*. Philadelphia 1847. Fol. mit 5 Tafeln.

gänzlich entweder aus der Luft gegriffen, oder aus einem aus Wallfisch- und Hydrarchusknochen willkürlich zusammengesetzten Schädel entworfen seyn müsse.

Man betrachte also den Schädel des *Zeuglodon Hydrarchus* aus Koch's Sammlung, und jeder Blick eines Kundigen wird das Eigenthümliche, von allen bisher bekannten Thierformen durchaus Abweichendes dieser Schädelform erkennen.“ — Nach einigen Zwischenbemerkungen fährt CARUS dann fort: „Wir beginnen mit Betrachtung des eigentlichen Schädels, welcher sogleich im Verhältniss zum Ganzen des Kopfes durch seine ausserordentliche Kleinheit auffällt. Es müsste vom höchsten Interesse seyn, das Verhältniss einer solchen Schädelhöhle untersuchen zu können, welches für die Nervenstämme eines so grosse Dimensionen erreichenden Geschöpfes, das Centrum abgibt. Ich habe diese Schädelform mit der aller übrigen Säugethiere verglichen und etwas ihr Entsprechendes nirgends gefunden. Man wird alsbald erkennen, dass, was das hohe, schroffe, abgestutzte Hinterhaupt betrifft, die Bildung einigermaßen an die der Pachydermen, namentlich die des Schweines erinnert und in so ferne wesentlich von dem gerundeten Hinterhaupte der Cetaceen, namentlich der Delphine, mit welchen sonst viel Verwandtes hier hervortritt, abweicht. Ueberhaupt ist das Hinterhaupt auch die einzige, räumlich etwas stärker entwickelte Gegend des Schädels. Mittelhaupt und Vorderhaupt sind hingegen von einer Kleinheit, wie sie allerdings nur bei höheren Amphibien, nirgends aber bei Säugethiern bisher bekannt war. Vergleicht man mit diesem Kopfbau die Schädel grösserer Seehundarten, deren Gebiss so sehr an das der Hydrarchen erinnert, so ist namentlich auffallend auf ein wie vielmehr entwickeltes Hirn, deren Bildung deutet; eben diess ist der Fall bei denen der Delphine. Am Hinterhaupte und zwar am untern Rande seiner schroff abgestutzten hintern Fläche, erkennt man deutlich das Hinterhauptsloch und zu beiden Seiten desselben die Gelenkhöcker und die ganze Bildung dieser Gegend spricht sonach bestimmt für grössere Beweglichkeit des Kopfes durch starke hier sich ansetzende Muskelmassen und deutet auf eine längere Halswirbelsäule als die der Delphine. Sehr wichtig ist es auch, dass an dem einen Schädelfragment die drei Wirbelkörper der Schädelwirbel noch sehr deutlich getrennt erscheinen, ungefähr so, wie man auf der Basis eines Hirschschädels sie durch Simphysen verbunden sehen kann.“

„Zu beiden Seiten breitet sich nun die Kopfform, da wo das Hinterhaupt in das Mittelhaupt übergeht, durch die stark entwickelten Zwischenschädelwirbel der Schläfenbeine, in eine abgeflachte Masse aus.“

„Sehr merkwürdig ist nun ferner die Bildung des Vorderhauptes und zwar durch die Deckplatten dieser Schädelwirbelgegend, welche ihrer Lage und ihrer Verhältnisse zu den Nasenknochen nach, jedenfalls für Stirnbeine angesehen werden müssen, obwohl sie in einiger Beziehung auch den, bei mehreren Amphibien oberhalb der Nasenknochen in eine Mittelnaht zusammen stossenden, grossen Thränenbeinen verglichen werden können. Nimmt man diese Platten als Stirnbeine, so hat man das Verhältniss bei den Cetaceen unbedingt für sich, indem auch dort die Stirnbeine als schmale (freilich weit

schmalere) Querplatten längs der Oberkiefer herabsteigen, dagegen stimmt aber nicht ganz damit der Rand, welcher abgerundet und vollständig frei endigt und nur mit seiner vordern Kante an den Oberkiefer stösst und sonach nicht dahin zu deuten scheint, dass das Stirnbein, wie es doch als Deckplatte des Vorderhauptwirbels nothwendig sollte, mit den aufsteigenden Bogen (Flügeln) des vordern Keilbeines sich verbinden könnte. Bei alledem kann nach den bisherigen Ergebnissen der aufgefundenen Fragmente dieser Widerspruch doch nur auf die Weise gelöst werden, dass die Lage des Auges unterhalb jener vorspringenden Platte angenommen wird, wobei dann nothwendig die letztere als Orbitalrand des Stirnbeins betrachtet werden muss. In Wahrheit findet sich diese Platte nun an einem andern Fragment eines grösseren Individuums einzeln vor und wirklich hat allda die untere Fläche derselben ganz jene flachconcave Wölbung, welche auf die Aufnahme eines und zwar nicht kleinen Auges schliessen lassen darf.“

Nach wiederum einigen Zwischenbemerkungen fährt Geheimrath CARUS weiter fort: „Gehen wir nun über zu dem mächtigen Kiefergerüste dieses jedenfalls einst sehr verwüstenden Raubthieres, so fällt zunächst die Bildung der Nasenöffnung in sehr eigenthümlicher Weise auf und zwar so, dass sie ganz die Mitte hält zwischen der Nasenöffnung der Cetaceen und der Seehunde. Was die Nasenknochen betrifft, so sind diese verhältnissmässig zur Länge der Schnauze allerdings sehr kurz, immer aber weit länger als bei den wallfischartigen Thieren und von einer Bildung, dass von der Natur eines Spritzloches durchaus abzusehen ist; die Nasenöffnung ist vielmehr einfach länglich und wenn man von deren weit rückwärts gewendeter und mehr horizontaler Lage absieht, sehr der der Seehunde ähnlich, so dass daan auch die Geruchsorgane als gut entwickelt hier angenommen werden dürfen.“

„Was den Unterkiefer betrifft, so bieten die neuen Auffindungen des Hrn. Dr. KOCH nunmehr ein vollständiges Material dar, um Form und Einlenkung desselben zu beurtheilen. Im Allgemeinen darf man sagen, dass er dem der Delphine sehr ähnlich gebaut ist, indem seine beiden langgestreckten Aeste fast schaufelförmig und nach rückwärts gewölbt, mehr und mehr nach hinten sich verbreitern und mit einem einfachen, nicht sehr vorstehendem, und mehr rückwärts als aufwärts gerichteten Gelenkhöcker sich enden.“

Was den Bau der übrigen Skelettheile des *Hydrarchus macrospondylus* betrifft, so ist zu bemerken, dass sich der grössere Theil der Wirbel desselben von allen bekannten Säugethierwirbeln, besonders durch die grosse Länge im Verhältniss zur Dicke, auszeichnet, wodurch der Körper dieser Thiere eine sehr schlangenartige Gestalt erhält, die noch durch die verhältnissmässig kurzen Rippen vermehrt wird. — Die längsten und grössten dieser Wirbel sind die Lenden- und die jenen sich anschliessenden vordern Schwanzwirbel. Die Halswirbel sind klein, doch sind sie eher dick, als dünn zu nennen und zeigen auf eine grosse Muskelkraft und Stärke des frei beweglichen Halses hin. Besonders bemerkenswerth sind die an ihnen befindlichen langen

schaufelförmigen Querfortsätze, die fast senkrecht von den unteren Theilen der Wirbelkörper auslaufen und nach unten hin sich etwas herausbiegen. Die obliquen — oder schiefen — und die Dornfortsätze zeigen nichts besonders von denen anderer Säugethiere Abweichendes. Die sich den Halswirbeln zunächst anschliessenden 6 bis 7 vordersten Brustwirbel haben von 8 bis 13 Zoll Länge, schlanke Stachel oder Dornfortsätze, welche zwar weiter nach rückwärts allmählig sich verkürzen, aber an Breite, so wie an Stärke bis gegen die Mitte des Körpers zunehmen; von hier aus nehmen sie nicht nur an Länge, sondern auch an Breite ab, bis sie gegen die Mitte des Schweifes sich spurlos verlieren. Die vordersten, dem Halse anschliessenden Brustwirbel, übersteigen bei grossen Individuen, wie das vorliegende, selten eine Länge von $3\frac{1}{2}$ bis 4 Zoll, eine Dicke von $3\frac{1}{4}$ bis $3\frac{1}{2}$ Zoll und eine Körperbreite von 4 bis $4\frac{1}{2}$ Zoll. Weiter nach hinten werden sie immer länger und breiter, so dass die 3 bis 4 letzten an die sich die grossen Lendenwirbel anschliessen, eine Körperlänge von $13\frac{1}{2}$ bis 15 Zoll, und eine Breite von 7 bis 8 Zoll erreichen. An den mittleren Brustwirbeln finden sich keine Querfortsätze, es findet sich vielmehr auf ihrer Mitte eine Vertiefung für den Ansatz des Rippenkopfes an jenem Orte, an welchem bei den noch weiter nach hinten folgenden Wirbeln, die Querfortsätze allmählig hervortreten; demnach articulirt bei diesen Brustwirbeln die Rippe in der Mitte des Wirbelkörpers, wogegen dieselbe bei den vordern Brustwirbeln halb gegen einen und halb gegen den andern Wirbel, mit ihrem kleinen Kopfe articulirt und 3 bis 4 Zoll weiter hinauf eine zweite Articulation gegen den langen Obliquenfortsatz dieser Wirbel, hat. Weiter nach hinten zu sieht man auf der Mitte der Wirbel statt dieser Vertiefungen, kurze breite Querfortsätze sich bilden, an deren Ende die Rippe in die dort ebenfalls vorfindliche Vertiefung mit ihrem Kopfe articulirt. An den letzten, den Lendenwirbeln anschliessenden, Brustwirbeln haben die Querfortsätze eine Länge von 4 bis $4\frac{1}{4}$ Zoll und eine Breite von $3\frac{1}{4}$ bis 4 Zoll erreicht.

Die Lendenwirbel erreichen eine Länge von 15 bis 18 Zoll und eine Körperbreite von $7\frac{1}{4}$ bis $8\frac{1}{2}$ Zoll, sie sind alle mit langen flachen Querfortsätzen versehen und wie schon früher bemerkt, haben die hinteren jener Wirbel nur schwache kurze Stachel oder Dornfortsätze.

Die vorderen Schwanzwirbel haben bis zu ungefähr $\frac{1}{3}$ der Länge des Schwanzes, noch die Länge der Lendenwirbel, die dann folgenden nehmen mehr und mehr an Länge, Breite und Dicke ab, bis sie sich zur Schwanzspitze bilden, auch ihre Querfortsätze werden immer kürzer, bis sie gänzlich verschwinden, aber in jedem derselben ist ein senkrecht Loch. — In der Gegend des 10. bis 12. Schwanzwirbels verliert sich der Dornfortsatz spurlos, aber die Obliquenfortsätze bleiben bedeutend ausgebildet bis gegen die Schwanzspitze.

Der Rückenmarkkanal dieser gesammten Wirbelsäule ist wie jene selbst, von bedeutendem Interesse; sie erscheint im Ganzen sehr flach gedrückt und breit. Eine auffallende Erscheinung ist die Verschiedenheit der Ausbreitung dieses Kanals in den ver-

schiedenen Regionen der Wirbelsäule, da seine Breite im Atlas oder erstem Halswirbel bei grossen Individuen selten $2\frac{1}{2}$ bis $2\frac{3}{4}$ Zoll übersteigt, sich aber dann allmählig so auffallend mit jedem folgenden Wirbel bis zum letzten Brustwirbel vergrössert, dass sie in selbigem eine Breite von $5\frac{1}{2}$ bis 6 Zoll mit verhältnissmässiger Dicke erreicht; allein hier hat das Rückenmark seinen Grössenpunkt erreicht, denn, wenn gleich die Lendenwirbel die grössten von allen sind, so verringert sich doch mit ihrem Auftreten die Rückenmarkröhre mit noch viel grösserer Geschwindigkeit nach dem Schwanz hin, als sie sich vom Kopfe herab bis zum letzten Brustwirbel vergrösserte und ausbreitete; ja mit dem letzten der grossen Lendenwirbel ist sie schon fast gänzlich verschwunden.

Die Unterseite der Hals- und ersten Brustwirbel zeigt mit Ausnahme einer bedeutenden Abrundung der Wirbelkörper nichts sehr bemerkenswerthes. Weiter nach rückwärts dagegen findet man gerade in der Mitte der Wirbelkörper 2 längliche, etwas ovale Vertiefungen, die von einem halben bis zu einem Zoll von einander entfernt sind, und sich nicht nur in allen Brust- sondern auch noch in den Lendenwirbeln vorfinden, und die sich in den Schwanzwirbeln zu einer einzigen Vertiefung vereinigen. Mit den letzten Brustwirbeln verliert sich die erwähnte Abrundung der Wirbelkörper und diese nehmen eine flache Gestalt an, die sich in den hintern Lendenwirbeln wieder verliert, wo dieser untere Theil der Wirbelkörper mehr und mehr zusammengepresst erscheint, jemehr man sich den kleineren Schwanzwirbeln zuwendet.

Die vorderen Extremitäten der Hydrarchen sind im Verhältniss zur Körpergrösse dieser Thiere ungemein klein, doch deuten selbige auf eine sehr freie Bewegung des Ober- und des Unterarmes, letzteres, indem die Ulna und der Radius ganz frei gegen das untere Ende des Humerus articuliren, welche Gelenkigkeit wie bekanntlich, den Wallfischen gänzlich abgeht. Die Handwurzel und Fingerknochen (von welchen sich zwar erst je einer gefunden) deuten auf eine mit langen Fingern versehene, sehr gelenkige Hand, deren Finger aller Wahrscheinlichkeit nach, mit Schwimmhäuten verbunden waren. Noch hat es sich nicht mit voller Gewissheit herausgestellt, ob die Hydrarchen hintere Extremitäten hatten oder nicht, doch haben sich mehrere auf dem Bilde angegebene Knochenreste vorgefunden, die darauf hindeuten, dass hintere Extremitäten vorhanden waren und dass diese noch kleiner als die vorderen seyn mussten. Nach diesen so eben gemachten Bemerkungen lässt es sich fast mit Bestimmtheit annehmen, dass der ausserordentlich starke, lange und gelenkige Schweif mehr als die Extremitäten zu den Bewegungen dieser Thiere diene, welche Bewegungen geschwind und sehr gewaltig gewesen seyn müssen, damit sich das Thier des vor ihm flüchtigen Raubes bemächtigen konnte, welcher den Zähnen nach zu urtheilen nicht in kleinen Geschöpfen, wie sie die Wallfische geniessen, sondern in verhältnissmässig grösseren Meeresfischen und Thieren bestand.

Die unteren Endungen der Rippen sind breit und kolbenförmig.

Die in polygonale Felder getheilte Haut, von der ich einige gut erhaltene Stücke unmittelbar mit dem *Zeuglodon macrospodylus* fand und von der sich vermuthen lässt, dass sie die Bedeckung desselben bildete, besteht aus knöchernen Schildern, die innerhalb einer festen Lederhaut liegen und an ihrer Oberfläche noch mit einer dünnen emailartigen Schale bedeckt sind.

Wenn gleich das im vorliegenden Bilde dargestellte *Zeuglodon*, das bis jetzt vollständigste seiner Art ist, so musste doch auch hier so Manches unvollkommen erhaltene, künstlich durch Gyps ergänzt werden, doch ist Alles hieran Ergänztes nach in meiner Sammlung sich befindenden Originalen gemacht worden, unter meiner besondern Aufsicht.

Die rechte Seite des Gerippes ist im Ganzen genommen, die am schönsten erhaltene. Von den fehlenden Wirbelfortsätzen sind nur zum Theil die der Hals- und vorderen Brustwirbel ergänzt. Am Hinterhaupte sind einige der zerbrechlicheren Theile ergänzt, so wie weiter nach vorne ein Theil der Deckplatten des Vorderhauptes, ein Theil der Nasenknochen und der hintere obere Theil der Oberkiefer. Im Unterkiefer sind vier der Backenzähne ergänzt, so wie ein Theil der langgestreckten, sehr zerbrechlichen Aeste dieser Kiefer, die fast schaufelförmig und nach abwärts gewölbt, mehr und mehr nach hinten sich verbreiten.

Zusatz und Berichtigung.

Der Satz, welcher sich auf der 5ten Seite befindet und dort mit der 3ten Zeile anfängt und auf der 7ten endet, könnte zu Missverständnissen Veranlassung geben. Es sey mir gestattet, hier nachträglich Einiges denselben betreffende noch zu bemerken.

Jener Satz sollte eigentlich folgender Massen heissen: „Die *Zeuglodonten* bilden bekanntlich ein aus mehreren Species bestehendes Genus, und gehören zu einer eigenen Sippe von Thieren, die ihren Platz, nach den neuesten Bestimmungen, ungefähr zwischen den Cetaceen und Robben finden möchte, für welche CARUS den von mir, ihr früher gegebenen Namen der *Hydrarchen* beizubehalten vorschlug.“

Als ich nämlich die ersten, von mir im Jahre 1845 gefundenen *Zeuglodonten*reste genauer untersuchte, so herrschte, wie schon bemerkt, wegen Mangel an Material für solche Studien, noch ein grosses Dunkel in Betreff dieser Geschöpfe; jedoch gelangte ich während meiner nun angestellten Vergleichen der sich in meinem damaligen Besitze befindlichen Reste, mit denen verschiedener Cetaceen, immer mehr und mehr zur Ueberzeugung, dass die meinigen nicht Cetaceen seyn könnten; sondern zu einer bis dahin unbeschriebenen, eigens für sich stehenden Thier-Sippe gehören müssten. Damals war mir noch keine Gelegenheit geworden, weder die von HARLAN, noch die von BUCKLEY gefundenen Reste zu sehen. Die Ersteren waren durch OWEN als Genus *Zeuglodon* beschrieben und zu den Cetaceen gezählt worden. Ich wagte daher noch nicht, die durch meine gemachten Vergleichen gerechtfertigten Vermuthungen zu

veröffentlichen; nämlich die, dass die von mir in Alabama aufgefundenen und, zur Zeit, in der Stadt New-York ausgestellten Reste, zu einer bis dahin nicht beschriebenen Thier-Sippe gehörten, und begnügte mich vorläufig damit, zu sagen, dass sich der Beschreibung der früher gefundenen nach, wenigstens so viel mit Gewissheit heraussstelle, dass die meinen, wenn wirklich zu demselben Genus gehörend, wenigstens eine andere Species seyn müssten; bis ich nach und nach, mittelst fortgesetzter Vergleichen, zur festen Ueberzeugung gelangte, dass wenigstens die in meinem Besitze befindlichen Reste nicht den Cetaceen angehörten, wenn gleich einer, denselben in vielen Stücken verwandten Thier-Sippe, die ich nun, zum ersten Male, wenn auch vielleicht sehr unvollkommen, unter dem Namen der Hydrarchen beschrieb. Ich wurde jedoch von vielen amerikanischen Gelehrten nun desswegen auf die verschiedenste Art angefeindet, jedoch ohne dass man mir von irgend einer Seite, haltbare Gründe gab oder geben konnte, durch die meine Behauptungen wissenschaftlich widerlegt wurden; bis mir endlich kein anderes Mittel übrig blieb, als mich mit meiner ganzen Sammlung nach meinem deutschen Vaterlande zu wenden, um die dortigen Gelehrten um eine gründliche und unparteiische Untersuchung meiner Sammlung zu bitten, ihnen es überlassend, die streitigen Punkte zu entscheiden.

Wie schon am Eingange dieser Abhandlung gesagt, wandte ich mich zunächst nach Dresden und dann nach Berlin; wo im erstgenannten Orte es von CARUS und allen den Gelehrten, die sich nun Monate lang mit einer gründlichen Untersuchung meiner Sammlung beschäftigten, einstimmig anerkannt wurde, dass meine Behauptung, dass alle, sich in meiner aus Alabama gebrachten Sammlung befindenden Reste, einer für sich stehenden Thier-Sippe angehörten, richtig sey; auch JOHANN MÜLLER bestätigte, nach Monate langer, sehr gründlicher Untersuchung dasselbe. Nur waren vorgenannte Herren, zur Zeit verschiedener Meinung, welchen Platz jene neue Sippe einnehmen solle, welches jedoch auf die gegenwärtige Angelegenheit keinen Bezug hat, wo es sich augenblicklich insbesondere darum handelt, wie und unter welchen Umständen der Name der Hydrarchen, der neuen Thier-Sippe gegeben ward.

Wie nun schon früher bemerkt, schlug CARUS vor, den von mir gegebenen Namen Hydrarchen für die Sippe beizubehalten.

Druckfehler.

Seite 1	Zeile 5	anstatt	der	Arkansas,	lies	von	Arkansas.
„ 3	„ 31	„	Choctaws,	„	Choctaw.		
„ 5	„ 32	„	<i>trachyspondylus,</i>	„	<i>brachyspondylus</i>		
„ 7	„ 5	„	Abweichendes,	„	Abweichende		

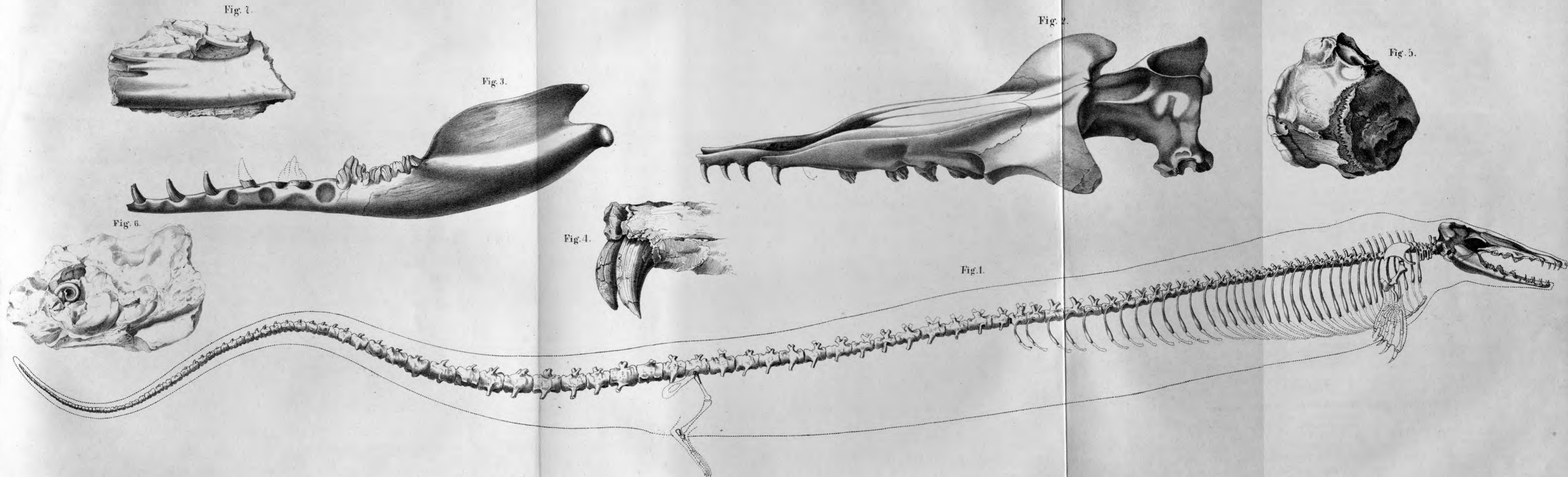


Fig 1. Skelet von Zeuglodon macrospondylus.
 Fig 2. Schädel.
 Fig 3. Linker Unterkiefer.
 Fig 4. Das äußere Ende des Zwischenkiefers.

Fig. 5. Einer der letzten Schwanzwirbel.
 Fig. 6. Felsenbein mit der Ohrschnecke von Zeuglodonhydrarchos.
 Fig. 7. Ein Theil des Unterkiefers von Zeuglodonhydrarchos die erhaltenen innerenTheile zeigend.

IV. Beiträge zur Flora der Vorwelt.

Von

Dr. Constantin von Ettingshausen.

Vor einigen Jahren hatte ich Gelegenheit, die Sammlungen fossiler Pflanzenreste des kaiserl. Hof-Mineralien-Cabinetes und des ehemaligen k. k. montanistischen Museums durchzustudieren und zu bestimmen. Bei dieser Arbeit kam mir so manches Neue und Interessante in die Hände; besonders aber nahmen die vorweltlichen Reste schachtelhalmähnlicher Gewächse meine ganze Aufmerksamkeit dadurch in hohem Grade in Anspruch, dass sie mir die bedeutendsten Schwierigkeiten in Bezug auf das Festhalten der Umgrenzung und Charakterisirung der hier bereits so zahlreich aufgestellten fossilen Species entgegensetzten. Denn ich gelangte bald zu der Ueberzeugung, dass diese Schwierigkeiten nur durch eine gründliche Umarbeitung der Geschlechter und Species selbst beseitigt werden könnten. So fand ich in den genannten Sammlungen Uebergänge zwischen vielen als selbstständige Arten beschriebenen Formen eines und desselben Geschlechtes, von Calamites, Equisetites, Asterophyllites, Annularia und Sphenophyllum; ja sogar Fälle von unzweifelhaften Uebergängen von Asterophylliten in Volkmannien und von Asterophylliten in Calamiten.

Auf diese letzteren Thatsachen, von deren Richtigkeit sich jeder Besitzer einer Sammlung von Radnitzer Asterophylliten und Volkmannien überzeugen kann, und nach welchen die Asterophylliten überhaupt als die Aeste und die Aehren der Volkmannien als die Fruchtsände der Calamiten zu betrachten sind; musste ich um so mehr Gewicht legen, als bereits durch sehr werthvolle und sinnreiche vergleichend-anatomische Untersuchungen von Dr. A. PETZOLDT und von Prof. Dr. UNGER die vordem so zweifelhaften Calamiten in ihren Stammbau auf die Form der Equiseten zurückgeführt wurden und es durch die Resultate derselben gleichsam a priori angedeutet war, dass die Calamiten auch in ihrer äusseren Tracht eine entsprechende Aehnlichkeit mit jenen in unserer gegenwärtigen Schöpfung vollkommen isolirt dastehenden Pflanzengebilden haben mussten. Wohin sollten denn die Aeste gekommen seyn, von deren Gegenwart doch die Narben, welche wir an den Fragmenten so vieler Calamitenstämme — ich nenne nur die Formen: *Calamites verticillatus* LINDL. et HUTT., *Calamites cruciatus*

STERNB., *Calamites Brongniarli* STERNB., *Calamites regularis* STERNB., *Calamites ramosus* ARTIS u. s. w. — gewahren, das sprechendste Zeugnis geben. Ihre Vertilgung anzunehmen, wäre bei den für die Steinkohlenformation so zahlreichen Thatsachen wunderbarer Erhaltung der zartesten Pflanzentheile eine höchst unzulässige Hypothese. Jedenfalls waren aber diese Aeste leicht abfällig, denn nur bei sehr wenigen Formen finden wir sie in noch unmittelbarem Zusammenhange mit dem Stamme selbst erhalten, wie z. B. bei *Calamites Mougeotii* LINDL. et HUTT. (Foss. flor. of Great Brit. I. t. 22.)

Es muss hier bemerkt werden, dass Hr. Prof. UNGER in seinen verdienstlichen „Vegetationsansichten der vorweltlichen Perioden“ die Calamiten als baumartige, quirlig-ästige Gewächse, im Habitus unseren Equiseten analog, darstellte, ohne jedoch näher in die Entwicklung dieser Idee einzugehen.

Die reichhaltige STERNBERG'sche Sammlung fossiler Pflanzen im National-Museum zu Prag, welche ich später zu studieren Gelegenheit fand, liefert nicht nur viele Belege für die Richtigkeit der eben berührten Ansicht, sondern auch zahlreiche neue Thatsachen. durch deren Ausbeutung sich gleichfalls nur Vereinfachung der bisher angenommenen Specieszahl herausstellt.

Auf Grundlage dieses mir zu Gebote stehenden nicht unbedeutenden Materiales glaube ich nun so manche wesentliche Berichtigung in der Umgrenzung der Geschlechter und Arten der fossilen Calamarien feststellen zu können, deren Darlegung ich in den folgenden Blättern in der Form einer Monographie versuche. Derselben schicke ich eine speciellere Auseinandersetzung der wichtigeren Beobachtungen über Calamiten und Asterophylliten voraus. Als Anhang füge ich einige neue und interessante in den Sammlungen der Wiener Museen aufbewahrte Arten des noch zweifelhaften Farrengeschlechtes *Taeniopteris* bei.

Kaum kann ich aber der Dankesworte genug finden, wenn ich der vielfältigen, thatkräftigen Unterstützungen erwähne, die durch den Hrn. Director der k. k. geologischen Reichsanstalt, Sectionsrath W. HAIDINGER meinen wissenschaftlichen Anstrengungen in jeder Richtung zu Theil wurden.

Hrn. Custos P. PARTSCH schulde ich für die mir gestattete freieste Benützung der Sammlungen und Bibliothek des kais. Hof-Mineralien-Cabinetes so wie für die so oft ertheilten Winke zu deren vortheilhaftesten Benützung — Hrn. Bergrath v. HAUER, Hrn. Dr. M. HÖRNES und Hrn. DORMITZER, Custos am Museum zu Prag, für ihre zahlreichen freundschaftlichen Belehrungen den wärmsten Dank.

I. Untersuchungen über mehrere *Calamiten-* und *Astero-* *phylliten-Formen.*

Calamites varians STERNB.

STERNB. VEGS. II. p. 50. t. 12.

Die echte Form kommt zu Radnitz in Böhmen selten vor; in den Museen zu Prag und Wien befinden sich von ihr nur wenige Exemplare. Ungemein häufig aber sind alle möglichen Mittelformen zwischen derselben und *C. cannaeformis*, *C. pachyderma*, *C. ramosus*, *C. cruciatus* und *C. Suckowii*. Die Knötchen, welche bei der echten Form von verschiedener Grösse erscheinen, und sogar hin und wieder in kleinere Astnarben übergehen, zeigen in der Mehrzahl der Fälle kaum bemerkbare Variationen in ihrer Grösse. Es sind diess die Uebergangsformen in *C. Suckowii*. Am häufigsten fehlen die Knötchen gänzlich, dann aber sind die Glieder meist mehr verlängert. Hieher gehören die Uebergangsformen in *C. cannaeformis*.

Bei den erwähnten Formen fehlen durchaus die Astnarben. Kommen nun noch diese hinzu, so entstehen die Uebergangsformen zu *C. ramosus* und *C. cruciatus*. Die Astnarben sind dann von zweierlei Art sowohl nach ihrer Stellung als Grösse. Die mächtigeren stehen immer vereinzelt und meist an der Grenze der verlängerten Stammglieder. Die kleineren, rundlichen Astnarben sind höchst selten einzeln, meist viele in Quirlstellung zwischen den kürzeren mehr gedrängten Stammgliedern gereiht. Die erste Form kann man ebenso wenig vom *C. ramosus* ART. unterscheiden, als die zweite von *C. cruciatus* STERNB.

Was endlich die Entfernung der Rippen betrifft, so variirt diese nicht minder. Dieselbe beträgt an einem in Prag aufbewahrten Exemplare allein zwischen 2 und 7 Mill. Ein anderes Exemplar ebenfalls von Radnitz, jedoch weniger vollständig, zeigt 8 Mill. Rippendistanz. *C. gigus*, welcher nach dem alleinigen Merkmal der beträchtlichen Rippendistanz aufgestellt ist, fällt somit gleichfalls hieher.

Auf diese zahlreichen Uebergänge gestützt, die wohl einem Jedem, der den *Calamiten* nur einigermaßen Aufmerksamkeit widmete, klar seyn werden, wagte ich es, diese und noch einige ohne Zweifel mit ihnen zusammenfallende Formen, welche als selbstständige Species beschrieben werden, wie *C. Brongniarti* STERNB., *C. regularis* STERNB., *C. elongatus* GUTBIER, identisch mit *C. cruciatus* STERNB.; ferner *C. pachyderma* BRONGN., *C. infractus* GUTB., *C. sulcatus* GUTB. identisch mit *C. varians* STERNB. und *C. Suckowii* BRONGN. in Eine Art zu verschmelzen.

Calamites undulatus STERNB.

STERNB. VEGS. I, 4. p. 16. II. p. 47. t. 1. f. 2; t. 20. f. 8.

BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 127. t. 17. f. 1.

Diese Form ist nur Erzeugniss einer mehr oder weniger leichten und gleichmässig parallel der Axenrichtung des Stammes erfolgten Compression des *Calamites varians*

STERNB. Nicht selten verschwindet der wellige Verlauf der Rippen sich allmählig ausgleichend, und man findet beide Formen an einem und demselben Exemplare unmittelbar in einander übergehend. Auch zeigt *C. undulatus* häufig stärkere, knieförmige oder gekröseartige Einbiegungen der Rippen, die mit unläugbaren Quetschungen und Verschiebungen des Stammes innig zusammenhängen.

Calamites verticillatus LINDL. et HUTT.

LINDL. u. HUTT. Foss. flor. III d. 196.

Taf. VIII. Fig. 1.

Das von LINDLEY und HUTTON am angeführten Orte abgebildete Exemplar nähert sich von den mit Astnarben versehenen Calamiten-Formen mehr dem *C. ramosus* ARTIS. Die hier mitgetheilte Form aus der Sammlung des kais. Hof-Mineralien-Cabinetes in Wien zeigt kleinere Astnarben und gedrängter gestellte Quirle, und ist hierdurch mehr dem *Cal. cruciatus* STERNB. verwandt.

Allein beide Formen, durch die zahlreichen dicht aneinander gereihten Aeste des Quirl sehr ausgezeichnet, bleiben wohl mit allem Grunde als eine selbstständige Art vereinigt, wovon erstere Form das Stück eines tieferen Stammtheiles, letztere ein Stück von einem oberen Stammtheile dieser Art darstellt.

Sie liefern einen nicht unwichtigen Beitrag zu den Belegen der Ansicht, dass die Calamiten keine einfachen säulenförmigen, sondern von einer gewissen Höhe des Stammes an quirlig-ästige Gewächse waren, eine Ansicht, welche zuerst von PETZOLD, LINDLEY und UNGER ausgesprochen wurde.

Volkmania arborescens STERNB.

STERNB. Vers. II p. 52. t. 14. f. 1.

Diese Form kam bisher nur in wenigen Exemplaren zu Radnitz in Böhmen vor, welche im National-Museum zu Prag aufbewahrt werden. Eines derselben ist das Original der oben citirten Sternberg'schen Abbildung, welches wir nun näher in Betrachtung ziehen. Die Aehre, welche steril zu seyn scheint und mit der von Sternberg zu seiner *Volkmannia gracilis* gezogenen Aehre Vers. II t. 15. f. 2 identisch ist, steht in keinem Zusammenhange mit dem daneben befindlichen Asttheile. Es ist jedoch mit allem Grunde anzunehmen, dass sie zu demselben gehört, ja vielmehr sehr wahrscheinlich, dass dieser Asttheil noch mehrere solcher Aehren trug, da zunächst seinem oberen Ende deutliche Zweigrudimente genau von der Dicke der Aehrenspindel abgehen.

Vergleicht man nun die Abbildung dieses Asttheiles mit der von *Calamites varians* STERNB. Vers. II t. 12, so wird man schon hieraus sogleich die nahe gegenseitige Beziehung dieser beiden Formen erkennen. Die Entfernung und Stärke der Rippen, die ungleichen mehr verkürzten Glieder, die theilweise sichtbaren Knötchen, die Stellung der Aestchennarben und überhaupt der ganze Habitus stimmen verhältnissmässig vollkommen überein.

Bei Betrachtung der Vielgestaltigkeit von *Calamites varians* STERNB., welche ich bereits auseinandersetzte, namentlich der in den *Calamites cruciatus* übergehenden Reihe in den Museen von Prag und von Wien muss man zu der Ansicht gelangen, dass die *Volkmannia arborescens* STERNB. ein ährentragender Ast der in der Steinkohlenflora von Radnitz so häufigen Calamitenspecies sey.

Volkmannia distachya STERNB.

STERNB. VERS. 14. p. 30. t. 38. f. 3. a. b.

Diese Form geht sowohl in *Volkmannia arborescens* STERNB. als in *Volkmannia elongata* PRESL. über, zwei scheinbar weit von einander stehende Formen, welche aber nur die Endglieder einer Reihe von entschiedenen Uebergängen, die durchaus Einer Art angehören, darstellen.

Bevor ich diess auseinandersetze, glaube ich bemerken zu müssen, dass die oben angeführte Abbildung ihrem Original nicht genau entspricht. So sieht man bei Fig. 3. b die vollkommen erkennbaren lineallänglichen Bracteen der Aehre, wodurch sich selbe als identisch mit der von *Volkmannia arborescens* STERNB. erweist und bei Fig. 3. a sind die folgenden dem Original entnommenen Verhältnisse kaum angedeutet. Die linke, länger gestielte, nicht vollständig erhaltene Aehre zeigt schmal-lineale wirtelständige Bracteen, die in einem rechten Winkel von der Spindel abgehen und mit einer langen nach aufwärts gekrümmten Pfriemspitze endigen. In der Achsel einer derselben gewahrt man deutlich den Eindruck des einzeln sitzenden, verkehrt eiförmigen oder elliptischen Sporenbehälters. Die Quirle selbst sind genähert und ziemlich locker.

Diess sind nun Verhältnisse, welche für die Aehren der *Volkmannia elongata* als charakteristisch gelten. Das Museum zu Prag besitzt eine sehr interessante Suite dieser Aehren, aus welcher man die ausserordentliche Veränderlichkeit derselben sowohl in der Anordnung und Form der Bracteen in der Vertheilung, dem Vorhandenseyn oder Fehlen der Früchte, als auch in der Länge und Gestalt der Aehren selbst hinlänglich entnehmen kann. Die Form der Deckblätter geht von der lanzettlinealen in die lineal-pfriemliche oder fadenartige über. Bei den sterilen Aehren sind sie dichter gestellt, breiter und weniger spitz, bei den fruchttragenden sind sie im Allgemeinen schmaler, meist lineal-pfriemlich bis fadenförmig und locker gestellt. Ihre Länge varirt gleichfalls sehr. Die Länge der Aehren schwankt für beiderlei Formen zwischen 3 und 15 Centim., ihr Durchmesser zwischen 4 und 20 Millim. Die Früchte sitzen bald im Quirl, bald nur gegenständig, oder selbst wechselständig; in letzteren Fällen sind meist die Deckblätter abgefallen oder verkümmert.

Alle diese Formen lassen sich nicht einmal als Varietäten Einer Species begründen, sondern können nur als die verschiedenen Entwicklungsstufen des Fruchtstandes einer und derselben Art, die wir dem Geschlechte *Calamites* einverleiben, betrachtet werden.

Asterophyllites dubia BRONGN.

BRONGN. Prodr. p. 159.

Diese von STERNBERG und LINDLEY als *Bechera grandis* beschriebene und abgebildete Form ist besonders häufig zu Radnitz in Böhmen. Sie geht in den daselbst noch häufiger vorkommenden Calamiten über, wie sich Jeder, der nur die paläontologischen Sammlungen der Museen von Wien und Prag besieht, leicht überzeugen kann, und gibt am schönsten den unmittelbaren Beweis für die Ansicht, dass die Asterophylliten nicht als selbstständige Pflanzenarten, sondern als die leicht abfälligen Aeste der Calamiten zu betrachten sind.

Eine ansehnliche Reihe von verschiedenen Entwicklungsstufen dieser Aeste, welche die genannten Museen liefern und die zum Theile als selbstständige Asterophyllites-Arten bekannt sind, lässt folgende Einsicht in die Art ihres Wachsthums gewinnen. Im ersten Stadium stellt der kaum entsprossene Ast erster Ordnung eine verhältnissmässig dicke Spindel mit sehr verkürzten Gliedern dar, zunächst deren Einfügungsstellen entweder mehr oder weniger zahlreiche, oft quirlförmig angeordnete Knöspchen hervorbrechen (*Asterophyllites tuberculata* BRONGN., *Bruckmannia tuberculata* STERNB. Vers. I. t. 45. f. 2.) oder hinfallige, schmallineale, quirlförmig gestellte Blätter abgehen. (*Bruckmannia tuberculata* LINDL. et HUTT. I. t. 14.; *Volkmannia gracilis* STERNB.; einige noch nicht bekannte, als *Bechera charaeformis* STERNB. bezeichnete Formen, im Nationalmuseum zu Prag.) Beide Fälle kommen auch vereint vor.

Im zweiten Stadium verlängern sich die Astglieder der ersten Ordnung und werfen dann oft die Blätter ab. Stets bemerkt man an der Stelle des oberen Gliedendes, wo die Blätter aufsassen, Knötchen, welche somit als deren Narben anzusehen sind. Wahrscheinlich haben die in ganz ähnlicher Weise um die Stammglieder angeordneten tubercula eine gleiche Bedeutung. (Einige neue Formen in den Museen von Wien und Prag; *Bechera charaeformis* STERNB. Vers. I t. 55. f. 5.)

Im dritten Stadium entwickeln sich aus den Knöspchen Aeste der zweiten Ordnung. Die Blätter derselben sind minder dicht gestellt als die der vorigen, meist kürzer und etwas gekrümmt. (*Volkmannia gracilis* STERNB.; *Bechera grandis* LINDL. et HUTT. I. t. 19. f. 1. 2.)

Im vierten Stadium entspringen Aeste der dritten Ordnung. Diese tragen noch kürzere, feinere und mehr gekrümmte Blätter als die der zweiten Ordnung. Die Glieder der bereits blattlosen Aeste erster Ordnung erreichen die Länge von 4—6 Centim. und die Dicke von $1\frac{1}{2}$ —3 Centim. (*Asterophyllites dubia* BRONGN.; *Bechera grandis* STERNB. Vers. I. t. 49. f. 1. — LINDL. et HUTT. III t. 173.)

Im fünften Stadium endlich kommen Aeste vierter Ordnung mit noch kleineren, linealpfriemlichen Blättern zur Entwicklung. (*Asterophyllites delicatula* BRONGN.; *Bechera delicatula* STERNB. Vers. I t. 49. f. 2; *Bechera charaeformis* STERNB. Vers. I. t. 55. f. 3.)

Alle diese Formen, so verschieden auch die Extremsten auf den ersten Blick erscheinen, gehen als die einzelnen Entwicklungsstufen eines und desselben Gebildes unmittelbar in einander über und zeigen einen gewissen gemeinsamen Habitus, der sich besonders in der Form der Glieder und Gliederstreifen ausspricht.

Asterophyllites tenuifolia BRONGN.

BRONGN. Prodr. p. 159.

Unterscheidet sich von den so eben betrachteten Formen wesentlich durch die Beschaffenheit der Gliederung und der Gliederstreifen. Während die Glieder bei den vorigen deutlich und scharf hervortreten, unter sich von gleicher Länge sind, die Streifen stark, mehr oder weniger gleichmässig erhaben erscheinen und wenigstens an den Aesten erster und zweiter Ordnung stets über $\frac{1}{2}$ Millim. von einander entfernt stehen, zeigen die meist ungleich langen Glieder der zu *Asterophyllites tenuifolia* BRONGN. gehörigen Formen keine so deutliche, scharfe Abgrenzung und stets feinere, sehr genäherte Streifen. In diesen der Axe entnommenen Merkmalen stimmen mit letzteren Formen auch *Asterophyllites rigida* BRONGN., *Asterophyllites comosa* LINDL. et HUTT., *Asterophyllites longifolia* BRONGN. und *Volkmania polystachya* STERNB. auf das Genaueste überein. Da überdiess die Unterschiede dieser Formen, von einander und von *Asterophyllites tenuifolia*, welche hauptsächlich in der Tracht liegen, sich als nicht constant bewähren und unzweifelhaft in einander übergehen, so nehme ich keinen Anstand, sie alle in Eine Art zu bringen. Diese Uebergänge habe ich beobachtet:

a) zwischen *Asterophyllites tenuifolia* BRONGN. und *Volkmania polystachya* STERNB. Beide kommen zu Waldenburg in Schlesien und zu Radnitz in Böhmen vor. Von ersterer Localität besitzt das kaiserl. Hof-Mineralien-Cabinet eine Uebergangsform *Asterophyllites tenuifolia* mit den Fruchttähren der *Volkmania polystachya*;

b) zwischen *Asterophyllites tenuifolia* und *Asterophyllites rigida*. Letztere Form, welche zu Minitz in Böhmen und nach Exemplaren im k. k. Hofmineralien-Cabinete, bei welchen übrigens die nähere Bezeichnung des Fundortes fehlt, im Zempliner Comitats in Ungarn zugleich mit der Ersteren vorkommt, ist nur als eine frühere Entwicklungsstufe desselben, als ein *Asterophyllites tenuifolia* mit verkürzten Gliedern und genäherten Blätterquirlen zu betrachten. Das Gleiche wage ich für *Asterophyllites comosa* LINDL. et HUTT. Foss. flor. III. 108 zu behaupten, obgleich ich von dieser Form nur wenige Exemplare aus dem Zempliner Comitats kenne;

c) zwischen *Asterophyllites tenuifolia* und *A. longifolia*, nach dem Vorkommen zu Newcastle. Es ist noch ferneren Forschungen vorbehalten, für diese Calamitenäste, welche im Ganzen ziemlich selten sind, den entsprechenden Stamm direct nachzuweisen.

Asterophyllites equisetiformis BRONGN.

BRONGN. Prodr. p. 159.

Eine Form, welche sich von den vorigen durch die Gestalt und Stellung der Blätter gut unterscheidet. Mit derselben vereinige ich *Asterophyllites foliosa* LINDL. et HUTT. Foss. Flor. I. t. 25 und *Bechera diffusa* STERNB. Vers. I. t. 19. f. 3. Erstere Form ist

von *Asterophyllites equisetiformis* in keinem Punkte zu unterscheiden. Letztere Form kam bisher nur in einem einzigen Exemplar, nach welchem Graf STERNBERG seine Art aufstellte, aus den Schiefen von Radnitz in Böhmen zum Vorschein. So unvollständig dasselbe auch erhalten ist, so erkennt man aus den charakteristischen kurzen, mehr lanzettlichen als linealen, allmählich zugespitzten, in genäherte Quirle gestellten Blättern und den feinen Gliederstreifen die nahe Verwandtschaft mit *Asterophyllites equisetiformis* BRONGN. Die Identität dieser beiden Formen wird aber durch das neuerlich entdeckte Vorkommen von *Asterophyllites equisetiformis* zu Radnitz ausser Zweifel gesetzt. Belegstücke hiefür enthält die Sammlung des Prager Museums.

Es scheint mir nach zahlreichen angestellten Vergleichen des Vorkommens der Calamiten und Asterophylliten nicht gewagt, die nun in Betrachtung gezogenen Calamitenäste geradezu mit *Calamites Cisti* BRONGN. zu vereinigen und ich kann zur Begründung dieser Annahme nebst dem Umstande, dass der erwähnte Calamit an allen Fundorten des *Asterophyllites equisetiformis*, besonders aber zu Radnitz, Wettin, Mannebach und Waldenburg entsprechend häufig vorkommt, auch die Thatsache feststellen, dass unzweifelhafte Aeste des ersteren von den analogen Axentheilen des letzteren wenigstens dem äusseren Ansehen nach durchaus nicht unterschieden werden können.

II. *Monographia Calamariarum fossilium.*

Classis Calamariae.

A. Ordo Calamiteae.

Plantae arboreae, arborescentes vel herbaceae, verticillato-ramosae, caulibus teretibus, articulatis, costatis vel striatis, vegetatione terminali crescentibus. Corpus lignosum medullam largam lacunosam includens, e vasis duplicis ordinis radiatim alternantibus conflatum, majoribus scalariformibus, minoribus prosenchymatosis. Radiis medullares copiosi. Meatus pneumatici in medulla nec non ipso corpore lignoso obvii. Cortex parenchymatosus, regulariter striatus. Folia verticillata in vaginam coalita vel libera, caducissima. Fructificatio terminalis, spicata. Sporocarpia verticillata, in axillis squamarum solitaria vel biserialia.

UNGER in ENDL. Gen. plant. suppl. II. p. 3; Gen. et spec. plant. foss. p. 41. — PETZOLD: Ueber Calamiten u. Steinkohlenbildung.

I. Calamites Suck.

Caulis cylindricus, regulariter costatus, articulatus, sulcis articulorum alternantibus, saepius convergentibus. Vaginae patentes, profunde multidentatae vel earum loco in apicibus articulorum folia, tuberculis, infra articulationem inter sulcos symmetrice distributis, insita, caducissima. Rami mox in verticillis dispositi mox solitarii,

articulati, saepius striati, foliati. Folia verticillata, linearia, libera vel basi connata, saepius crebra. Fructificatio spicata. Spicae cylindricae, elongatae, verticillato-foliatae. Sporocarpia in axillis foliorum solitaria, nuculaeformia.

SUCHOW in Act. Acad. Theod. Palat. V. 359.

BRONGN. Prodr. p. 37. BRONGN. Hist. végét. foss. I p. 131. ENDL. gen. plant. p. 58. UNC. gen. et spec. plant. foss. p. 44.

1. *Calamites communis* ETTINGSH.

C. caule cylindrico, articulis aequi- vel inaequilongis, costis $2\frac{1}{2}$ —8 mill. latis, cicatricibus ramorum in ipsa articulatione concavis, hemisphaericis, solitariis vel verticillatis; tuberculis rotundatis 1—2 mill. in diametro, vel saepius nullis; ramis verticillatis cylindraceis articulatis, articulis approximatis vel elongatis, longitudinaliter elevato-striatis, striis 1—2 mill. remotis, apice tuberculis vel punctis (cicatricibus foliorum) impressis, verticillatis inter strias instructis, ramulis verticillatis, gracilibus filiformibus; foliis verticillatis crebris, ramorum linearibus, patentibus, deciduis, ramulorum brevioribus, acicularibus, saepius sursum flexis, spicis verticillatis cylindricis, 6—12 centm. longis, pedunculatis, pedunculis 8—15 mill. long.; bracteis verticillatis, in spicis sterilibus crebris late-linearibus, obtusis erecto-patentibus, uninerviis, planis, articulo plus duplo longioribus, in fructiferis brevioribus, linearibus attenuato-acuminatis vel subulatis, patentibus, arcuato-falcatis; sporocarpis in axillis bractearum solitariis, sessilibus, obovatis, nuculaeformibus.

Calamites ramosus Artis Antedil. Phytol. t. 2. — BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 127. t. 17. f. 5. 6. — GUTB. Abdr. p. 18. t. 2. f. 6.

Calamites nodosus STERNB. Vers. I. fasc. 2. p. 27. 32. fasc. 4. p. 27. t. 17. f. 2. Vers. II. p. 48. — WALCH. Naturgesch. d. Verstein. 3. suppl. p. 148. t. 1. 2.

Calamites carinatus STERNB. Vers. I fasc. 3. p. 36. 39. fasc. 4. p. 27. t. 32. f. 1.

Calamites Suchowii BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 124. t. 15. f. 1—6. t. 16. f. 1—4. — SUCHOW in Act. acad. Theod. Palat. tom. V. p. 357. t. 15. f. 1—5. t. 16. f. 1—4. t. 18. f. 11. t. 19. f. 8. 9. — STERNB. Vers. II. p. 49. — MURCH. géol. p. 11. t. D. f. 1. a. b. — GUTB. Abdr. p. 17. t. 2. f. 1. 2.

Calamites aequalis STERNB. Vers. II. p. 49.

Calamites undulatus STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 26. II. p. 47. t. 1. f. 2. t. 20. f. 8. — BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 127. t. 17. f. 1—4. — GUTB. Abdr. p. 18. t. 2. f. 5.

Calamites varians STERNB. Vers. II. p. 50. t. 12.

Calamites cruciatus STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 27. t. 49. f. 5. II. p. 48.

Calamites alternans GERM. et KAULE. Nor. Acta A. N. C. XV. 2. p. 221.

Calamites Brongniarti STERNB. Vers. II. p. 48.

Calamites cruciatus BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 128. t. 19.

Calamites regularis STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 27. t. 59. II. p. 52.

Calamites cannaeformis BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 131. t. 21. f. 4. — SCHLOTH. Petref. p. 398. t. 20. f. 1. — STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 26. — GUTB. Abdr. p. 22. t. 2. f. 7. — LINDL. et HUTT. foss. flor. I. t. 79.

Calamites Pseudobambusia Artis Antedil. Phytol. t. 6. — STERNB. Vers. I fasc. 1. p. 22. 24. t. 13. f. 3. II. p. 46. — STEINHAUER in Trans. Amer. phls. soc. I. 1. t. 5. f. 2.

Calamites pachyderma BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 132. t. 22. — STERNB. Vers. II. p. 50.

Calamites Gigas BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 136. t. 27. — STERNB. Vers. II p. 50. — MURCH. Géol. p. 11. t. 9. f. 6.

Calamites columella KURORGA Beitr. p. 26. t. 5. f. 2.

- Calamites elongatus* GUTB. Abdr. p. 28. t. 3. b. f. 2. 3.
Calamites sulcatus GUTB. Abdr. p. 27. t. 2. f. 8.
Calamites infractus GUTB. Abdr. p. 25. t. 3. f. 1. 4. 5. 6.
Volkmania distachya STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 30. t. 48. f. 3. II p. 52.
Volkmania arborescens STERNB. Vers. II. p. 52. t. 14. f. 1.
Volkmania elongata PRESL. Verhandl. d. Gesellsch. d. vaterländ. Museums in Böhmen. Prag 1838. p. 27. t. 1.
Volkmania gracilis STERNB. Vers. II p. 53. t. 15. f. 1—3.
Asterophyllites dubia BRONGN. Prod. p. 159.
Bechera grandis STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 30. t. 49. f. 1. — LINDL. et HUTT. Foss. flor. 1. t. 19. f. 1. 2. II t. 173.
Asterophyllites tuberculata BRONGN. Prodr. p. 159.
Bruckmannia tuberculata STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 29. t. 45. f. 2. — SCHEUCHZ. Herb. diluv. t. 2. f. 6. — LINDL. et HUTT. Foss. flor. I t. 14. p. 45. III. t. 180.
Asterophyllites delicatula BRONGN. p. 159.
Bechera delicatula STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 31. t. 49. f. 2.
Bechera ceratophylloides STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 30. t. 35. f. 3.
Bechera myriophylloides STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 30.
Myriophyllites microphyllus STERNB. Vers. I. fasc. 3. p. 37. 39.
Myriophyllites dubius STERNB. Vers. I. fasc. 3. p. 36. 39.
Asterophyllites charaeformis GÖPP. Uebers. p. 198.
Bechera charaeformis STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 30. t. 55. f. 3. 5.

Ubique in formatione lithanthracum e. g. ad Richmond Virginiae (BRONGNIART), et alibi in America septentrionale (CIST); in montibus Donetzkiensibus Rossiae; ad Kilkeny (Mus. Dublin.), Newcastle (LOSH), Leabrook (ARTIS), Jarrow, Felling, Whitby Angliae (LINDL. et HUTT.); ad Leangeac-Alais (POMIER), St. Etienne, Litry, Col du Chardinet Franciae (BRONGNIART); Wettin, Mannebach, Saarbrück Germaniae; ad Stangalpe Stiriae (UNGER); frequentissime in Bohemia et in Silesia (Mus. Prag. et Vindob.).

2. *Calamites decoratus* BRONGN.

BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 123. t. 14. f. 1—2. Class. végét. foss. p. 17. t. 1. f. 2. — ARTIS Anted. Phytol. t. 24. — SCHLOTTH. Petref. p. 401. — STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 27. II. p. 49.

C. caule cylindrico, articulationibus valde notatis articulis inferioribus abbreviatis, superioribus pollicaribus et longioribus, costis convexis, articularum superiorum $2\frac{1}{2}$ —4 mill. latis, inferiorum crassioribus, tuberculis rotundis 1—5 mill. in diametro, inferioribus maximis.

Calamites Steinhaueri BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 135. t. 18. f. 4. — STEINHAUER in Trans. Amer. phil. soc. 1. t. 5. f. 1.

In schisto lithanthracum ad Lewmoor (GALLOIS) et Lea Brook (ARTIS) in Yorkshire; ad Mannebach (SCHLOTHEIM) et Saarbrück (STERNBERG) Germaniae; in Silesia (GÖPPERT).

Calamitem Steinhaueri BRONGN. formam tantum majorem *Calamitis decorati* BRONGN. exhibere puto.

3. *Calamites Voltzii* BRONGN.

BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 135. t. 25. — STERNB. Vers. II p. 49.

C. caule crasso, conico, superius coarctato, articulationibus 6—10 decim. distan-

tibus, articulis cylindricis ad finem superiorem nodosis, costis planis latissimis, cicatricibus ramorum verticillatorum concavis, hemisphaericis, margine elevatis.

In anthracite ad Zundweiler magniducatus badensis (Mus. Strassburg.); in Silesia (GÖPPERT).

4. *Calamites Schimperii* ETTINGSH.

C. caule cylindrico, 4—5 centm. crasso, articulationibus circ. 9—11 centm. distantibus, subinflatis, costis valde (ultra 10 mill.) remotis, perpaucis, plus minus prominulis, cicatricibus ramorum verticillatim positis, numerosis, corpus lignosum crassum, medullam multicostatam includens.

Calamites Mougeotii SCHIMP. et MOUG. Monogr. pl. foss. p. 58. t. 29. f. 1. 2.

In arenaceo versicolore ad Soulz-les-Bains Galliae (SCHIMPER et MOUGEOT).

Haec species maxime singularis a *Calamite Mougeotii* BRONGN. valde differt.

5. *Calamites verticillatus* LINDL. et HUTT.

LINDL. et HUTT. Foss. flor. II. n. 189.

Tab. VIII. fig. 1.

C. caule cylindrico, articulationibus circ. 2—3 centm. remotis, costis planis, $1\frac{1}{2}$ —2 mill. latis, cicatricibus ramorum in ipsa articulatione numerosissimis, confertis verticillatis, inter se aequalibus, verticillis superioribus approximatis.

In arenaceo lithanthracum ad Hound Hill prope Pontefract Angliae (PHILLIPS); ad Waldenburg Silesiae (GÖPPERT) nec non ad Zankerode prope Dresden (Mus. Vindob.).

6. *Calamites Cistii* BRONGN.

BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 129. t. 20. — STERNB. Vers. II. p. 50.

C. caule cylindraceo, articulationibus 4—8 centm. distantibus, articulis subaequilongis, costis striaeformibus, angustis, convexis, $\frac{1}{2}$ —1 mill. latis, sulcis rotundatis, tuberculis globosis, minimis, cicatricibus ramorum globosis, verticillatis; ramis cylindricis, articulatis, articulis abbreviatis, longitudinaliter striatis, striis tererrimis, approximatis vix $\frac{1}{2}$ mill. distantibus, ramulis gracilibus, filiformibus, articulatis; foliis lineari-lanceolatis, acuminatis, arcuatis uninerviis, verticillatis, verticillis patentibus; spicis verticillatis, sessilibus, cylindricis, 5—9 centm. long., gracilibus; bracteis spicarum fructiferarum lineari-subulatis; sporocarpis in bractearum axillis sessilibus, ellipticis.

Calamites affinis GUTB. Abdr. p. 27. t. 2. f. 11.

Calamites tuberculosus GUTB. Abdr. p. 24. t. 2. f. 4.

Asterophyllites equisetiformis BRONGN. Prodr. p. 159. — Germ. Isis 1837. h. 5. t. 2. f. 3. Petref. strat. lithanthr. p. 17. t. 8.

Casuarinites equisetiformis SCHLOTH. Fl. d. Vorw. t. 1. f. 1. t. 2. f. 3. Petref. p. 397.

Bornia equisetiformis STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 28. t. 19.

Asterophyllites diffusa BRONGN. Prodr. p. 159.

Bechera diffusa STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 30. t. 19. f. 3.

Asterophyllites foliosa LINDL. et HUTT. Foss. flor. I. t. 25.

In anthracite Pœnsylvaniæ ad Wilkesbarre (CIST); in schisto lithanthracum Silesiæ frequens (Mus. Prag. et Vindob.); ad Jarrow Angliæ (LINDL. et HUTT.); ad Saarbrück (STERNBERG), Mannebach et Wettin (GERMAR) Germaniæ; ad Radnitz Bohemiæ; in schisto anthracitem concomitante ad Puy-Ricard prope Lamure Galliæ (ÉLIE DE BEAUMONT) nec non alpium Col du Chardonnet et Stangalpe (UNGER).

7. *Calamites tenuifolius* ETTINGSH.

C. caule... ramis gracilibus articulatis, tenuissime striatis, striis approximatis, articulis $1\frac{1}{2}$ —3 centm. longis vel brevioribus, foliis verticillatis, subulatis vel filiformibus; verticillis in ramis junioribus densissime foliatis, internodiis abbreviatis multo longioribus; spicis cylindricis, terminalibus pedicellatis, axillaribus gracillimis, sessilibus. circ. 3—4 centm. long., 2— $2\frac{1}{2}$ mill. latis, bracteis lineari-subulatis, cuspidatis; sporocarpis in bractearum axillis sessilibus, minutis, globosis.

Volkmania polystachya STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 30. t. 51. f. 1. II. p. 52.

Asterophyllites rigida BRONGN. Prodr. p. 154.

Bruckmannia rigida STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 29. t. 19. f. 1.

Schlotheimia dubia STERNB. Vers. I. fasc. 2. p. 32.

Asterophyllites comosa LINDL. et HUTT. Foss. flor. II. t. 108.

Asterophyllites longifolia BRONGN. Prodr. p. 159. — LINDL. et HUTT. Foss. flor. I. t. 18.

Bruckmannia longifolia STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 29. t. 58. f. 1.

Asterophyllites tenuifolia BRONGN. Prodr. p. 159.

Bruckmannia tenuifolia STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 29. t. 19. f. 2.

Schlotheimia tenuifolia STERNB. Vers. I. fasc. 2. p. 28. 32. 4. fasc. p. 29. — SCHLOTH. Flor. d. Vorw. t. 1. 1. 2.

In schisto lithanthracum ad Jarrow (LINDL. et HUTT.) et Newcastle (Mus. Vindob.) Angliæ; ad Eschweiler Germaniæ (STERNBERG); ad Schatzlar, Minitz et Radnitz Bohemiæ (Mus. Prag. et Vindob.); ad Waldenburg Silesiæ, nec non in comit. Zemplinense Hungariæ (Mus. Vindob.).

8. *Calamites sessilis* ETTINGSH.

C. caule... ramis cylindricis, articulatis, articulis subaequilongis, circ. 2 cent. long., longitudinaliter crebre striatis, foliis verticillatis, crebris, anguste linearibus, patentibus, rectis; spicis sessilibus, patentibus, linearibus, cylindræis, circ. 5 centm. longis et 7 mill. latis, utrinque acutis; bracteis verticillatis, creberrimis, lineari-setaceis, patentibus, arcuatis, internodio duplo longioribus.

Volkmania sessilis PRESL. Verhandl. d. Gesellsch. d. Vaterl. Mus. in Böhmen 1838. p. 28. t. 2. f. 1.

In formatione lithanthracum. Locus nat. ignotus.

9. *Calamites nodosus* SCHLOTH.

SCHLOTH. Petref. p. 401. t. 20. f. 3. — BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 133. t. 23. f. 2—4. — GUTH. Abdr. p. 23. t. 3. f. 1.

C. caule cylindrico, ad articulationes saepe in flato, nodoso articulis 6—8 centm. longis, costis inaequalibus, 1—2 mill. latis.

Calamites tumidus STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 26. II. p. 47.

In schisto lithanthracum ad Newcastle (LOHS) Angliae ad Lardin et Mazubrier Galliae (BRARD), et ad Waldenburg Silesiae.

10. *Calamites Lehmannianus* GÖPP.

Göpp. Uebers. p. 198. Foss. Flor. d. m. Jura p. 143. t. 1. f. 3.

C. caulo articulato, articulis subremotis tumescentibus, in statu juniori tuberculatis, costis ad articulationes subconniventibus, convexis, striatis, sulcis planis, tenuissimistriatis.

In schisto calcareo formationis jurassicae ad Wilmsdorf prope Landsberg Silesiae (GÖPPERT).

11. *Calamites jubatus* ETTINGSH.

C. caule..., ramis cylindricis, articulatis articulis approximatis striatis, striis circ. 1 mill. distantibus, foliis verticillatis, filiformibus, longissimis, confertis.

Asterophyllites jubata LINDL. et HUTTON. Foss. flor. II. t. 133. — UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 65.

In schisto lithanthracum ad Jarrow Angliae (LINDL. et HUTT.).

12. *Calamites radiatus* BRONGN.

BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 122., t. 26. f. 1. 2.

C. caule..., cylindrico, diametro pollicis aequali, articulationibus aequi-distantibus, articulis elevate multicostatis, costis 1 mill. latoribus, vaginis stellatim patentibus multidis, laciniis inaequalibus lanceolatis, acuminatis.

Equisetites radiatus STERNB. VEG. II. p. 15.

In formatione transitionis vallis S. Amarini ad Rhenum superiorem (BRONGNIART).

Species dubiae.

13. *Calamites Lindleyi* STERNB.

STERNB. VEG. II. p. 48.

C. caule cylindraco, ad articulationes constricto, articulis abbreviatis, 13—20 mill. longis, costatis, costis; — 1 mill. distantibus; ramis verticillatis, articulatis, multi-striatis, basi angustatis, articulis inaequalibus, infimis obconicis, approximatis.

Calamites Mougeotii LINDL. et HUTT. Foss. flor. I. t. 22.

In saxo arenaceo lithanthracum ad Edinburg Scotiae (LINDL. et HUTT.).

14. *Calamites grandis* ETTINGSH.

C. caule..., ramis cylindricis, crassis, articulatis, laevibus, ramulis crebris verticillatis, rectis, tenuiter striatis; articulis ramorum ramulorumque elongatis; foliis verticillatis, subulatis patentibus.

Asterophyllites grandis LINDL. et HUTT. Foss. flor. I. t. 17. — UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 64.

In schisto lithanthracum ad Felling Angliae (LINDL. et HUTT.).

15. *Calamites Mougeotii* BRONGN.

BRONGN. Annal. des sc. nat. tom. XV. p. 438. Hist. végét. foss. I. p. 137. t. 25. f. 4. 5. — STERNB. Vers. II. p. 48.

C. caule cylindrico, sesquipollicem crasso, ad articulationes circ. 4 centm. distantes constricto, articulis subaequilongis, costis $1\frac{1}{2}$ —2 mill. latis, convexis, cicatricibus ramorum solitariis aut verticillatis, tuberculis nullis.

In arenaceo versicolore ad Marmoutier Galliae (BRONGNIART).

16. *Calamites arenaceus* BRONGN.

BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 138. t. 23. f. 1. t. 25. f. 1. t. 26. f. 3—5. Annal. des sc. nat. t. XV. p. 437. — W. P. SCHIMP. et MOUG. Monogr. pl. foss. p. 58. t. 28. t. 29. f. 3.

C. caule cylindrico, articulis elongatis, saepe inaequilatis, costis basi latioribus, usque $2\frac{1}{2}$ mill. remotis, superiori parte angustissimis, convexis, ramis caule multo angustioribus, ad articulationes saepius tumidis.

Calamites arenaceus minor. JÄGER Pflanzenverstein, p. 37. t. 3. f. 4—7. t. 6. f. 1.

Calamites Jaegeri STERNB. Vers. II. p. 21.

Calamites arenaceus JÄGER I. c. t. 1. f. 1—3. t. 2. f. 1—3.

Calamites remotus BRONGN. Annal. des sc. nat. tom. XV. p. 438. Hist. végét. foss. p. 136. t. 25. f. 2.

Calamites elongatus STERNB. Vers. II. p. 49.

In psamite versicolore per totum tractum montium Vogesiorum (SCHIMP. et MOUG.); ad Wasselone et Marmoutier Galliae (BRONGNIART) et in arenaceo constructionum Keuper dicto, ad Stuttgartiam Würtembergiae (JAEGER); ad Kirchberg et Gaming Austriae (HAIDINGER, UNGER).

17. *Calamites Hoerensis* HIS.

HIS. Leth. succ. Suppl. 2. p. 5. t. 33. f. 8. — UNC. Gen. et spec. plant. foss. p. 50.

C. caule cylindrico, articulis elongatis, 3—4 centim. longis, 3 centim. latis; costis circit. 1 mill. crassis, striaeformibus crebris.

In saxo arenaceo formationis jurassicae ad Hoer Scaniae (HISINGER).

18. *Calamites inaequalis* LINDL. et HUTT.

LINDL. et HUTT. Foss. flor. III n. 196. — UNC. gen. et spec. plant. foss. p. 48.

C. caule cylindraco articulado, ad articulationes inflato, articulis circ. 3—5 centm. longis, costis inaequalibus, convexis, cicatricibus ramorum rotundatis solitariis verticillatisque, tuberculis nullis.

In arenaceo lithanthracum ad Sheffield Angliae (LINDL. et HUTT.).

Ad *Calamitem Voltzä* BRONGN. referendum esse videtur.

19. *Calamites dubius* ARTIS.

ARTIS Antedil. t. 13. — BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 130. t. 18. f. 1. 3.

C. caule cylindraco, articulis duos pollices longis, costis parallelis latitudine

lineam vix aequantibus, in caule cortice destituto convexis laevibus, sulcis bistriatis, tuberculis ovatis.

In schisto lithanthracum ad Leabrook Angliae (ARTIS); ad Zanesville Americae septentrionalis (GRANGER); in anthracite alpium Stangalpe Stiriae (UNGER) et ad Waldenburg Silesiae (GÖPPERT).

20. *Calamites approximatus* BRONGN.

BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 133. t. 15. f. 7. 8. t. 26. — GUTB. Abdr. p. 23. t. 2. f. 3. — LINDL. et HUTT. Foss. flor. I. 77. III. 216.

C. caule cylindraceo, articulis abbreviatis, ad articulationes parum constricto, costis convexis, tuberculis globosis crebris vel deficientibus.

Calamites approximatus ARTIS Antedil. Phytol. t. 4.

Calamites approximatus STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 26. II. p. 47.

Calamites approximatus SCHLOTH. Petref. p. 400. t. 20. f. 2.

Calamites ornatus STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 27. II. p. 49.

In schisto lithanthracum ad Alais (DECANDOLLE), St. Etienne (BRONGNIART) Galliae; ad Newcastle (LOHS) et Kilkenny (Mus. Dublin.) Angliae (BRONGNIART); ad Ekaterineburg Russiae (BRONGNIART); ad Mauch-Chunk Pennsylvaniae (CIST); ad Wettin Germaniae (GERMAR); ad Radnitz Bohemiae (Mus. Vindob. et Prag.); ad Charlottenbrunn Silesiae (GÖPPERT), nec non in anthracite alpium Col du Chardinet et Stangalpe (UNGER).

Species indesecriptae vel non satis notae.

21. *Calamites remotus* SCHLOTH.

SCHLOTH. Petref. p. 399.

C. articulis tripollicaribus, costis elevatis, approximatis, lineam latis.

Calamitas distans STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 26. II. p. 47.

In arenaceo lithanthracum Germaniae; ad Charlottenbrunn Silesiae nec non ad Radnitz Bohemiae (STERNBERG).

22. *Calamites difformis* STERNB.

STERNB. Vers. I. p. 27.

C. nodis plurimis sine ordine in caudice sparsis, striis inter nodos laevissimis.

Calamites gibbosa SCHLOTH. Nachr. z. Petref. p. 400.

In schisto lithanthracum ad Mannebach Germaniae; ad Waldenburg Silesiae (STERNBERG).

23. *Calamites obliquus* GÖPP.

GÖPP. Neues Jahrb. für Min. 1847. p. 682.

In formatione transitionis ad Hausdorf Comit. Glazensis (GÖPPERT).

24. *Calamites dilatatus* GÖPP.

Göpp. Neues Jahrb. für Min. 1847. p. 682.

In formatione transitionis ad Falkenberg, Sabschütz, Berndau, Mocker, Lasitz prope Leoschütz, Tost et Altwasser Silesiae (GÖPPERT).

25. *Calamites remotissimus* GÖPP.

Göpp. Neues Jahrb. f. Min. 1847. p. 682.

In formatione transitionis ad Ritterwitz prope Leobschütz et ad Landshut Silesiae (GÖPPERT).

26. *Calumites tenuissimus* GÖPP.

Göpp. Neues Jahrb. f. Min. 1847. p. 682.

In formatione transitionis ad Graecium prope Oppaviam (GÖPPERT).

27. *Calamites variolatus* GÖPP.

Göpp. Neues Jahrb. für Min. 1847. p. 682.

In formatione transitionis ad Landshut Silesiae (GÖPPERT).

28. *Calamites transitionis* GÖPP.

Göpp. Uebers. der foss. Flora. Schles. p. 197.

In formatione transitionis ad Landshut et Altwasser, Bögendorf, Falkenberg, Leobschütz, Tost Silesiae (GÖPPERT).

29. *Calamites stigmarioides* GÖPP.

Göpp. Uebers. p. 197.

In formatione transitionis ad Landshut et Berndau Silesiae (GÖPPERT).

30. *Calamites tuberculatus* GÖPP.

Göpp. Uebers. p. 198.

Cum priore ad Landshut Silesiae (GÖPPERT).

31. *Calamites liaso-Keuperianus* FR. BRAUN.

FR. BRAUN. Flora 1847. N. 6. p. 83.

In marga in durata formationis Keuper dictae, ad Veitlahm Bavariae (FR. BRAUN).

32. *Calamites Durri* GUTB.

Göpp. in BRONN. Gesch. d. Nat. p. 11.

Terra carbonifera.

33. *Calamites Petzholdti* GUTB.

Göpp. in BRONN. Gesch. d. Nat. p. 11.

Terra carbonifera.

34. *Calamites tripartitus* GUTB.

GÖPP. in BRONN Gesch. d. Nat. p. 12.

Terra carbonifera.**35. *Calamites hottonioides*.***Volkmania hottonioides* GÖPP. Uebers. p. 200.**In calcareo bituminoso ad Ottendorf Silesiae (GÖPPERT).****36. *Calamites erosus*.***Volkmania erosa* BRONN. Prodr. p. 160.**Terra carbonifera.****37. *Calamites elegans*.***Asterophyllites elegans* GÖPP. Neues Jahrb. für Min. 1847. p. 682.**In formatione transitionis ad Hausdorf comit. Glazensis (GÖPPERT).****An ad Calamitem obliquum GÖPP. pertinet?****38. *Calamites Roemeri*.***Asterophyllites Roemeri* GÖPP. Neues Jahrb. f. Min. 1847. p. 628.**In formatione transitionis ad Ramelsberg mont. Hercin. (GÖPPERT).****39. *Calamites pygmaeus*.***Asterophyllites pygmaea* BRONN. Prodr. p. 159.**In formatione transitionis.****40. *Calamites hippuroides*.***Asterophyllites hippuroides* BRONN. Prodr. p. 159.**Terra carbonifera.****41. *Calamites Neumannianus*.***Asterophyllites Neumanniana* GÖPP. Uebers. p. 199.**• In calcareo bituminoso ad Tunschendorf comitatus Glazensis, ad Albendorf Silesiae (GÖPPERT).****42. *Calamites ceratophylloides*.***Asterophyllites ceratophylloides* GÖPP. in BRONN Gesch. d. Nat. p. 13.**Terra carbonifera.****43. *Calamites Lindleyanus*.***Asterophyllites Lindleyana* GÖPP. in BRONN Gesch. d. Nat. p. 13.**Terra carbonifera.****44. *Calamites Artisi*.***Asterophyllites Artisi* GÖPP. in BRONN Gesch. d. Nat. p. 13.**Terra carbonifera.**

II. Calamitea COTTA.

Trunci arborei, striati. Corpus lignosum medullam largam includens, e vasis duplicis ordinis radiatim alternantibus conflatum, majoribus scalariformibus, minoribus prosenchymatosis. Radii medullares copiosi. Meatus pneumatici solummodo in confinis medullae.

COTTA Dendrol. p. 68. — UNGER: Ueber die Struktur d. Calamiten. Amtl. Bericht d. Versamml. d. Naturf. p. 117; Gen. et spec. plant. foss. p. 53.

1. Calamitea striata COTTA.

COTTA Dendrol. p. 68. t. 11. f. 1—4. t. 15. f. 1. 2.

C. caule cylindrico longitudinaliter striato, horizontaliter transciso strias latas radiatas clarius et obscurius coloratas ostendente.

Calamites Cottaanus STERNB. Vers. II. p. 51.

In psamite rubro agri Chemnicensis Saxoniae.

2. Calamitea bistriata COTTA.

COTTA Dendrol. p. 70. t. 15. f. 3. 4.

C. caule horizontaliter transciso strias radiatas alternas tenuiores et crassiores ostendente.

Calamites bistriatus STERNB. Vers. II. p. 51.

In eodem loco cum priore.

3. Calamitea lineata COTTA.

COTTA Dendrol. p. 72. t. 16. f. 1.

C. caule horizontaliter transciso strias radiatas aequales tenues creberrimas usque ad centrum excurrentes ostendente.

Calamites lineatus STERNB. Vers. II. p. 51.

In eodem loco cum prioribus.

4. Calamitea concentrica COTTA.

COTTA Dendrol. p. 72. t. 16. f. 2—5.

C. caule horizontaliter transciso strias radiatas aequales tenues creberrimas et lineas concentricas annuliformes ostendente.

Calamites concentricus STERNB. Vers. II. p. 51.

In eodem loco cum prioribus.

III. Huttonia STERNB.

Caulis cylindricus, articulatus, articuli irregulariter elevato-striati, apice tuberculis rotundatis instructi. Folia ignota. Spicae pedunculatae, pedunculo pollicari et ultra

longiore, basi incrassato, in statu juniore squamis verticillatis adpressis, apice in acumen contractis, demum expansis. Sporocarpia in axillis squamarum sessilia.

STERNB. in Verhandl. d. Gesellsch. d. vaterl. Museums in Böhmen 1837. p. 69.

1. *Huttonia spicata* STERNB.

STERNB. l. c. t. 1. f. 1—4.

H. caule cylindrico, ad articulationes subnodoso, articulis aequilongis, abbreviatis (circ. 1 centm. long.) irregulariter elevato-striatis; tuberculis rotundatis fere 2 mill. in diam., verticillatis, creberrimis, approximatis; spicis cylindricis, crassis, 8—20 centm. longis; squamis 12 et pluribus in verticillo, late-lanceolato-acuminatis, aristatis, rhachi proportione spicae crassa.

In schisto lithanthracum inferiore ad Radnitz Bohemiae (Mus. Prag.).

IV. *Annularia* STERNB.

Caulis gracilis articulatus, ramis oppositis infrafoliaribus. Folia verticillata, plana, saepius obtusa, uninervia inaequilonga, basi coalita. Fructificatio verticillato-spicata. Sporocarpia in axillis squamarum biserialia.

STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 31. — BRONGN. Prodr. p. 155. — UNC. Gen. et spec. plant. foss. p. 67.

1. *Annularia minuta* BRONGN.

BRONGN. Prodr. p. 155.

Tab. X. Fig. 1. 2.

A. caule tenuissime striato articulado, verticillato-ramoso, ramis iterum verticillatis, foliis verticillatis, lanceolatis v. lineari-lanceolatis, acuminatis, verticillis minutis, numerosis.

Bechera dubia STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 30. t. 51. f. 3.

Asterophyllites galioides LINDL. et HUTT. FOSS. FLOR. I. t. 25. f. 2.

Annularia floribunda STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 31. — BRONGN. Prodr. p. 156.

Annularia radiata STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 31.

Asterophyllites radiatus BRONGN. Class. végét. foss. p. 35. t. 2. f. 7. Prodr. p. 156.

In schisto lithanthracum ad Schwadowitz et Waldenburg Silesiae (Mus. Prag.); ad Saarbrück Germaniae (STERNBERG); ad Radnitz Bohemiae (Mus. Vindob.); in Anglia.

2. *Annularia fertilis* STERNB.

STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 31. t. 51. f. 2. — BRONGN. Prodr. p. 156.

A. caule diffuso-ramoso, verticillis 9—16 phyllis, foliis obovatis vel lanceolatis, obtusiusculis in basem angustatis.

Asterophyllites Brardii BRONGN. p. 159.

Annularia reflexa STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 31. t. 19. f. 5.

Annularia spinulosa STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 31. t. 19. f. 4. — BRONGN. Prodr. p. 156.

Annularia sphenophylloides UNC. Gen. et spec. plant. foss. p. 68.

Galium sphenophylloides ZENNER Neues Jahrb. für Min. 1833. p. 398. t. 5.

In schisto lithanthracum ad Koenigsgruben Silesiae; ad Saarbrück Germaniae (STERNBERG); ad Zittau Saxoniae (ZENKER); ad Schatzlar Bohemiae (Mus. Vindob.); in anthracite alpium Stangalpe Stiriae (UNGER).

3. *Annularia longifolia* BRONGN.

BRONGN. Prodr. p. 156. — GERM. Petref. p. 29, t. 9.

A. bipedalis et ultra, caule pollicem crasso, ramis oppositis divaricatis, foliis verticillatis uninerviis, linearibus, acuminatis, verticillis pleiophyllis (circiter 24); spicis articulatis striatis; sporocarpis ovatis, biserialibus intra verticillos squamarum.

Casuarinites stellatus SCHLOTH. Nachtr. z. Petref. p. 397. Flora d. Vorw. t. 4, f. 4.

Bornia stellata STERNB. Vers. I. p. 28.

Asterophyllites equisetiformis LINDL. et HUTT. Foss. flor. II. t. 124.

In schisto lithanthracum ad Kammerberg, Mannebach et Wettinum Germaniae (GERMAR); ad Cygneam Saxoniae; ad Waldenburg Silesiae (GÖPPER); ad Radnitz Bohemiae (Mus. Prag.); ad Reschitza Hungariae (Mus. Vindob.).

Species indescriptae.

4. *Annularia brevifolia* PRODR.

Prodr. p. 156.

In schisto lithanthracum. Locus nat. ignotus.

5. *Annularia carinata* GUTB.

GUTB. in BRONGN. Gesch. d. Nat. p. 14.

Terra carbonifera.

6. *Annularia filiformis* GUTB.

GUTB. in BRONGN. Gesch. d. Nat. p. 14.

Terra carbonifera.

V. *Sphenophyllum* BRONGN.

Caules simplices v. remoti, articulati striati, foliis vestiti verticillatis senis, octonidis, duodenisve, cuneiformibus, integris, lobatis vel partitis. Spicae cylindricae, laterales vel terminales, squamis verticillatis.

BRONGN. Classif. t. 2, f. 8. — Prodr. p. 68. — ENG. Gen. et spec. plant. foss. p. 69.

1. *Sphenophyllum Schlottheimii*.

S. caulibus cylindricis articulatis, ramosis usque ad 1½ centm. in diametro metentibus; articulis striatis subaequilongis, elongatis vel approximatis; foliis cuneatis majoribus et minoribus, nunc integris apice truncatis vel obtuse rotundatis, crenatis nunc bilobis, lobis dentatis, nunc bifidis vel trifidis, lobis linearibus angustis, nervis tenuissimis, rectis vix dichotomis, confertis, apicem versus radiantibus; verticillis 4—6—8—9—12-phyllis, spicis cylindricis gracilibus linearibus, articulatis, circa 6 centm. longis,

5 mill. latis, terminalibus et lateralibus, bracteatis, bracteis lineari-subulatis, verticillatis, internodio vix superantibus, verticillis approximatis.

α. *genuinum*.

Varietas foliis apice obtuse rotundatis, crenatis vel denticulatis, verticillis 6—9-phyllis.

Sphenophyllum Schlotheimii BRONGN. Prodr. p. 68.

Sphenophyllites Schlotheimii GERM. Petref. p. 13. t. 6. f. 2. 1.

Palmacites verticillatus SCHLOTH. Nachtr. z. Petref. p. 396. Flor. d. Vorw. t. 2. f. 1.

β. *dentatum*.

Var. foliis apice truncatis, crenatis vel inciso-dentatis, verticillis 4—12-phyllis.

Sphenophyllum dentatum BRONGN. Prodr. p. 68.

Rotularia pusilla STERNB. VERS. I. fasc. 4. p. 32. t. 26. f. 4. a. b.

γ. *varians*.

Var. foliis in eodem ramo duplicis v. triplicis generis, tum apice integris, obtusissime rotundatis vel truncatis crenulatis, tum angustatis apice inciso-dentatis vel multifissis, tum apice bifidis vel trifidis, lobis linearibus; verticillis 4—6-phyllis.

Sphenophyllites Schlotheimii GERM. Petref. t. 6. f. 1. 2.

δ. *saxifragae-folium*.

Var. foliis elongatis angustis, apice acute dentatis vel multifissis, verticillis hexaphyllis vel enneaphyllis.

Sphenophyllum saxifragifolium GÖPP. in BRONN Gesch. d. Nat. p. 14.

Sphenophyllites saxifragae-folius GERM. Petref. p. 17. t. 7. f. 1.

ε. *longifolium*.

Var. foliis elongatis angustatis, ultra 3 centm. longis, apice fissis vel bifidis, lobis latiusculis cuneiformibus dentatis, verticillis hexaphyllis.

Sphenophyllum longifolium UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 70.

Sphenophyllites longifolius GERM. Petref. p. 17. t. 7. f. 2. Isis 1837. p. 425. t. 2. f. 2.

ζ. *fimbriatum*.

Var. foliis profunde lobatis, lobis flabellatim expansis, apice incisus vel inciso-dentatis, laciniis lineari-lanceolatis, acuminatis, verticillis 6—9-phyllis.

Sphenophyllum fimbriatum BRONGN. Prodr. p. 68.

Rotularia saxifragae-folia STERNB. VERS. I. fasc. 4. p. 32. t. 55. f. 4.

Rotularia polyphylla STERNB. VERS. I. fasc. 1. p. 32. t. 50. f. 1.

η. *angustifolium*.

Var. ramis gracilibus fere filiformibus; foliis elongatis angustis, apice bifidis vel trifidis, lobis linearibus, acuminatis; verticillis 4—6-phyllis; spicis terminalibus et lateralibus.

Sphenophyllum angustifolium UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 71.

Sphenophyllites angustifolius GERM. Petref. p. 18. t. 7. f. 4—8.

Sphenophyllum bifidum GURB. GÖPP. in BRONN, Gesch. d. Nat. p. 14.

3. *erosum*.

Var. ramis elongatis, gracilibus, fere filiformibus; foliis apice integris, truncatis vel obtuse rotundatis, denticulatis, verticillis 6—8-phyllis.

Sphenophyllum erosum LINDL. et HUTT. FOSS. flor. 1. n. 13. p. 41.

In schisto lithanthracum: var. α ad Wettinum Germaniae (GERMAR) et ad Cygneam Saxoniae (Mus. Vindob.); — var. β ad Swina prope Radnitz Bohemiae, ad Zankerode prope Dresden (Mus. Vindob.); — var. γ ad Wettinum nec non ad Radnitz Bohemiae (Mus. Vindob. et Prag.); — var. δ cum priori ad Wettinum nec non ad Reschitza Hungariae (Mus. Vindob.); — var. ε ad Wettinum et Lobejunum (GERMAR); var. ζ ad Swina prope Radnitz, ad Paulton in Sommerset Angliae (STERNBERG); — var. η cum prioribus ad Wettinum Germaniae, ad Radnitz Bohemiae (Mus. Vindob. et Prag.), nec non ad Reschitza Hungariae (Mus. Vindob.); var. ϑ ad Jarrow Angliae (LINDL. et HUTT.).

2. *Sphenophyllum emarginatum* BRONGN.

BRONGN. Prodr. p. 63.

S. caulibus articulatis, ramosis, usque ad 1 centm. latis, articulis subaequilongis circ. 6—11 mill. long., elevato-striatis; foliis cuneatis, integris, apice obtuse rotundatis vel emarginatis, crenatis, nervis flabellato-dichotomis, magis discretis; verticillis hexaphyllis; spicis axillaribus cylindricis, 4 centm. long., 7 mill. latis; lineari-lanceolatis, utrinque acutis, bracteatis, bracteis verticillatis, creberrimis linearibus, erecto-adpressis, e basi latiore acuminato-angustatis, internodio plus duplo longioribus, verticillis valde approximatis.

Rotularia marsileaeifolia STERNB. VEVS. I. fasc. 4. p. 32. PRESL Verhandl. d. Gesellsch. d. vaterländ. Museums 1838. p. 27. t. 2. f. 2—4.

Sphenophyllites emarginatus BRONGN. Class. d. végét. foss. p. 34. t. 2. f. 8.

Sphenophyllum Schlotheimii LINDL. et HUTT. l. n. 27.

In schisto lithanthracum ad Swina Bohemiae; in Somerset Angliae (LINDL. et HUTT.); in Pensylvania (STERNBERG).

3. *Sphenophyllum oblongifolium* UNG.

UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 70.

S. foliis oblongis, ovatis, basi cuneatis, apice incis, lobis triangularibus, acutis divergentibus, verticillis hexaphyllis.

Sphenophyllites oblongifolius GERM. Petref. p. 18. t. 7. f. 3.

Rotularia oblongifolia GERM. Nova Acta. A. N. C. XV. 2. p. 225. t. 65. f. 3.

In schisto lithanthracum ad Wettin et Altenkirchen Germaniae (GERMAR).

4. *Sphenophyllum dichotomum* UNG.

UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 71.

S. foliis cuneiformibus, apice fissis, lobis furcatis; verticillis decaphyllis.

Rotularia dichotoma GERM. et KAULF. Nova Acta A. N. C. XV. 2. p. 226. t. 66. f. 4.

In schisto lithanthracum ad St. Ingbertum Germaniae (GERMAR), nec non ad Radnitz Bohemiae (Mus. Vindob.).

5. *Sphenophyllum radiatum* UNG.

UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 71.

S. foliis cuneiformibus, apice truncatis, integerrimis; verticillis foliorum contiguis senis vel octonis.

Vertebraria radiata F. ROYLE Illustr. of the Botany Vol. I. p. 29. t. 2. f. 5. 6. 7.

Sphenophyllum indicum UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 71.

Vertebraria indica F. ROYLE illustr. of the Botany. Vol. I. p. 29. t. 2. f. 1. 2. 3.

In schisto lithanthracum ad Ranigunj et Chinnakooree Indiae orientalis.

6. *Sphenophyllum trixygia* UNG.

UNG. l. c. p. 71.

S. foliis obovato-oblongis, integerrimis, nervosis, nervis furcatis parallelis, verticillis foliorum senis per paria approximatis, paribus oppositis aequalibus tertio minore.

Trizyia speciosa F. ROYLE l. c. p. 29. t. 2. f. 8.

In schisto lithanthracum cum prioribus.

7. *Sphenophyllum australe* UNG.

UNG. l. c. p. 72.

S. foliis cuneiformibus apice truncatis, integerrimis, concentrice plicatis, nervis furcatis laeviter impressis; verticillis foliorum contiguis constanter octonis.

Vertebraria australis M'COY in Ann. et magaz. of nat. hist. 1847. p. 147. t. 9. f. 1.

In schisto lithanthracum ad Mulubimba Novae Hollandiae australis.

Species indescriptae.

8. *Sphenophyllum truncatum* BRONGN.

BRONGN. Prodr. p. 68.

In schisto lithanthracum.

9. *Sphenophyllum dissectum* BRONGN.

BRONGN. Prodr. p. 68.

In schisto lithanthracum.

VI. *Hippurites* LINDL. et HUTT.

Caulis crassus simplex v. ramosus, articulatus, laevis v. transverse rugosus. Folia verticillata, libera v. vaginae spuriae insidentia.

LINDL. et HUTT. Foss. flor. II, p. 89, UNG. — Gen. et spec. plant. foss. p. 72.

1. *Hippurites longifolia* LINDL. et HUTT.

LINDL. et HUTT. FOSS. flor. III. p. 190. 191.

H. caule cylindrico, articulato, laevi, ramoso, articulis 2—4 centm. longis; foliis verticillatis, linearibus, strictis, rectis; internodio longioribus.

In schisto lithanthracum ad Newcastle Angliae (LINDL. et HUTT.).

2. *Hippurites gigantea* LINDL. et HUTT.

LINDL. et HUTT. FOSS. flor. II. n. 114.

H. caule cylindrico, foliis verticillatis, numerosissimis, lanceolato-subulatis, internodio multo brevioribus, vaginae spuriae insidentibus.

Asterophyllites gigantea Göpp. Uebers. p. 199.

In schisto lithanthracum ad Jarrow Angliae (LINDL. et HUTT.); ad Waldenburg Silesiae (GÖPPERT), inque montibus donetzkiensibus Rossiae (MURCHISON).

VII. *Phyllothea* BRONGN.

Caulis debilis rectus articulatus, simplex vel ramosus. Rami supra nodos orientes in eodem plano haud dispositi, superficie laevi vel longitudinaliter sulcata. Articuli vaginati, vaginis in laminas lineares, nervo medio plus minusve distincto percursas, longe productis. Inflorescentia extremitate ramulorum quorundam verticillata.

BRONGN. Prodr. p. 152. — LINDL. et HUTT. FOSS. flor. II. p. 89. — M'COY in Ann. et magaz. of nat. hist. 1847. p. 155. — UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 72.

1. *Phyllothea australis* BRONGN.

BRONGN. Prodr. p. 152. — M'COY l. c. p. 155. — UNG. l. c. p. 73.

P. caule simplici laevi vel substriato, vaginis angustis internodiis brevioribus, laminis angustis his duplo longioribus enerviis.

Terra carbonifera ad Hawkesbury-river, prope Port Jackson Novae Hollandiae.

2. *Phyllothea ramosa* M'COY.

M'COY l. c. p. 156. t. 11. f. 2. 3. — UNG. l. c. p. 73.

P. caule ramoso laevi vel substriato; vaginis internodiis dimidio brevioribus, laminis tenuibus, linearibus, planis, vaginas duplo vel triplo superantibus.

In schisto lithanthracum ad Mulubimba Novae Hollandiae australis.

3. *Phyllothea Hookeri* M'COY.

M'COY l. c. p. 157. t. 11. f. 4—7. — UNG. l. c. p. 73.

P. caule simplici, longitudinaliter grosse striato et sulcato, vaginis latis, laxis subinfundibuliformibus, internodiorum longitudine, caulem omnino obtegentibus, laminis vagina duplo longioribus, crassis angustis, nervo prominente valido percursis.

In arenaceo lithanthracum ad Clark's Hill; in schisto ad Arowa et Mulubimba Novae Hollandiae australis.

*Calamiteae dubiae.*VIII. *Bornia* STERNB. et GÖPP.

Caulis arborescens cylindricus, articulatus, longitudinaliter striatus, striis in articulis incrassatis non interruptis.

STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 28. — GÖPP. Uebers. p. 198. — UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 54.

1. *Bornia scrobiculata* STERNB.

STERNB. l. c. p. 28.

Calamites scrobiculatus SCHLOTTH. Nachr. z. Petref. p. 208. t. 2. f. 4.

In schisto lithanthracum in Helvetia ad Turicum (SCHLOTHEIM); in formatione transitionis ad Landshut Silesiae (GÖPPERT).

IX. *Bockschia* GÖPP.

Caulis arborescens, cylindricus, articulatus (?) longitudinaliter sulcatus.

GÖPP. Syst. fil. foss. p. 176 — UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 54.

1. *Bockschia flabellata* GÖPP.

GÖPP. l. c. t. 1. 2.

In schisto lithanthracum ad Waldenburg Silesiae (GÖPPERT).

X. *Anarthrocanna* GÖPP.

Caulis cylindraceus exarticulatus, verticillatim ramosus, cortice longitudinaliter costato.

GÖPP. Descr. des végét. foss. p. 1. — UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 54.

1. *Anarthrocanna deliquescens* GÖPP.

GÖPP. l. c. t. 25. f. 1. 2.

In argilla jaspoide formationis transitionis Sibiriae.

B. *Equisetaceae.*

Plantae herbaceae, caulibus articulatis, verticillato-ramosis. Fasciculi vasorum in parenchymate annulatim dispositi, medullam lacunosam a cortice, ductibus pneumaticis permeato, parum separantes. Epidermis firma. Vasa annularia. Verticilli foliorum in vaginam connati. Fructificatio terminalis, strobilacea. Receptacula peltatim stipitata, verticillata.

UNGER in ENDLICHER Gen. plant. Suppl. II. p. 2. — UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 55.

1. *Equisetites* STERNB.

Spica terminalis, globosa, vaginae supremae semi-immersa, demum libera, squamosa, squamis valde approximatis, peltatis pentagonis, concaviusculis subverticillatis. Caulis fistulosus (?) cylindricus, laevis vel longitudinaliter striatus, articulatus, articulis

saepius introrsum concentrice striatis, simplex vel sub articulis ramosus, vaginatus, vaginis sub articulationibus insertis, erectis, multidentatis vel multifidis.

STERNB. VERS. II. p. 13.

1. *Equisetites columnaris* STERNB.

STERNB. VERS. II. p. 45.

E. caule erecto, simplici, laevi, cylindrico, articulado, diametro 4—10 centm. aequali; articulis basin versus approximatis, superioribus elongatis; vaginis cauli arcte applicatis, multidentatis, dentibus brevibus, ovato-triangularibus, in acumine filiformi, caduco productis.

Equisetum columnare BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 115. t. 13.

Oncylgonatum carbonarium KOENIG Trans. geol. soc. Ser. 2. Tom. II. p. 300. t. 32. f. 1—6.

Equisetites acutus STERNB. VERS. II. p. 107. t. 31. f. 3.

Equisetites caspidatus STERNB. VERS. II. p. 106. t. 31. f. 1. 2. 5. 8.

Equisetites Bronnii STERNB. VERS. II. p. 46. t. 24. f. 1—5. t. 30. f. 4. 6.

Equisetum arenaceum BRONN Jahrb. 1829. n. 5. p. 75.

Calamites arenaceus minor JAEGER Pflanzenverst. p. 37. t. 4. f. 5. 9.

Equisetites Schoenleinii STERNB. VERS. II. p. 45.

Equisetites Sinsheimicus STERNB. VERS. II. p. 107. t. 30. f. 2.

Equisetites areolatus STERNB. VERS. II. p. 107. t. 30. f. 3.

Equisetites conicus STERNB. II. p. 44. t. 16. f. 8. t. 30. f. 1.

Equisetites elongatus STERNB. VERS. II. p. 107. t. 31. f. 7.

Equisetites austriacus UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 57. — Sammlg. d. Johanneums z. Gratz.

In arenaceo Keuper regni Württembergensis ad Sinsheim et Coburgum; nec non in variis locis Franconiae; in stratis liasinis Angliae, Scotiae, Pedemontii; ad Gaming, Wienerbrückl. Kirchberg et Waidhofen Austriae.

2. *Equisetites Gamingianus* ETTINGSH.

Tab. VIII. Fig. 2.

E. caule erecto, simplici, cylindrico, striato, articulado, diametro circ. 4 centm. aequali; articulationibus circ. 5 centm. distantibus, articulis basin versus angustioribus, vaginis adpressis, multifidis, laciniis linearibus, angustissimis, $\frac{1}{2}$ — 1 mill. latis.

In schisto calcareo liasino ad Gaming Austriae.

3. *Equisetites Ungeri* ETTINGSH.

Tab. VIII. Fig. 3. 4.

E. caule cylindrico, laevi, articulado, diametro 2—3 centm. aequali; articulis elongatis, vaginis adpressis, multifidis, lanceolato-linearibus, acutis, 2 mill. latis.

In schisto margaceo liasino ad Hinterholz prope Waidhofen; in stratis liaso-keuperianis ad Reschitzta Hungariae (Mus. Vindob.).

4. *Equisetites Münsteri* STERNB.

STERNB. VERS. II. p. 43. t. 16. f. 1—5. 9. t. 30. f. 1.

Tab. IX. Fig. 1—4.

E. caule elevato-striato, florifero juniore acuminato, vaginis imbricatis vestito, flo-

rente apice incrassato, articulis apice radiatim striatis, vaginis inferioribus distantibus, laciniis vaginalium superiorum linearibus acuminatis, inferiorum triangularibus acutis dentiformibus; spica globosa, vaginae supremae semiimmersa demum libera, squamis valde approximatis pentagonis concaviusculis.

Equisetites Hoeflianus STERNB. VERS. II. p. 106. t. 32. f. 9. 11.

In arenaceo Keuper dicto ad pedem montis Steigerwald prope Kastel-Neuess et Abschwind, nec non ad Strullendorf et Höfe prope Bambergam et ad Veitlahm (MÜNSTER, STERNBERG); in stratis liaso-keuperianis ad Theta prope Baruthum (Mus. Vindob.):

5. *Equisetites Lindackerianus* STERNB.

STERNB. VERS. II. p. 107. t. 36. f. 1—8.

E. caule . . . , articulis decorticatis, duos pollices circiter crassis et longis, cylindricis. structuram internam Equisetacearum viventium offerentibus.

In formatione Rothes Todtliedendes dicto. Locus ignotus.

6. *Equisetites Brongniarti* UNG.

UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 58.

E. giganteus arborescens, caule 30 mill. fere in diametro metiente, ramoso, ramis e vaginae basi egredientibus, tenuioribus, brevius articulatis, vaginis in caule sat productis, in ramis brevioribus multidentatis, dentibus obtusis, brevibus.

Equisetum Brongniarti SCHUMPER et MOUGEOT Monogr. pl. foss. p. 53. t. 27.

In psamite versicolore ad Soultz-les-Bains prope Argentoratum Galliae (SCHUMPER et MOUGEOT).

7. *Equisetites lateralis* UNG.

UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 59. — GÜPP. in BRONN Gesch. d. Nat. p. 13.

E. caule, cylindrico diametro 10—12 mill., striato, ad articulationes subnodoso, articulis circ. 4 centm. longis, vaginis? multifidis, laciniis linearibus, discis infra articulos elevatis, radiato-striatis.

Equisetum laterale LINDLEY et HUTTON. FOSS. BRIT. III. n. 186.

In arenaceo et schisto oolithico inferiore ad Haiburne Wyke et White Nab prope Scarborough Angliae (LINDLEY et HUTTON).

8. *Equisetites lingulatus* GERM.

GERM. Petref. p. 27. t. 10. — UNG. Gen. et spec. pl. foss. p. 59.

E. caule cylindrico, bi-tripollicari laevi vel subtiliter ruguloso, articulis circiter 5—6 centm. longis, sulco transverso lato, varie effigurato interceptis; vaginis articulo brevioribus, multifidis, laciniis lanceolatis acuminatis.

In schisto lithanthracum ad Wettinum et Lobejunum.

9. *Equisetites infundibuliformis* STERNB.

STERNB. Vers. II. p. 44.

E. caule tereti elevate multistriato, articulis brevibus, vaginis infundibuliformibus, articulo longioribus, multifidis, laciniis triangularibus, acutissimis.

Equisetum infundibuliforme BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 119. L. 12. f. 14—16. — BRONN in BISCHOFF pl. crypt. I. p. 52. t. 4. f. 1. 1. — GERM. Petref. p. 28. t. 10. f. — GUTH. Verst. p. 30. t. 36. f. 5. 6.

In schisto lithanthracum ad Saarbrück (BRONGNIART), nec non ad Cygneam (GUTBIER) et Wettinum (GERMAR) Germaniae.

10. *Equisetites Roessertianus* STERNB.

STERNB. Vers. II. p. 106. t. 32. f. 12, a. 2. 3. 12. 12. d.

E. caule cylindraco, multiarticulato, vaginis crebris, imbricatis, multifidis, dentibus lanceolatis, acuminatis, marginatis, apice patentibus, supremis in haemisphaeram conniventibus.

In arenaceo Keuper dicto ad Hoeßl prope Bambergam (MÜNSTER).

11. *Equisetites moniliformis* STERNB.

STERNB. Vers. II. p. 106. t. 32. f. 12 a. 1. 12 b.

E. caule moniliformi constricto et dilatato, dilatationibus subglobosis, vaginis creberrimis, imbricatis, multifidis, suprema maxima globosa apice aperta, dentibus ovatis, acutis, marginatis, adpressis, supremae lanceolatis acuminatis conniventibus.

In arenaceo Keuperiano ad Hoeßl prope Bambergam (MÜNSTER).

Verosimiliter ad priorem referendus.

12. *Equisetites Burchardti* DUNK.

DUNK. Monogr. p. 2. L. 5. f. 5.

E. caule tenui herbaceo, diametro circ. 3—4 mill., ramoso, articulato, striato, articulis 12—14 mill. long., striis fere 1 mill. distantibus, vaginis tumidis, lanceolato-dentatis.

In formatione Weald dicta ad Harrel prope Bückeburg (DUNKER), nec non ad Zoëbing Austriae.

13. *Equisetites Phillipsii* DUNK.

DUNK. Monogr. p. 2. t. 1. f. 2.

E. caule cylindraco multistriato, diametro circ. 2½ centm., striis obsolete, aequidistantibus, articulis approximatis circ. 15—16 mill. long. vaginis brevibus, adpressis, multidentatis, dentibus abbreviatis, subaequalibus ovatis, obtusis.

In formatione Weald dicto ad Oberkirchen Germaniae (DUNKER).

14. *Equisetites stellifolius* UNG.

UNG. Gen. et spec. foss. p. 60. — Göpp. in BRONN Gesch. d. Nat. p. 13.

E. caule erecto, simplici, laevi, cylindrico, diametro 3—4 centm. subaequali, ramulis

10 — 12, ad articulationes caulis verticillatis, stelliformibus, articulis versus basin vix distinctis, superne approximatis, vaginis indistinctis.

Equisetum stellifolium HARRL. medic. et phys. Researches p. 390. f. 4.

In lithanthrace bituminosa Pennsylvaniae.

15. *Equisetites Roessneri* ETTINGSH.

E. caule erecto, diametro 7—8 mill., articulo, tenuissime striato, ramoso; articulis vaginatis, 2—3 centm. longis, articulationibus subnodosis; ramis tenuibus, numerosis, verticillatis; vaginis circ. 7 mill. longis, laxiusculis, multidentatis, dentibus ovato-lanceolatis, acutis.

In schisto margaceo formationis miocenicae ad Radobojum Croatiae.

16. *Equisetites Braunii* UNG.

UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 60.

E. caule simplici, subcompresso, diametro 4—8 mill., articulo, tenuiter striato, articulis inaequilongis, vaginatis, vaginis brevibus adpressis, denticulatis.

Equisetum Braunii UNG. Synops. p. 29.

Equisetum palustre? ALEX. BRAUN Manuscr.

In schisto calcareo argillaceo formationis miocenicae ad Oeningen (ALEX. BRAUN), ad Parschlug et Kindberg Stiriae (UNGER), nec non ad Pisting Austriae.

17. *Equisetites repens* ETTINGSH.

E. rhizomate repente, diametro circ. 3 mill., articulo, ramoso; ramis gracilibus, simplicibus, adscendentibus, diametro $1\frac{1}{2}$ —2 mill., articulatis; articulis tenuiter striatis, vaginatis, inferioribus abbreviatis, circ. 2 mill. long. superioribus usque ad 11 mill. long.; vaginis 2—5 mill. longis, laxiusculis, multifissis, laciniis capillaribus.

In schisto margaceo formationis eocenicae ad Sagor Carnioliae.

Species dubiae.

18. *Equisetites mirabilis* STERNB.

STERNB. VEIS. II. p. 45. l. 1. f. 1.

E. caule pollicem crasso et crassiore cylindrico, articulis brevissimis multicostatis, costis convexis, sulcis profundis trigonis, vaginis brevibus, in adversa parte oblongo-ovovatis, in reversa ovatis obtusis.

In schisto lithanthracum ad Waldenburg Silesiae (STERNBERG), nec non ad Radnitz Bohemiae (Mus. Prag.).

19. *Equisetites Meriani* STERNB.

STERNB. Vers. II. p. 46.

E. caule striato, diametro 4—5 mill., ramoso, ramulis 12—16 ad articulationes caulis verticillatis, patentibus; vaginis vix distinctis, cauli applicatis.

Equisetum Meriani BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 115. t. 12. f. 13.

In creta variegata ad Neuwelt prope Basileam (MERIAN).

20. *Equisetites dubius* STERNB.

STERNB. Vers. II. p. 45.

E. caule... ramulis elongatis cylindricis, diametro 2—3 mill., sex—octo-striatis, articulatis (?); articulis abbreviatis, vaginis articulo brevioribus, imbricatis sex—octo-dentatis, dentibus triangularibus, acutis.

Equisetum dubium BRONGN. Hist. végét. foss. I. p. 120. t. 12. f. 17. 18.

In arenaceo lithanthracum ad Wigan Angliae (BRONGNIART), ad Waldenburg Silesiae (GÖPPERT).

21. *Equisetites bilinicus* UNG.

UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 60.

E. caule erecto, simplici, cylindrico, obtuso, laevi, 7—9 mill. lato, articulis brevibus, vaginis (?), multifidis, laciniis obtusis.

Equisetum bilinicum UNG. Chloris protog. p. 124. t. 37. f. 8. 9.

In argilla plastica ad Bilinum Bohemiae (UNGER).

Species indescriptae.**22. *Equisetites attenuatus* F. BRAUN.**

F. BRAUN Flora 1847. N. 6. p. 82.

In marga indurata formationis Keuperianae ad Veitlahm Bavariae.

23. *Equisetites Lyelli* MONT.

GÖPP. in BRONN Gesch. d. Nat. p. 13.

In formatione Weald dicto. Locus ignotus.

Equisetaceae dubiae.**II. *Columnaria* STERNB.**

Caudex arborescens striatus, apice coarctatus simulque acuminatus, internodiis cicatricibusque nullis.

STERNB. Vers. I. fasc. 4. p. 25.

1. *Columnaria intacta* STERNB.

STERNB. VCSB. I. fasc. 4. p. 25.

**C. caudice arborescente striato sex pedes alto, tres polices in diametro lato.
In schisto lithanthracum ad Eschweiler Germaniae (STERNBERG).**

2. *Columnaria lanceolata* STERNB.

STERNB. VCSB. I. fasc. 4. p. 25.

**C. caudice striato duos pedes longo, duos pollices in diametro lato in utroque latere
(compressionis) rotundato.**

Palmacites lanceolatus SCHLOTH. Nachtr. z. Petref. p. 394.

In schisto lithanthracum ad Wettinum Germaniae (SCHLOTHEIM).

3. *Columnaria fistulosa* STERNB.

STERNB. VCSB. I. fasc. 4. p. 25.

C. caudice bipollicari, subtereti, tenuissime striato, fistuloso, lapidescente.

Calamites inermis SCHLOTH. Nachtr. z. Petref. p. 401.

In arenaceo lithanthracum ad Welleschweiler Germaniae (SCHLOTHEIM).

III. Ueber einige neue und interessante *Taeniopteris*-Arten aus den Sammlungen des kais. Hof-Mineralien-Cabinetes und der k. k. geologischen Reichsanstalt.

***Taeniopteris asplenioides* ETTINGSH.**

Tab. XI. Fig. 1. 2. Tab. XII. Fig. 1.

T. fronde pinnatisecta, late lanceolata vel elliptica, acuta, costa mediana crassissima; pinnis subaequilatis. oblongis; nervulis sub angulo acuto exorientibus, 3—5 mill. inter se remotis. saepe furcatis, basi simplicibus, arcuatis, parallelis, marginem versus horizontalibus; soris punctiformibus totam frondis faciem inferiorem occupantibus.

In schisto calcareo-margaceo formationis Lias ad Hinterholz et ad Waidhofen Austriae.

Eine höchst interessante neue Art, die ihrem Habitus nach an mehrere tropische Formen des Geschlechtes *Asplenium*, namentlich an *Asplenium Nidus* L. erinnert.

Der einfach fiederschnittige Wedel war wie sich aus der Grössenabnahme sowie aus der Richtung der Fieder entnehmen lässt, im Umriss breit lanzettförmig, und falls Fig. 2 den oberen Theil eines solchen Wedels darstellt, von einer beträchtlichen Länge. Die in der Dicke nur allmähig abnehmende Spindel zeigt eine Mächtigkeit, wie wir diess bei Farnkräutern mit einfachem Laube selten, z. B. bei einigen *Asplenien* finden.

Die Fieder sind länglich, gleichbreit, nur im Bruchstück erhalten. Ihre ganze Länge mag etwa das Doppelte betragen haben und die Beschaffenheit des Abdruckes deutet auf eine mehr membranartige, als lederige Textur.

Besonders charakteristische Verhältnisse bietet die sehr erkennbare Nervation. Die secundären Nerven entspringen meist unter ziemlich spitzen Winkeln aus der Hauptspindel, gehen unter einander parallel in weiten Bogen zu beiden Seiten nach auswärts, wo sie im weiteren Verlaufe horizontal werden, oder doch gegen den primären Nerven unter wenig spitzen Winkeln geneigt sind. Eine Ausnahme hievon machen nur die obersten Wedelfieder, wie diess bei Fig. 2 ersichtlich ist. Bei ihrem Ursprunge sind sie stets einfach und theilen sich erst weiterhin gabelförmig. Auffallend ist die ungleiche und im Allgemeinen bedeutende Distanz der secundären Nerven von einander, welche an mehreren Stellen über 5 Mill. beträgt. Eine sehr analoge Nervation zeigen unter den gegenwärtig lebenden Farren mehrere Arten von *Acrostichum*, *Nipholobus* und *Asplenium*; unter den fossilen einzig und allein das Geschlecht *Taeniopteris*.

Weniger Anhaltspuncte als Nervation und Tracht geben für die Geschlechtsbestimmung unseres Fossils Spuren von Fructification, welche an dem unstreitig hierher gehörigen, jedoch von einer andern Localität, bei Waidhofen selbst stammenden Wedelfragmente Fig. 2 sich erhalten haben. Die Sporangienhäufchen, die, vielleicht noch nicht zur völligen Entwicklung gelangt, punctförmig erscheinen, sind gleichförmig über die ganze untere Fläche des Laubes verbreitet. Diess ist eine Bildung, welche allerdings auf die Fructification von *Acrostichum* zunächst hinweist; jedoch tritt die Sonderung der einzelnen Sporangienhäufchen zu deutlich hervor, als dass man auf dieses artenreiche Geschlecht schliessen dürfte.

Wir hielten es daher für am meisten passend, unsere Form dem fossilen Geschlechte *Taeniopteris* einzureihen, wo sich derselben zwei in der geologischen Altersfolge weit von einander abstehende Arten: *Taeniopteris Schönleinii* aus dem Keuper und *Taeniopteris Ungerii* aus der mittleren Tertiärformation, welchen wir sogleich eine nähere Betrachtung widmen wollen, zunächst anschliessen.

Taeniopteris Ungerii ETTINGSH.

T. fronde pinnata, pinnis breviter petiolatis vel subsessilibus, late-linearibus vel ellipticis, integerrimis; nervo medio crasso, subrigido, versus apicem pinnae resoluto. nervis secundariis e nervo primario sub angulo acuto egredientibus, approximatis, basi dichotomis, ramulis simplicibus, rectis, parallelis.

Taeniopteris eocenica UNG. Gen. et spec. plant. foss. p. 527.

In schisto margaceo formationis miocenicae ad Radoboium Croatiae.

Diese nicht minder interessante Art aus der fossilen Flora von Radoboj wurde von Hrn. Prof. UNGER entdeckt und am a. O. beschrieben. Bei der Untersuchung der ge-

dachten Localität, welche ich im Auftrage der k. k. geologischen Reichsanstalt vorgenommen, war ich so glücklich, einige vollständigere Exemplare als die im Johanneum zu Gratz befindlichen, nach welchen Hr. Prof. UNGER seine Beschreibung entworfen, zu gewinnen, und glaube nach diesen die Charakterisirung der Art in nicht unwesentlichen Punkten modificirt zu haben.

Die Wedel sind, so viel sich aus den Bruchstücken derselben mit ziemlicher Sicherheit entnehmen lässt, nicht einfach sondern gefiedert und der Art der Erhaltung nach von zarter Beschaffenheit. Die mehr längliche Fieder zeigt einen verbreitert erscheinenden Mittelnerven, der sich gegen das Ende derselben gänzlich in die secundäre Nervation auflöst. Die sehr genäherten secundären Nerven werden gleich über ihren Ursprung aus dem Mittelnerven gabeltheilig. Die geraden und ohne weitere Theilung verlaufenden Aeste sind gegen denselben unter Winkeln von 45 — 50° geneigt.

Die angeführten Merkmale unterscheiden diese Art hinlänglich sowohl von der Vorhergehenden als von der Folgenden, zwischen welchen beiden in ihren Typus nicht weit von einander stehenden Arten sie die Mitte hält.

Statt der von UNGER gewählten Species-Benennung, welche auf die gewiss unhaltbare Ansicht, dass die Tertiärschichten von Radoboj der Eocenformation zugehören, hinweist, schlage ich die obige, dem um die Flora der Vorwelt so verdienten Entdecker dieser Art zu Ehren, vor. Abbildungen von derselben werden in meinen „Tertiärfloren der österreichischen Monarchie“ erscheinen.

Taeniopteris Schoenleinii ETINGSH.

Tab. XII. Fig. 2.

T. fronde pinnata, pinnis alternis, distantibus, subobliquis; basi contractis sessilibus, partim adnatis, oblongo-linearibus, obtusis, pollice latioribus, integris, margine undulatis; pinnarum nervo medio crasso, e rhachide frondis primaria sub angulo 45° egrediente, apicem pinnae versus resoluta; nervis secundariis basi oblique nascentibus, simplicibus et furcatis, parallelis, in parte mediana pinnae arcuatis, in superiore rectis. Fructificatio marginalis continua.

Pecopteris macrophylla BRONGS. Hist. végét. foss. I. p. 362. t. 136.

Crepidopteris Schoenleinii STERNB. Vers. II. p. 419.

In arenaceo Keuper dicto ad Herbipolim (SCHOENLEIN, STERNBERG) nec non ad Stuttgart (Mus. Vindob.).

Dieser charakteristische Farn zeigt sich wohl entschieden allen Typen fremd, welche uns in dem Geschlechte *Pecopteris* entgentreten. und wir können hier die Ansicht BRONGNIART's, welche denselben dem genannten Geschlechte zuzählt, keineswegs theilen. STERNBERG stellt diese Art unter ein eigenes Geschlecht *Crepidopteris*, welches er den Adianten der Jetztwelt anreihete, und gründet diese gewiss treffendere Bestimmung auf die eigenthümlichen randständigen, unter sich vereinigt fortlaufenden

Sporangienhäufchen. Da jedoch durch den Habitus und insbesondere durch die Nervation, welche wir an dieser Form gewahren, eine unläugbare Verwandtschaft mit *Taeniopteris* sich ausspricht, wo überdiess eine ganz ähnliche randständige Fructification bei einer Art (*Taeniopteris Münsteri* Göpp.) vorkommt, so haben wir dasselbe diesem Geschlechte einverleibt. Die hier abgebildeten Bruchstücke stellen obere Endtheile von Fiedern dar, welche wir an der von BRONGNIART gegebenen Abbildung vermissen.

Taeniopteris Haidingeri ETTINGSH.

Tab. XIII. Fig. 1.

T. fronde pinnata, pinnis suboppositis, approximatis, aequalibus, sessilibus, oblongo-linearibus, denticulatis, circit. 3 centm. latis; pinnarum nervo mediano crasso, e rachide frondis primaria sub angulo recto egrediente, nervis secundariis sub angulo subrecto exeuntibus, creberrimis, simplicibus, arcuatis, parallelis, versus marginem horizontalibus.

In schisto calcareo margaceo formationis Lias ad Waidhofen Austriae.

Eine sehr ausgezeichnete Art, welche sich durch das Merkmal des gefiederten Wedels an den Typus der Vorigen anschliesst; aber in der Beschaffenheit und Form der Fieder selbst sehr viele Verwandtschaft mit *Taeniopteris marantacea* STERNB. zeigt. Diese sind fast sitzend oder kurz gestielt, länglich und breitlineal, etwas gezähnt, im Ganzen schmaler und kleiner als die Wedel von *T. marantacea*. Eigenthümlich ist die Tracht dieser Art, hauptsächlich durch die wagerechte Stellung der Fieder zur Wedelspindel hervorgerufen, ein Verhältniss, das wir auch bei mehreren Angiopteris-Arten der Jetztwelt, z. B. bei *Angiopteris angustifolia* PRESL. und *A. commutata* PRESL., mit welchen unser Fossil viele Aehnlichkeit zeigt, wieder finden. Die secundären Nerven sind sehr genähert und meist einfach, fast unter rechtem Winkel abgehend. Durch dieses Merkmal unterscheiden sich die Fieder der *Taeniopteris Haidingeri* sehr gut von den Wedeln der *T. marantacea*, von welchen letzteren wir ein charakteristisches Fragment zur Vergleichung beigegeben haben und im Nachfolgenden betrachten wollen.

Ich widme die Art dem um die Geologie und die verwandten Wissenschaften hochverdienten Herrn Direktor HAIDINGER, der zuerst für die sehr interessanten Localitäten fossiler Pflanzen im Gebiete des Wienersandsteins die Aufmerksamkeit der Forscher erweckte.

Taeniopteris marantacea STERNB.

STERNB. VERS. II. p. 139.

Tab. XII. Fig. 3.

T. fronde simplici, oblonga, integra, costa crassissima, nervulis sub angulo acuto exorientibus, basi furcatis, arcuatim adscendentibus, parallelis, versus marginem horizontalibus.

In saxo arenaceo Keuper dicto prope Stuttgart; ad Gaildorf prope Heilbronn Württembergiae; ad Neuwelt prope Basileam et ad Herbipolim.

Das hier abgebildete Wedelfragment zeichnet sich von allen bisher dargestellten Bruchstücken dieser Art durch die auffallend geringe Dicke seiner Mittelrippe, ferner durch die an der Basis der secundären Nerven deutlich hervortretende Gabeltheilung aus. Es erweist sich somit ohne Zweifel als ein oberes Endstück des bei dieser Species einfachen Wedels.

Taeniopteris Eckhardi GERMAR.

GERMAR die Verstein. des Mansfelder Kupferschiefers. — KURTZE Commentatio de petref. p. 31. t. 3. f. 2.

Tab. XIII. Fig. 2. 3.

T. fronde simplici, 8—16 centim. longa, 12—28 mill. lata, oblongo-elliptica vel lanceolata acuminata, integerrimo, basi truncata; costa mediana crassiuscula, nervulis sub angulo acuto exorientibus creberrimis, tenuissimis, simplicibus, rectis, parallelis.

In schisto calcareo cuprifero comitatus Mansfeldiensis.

Von dieser interessanten Art existirte bis jetzt nur eine einzige, mangelhafte Abbildung. Durch die unter sehr spitzen Winkeln ausgehenden, sehr feinen, einfachen und nur wenig gekrümmten Secundärnerven, sowie durch die lanzettliche, zugespitzte Form des Wedels ist sie sehr ausgezeichnet.

Zur Erklärung der Tafeln.

Taf. VIII.

- Fig. 1. *Calamites verticillatus* LINDL. et HUTT.; von der Zankerode bei Dresden. Aus der Sammlung des kais. Hof-Mineralien-Kabinetes.
- Fig. 2. *Equisetites gamingianus* ETTINGSH. nebst Fragmenten von *Pterophyllum longifolium* BRONGN.; von Gaming in Oberösterreich. Aus der genannten Sammlung.
- Fig. 3. *Equisetites Ungerii* ETTINGSH.; von Hinterholz bei Waidhofen in Oberösterreich. Aus der genannten Sammlung.
- Fig. 4. Scheidenfragmente von *Equisetites Ungerii* nebst einem in Entwicklung begriffenen, noch spiralig eingerollten Farrnwedel; von derselben Lokalität. Aus der Sammlung des kais. Hof-Mineralien-Kabinetes.

Taf. IX.

- Fig. 1 — 3. *Equisetites Münsteri* STERNB.; aus der Umgebung von Bamberg in Baiern. Aus der genannten Sammlung.
- Fig. 4. *Equisetites Münsteri* STERNB. Forma *E. Hoeffianus* STERNB.; von der Theta bei Baireuth in Baiern. Aus der Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

Taf. X.

- Fig. 1 — 2. *Annularia minuta* BRONGN.; von Radnitz in Böhmen. Fig. 1 aus der Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt. Fig. 2 aus der Sammlung des kais. Hof-Mineralien-Kabinetes.

Taf. XI.

- Fig. 1 — 2. *Taeniopteris asplenioides* ETTINGSH.; von Hinterholz bei Waidhofen in Oberösterreich. Aus der Sammlung des kais. Hof-Mineralien-Kabinetes.

Taf. XII.

- Fig. 1. *Taeniopteris asplenioides* ETTINGSH. in Fructification; von Waidhofen in Oberösterreich. A. Ein Stück derselben schwach vergrößert. Aus der genannten Sammlung.
- Fig. 2. *Taeniopteris Schönleinii* ETTINGSH.; aus der Umgebung von Stuttgart. In der genannten Sammlung.
- Fig. 3. *Taeniopteris marantacea* STERNB.; aus der Umgebung von Stuttgart. Aus der Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

Taf. XIII.

- Fig. 1. *Taeniopteris Haidingeri* ETTINGSH.; von Waidhofen in Oberösterreich. A. Stück einer Fieder schwach vergrößert. Aus der Sammlung des kais. Hof-Mineralien-Kabinetes.
- Fig. 2 — 3. *Taeniopteris Eckhardti* GERMAR.; aus dem Mansfelder Kupferschiefer. B. Ein Stück des Wedels schwach vergrößert. In der genannten Sammlung.
-



Fig. 1. Calamites verticillatus Lindl et Hult.

Fig. 2. Equisetites gänigianus Ett.

Fig. 3. 4. Equisetites Ungeri Ett.



Fig. 1-4. Equisetites Münsteri Sternb.

1.



2.



Fig. 1 u. 2. *Annularia minuta* Brong.



Fig. 1 u. 2. *Taeniopteris asplenioides* Ett.



Fig.1.Taeniopteris asplenioides Ett.

Fig.2.Taeniopteris Schoenleinii Ett.

Fig.3.Taeniopteris marantacea Sternb.



Fig. 1. *Taeniopteris Haidingeri* Ett.

Fig. 2 u. 3. *Taeniopteris Eckardti* Germar.

I. Ueber erraticches Diluvium bei Pitten.

Von

A. v. Morlot.

Mit zwei lithographirten Tafeln.

Mitgetheilt am 15. September 1849 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Herr WERDMÜLLER v. ELGG, Besitzer der Papierfabrik in Pitten, entdeckte in seiner Nähe vollkommen eckige Blöcke jenes, seines gefleckten Ansehens wegen in Wien unter dem Namen Forellenstein bekannten Granulits, der bei Gloggnitz vorkommt und sonst in der ganzen Gegend nirgends zu finden ist. Es waren also dieses erratiche Blöcke im eigentlichen Sinne des Wortes, was im Wienerbecken bisher nicht bekannt, sehr auffallen musste. Dadurch aufmerksam gemacht, stellte der Verfasser bei Gelegenheit eines Besuches in Herrn v. WERDMÜLLER's gastlichem Hause die Untersuchungen an, deren Resultate gegenwärtige Abhandlung veranlassen.

Pitten liegt südlich von Wienerneustadt, genau eine Meile *) östlich von Neunkirchen und am Rande des Wienerbeckens, hier steigt das einförmige Glimmerschiefergebirge mit untergeordneten Lagern von körnigem Kalk aus der gerade 1000' über dem Meer **) gelegenen Alluvialebene V Tafel I Fig. 5 und 6, um sich zu einem 400' bis 600' hohen, unregelmässigen Plateau ***) zu erheben, und erst weiter nach Süden allmählig gegen den Wechsel an der Grenze von Steiermark anzusteigen. Man darf sich dabei nicht etwa eine regelmässige, schiefe Fläche denken, denn das Plateau bei Pitten hält nicht lange an und es folgt dann ein von zahlreichen Thälern eingeschnittenes Hügelland. Die Culminationspunkte, welche das nach Pitten abfallende Gebirge erreicht, liegen ziemlich in einem Achtelskreise, den man von Pitten mit einem Radius von 4 Meilen von Westen, wo der Schneeberg liegt, nach Südwesten bis zum Wechsel ziehen würde.

Die hierher gehörenden Höhen sind von Westen nach Südwesten schreitend:

<i>Schneeberg</i>	6567'
<i>Wachsriegel (Raxalpe)</i>	5962'

*) Oesterreichisches Mass, welches hier allein gebraucht wird. Es gehen 14,3 österr. Meilen auf einen Grad und es ist 1 Wienerfuss = 0.3161 Meter.

**) Nach trigonometrischer Bestimmung durch Hrn. v. WERDMÜLLER.

***) Dieses Plateau erhebt sich in seiner Mitte zu einem Hügel, dem Weissjockel, der 1768' über dem Meer liegt.

<i>Gschaidstittel</i> zwischen Kappellen und Prein . . .	3400'
<i>Sömmeringsattel</i> , höchster Punkt der Strasse . . .	3066'
<i>Sonnenwendstein</i>	4819'
<i>Grosser Pfuff</i>	4807'
<i>Wechselberg</i>	5497'
„ <i>Strasse</i> bei Mönichkirchen, Wasserscheide, an der Grenze von Steiermark	2994'

Südlich und südöstlich von Pitten erniedrigt sich das Gebirge, denn es senkt sich hier der Ostabhang der Alpen in die ungarische Ebene, doch bildet ein nach Norden hervorspringender Sporn das bis 2155' hohe Rosaliengebirg eine Meile im Osten von Pitten.

Einige hier allenfalls noch zu berücksichtigende Höhen sind:

<i>Wien</i> , Pflaster des Stephansplatzes	526'
<i>Wienerneustadt</i> , Bahnhof	831'
<i>Neunkirchen</i> , Bahnhof	1147'
<i>Gloggnitz</i> , Bahnhof	1366'
<i>Schottwien</i> , Kirchenpflaster	1770'
<i>Reichenau</i> , Garten von Oberdorfer's Wirthshaus . . .	1503'
<i>Kirchberg</i> , Wirthshaus	1738'
„ <i>Sattel</i> nach Kranichberg	2548'
<i>Aspang</i> , Kirchenpflaster	1527'
<i>Rosalienkapelle</i>	2155'

Es ist auch nicht ohne Interesse hervorzuheben, dass die Miocenformation, welche sich sonst etwas mehr in der Tiefe hält, am Rande des Wienerbeckens, z. B. bei Reichenau, am Fuss des Wachriegels und am Rosaliengebirg eine äusserste Meereshöhe von 1600' erreicht. Auf dem 1400 bis 1600' hohen Plateau von Pitten findet man meist nur loses tertiäres Gerölle von Quarz und von Alpenkalk an der Oberfläche des Glimmerschiefers zerstreut, wo aber eine kleine Mulde erscheint, da tritt auch gleich die Miocenformation in zusammenhängenden Massen von Conglomerat und Sandstein auf.

Nach diesen topographischen Angaben, welche sich an die geologische Uebersichtskarte der nordöstlichen Alpen (Wien 1847) anknüpfen, und die nur deshalb gemacht worden sind, weil sie bei der Beurtheilung der zu erörternden Erscheinungen von Bedeutung sind, gehen wir zu letzteren über.

Es stellt die Figur 5, welche übrigens nicht nach der Natur, sondern bloss aus der Erinnerung, nur um die Hauptsache anzudeuten, gezeichnet ist, den Absturz des Plateau von Pitten dar, wie dieses sich gegen Norden gekehrt in die Alluvialebene V des Pittenbaches senkt und von Pitten bis etwas über Walpersbach gegen den Fuss des Rosaliengebirges, beiläufig eine Stunde weit, von Löss begleitet zu verfolgen ist. Gegen Westen, wo der Absturz steiler ist, da zeigt sich der Löss nicht zusammen-

hängend, sondern nur stellenweise am Fuss des Abhanges schildförmig angelagert, beiläufig wie es die Figur 8 zeigt, eine Art von kleinen, unregelmässigen, schwach gezeichneten, schiefen Terrassen bildend, und eine Höhe von etwa 100' über der Thal-sole erreichend. Gegen Osten, wo der Gebirgsabhang sich viel sanfter verflacht, da liegt der Löss über grössere Strecken zusammenhängend verbreitet, übrigens ziemlich wie so eben geschildert, nur gleichfalls sich sanft ins Thal verflächend, denn der frühere Anschein von Terrassen rührte doch nur von einem Abrutschen und Abwittern am steilen vorderen Theile her. Die Mächtigkeit, die der Löss erlangt, mag leicht bis 50 und 60' betragen, in den tiefen Hohlwegen und Wasserrissen, die ihn so häufig durchschneiden, so wie in den Ziegelgruben sieht man ihn in einer senkrechten Mächtigkeit von 15 bis 30' entblösst. Er zeigt sich da, wie gewöhnlich, ganz gleichförmig in Farbe sowohl wie in Korn und ebenfalls wie gewöhnlich höchst massig und schichtungslos. In der Gegend von Walpersbach enthält er an einer Stelle die unregelmässigen durch ihre Form an die Kreideseuersteine erinnernden bis faustgrossen kalkigen Concretionen, die im Innern Sprünge zeigen, nach Art der Septarien, nur unausgefüllt. Der Löss wird zwar viel zu Ziegeln verwendet, ist aber doch stark kalkig und braust mit Salzsäure heftig.

Die zu seiner Charakteristik so wichtigen Schnecken enthält er häufig, aber fleckenweise, indem sie unregelmässig an einer Stelle zahlreich sind, an einer andern fehlen. Die ziemlich reichlich gesammelten Exemplare wurden mit freundlicher Hilfe von Herrn PARREYSS, und mit Zugrundelegung seiner ausgezeichneten Sammlung von Land- und Süsswasserschnecken bestimmt; sie ergaben sich als die folgenden Arten von Landschnecken:

Helix striata (?) (DRAP.).

„ *hispida* (MÜLL.).

„ *arbustorum* (LIN.).

Succinea oblonga (DRAP.).

Pupa muscorum (LAM.).

Clausilia dubia (DRAP.).

Bei weitem am zahlreichsten (bei 150 Exemplare) ist die erstgenannte Art, die zwar mit der lebenden *Helix striata* gut übereinstimmt, und selbst Spuren des Farbbandes zeigt, die aber doch ALEXANDER BRAUN's *Helix diluvii* seyn könnte*), da er erwähnt, dass diese der lebenden *H. costulata* (ZIEGL.) am nächsten stehe, nur dass sie grösser und dass der letzte Umgang mehr erweitert sey, was auf die eingesammelten Exemplare passt. Da die *Helix striata* in der Umgegend von Wien, z. B. auf der Türkenschanze vorkömmt, so könnte man vermuthen, die eingesammelten Exemplare seyen

*) Als Anhaltspunkt ist hier genommen worden die vortreffliche nur noch zu kurze Notiz über den Löss von ALEXANDER BRAUN in LEONHARD und BRONN's Jahrbuch für 1847. Seite 52.

eigentlich nicht aus dem Löss selbst, sondern nur an seiner Oberfläche gefunden worden, und es seyen nur die calcinirten Schalen recenter Thiere; allein abgesehen davon, dass beim Einsammeln dieser Umstand berücksichtigt wurde, um nur Echtes zu erhalten, sind alle Exemplare gleich calcinirt und sehen gerade so aus wie die andern unzweifelhaft echten Lössspecies, unter denen die *Helix arbustorum* ein noch viel deutlicheres farbiges Band zeigt. Dann ist die Mundöffnung dieser *H. striata* eben so weit, oft bis auf einen halben Umgang mit festem Löss angefüllt als bei den andern Arten, und was noch beweist, dass der Löss hier nicht durch den Regen in die Schale hineingeschwemmt wurde, ist, dass hinten wo er aufhört, und den innern Raum der Windung leer lässt, er wie bei den andern Arten etwas concretionirt und an die Schalenwand angekittet ist. In Ermanglung also einer eigenen neuen Beobachtung an Ort und Stelle, welche jeden Zweifel lösen könnte, aber gegenwärtig nicht ausführbar ist, müssen wir annehmen, dass die fragliche Art wirklich aus dem Löss sey. In diesem Fall kann sie denn nicht wohl die wirkliche *H. striata* seyn, da diese an trockenen Orten lebt, was sich mit dem Charakter der übrigen Lössschnecken nicht verträgt, sie müsste denn, wie angedeutet, die *H. diluvii* seyn, aber auch dann bleibt noch eine Schwierigkeit, da *H. diluvii* nach ALEXANDER BRAUN nur in dem was er im Gegensatz zum gewöhnlicheren Berglöss — den Thallöss nennt, vorkommt, und man bei Pitten wohl nur den echten Berglöss hat. Bei so bewandten Umständen wird es besser seyn, von der fraglichen Art abzu- sehen, um nur die andern in Erwägung zu ziehen *), nur so viel sey noch erwähnt, dass sie besonders in einem Hohlweg von Walpersbach gegen Leiding, übrigens dort auch mit der *Succinea oblonga*, der *Clausilia dubia* und der *Pupa muscorum* vorkommt, ob sie an den andern Stellen mit den übrigen angeführten Arten ebenfalls auftritt, kann nicht versichert werden, da sie damals der Verfasser von der *H. hispida* nicht trennte.

Die *Succinea oblonga* und die *Helix hispida* sind in der Sammlung ziemlich gleich stark vertreten, eine jede durch einige fünfzig Exemplare, sie zeigen beide die meisten Zwischenzustände des Wachsthums von Individuen jeden Alters, so zwar, dass bei ihnen die vollkommen Ausgewachsenen, welche bei den andern Species entschieden vorherrschen, nicht einmal die zahlreicheren sind. Es erweisen sich dadurch diese zwei Arten als in ihren Gewohnheiten und ihrem Standort mit der Entstehungsweise des Lösses besonders eng verbunden.

Ueber die *Clausilia dubia* und die *Pupa muscorum*, die eine jede in 20 Exemplaren vorliegen, ist nichts weiter zu sagen.

Die *Helix arbustorum*, und zwar durchaus nur die kleinere gegenwärtig in den Alpen lebende Varietät, kommt nur vereinzelt, meist mit eingedrückter Schale, in schlechten Exemplaren vor, ausgenommen an einem später zu beschreibenden Fleck von nur ein Paar Kubikklafter, wo sie in ziemlich vielen (die Sammlung zählt 15 Stück von dort)

*) Die Zweifel sollen jedenfalls durch spätere Untersuchungen gelöst werden.

ganz ausgewachsenen und sehr schön erhaltenen Exemplaren aus dem Löss herausgestochen wurde, einige davon, aber nicht alle, zeigen das farbige Band ungemein deutlich und erwiesen sich dadurch noch insbesondere als vollkommen identisch mit der jetzt am Schneeberg z. B. vorkommenden Form, welche um die Hälfte kleiner ist als die in den niedern Gegenden, zu denen Pitten gehört, lebende. Diess ist wohl der sprechendste Beweis, dass zur Zeit der Lössbildung die climatischen Verhältnisse von Pitten so waren, wie sie sich jetzt nur in den höheren Regionen der Alpen, beiläufig von 4000 bis 7000' über dem Meere gestalten. Dass sämtliche Lössschneckenarten dasselbe besagen, ist schon von dem geistvollen Begründer der Gletschertheorie hervorgehoben worden*), und es möge hier nur noch in Erinnerung gebracht werden, dass die *Succinea oblonga*, welche gegenwärtig nur vereinzelt auftritt und im Aussterben begriffen zu seyn scheint, während sie die gemeinste Schnecke des Lösses ist, in welchem sie sich zu Millionen findet — an feuchten Stellen und in der Nähe des Wassers gelebt haben muss und dass die grosse Zartheit ihrer Schale, die immer ganz ist, wie denn überhaupt im Löss bei Pitten nur ganze Gehäuse und keine blossen Fragmente vorkommen, — es recht fest stellt, dass die Thiere an Ort und Stelle lebten und nicht von der Ferne hergeschwemmt wurden. Diess wird noch insbesondere dadurch bekräftigt, dass man zuweilen auch Geschiebe nebst und mit den Schnecken, ja selbst in unmittelbarer Berührung mit denselben findet, wodurch natürlich jeder Gedanke an eine gewöhnliche Anschwemmung, welche die zarten Schalen spurlos zerstört hätte, beseitigt wird.

An organischen Ueberresten hat der Löss in der Gegend von Pitten bisher sonst nichts geliefert, nur ist zu bemerken, dass er manchmal feine kleine Verästelungen von weisser, kalkiger Materie enthält, die bloss incrustirte Theile von später eingedrungenen Wurzeln zu seyn scheinen.

An demselben Abhang, an welchem der Löss sich hinzieht, findet man am sogenannten Ochsenweg im Wald oberhalb Pitten (bei R. Fig. 5) die Eingangs angeführten erratischen Blöcke und zwar in denselben übrigens nur selten über Kubikfuss grossen rhomboidischen Stücken, in welchen das anstehende Gestein bei Gloggnitz sich ablöst und mit höchst vollkommen scharf erhaltenen Kanten. Sie liegen so ganz an der Gebirgs oberfläche, dass man oft glauben möchte, sie seyen der Dammerde selbst aufgesetzt, auch findet man in letzter, wenn man sie aufgräbt, zahlreiche kleine eckige Schiefer desselben Gesteins. Den Forellenstein begleiten auch eckige Trümmer und Blöcke der Uebergangsschiefer, welche erst westlich von Gloggnitz anfangen. Diese echt erratischen Trümmer halten sich in einer bestimmten Höhenzone des Abhangs, beiläufig zwischen 150 und 300' über dem Thalboden, oder zwischen 1150 und 1300' über dem Meer, man sieht sie weder weiter oben auf dem Plateau, noch tiefer unten ge-

*) J. de CHARPENTIER. *Essai sur les glaciers*. Seite 336.

gen die Ebene, auch sind sie weiter westlich nicht bekannt. Nach Osten zu verschwinden sie ebenfalls, allein wenn man in dieser Richtung eine Stunde weit geht, so trifft man sie wieder auf den Weg von Walpersdorf nach Schauerleiten gegen den Fuss des Rosaliengebirges und zwar kaum etwas tiefer wie bei Pitten. Herr WERDMÜLLER liess dort eine Tafel von Forellenstein ausgraben, welche 4 Schuh lang, einen halben Schuh dick und höchst eckig und scharfkantig war. Nach der Karte sieht man, dass dieser Punkt in der geraden Linie liegt, welche über Pitten nach Gloggnitz zeigt, von wo er $3\frac{1}{2}$ Meile entfernt ist. In der übrigen Gegend ist sonst nichts Aehnliches bekannt. Was den anstehenden Forellenstein betrifft, so bildet er den Felsen unmittelbar an der Hauptstrasse in Gloggnitz selbst, auf welchem die Schlosskapelle, beiläufig 50' über dem Thalweg, oder 1416' über dem Meere steht, dann zieht er sich etwas höher zum Schloss und man findet ihn noch einmal von hier aus nur ein paar Büchschenschuss weiter gegen Südwesten am Abhang hinauf und im Walde in einer Meereshöhe von etwa 1516', es folgt darauf Grauwackenschiefer, doch könnte möglicherweise der Forellenstein am selben Abhang noch höher oben auftreten; dass er aber anderswo in der Gegend nicht vorkommt, kann mit ziemlicher Sicherheit behauptet werden, da diese gut bekannt ist.

So viel über die allgemeineren Verhältnisse, unter denen das Erratische auftritt, und nun zur speciellen Beschreibung eines eng abgegrenzten Vorkommens.

Gerade oberhalb oder hinter dem Pfarrhof von Pitten mündet nicht ein Thal, sondern nur eine unbedeutende und mit Löss angefüllte Falte des Gebirgsabhanges aus, von welcher die Figuren 5, 6, 7 und 8 einen deutlicheren Begriff geben sollen. Die Figur 5, welche, wie schon früher gesagt, bloss aus dem Gedächtniss gezeichnet wurde, stellt die Sache perspectivisch dar, nur sind die Felsen bei F zu gross und überhaupt schlecht ausgefallen. Figur 6 ist der Längendurchschnitt nach AB, und zwar in den richtigen Verhältnissen, nach dem Massstab construiert, Figur 7 ist der Querschnitt nach GD oder nach MN. Figur 8 ist nach der Natur gezeichnet und stellt den untern fast terrassenartigen Theil dar. Der Baumstamm b, der auf Figur 5, 6 und 8 derselbe ist, soll zur bessern Orientirung dienen. Der Spiegel des Pittenbaches P nach Herrn WERDMÜLLER's trigonometrischer Bestimmung zu 990' und die noch zuweilen überschwemmte Alluvialebene V, auf welcher der Pfarrhof steht, zu 1000' über dem Meer angenommen, ergab sich aus sorgfältiger barometrischer Messung die Kante K zu 1110' und der oberste Punkt J der Falte, bis wo der Löss hinaufreicht, zu 1320' über dem Meer, also beiläufig noch 80' unter dem Rande oder dem Anfang des Plateaus. Die Neigung der Oberfläche des Lösses in Figur 6 ist regelmässig und gleichförmig 15° . Ein wenig weiter nach Westen mündet ein wirkliches kleines Seitenthal aus, es zieht sich eine Stunde weit gegen Süden bis zum Orte Leiding, wo es ein Ende nimmt und wo sein unbedeutendes Wasser entspringt. An seinem Winkel mit dem Pittenthal sieht man die deutliche Terrasse des ältern Diluviums L, die nach blosser Schätzung beiläufig 30' hoch ist und deren Niveau auch in Figur 6 und 8 zur Vergleichung angedeutet wurde. Der in den Figuren angegebene Hohlweg, ein blosser Waldweg, ging früher

gerade der Falte nach hinauf, allein der Regen frass ihn so stark aus, dass man ihn aufgeben und den in Figur 8 in der Perspective zu sehenden Seitengang S bahnen musste. Dadurch ist natürlich das Gebilde ungemein gut aufgeschlossen und zur Beobachtung vorzüglich geeignet. Die senkrecht entblösste Mächtigkeit des untern terrassenartigen Theiles (Figur 8) beträgt wenigstens 20 bis 30'. Man hat hier einen reinen, gleichförmig feinen Löss, der trotz seiner geringen Cohäsion doch, wie man diess auch anderswo so oft beobachten kann, eine senkrecht abgeschnittene und der Auswitterung und Abrutschung ziemlich widerstehende Wand bildet. Im neueröffneten Seitengang sieht man nichts wie den feinen, gleichförmigen Löss anstehen, im alten Hauptweg hingegen bemerkt man, wie es in Figur 8 genau angegeben ist, mitten in der feinen Lössmasse unregelmässige Lagen von Geröll, von Haselnuss- bis zu doppelter Faustgrösse, nach der mehr kugligen Form keinesfalls Stromgeschiebe, sondern wahrscheinlich der Tertiärformation entnommen *). Diese Lagen nehmen oft, namentlich wie es sich bei m scharf heraushebt, ein plötzliches Ende mitten im feinkörnigen Löss ohne durch Mittelstufen einen Uebergang in denselben zu zeigen. In der unmittelbar auf diesem Geröll ruhenden Lösslage n findet sich eine ziemliche Anzahl von den Schnecken, die sich in der übrigen Masse nur selten zeigen, es sind die schon angeführten *Clausilia*, *Pupa*, *Succinea* und eine *Helix*, ob die *H. hispida*, wie es wahrscheinlich ist, oder die zweifelhafte *H. striata*, oder beide zusammen, kann leider nicht mit voller Gewissheit entschieden werden, da die eingesammelten Exemplare beim Auspacken mit den übrigen Schnecken von Pitten vermengt wurden. Diese Schnecken bei n berühren theilweise das Gerölle und sind bei ihrer grossen Zartheit und Gebrechlichkeit doch alle ganz und wohl erhalten. Gegen unten bei p wird der Löss unreiner, mehr mit Gras und Geröll vermengt, auch etwas mehr geschichtet, obschon noch immer nicht wie es bei Strombildungen stets der Fall ist, übrigens war auch hier die Entblössung nicht so frisch wie weiter oben. Verfolgt man, statt in den Seitengang s einzubiegen, die Gebirgsfalte nach dem Wasserriss gerade aufwärts (Fig. 6), so sieht man, wie bei allmählig abnehmender Mächtigkeit das Gebilde stets denselben einförmigen Charakter zeigt, in seinem oberen Theil der ganz feine, reine Löss, der sich nach unten mit einem völlig schichtungslosen, auch nicht einmal wie bei m (Fig. 8) schwach lagenweise geordneten gröberem Schutt vermischt. Die schon angeführten Schnecken kommen auch hier dann und wann vor und an einer Stelle ziemlich in der Mitte etwa bei q (Fig. 6) fanden sich innerhalb einiger Kubikklafter nur und ganz isolirt, ohne andere Arten mit dabei die schon erwähnten ungemein schönen Exemplare der sonst nur sparsam auftretenden *Helix arbustorum* in ziemlicher Menge, alle ausgewachsen, manche davon mit dem farbigen Band noch stark an der sonst calcinirten Schale gezeichnet, andere ganz weiss,

*) Ueber die Charakteristik der Form der Geschiebe nachzusehen in den Berichten über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften in Wien. Band III. Seite 413. 1848.

ohne Spur einer Zeichnung. Da die sonst ungewöhnliche vortreffliche Erhaltung geeignet war, Zweifel über ihren fossilen Charakter zu erregen, so wurden hier bloss solche Exemplare mitgenommen, die noch im festen, anstehenden Löss steckten.

Die grösste Merkwürdigkeit zeigt das fragliche Lössgebilde in der Gegend des Querschnittes MN (Fig. 6). Man findet da im frischen, in seiner ursprünglichen Lagerung vollkommen ungestörten übrigens eben so vollkommen ungeschichteten Schutt und Gruss, in den der Löss nach unten übergeht *) und mit dem er noch eine Gesamtmächtigkeit von etwa 12 bis 15' besitzt, Geschiebe, welche an ihrer durch die Wirkung des Wassers früher abgerundeten Oberfläche fremde Eindrücke und Formen zeigen. Die erstgefundenen und gewöhnlicheren Spuren an kleineren Geschieben waren so unbedeutend, dass sie kaum auffielen, besonders ehe die Stücke abgewaschen waren, allein bei dadurch erweckter Aufmerksamkeit zeigte sich bei weiterem Suchen viel Deutlicheres. Das Ausgezeichnetste war der grosse in Tafel II Fig. 1 in der Hälfte der natürlichen Grösse dargestellte etwa 70 Pfund schwere Block aus rothem alpinischem Encrinitenkalk oder Marmor, wie er in der Gegend des Schneeberges anstehend vorkommt. Fig. 2 und 3 geben den sehr verkleinerten Quer- und Längsschnitt, wobei die obere Kante stets mit k bezeichnet bleibt. Bei A ist eine einspringende, durch Auswaschung wohl geglättete Stelle, wie sie an Geschieben nichts Seltenes ist, den Längsschnitt davon nach der Linie ab gibt die Figur 4. Der Block ist, wie man sieht, von der Mittelkante aus nach beiden Seiten regelmässig divergirend gestreift und zwar auf der rechten Seite ganz besonders stark, während die Mittelkante nur einfache Eindrücke zeigt. Die Streifen oder Furchen sind bis über eine Linie tief und enden oft nach vorne in eine stärkere, bis 3 Linien und darüber tiefe Höhlung wie bei c und d; nach der Zeichnung könnte man fast glauben, es ziehen sich hier die Streifen ins Innere des Gesteins hinein, was durchaus nicht der Fall ist. In mehreren von diesen kleineren Eindrücken, womit viele Streifen endigen, stecken noch Quarzkörner, welche bei einer oft unregelmässigen Gestalt so genau hineinpassen, dass es klar wird, sie sind es selbst, durch welche Streifung und Eindruck erzeugt worden sind, z. B. bei e und besonders bei f auf Tafel I Fig. 1. Von der Streifung ist besonders hervorzuheben, dass sie nicht durch Ritzung des Gesteins entstand, wie man es namentlich in der Schweiz an dem ähnlich gezeichneten erraticen Schutt bemerkt, wo, wenigstens auf dem Kalkstein, etwas Strichpulver znrückbleibt und eine weisse Linie bildet. Auf unserem Block ist keine Rede von Strichpulver und man sieht es seiner Streifung an, dass das Gestein wie erweicht nachgab. Sie trägt denselben

*) Es muss hier besonders hervorgehoben werden, dass alle angeführten Beobachtungen absichtlich bloss an solchen Stücken gemacht wurden, welche ganz frisch aus dem ungestörten und in ursprünglicher Lagerung sich befindenden Schutt stammten. Nur der grosse Block lag zur Hälfte frei, zeigte aber keine Spur von späterer Abnützung, die Streifen und Eindrücke daran sind frisch und unversehrt.

Charakter wie die Formen, die entstehen, wenn man mit einem harten Körper über Butter fährt, nur dass man keine aufgeworfenen Wülste sieht, wie diess die Zeichnung z. B. bei r Tafel II Fig. 1 fälschlich glauben lassen könnte. Die oft stark vertieften Eindrücke, womit manche Streifen enden, weil hier der streifende Körper ganz eingedrückt und also nicht weiter getrieben konnte, setzen die Sache, so sonderbar sie auch erscheinen mag, doch ausser Zweifel. Um den Charakter der Streifung noch besser anzugeben, ist das Stück des grossen Blocks in Taf. I Fig. 1 in natürlicher Grösse abgebildet worden, man sieht hier auch deutlicher wie die Streifung bei h, wo der Block sich nach hinten rundet, scharf begrenzt ist (zu vergleichen ist auch der Querschnitt Taf. II Fig. 3). Ueber den einspringenden Winkel bei A geht die Streifung weg ohne sich in denselben hineinzuziehen, wie dieses im Längsschnitt Taf. II Fig. 4 angedeutet ist, indem die Pfeile das Ende und den Wiederanfang derselben bezeichnen. Hier scheinen sich die grösseren Streifen t zu entsprechen, der obere ist die Verlängerung des unteren ersten nur etwas nach links verschoben, eben so deuten die Eindrücke c und d auf Taf. II Fig. 1 und l auf Taf. I Fig. 1 auf einen stärkeren Druck nach links, was wieder mit dem Umstand recht gut übereinstimmt, dass die ganze rechte Seite des Blockes viel stärker gestreift ist als die linke. Seine Rückseite zeigt die ziemlich natürliche, glatte Oberfläche, dafür bemerkt man aber am vordern Ende, bei m im Längsschnitt Taf. II Fig. 2 grosse und bis nahe an einen halben Zoll tiefe Eindrücke. Am entgegengesetzten Ende bei n sieht man eine grössere Anzahl aber viel kleinerer Eindrücke, welche dem Stein eine rauhe Oberfläche geben. Aus dem allen geht mit grosser Wahrscheinlichkeit hervor, dass der Block auf seiner hintern Seite (L im Quer- und Längsschnitt) in einer festen und gleichförmigen Masse eingefasst war, welche hart und doch gleichförmig ihm angepasst seyn musste, da er sonst auch auf dieser Seite Eindrücke erhalten hätte, und dass er mit seiner vordern gestreiften Seite, welche alsdann zu unterst gelegen wäre, mit grosser Gewalt über einen nach beiden Seiten zum Theil weichen den aber doch grossen Widerstand leistenden Grund von Schutt weggedrückt wurde, und zwar in der Richtung des Pfeiles P. Die hinten bei m (Querschnitt Taf. II Fig. 2) anliegenden Steine wurden durch die Fassung selbst recht tief in den Block hineingedrückt, weil sie ihn von dieser Seite mit der grössten Gewalt vorwärts stiess. Die Eindrücke gegen das andere Ende bei n, so wie auf der Kante K machte der Schutt, gegen den der Block gedrückt wurde, und der zu senkrecht getroffen um ausweichen zu können, mit weiter gestossen wurde; was mehr seitwärts von der Mittellinie lag, wich etwas aus, während der Block vorwärts schob, daher als Resultante der beiden Bewegungen nach der Diagonale ihres Parallelogramms die schiefen von der Mittellinie aus divergirenden Streifen, welche das Bild zeigt. Wegen der vollkommenen nothwendigen Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung wäre es übrigens auch möglich, dass umgekehrt der Block stille stand und der Schutt in der entgegengesetzten von der vorigen durch den Pfeil P angedeuteten Richtung über ihn weggedrückt worden wäre; diess ist aber ziemlich unwahrscheinlich, obschon sich vor der Hand kein entscheiden-

der Grund dagegen anführen lässt. Dass jedenfalls die Bewegung ausserordentlich langsam vor sich gehen musste, ergibt sich aus dem Charakter der Streifung, welche sonst an einem so muschlig-brüchigen, kompakten Kalkstein gewiss mit Strichpulver erzeugender Ritzung verbunden gewesen wäre. Konnten Eindrücke durch starken Druck langsam entstehen, wie es hier klar ist, so musste im Stein, der zugleich eine Bewegung nach vorwärts erlitt, welche nicht schneller war als die womit ein Geschiebe sich senkrecht in den Kalkstein eindrückte — nothwendig jene eigenthümliche Streifung ohne Strichpulver erzeugen hervorbringen. Eine besondere Erweichung des Gesteines dazu anzunehmen, ist nach dem Gesamtcharakter der Erscheinung keinesfalls sehr zulässig und wahrscheinlich gar nicht nothwendig, da der Kalkstein nicht absolut starr ist; es dürfte genügen, den festen Kalkstein recht nass zu erhalten, um Eindrücke und selbst Streifung ohne Ritzung auf demselben künstlich hervorzubringen. Herr WERDMÜLLER wird eigene Versuche in diesem Sinne einleiten, einstweilen mag ein anderes Beispiel der Plasticität des festen Kalksteines hier angeführt werden. Als man vor mehreren Jahren den mit Quadern eingefassten Bach, der durch die Hauptstrassen von Bern fliesst, mit beiläufig 3' breiten und über 6 Zoll dicken Platten des festen Portlandkalkes von Solothurn zudeckte, senkten sich diese nach einiger Zeit um ein Merkliches in der Mitte, theilweise wohl um einen ganzen Zoll, eine davon, welche sich besonders stark gesenkt hatte, brach am Ende als ein Lastwagen darüber fuhr, die übrigen hielten sich, ob in Folge dessen, dass man in ihrer Mitte ein Loch durchschlug, um das stehende Wasser abzulassen, ist fraglich. Diese Beobachtung stammt aus des Verfassers Schuljahren und verlangt daher durch genauere Erhebungen bestätigt zu werden, es ergibt sich also nur mit Wahrscheinlichkeit daraus ein gewisser Grad der Biegsamkeit des Gesteins, der z. B. hinreichend wäre, um die gewölbartigen Hebungen der Juraschichten zu erklären, ohne diese als damals noch weich anzunehmen.

Nebst den gestreiften Steinen finden sich aber auch in demselben Schutt an der bezeichneten Stelle Stücke von zersprengten Geschieben in allen Formen, keilförmig, so gut wie nach Art der in Taf. I Fig. 2 und 3 dargestellten und von sehr verschiedenen Grössen. Die Theile der wohlabgerundeten Oberfläche der frühern Geschiebe, welche ihrer Form nach aus der Tertiärformation stammen, und so viel beobachtet wurde, nur aus Kalk bestehen, sind leicht zu erkennen und stechen stark gegen die andern Seiten ab, welche die rauhen und daher zuweilen ziemlich stark incrustirten Bruchflächen sind, alle Kanten sind vollkommen frisch und scharf, wie es namentlich bei Fig. 3 hervorleuchtet, man hat hier die naturgetreue Abbildung eines solchen Geschiebebruchstücks aus hellem Alpenkalk in der Hälfte der natürlichen Grösse in a von der breiteren abgerundeten, und in b von der schmalen schneidigen Seite gesehen. Fig. 2 ist in $\frac{2}{3}$ der natürlichen Grösse und ist desswegen noch besonders interessant, weil der erhaltene Theil der ursprünglichen Geschiebeoberfläche ganz auf die nämliche Art wie der grosse Block ohne Ritzung und Strichpulver gestreift ist. Die Abbildung ist recht gut gelungen und zeigt die Richtung der Hauptstreifung nach dem Pfeile Q, nebst be-

stimmten Spuren einer früheren sehr verwischten Streifung nach der Richtung des Pfeiles R. Es lässt sich hier auch bestimmen, dass die Sprengung erst nach der zweiten Hauptstreifung statt fand, denn man sieht bei a das Ende einer Furche, welche durch die Bruchfläche abgeschnitten ist. Dieses Geschiebebruchstück besteht aus schwarzem Alpenkalk, da seine Streifen ganz frisch sind, so muss es wohl unmittelbar nach ihrer Entstehung und wohl auch durch dieselbe Ursache, welche sie hervorbrachte, nämlich durch einen starken Druck aus der Sprengung einer grössern Masse hervorgegangen seyn, was wiederum mit der Annahme einer besondern Erweichung der Masse bei der Streifung nicht gut zusammengeht. Die andern dazu gehörenden Stücke fanden sich eben so wenig als für das in Fig. 3 dargestellte, wurden aber auch nicht gesucht. Dafür zeigt sich aber das in Fig. 4 in natürlicher Grösse dargestellte Geschiebe als ein zersprengtes, wo aber die einzelnen Stücke noch nicht auseinander gefallen sind. Es besteht aus dem bekannten alpinischen rothen Sandstein, und hat auf der Seite bei T einen grossen flachen Eindruck, die hintere unsichtbare Seite gehört ebenfalls nicht zu seiner ursprünglichen natürlichen Oberfläche, sie ist aber rauher als bei T, wie wenn ein Theil schon abgesprengt wäre. An diesem Stück sieht man recht deutlich die Wirkung einer langsamen aber gewaltigen Quetschung, es ist übrigens eine im Erratischen des Cantons Zurich bekannte Erscheinung und die sogenannten Quetschsteine sind dort keineswegs sehr selten.

Zu bemerken ist noch, dass man in dem fraglichen Lössschutt nebst dem Gruss und den mehr vorwaltenden kalkigen Trümmern auch eckige, obschon nicht sehr scharfkantige Brocken von reinem Quarz findet, gerade wie sie z. B. dazu gehören würden, um den grossen Streifen S Taf. II Fig. 1 hervorzubringen.

Nachdem nun die einfache Beschreibung der Thatsachen bloss mit den daraus sich unmittelbar und zunächst ergebenden Schlüssen vorausgeschickt worden ist. mögen nun die weiteren Erörterungen folgen, zu denen die Erscheinungen führen. Und da muss vor allen Dingen hervorgehoben werden, dass der Löss bei Pitten nicht ein Absatz aus einem stehenden Wasser und noch weniger aus einem Strome seyn kann. Die gesammten Verhältnisse der Lagerung und seine innere Structur sprechen eben so bestimmt dagegen als seine organischen Einschlüsse, da die darin vorkommenden Schnecken ausschliesslich Landbewohner sind; so ist auch offenbar ein Meeres- oder Süswasserabsatz, der die tieferen Stellen, die Thalwege meidet, um sich schildförmig am Fuss der Gehänge anzulagern, und sich an diesen ziemlich steil bis 300' hoch hinaufzuziehen — ein wahres Unding; selbst wo der Löss eine schwache Andeutung von Schichtung zeigt, wie in Figur 8, ist eine gewöhnliche Wirkung des Wassers unzulässig, denn auch hier ist es offenbar, dass das Material nicht hergeschwemmt wurde, es wären da die Schneckenschalen, welche das Gerölle bei n begleiten, zerstört worden, während man im Gegentheil, wie überall in der Gegend von Pitten überhaupt,

nur sehr wohl erhaltene ganze Schalen und keine Trümmer davon findet *). Es müssen die Schnecken unmittelbar von ihrem Standort auf dem Trocknen, oder wenigstens auf dem Festen, da dieses nass und feucht seyn konnte, mitten in die sich bildende Lössmasse, wo man sie jetzt findet, hineingefallen seyn, und doch muss das Wasser irgend eine Rolle dabei gespielt haben, wie denn auch seine Nähe aus dem Vorkommen der *Succinea oblonga* hervorgeht **). Es sind dieses aber alles mehr negative Angaben, wir wollen das Positive anderswo suchen.

Die errativen Blöcke treten nur unter ihren beiden wohlbekannten Formen hier entgegen, die eckigen und scharfkantigen, gerade wie sie sich auf Gletschern finden, vom Schlosshügel in Gloggnitz herkommend, liegen natürlich nur an der Oberfläche, aber nur in der höheren Zone des Lösses, dessen äusserste obere Grenze bei J Fig. 6 sie nicht überschreiten, die gestreiften erratischen Blöcke, wie man sie jetzt nur unter Gletschern kennt, stecken in dem gröberem Schutt in der Tiefe des Lösses, der auf diese Weise mit ihrem Auftreten in innigster Verbindung erscheint ***). Diess föhrt uns unmittelbar darauf in einer Wirkung des Eises den Schlüssel zur Combination zu suchen, welche uns die Erscheinungen erläutern kann. Allein hier begegnen wir gleich zwei Annahmen, nach welchen eine Erklärung möglich ist, schwimmende Eisschollen und unmittelbare Wirkung eines Gletschers. Fangen wir damit an, die erste zu erörtern. Sie setzt natürlich ein stehendes Wasser voraus, welches bis zur oberen Grenze der Blöcke gereicht hätte, da die Eisschollen doch nicht in der Luft schwimmen können, allein dem widerspricht, wie schon gezeigt, der ganze Bestand des gleichzeitig entstandenen Lössgebildes. Ferner findet man von einer solchen Wasseroberfläche, welche natürlich das ganze Wienerbecken und natürlich auch ganz Ungarn eingenommen hätte, nicht die geringste directe Spur; von dem nur erniedrigten einstigen Tertiärniveau kann gar keine Rede seyn, denn die Lössbildung folgte erst auf die ältere Diluvialperiode †), welche in unserem Gebiet eine vollkommen charakterisirte

*) Die Schalen der *Succinea oblonga* sind so zart, dass man sie kaum frei zwischen Daum und Zeigefinger fassen kann, ohne sie an ihrer Mundöffnung zu beschädigen.

***) Es muss hier ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die Entstehung des Lösses dem Verfasser noch ganz und gar ein Räthsel bleibt; was darüber gesagt ist, sind nur Vermuthungen, Annahmen, Fragen, kurz blosse Versuche zur Lösung des Problems, die aber noch nicht zum Ziel geführt haben, und daher noch Manches ungereimt lassen.

****) Schon ALEXANDER BRAUN hat den Zusammenhang zwischen dem Löss und dem Erratischen erkannt. Seine eigenen Worte verdienen hier angeführt zu werden, er sagt nämlich im oben citirten Aufsatz, nachdem er das Vorkommen von bedeutenden alpinischen Geröllen im Löss bei Oningen berührt hat: »Ich zweifle nicht, dass sich der Löss an die erratischen Gebilde der Schweiz anschliesst.«

†) Ueber älteres Diluvium und Löss nachzusehen die Erläuterungen zur geologischen Uebersichtskarte der nordöstlichen Alpen. Wien 1847, dann auch die Berichte der Freunde der Naturwissenschaften

Flussbildung ist, die zwar einen etwas höheren Stand des Meeres verlangt, aber nicht den mindesten Zweifel darüber lässt, dass das Wienerbecken damals trocken lag. In dieser Beziehung war es nicht ohne Interesse, die Diluvialterrasse bei L, Fig. 5, 6 und 8 zur nahen Vergleichung zu haben. Schwimmende Eisschollen würden also eine nach der älteren Diluvialperiode eingetretene bedeutende Erhöhung des Meeresspiegels (oder Senkung des Landes) voraussetzen, wovon wir sonst keine Andeutung hätten. Im Gegentheil ergibt es sich aus dem zusammenhängenden Studium des ältern Diluviums, welches ein so scharfes Niveau der Stromablagerung zeigt, innerhalb dessen alle Spuren von einem später sie bedeckenden stehenden Gewässer, welches hier in der Tiefe doch zu allererst durch ihre eigenthümlichen Bildungen seine Gegenwart bekrundet hätte, so gänzlich fehlen, dass man annehmen muss, die einzige Veränderung, welche das Land seit jener Periode erlitten habe, sey ein Tieferlegen der Mündungen der Flüsse gewesen, wodurch diese sich in ihrem früher höheren Bett einfressen mussten.

Ferner muss man noch bedenken, dass das Thal von Pitten gegen Westen, wo die Forellensteine herkamen, nicht offen ist, sondern nur einen durch einen noch eine halbe Stunde über Pitten hinaus nach Osten fortlaufenden, im Mittel freilich nur 200' hohen Rücken getrennt ist, der eine mittlere Höhe von 1200' über dem Meer erreicht, und mit dem höheren Gebirg gegen Süden, wo der Pittenfluss herkommt, zusammenhängt, er erniedrigt sich allerdings in der nach Gloggnitz zeigenden Richtung, auf den Weg von Seebenstein nach Guntrams bis zu einer Meereshöhe gegen 1200'. Ueber diesen Sattel denn müssen jedenfalls die Forellensteinblöcke in der Richtung des Pfeiles P auf Fig. 5 gekommen seyn, allein wenn es auf schwimmenden Eisschollen war, wie viele von diesen wären nicht längs jenes Rückens gestrandet, ehe eine einzige ihren Weg über den Sattel gefunden hätte, und doch hat man dort, wo alsdann die meisten Blöcke vorkommen müssten, noch keine beobachtet. Gerade dieser Rücken schneidet auch die Möglichkeit der Annahme einer regelmässigen Strömung von Westen nach Osten ab, denn er hätte sie aufhalten und ablenken müssen, man kann also unmöglich annehmen, die Eisschollen seyen so constant gegen den Gebirgsabhang, an dessen Fuss Pitten liegt, getrieben worden, dass die erratischen Blöcke von Forellenstein, die sie führten, ausschliesslich nur an jenem Abhang und noch dazu bloss innerhalb einer gewissen Höhenzone längs desselben abgesetzt worden wären. Frei im stehenden Wasser treibende Eisschollen hätten die Blöcke weit unregelmässiger in der Gegend, auch tiefer unten am Abhang herunter, herumgestreut, wenn man wenigstens nicht annimmt, sie seyen an letzterem angeankert worden. Es ist wohl mit Recht behauptet, obschon noch nicht in der Natur wirklich nachgewiesen worden, dass schwim-

IV. Seite 413, 1848, wo unter andern die Auflagerung des Löss auf dem älteren Diluvium an der Nussdorfer Linie in Wien angeführt ist.

mende Eisschollen, welche in ihrem untern Theil Blöcke oder Steintrümmer eingefroren enthalten, wenn sie auf den Grund auffahren, zu Streifung Anlass geben können, auch könnten möglicherweise ebenfalls auf solche Weise einzelne Geschiebe bei dem Zusammenstoss von Eisschollen gesprengt werden; allein bei unserem grossen Block ist eine solche Annahme ganz unzulässig, indem, wie schon gezeigt, der besondere Charakter seiner Streifung eine ausserordentlich langsame Vorwärtsbewegung unter heftigem Druck gerade und nur wie sie unter wirklichen Gletschern bekannt ist, klar beweist. Man könnte da allerdings noch annehmen, der Block sey wirklich aber in den Alpen unter dem Gletscher so gezeichnet und alsdann von einer schwimmenden Eisscholle, welche der Gletscher selbst hergeben konnte, ergriffen und nach Pitten geführt worden, was aber die übrigen Schwierigkeiten durchaus nicht aufhebt und jedenfalls ein Hinunterreichen der Gletscher bis zu einer Meereshöhe von 1200 bis 1300' nothwendig voraussetzt.

Sollte es übrigens gelingen, wie es nicht unmöglich wäre und jedenfalls versucht werden soll, bei eigens zu dem Zwecke angestellten höchst sorgfältigen Unternehmungen im Lössschutt die grössten triefenden Quarzbrocken noch in ihren eigenen Streifen liegend aber sonst frei und nicht angekittet, ebenso die zusammengehörenden Bruchstücke desselben Geschiebes beisammen zu finden, so bleibt das Hertragen durch schwimmende Eisschollen positiv ausgeschlossen, indem es alsdann faktisch erwiesen ist, dass die Erscheinungen an Ort und Stelle hervorgebracht worden sind, wo man sie sieht. Besonders interessant in dieser Beziehung wäre es gewesen die Lage des abgebildeten grossen Blocks im umgebenden Schutt zu beobachten, allein es war erst beim mehrmaligen Umwenden veranlasst durch misslungene Versuche ihn mit dem dreifündigen Hammer zu sprengen (Spuren des Hammers sieht man noch bei M auf Taf. II Fig. 1), dass sein interessanter Charakter verrathen wurde und dieser trat erst in seinen vollen Glanz als der Block zu Hause gut abgewaschen und gebürstet und dann mit Oel eingerieben wurde um die Schattirung ausgesprochen werden zu lassen. Uebrigens gilt hier auch wieder was KEILHAU gesagt hat: „Hätte ich die Aufgaben, welche sich erst nach Beendigung der Untersuchungsreisen darbieten konnten, früher gekannt, so „würde ich sicherlich mehr ausgerichtet haben“ *).

Mit schwimmenden Eisschollen geht es, wie man sieht, nicht gut, versuchen wir also die Annahme eines wirklichen Gletschers, welcher von der Schneebergsgebirgsmasse des Schneeberges herunterkommend auf seinem Wege bei Gloggnitz den Forellenstein mitnahm und in gerader Linie nach Pitten und noch weiter bis über Walpersbach hinaus führte, dabei manche Kalkblöcke streifend und zerdrückend und die ganze Lössformation durch Zermalmung des gröbereren Schuttes bildend. Freilich musste er den Sattel zwischen Seebenstein und Guntrams überschreiten, was er nicht leicht thun

*) *Gaea norvegica*. II. Band, Seite 300.

konnte wenn die Ebene nach Norden frei war. Allein auch in der Gegend von Wien finden sich bestimmte Andeutungen des gleichzeitigen Vorhandenseins einer bewegendes Ursache, welche eben so wenig als in Pitten das Wasser sein konnte. Man sieht nämlich dort wie der Löss nach unten und zwar sehr oft eine Menge eckige Trümmer des erst weiter westlich ausserhalb seines Gebietes anstehenden Wienersandsteins und sonderbarer Weise ohne Beimengung anderer Gesteine enthält *), sie sind nicht geschichtet und nur durch Abwitterung an den Kanten ganz schwach und gleichmässig abgestumpft, so dass sich mit Bestimmtheit behaupten lässt sie seyen auch nicht einmal auf eine kurze Strecke im Wasser fortgeschoben worden, denn es zeigt die wirkliche Beobachtung, dass Steinstücke, welche in den Strom kommen, vorerst und am stärksten an den Endpunkten ihrer Längtaxe abgerundet werden, was eben hier nicht der Fall ist. Die Gesamtverhältnisse der Lagerung und Structur des Lössgebildes sind übrigens bei Wien gerade dieselben wie bei Pitten und müssen einer ähnlichen Ursache ihre Entstehung verdanken. Ist daher der Löss bei Pitten eine Gletscherbildung, so muss er es wohl auch bei Wien sein und es müsste alsdann auch das Wienersandsteingebürge Gletscher gehabt haben, was sehr bedenklich erscheint, wenn man erwägt, wie niedrig dieses Gebirge ist, indem es nur eine Meereshöhe von 2000 bis 3000' erreicht. Allein diess bildet noch keinen directen Einwurf von der Art, wie sie sich z. B. gegen schwimmende Eisschollen machen lassen. Es kann leicht zur erratischen Periode die Nähe der Hochalpen besondere klimatische Verhältnisse in ihren niedrigeren Vorbergen bedingt haben, welche auch hier die Entstehung von Gletschern begünstigten. Vielleicht waren es nur in ihren Wirkungen den Gletschern ähnliche Schnee- und Eismassen, deren besondere Bedeutung man noch nicht erfasst. Solche Muthmassungen sind aber nur die Möglichkeiten, auf die sich nicht weiter bauen lässt und hier müssen wir also Halt machen, weil wir an der Grenze unseres Wissens stehen und nach Pitten zurückkehren. Wir begegnen hier einer andern Schwierigkeit bei der Annahme eines Gletschers, es stammen nämlich die eckigen erratischen Blöcke in der Regel nur von Felsen, welche den Gletscher überragen, so dass ihre Trümmer auf letzteren fallen können, aber der Forellenstein bei Gloggnitz erreicht, wie gesagt, nur eine Meereshöhe von beiläufig 1516' so dass der vorbeistreichende Gletscher wohl Trümmer davon umreissen aber nicht leicht an seine Oberfläche bringen konnte, man müsste daher erwarten diese Blöcke eher gestreift oder geschliffen als scharfkantig auf dem weiteren Weg des Gletschers zu finden. Allein auch dieses bildet keinen directen wirklichen Einwurf, wenn wenigstens, wie es doch wahrscheinlich ist der Gletscher von Gloggnitz bis nach Pitten, mehr als 200' Fall hatte und also in Gloggnitz selbst höher als 150' über dem Thalweg war und den Forellensteinfelsen bedeckte. Es kann der Forellensteinfelsen frü-

*) Herr CZJZEK hat die Erscheinung in seinen Erläuterungen zur geologischen Karte der Umgegend von Wien angedeutet, aber ohne in nähere Erörterungen darüber einzutreten.

her höher und mächtiger, vielleicht hervorstehend, also später eben durch den Gletscher bedeutend vermindert worden seyn, gewiss ist es jedenfalls, dass eine Abnahme des Felsens wirklich statt gefunden hat, da wir die Trümmer davon bei Pitten sehen, vielleicht gehören diese gerade zu den zuerst losgetrennten, die daher auch am weitesten wanderten und dass man die andern auf dem Strich gegen Gloggnitz finden wird, wenn man eigens danach sucht. Wir gelangen also auch hier noch zu keinem entschiedenen Widerspruche, sondern nur eben wieder an die Grenze unserer Erkenntniss.

Was die Fauna des Lösses betrifft, so spricht sie, wie bekannt sehr bestimmt zu Gunsten der Annahme eines Gletschers, denn wenig Thiere sind so streng an gewisse klimatische Verhältnisse gebannt als gerade die Schnecken und alle die angeführten Arten, wie schon gesagt und begründet, mit Beseitigung der zweifelhaften *Helix striata*, verlangen ein kühles, feuchtes Klima. Die vorkommende Varietät der *Helix arbustrorum* weist insbesondere speciell auf ein damals in Pitten herrschendes Klima oder eine mittlere jährliche Temperatur wie man sie jetzt beiläufig in 4000 bis 6000' Meereshöhe am Schneeberg (in der Schweiz nach Hrn. v. CHARPENTIER bis 7000'). Wenn nun in der erraticen Periode in Pitten ein Klima herrschte, wie man es jetzt in einer Höhe von 4—6000' beobachtet, so musste auch damals in dem Gebirg, welches Pitten um 3—5000' überragt, das Klima so gewesen seyn wie gegenwärtig in den Alpen zwischen 7 und 9000', wo die Gletscher entstehen, welche bis in die Meereshöhe von 3130', also im Verhältniss um wenigstens 1000' tiefer herabsteigen als es früher ein erraticer Gletscher gethan hätte, der vom Schneeberg bis nach Pitten vorgerückt ware. Einen solchen anzunehmen ist also nicht nur ohne alle Unwahrscheinlichkeit in dieser Hinsicht, sondern gewissermassen sogar nothwendig, so dass also hier die beiden von ganz verschiedenen Seiten ausgeführten Inductionen auf das Schönste zusammentreffen um die Voraussetzung als naturgemäss darzustellen.

Ist sie wirklich richtig, so folgt dann aus dem weiter oben Angeführten, dass die Lössschnecken hart am Rande, beinahe unter dem Eis oder gar auf dem Gletscher selbst gelebt haben, was wiederum auf die Gegenwart einer Vegetationsdecke auf dem letzteren hindeuten würde. Bedenkt man nun, dass ein solcher über die Ebene sich ausbreitender Gletscher, wenn er wirklich da war, eine viel langsamere Bewegung haben musste, als die jetzigen in den verhältnissmässig steilen Alpenthälern gelegenen, dass er also auch eine viel gleichförmigere und spaltenfreie Oberfläche darbot, so bleibt es leicht möglich, dass wir hier Verhältnissen auf die Spur kommen, wie sie in der Eschholzbaai von KOTZEBUE wirklich beobachtet worden sind *) und zwar in einer Breite, welche dem Klima von Pitten zur erraticen Periode entsprechen würde. Eine solche Vegetationsdecke hätte zugleich das Eis vor dem zu raschen Abschmelzen geschützt und daher die Ausbreitung des Gletschers in die Ebene hinaus begünstigt,

*) GILBERT'S Annalen 1821. IX. Band, Seite 144.

ebenso wie der Umstand, dass das Schmelzwasser hier weit weniger leicht abfließen konnte und den Gletschergrund also viel nasser erhielt als es in den ungleich steileren Alpenthälern geschieht, wo die jetzigen Gletscher wie zum Austropfen aufgehängt sind. Ein solches reichliches Gletschergrundwasser mag denn auch in Verbindung mit der directen Wirkung des Eises eine Hauptrolle bei der Bildung des Lösses gespielt haben.

Von allen diesen weiteren Folgerungen, die, wie schon gesagt, mehr als Fragen aufgestellt werden, und welche sich bloss auf die Gegend von Pitten beziehen sollen, — ist aber noch nichts als so erwiesen zu betrachten, wie es der Ernst der Wissenschaft verlangt. Dazu gehören ausgedehntere und zusammenhängende Beobachtungen, zu denen die gegenwärtige Abhandlung, indem sie die Fragen bestimmter zu formuliren strebt, vorbereiten soll. Uebrigens kann dadurch auch das Studium und die Kenntniss des Lössgebildes im Allgemeinen befördert werden, indem die beschriebenen Erscheinungen der gestreiften und eingedrückten Geschiebe, so absonderlich sie auch Manchem vorkommen mögen, doch vielleicht nicht sehr selten seyn dürften und nur desswegen übersehen werden, weil sie im lehmigen Lössschutt ungewein schwer zu bemerken sind. So befindet sich z. B. im montanistischen Museum in Wien unter mehreren erratischen Geschieben aus der Schweiz ein nur nussgrosses von hellem Kalk, welches im kleinen Massstab, aber desswegen nicht minder deutlich, dieselben Eindrücke und strichpulverlosen Streifen zeigt wie der abgebildete grosse Block. Aber gerade solche Erscheinungen, weil sie vielbedeutend sind, können am ersten auf die Lösung des grossen Räthsels der Entstehung des Lösses führen, denn es ist überhaupt, wie die Geschichte der Inductionswissenschaften lehrt, weniger die Quantität in den Thatsachen und Beobachtungen, als vielmehr die Qualität bei der Auswahl der wichtigeren und gleichsam von selbst sprechenden, wodurch die Geheimnisse der Natur zu erschliessen sind.

N a c h t r a g.

Die Gelegenheit, während gegenwärtige Abhandlung noch unter der Presse war, Pitten wieder zu besuchen, veranlasst folgende nachträgliche Bemerkungen:

Die *Helix diluvii* oder *striata* ist wirklich und unzweifelhaft aus dem Löss selbst und nicht bloss an seiner Oberfläche zerstreut; sie findet sich auch mit den andern Schnecken bei n auf Figur 8, doch hier minder zahlreich als die *Helix hispida*. Einzelne Exemplare von *Helix arbustorum* kommen hier auch vor.

Sowohl in dem über als unter der Schneckenschichte in Figur 8, besonders in dem unten bei p befindlichen gröberem Schutt, gibt es nebst den abgerundeten Geröllen auch eckige Trümmer von verschiedenen Gesteinen, darunter von Forellenstein, dann schwach gestreifte und namentlich zersprengte Geschiebe, eigentliche Quetschsteine, sehr ausgezeichnet und zum Theil von bedeutend grossem Format, welche der Verfasser nur desswegen früher übersah, weil sein Auge noch nicht darauf eingeübt war. Hier fand sich auch ganz deutlich ein quetschender mit dem gequetschten Stein, wovon die einzelnen

Trümmer noch beisammenstehend waren in unmittelbarer Berührung und ursprünglicher Lage, so dass es nun durch die Beobachtung vollkommen erwiesen ist, was ohnehin kaum zu bezweifeln war, dass die Steine an Ort und Stelle, wo sie jetzt liegen, zerquetscht worden sind, und zwar durch einen sehr langsam wirkenden Druck, wie es aus den häufig auftretenden nach Art von Figur 4 zersprungenen und mitunter stark verschobenen aber noch zusammenhaltenden Kalkblöcken hervorgeht. Von der Wirkung von schwimmenden Eisschollen kann also hier keine Rede seyn, weder um die Steine, die anderswo unter einem Gletscher gelegen wären, herzutragen, noch um durch ihren Zusammenstoss oder durch ihre sonstige Bewegung an Ort und Stelle die Erscheinung selbst hervorzurufen. Dadurch wird denn auch die Nothwendigkeit eines von Gloggnitz bis hierher ununterbrochen hinreichenden Gletschers ziemlich fest gestellt.

Kaum 400 Schritt weiter östlich als die in Figur 8 dargestellte schiefe Terrasse tritt wieder eine in ihrer äussern Form ganz gleiche am nämlichen Abhang auf. Sie ist ebenfalls durch einen Hohlweg gut aufgeschlossen und besteht aus einem vollkommen ungeschichteten und gleichförmigen Gemenge von gröberem und feinerem Schutt, der nicht, wie in Figur 8 zu sehen, lagenweise abgesondert ist, daher denn auch der erratische Charakter des Gebildes, als ein Ganzes betrachtet, sich hier viel deutlicher ausspricht; gestreifte und gequetschte Steine fehlen übrigens auch nicht.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn man das Gebirge von der Ferne beobachtet, das Terrassenartige des Lössgebildes sich nicht wahrnehmen lässt, indem das Ganze doch eigentlich dem Gebirgsabhang mehr schildförmig angelagert ist. In den ähnlichen Lössanlagerungen, sowohl weiter westlich gegen Seebenstein als weiter östlich gegen Walpersbach kommen wohl eckige Trümmer des Grundgebirges vor, allein man sucht da vergebens nach denselben Erscheinungen, welche auf den besprochenen engen Raum beschränkt, so bestimmt den erratischen Charakter verrathen. Letzteres ist also ein ausnahmsweises Vorkommen und es ergibt sich daraus ein bedeutungsvoller Wink über die Art und Weise, in welcher das Lössgebilde zu studiren ist, um zu dessen Verständniss zu gelangen.



Fig. 2.



Fig. 1.



Fig. 3.



1/2



Fig. 4.

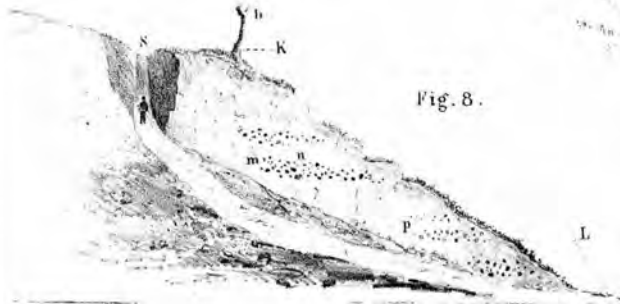


Fig. 8.

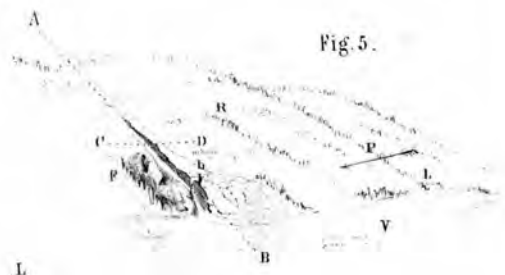


Fig. 5.

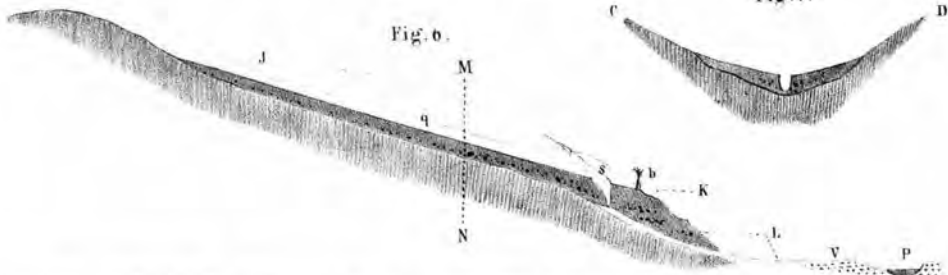


Fig. 6.

Fig. 7.



II. Ueber die Süsswasserquarze von Muffendorf bei Bonn.

Von

C. O. Weber,

Stud. Med. aus Bremen.

Mit zwei lithographirten Tafeln.

Mitgetheilt am 25. Jänner 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung erhielt ich durch eine Preisfrage des Bonner naturwissenschaftlichen Seminars. Die Resultate derselben sind allerdings nicht glänzend, ihre Veröffentlichung scheint indessen dadurch wünschenswerth, dass überhaupt Monographien, namentlich aber sonst in Deutschland seltner auftretende Gebilde nie ganz ohne Interesse sind. Für die so liebevoll und mannigfach gewährte Unterstützung statte ich Hrn. Geheimen Bergrath NOEGGERATH meinen innigen Dank ab.

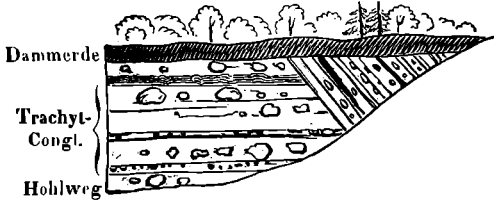
Wenig südlich von dem etwa eine Stunde von Bonn entfernten, bekannten Badeorte Godesberg liegt der kleine Ort Muffendorf am Abhange des hier vom Flusse bereits eine halbe Stunde entfernten Rheinischen Hochlandes, welches übrigens hier bei weitem nicht mehr die Höhe, wie weiter südlich erreicht, sondern vielmehr ganz allmählig bis westlich von Cöln sich in die Ebene verläuft. Oberhalb Bonn steigt das Rheinische Schiefergebirge mit den aufgelagerten Partien des Braunkohlengebirges auf der linken Rheinseite nur noch wenige hundert Fuss auf, während es auf der rechten bekanntlich durch das einspringende Siebengebirge unterbrochen, dann den grossen Busen des Siegthales bildend, Cöln gegenüber sich vom Rheine mehr zurückwendet und sich endlich ebenfalls bei Düsseldorf in die Ebene verflacht. An der oben bezeichneten Stelle nun treten aus demselben gegen die Ebene des Rheinthaales, gewissermassen dem Siebengebirge auf der linken Rheinseite entsprechend, zwei sehr in die Augen fallende Basaltkuppen, gegen Norden der Godesberger Kegel mit seiner schönen Ruine, gegen Süden der Lühnsberg bei Muffendorf hervor. Während der Erstere fast frei sich aus der Ebene zu 300 Fuss Höhe erhebt, und nur durch einen unbedeutenden Rücken mit dem Grauwackengebirge in Verbindung steht, ragt der Letztere nur mit seiner östlichen Hälfte und seine etwa 430 F. hohe

Spitze frei aus denselben hervor, indem sein Rücken, wie durch einen Mantel verhüllt, im Gebirge verborgen liegt *).

Zwischen beiden Bergen, südlich also vom Godesberge, trennt das Thal des Godesbergerbaches das Gebirge, und während dasselbe östlich gegen den Rhein hin, von einigen Basalterhebungen durchbrochen, ziemlich steil abfällt, senkt es sich gegen Nordwesten und Norden allmählig zu dem Bache in sanftem Rücken hinab. Ueber letzteren hinweg führt von Muffendorf aus anfangs durch einen tiefen Hohlweg, an dessen Ende ein Kreuz steht, der Pfad nach dem Kloster Marienforst, welches ein Halbstündchen von Godesberg an dem Bache hinauf gelegen ist. Der bezeichnete Hohlweg gibt uns ein vortreffliches Profil der horizontalen Schichten eines Trachytconglomerates, auf welches wir später zurückkommen werden.

An dem oberen Ausgange des Weges sieht man plötzlich eine Verwerfung der Schichten eintreten: scharf abgesetzt fallen sie auf einmal gegen Osten unter einem Winkel von etwa 35° ein und verlieren sich dann oben unter der Dammerde. Zahlreiche auf der Höhe im Wege und auf einem Felde umherliegende Stückchen weissen und gelben Halbopals, Hornsteines und Feuersteins, welche sich auch weiter nach Marienforst hinab verfolgen lassen, zeigen, dass wir

Fig. 1.



uns hier an Ort und Stelle befinden. Es ergibt sich nämlich bei genauerer Untersuchung, dass sich hier in einer schwarzen, an Kieselsplintern ausserordentlich reichen, 4–6 Fuss mächtigen Dammerde mehr oder minder, oft kaum einige Cubikzoll, oft mehrere Cubikfuss grosse, eckige, kaum oder gar nicht abgerundete Blöcke eines nicht selten Pflanzen und Conchylien enthaltenden Quarzgesteines durch und untereinander liegend befinden, unter welcher dunklen Erde scharf abgeschnitten eine Lage einer weissgelblichen sich befindet, welche ohne Schichtungsverhältnisse erkennen zu lassen, als Product der Verwitterung jenes unten anstehenden Trachytconglomerates angesprochen werden muss, indem Bröckchen noch nicht völlig zersetzten Trachyts darin vorkommen.

Diese quarzigen Gesteine sind, wie wir bereits angedeutet haben, mineralogisch ziemlich verschieden; oft aber kann man an einem einzigen Blocke alle Arten dersel-

*) Zur Erläuterung namentlich der örtlichen Verhältnisse habe ich eine genaue Karte des Terrains nach der preussischen Generalstabkarte entworfen. In Betreff der geognostischen Illumination bemerke ich, dass ich den gewöhnlichen weniger genauen Weg verlassend, nur da Farben bezeichnet habe, wo sich die entsprechenden Gesteine mit Bestimmtheit nachweisen lassen. Die weiss gelassenen Partien sind so mit Dammerde oder Löss bedeckt, dass sie genauere Bezeichnungen nicht zulassen, und wenn auch die Grauacke ohne Frage die Grundlage des Gebirges bildet, so ist doch sehr wahrscheinlich, dass noch manche, der Braunkohle angehörende Gebilde auf ihr ruhen, die aber nicht aufgeschlossen und daher in ihren Lagerungsverhältnissen unbekannt sind.

ben deutlich beobachten. Die meisten und massiveren Blöcke bestehen zum grossen Theil aus einem dichten, weisgrauen, manchmal ins Bräunliche oder Gelbliche, oder auch tiefer Schwärzliche übergehenden

H o r n s t e i n

mit undeutlich flachem, grossmuscheligen ins Grobsplittrige übergehenden Bruche von ziemlicher Sprödigkeit, welcher an den Kanten wenig durchscheinend, matt, manchmal gelb und weisslich oder grau gestreift, oder auch fast geflammt ist. Dieses Gestein ist es vorzüglich, welches Versteinerungen enthält, die entweder innerhalb der umgewandelten Schale mit Kieselmasse völlig ausgefüllt sind, oder auch als Steinkerne lose in ihm liegen; oft wurde die Schale nur äusserlich umschlossen, oder nur zum Theil ausgefüllt, so dass dann die hohlen Abdrücke zurückblieben.

Die nicht selten gerade im Hornstein vorkommenden Löcher und Höhlungen sind offenbar zum Theil durch später gänzlich zerstörte und zerfallene Pflanzenreste, namentlich dickere Wurzeln, zum Theil wohl auch durch aufsteigende, im Schlamm stecken gebliebene Blasen von Sumpfgasen entstanden. Namentlich weisen viele der grösseren, leeren oder später wieder erfüllten Räume durch von ihnen aufsteigende Stengel oder Wurzelfasern, wie auch die Beschaffenheit ihrer Wände, welche den vollkommenen Abdruck jener Wurzeln darbieten, auf das deutlichste jene erste Entstehungsart nach. Diese Blasenräume haben oft einen halben bis einen Fuss im Längsdurchmesser bei einer Höhe und Breite von einem bis zu mehreren Zollen, und sind immer mehr oder weniger unregelmässig. Auch kleinere organische Reste, wie Schnecken, Nymphaeensamenkörner und dergleichen haben zum Theil solche, dann aber stets an der Gestalt erkennbare Löcher veranlasst, während die Luftblasen immer ziemlich regelmässige ellipsoidische Räume von $\frac{1}{2}$ —5 Zoll Durchmesser (die kleineren sind seltner) hinterliessen. Viele dieser Höhlungen wurden später ausgefüllt; solche, welche etwa durch leere Stengelräume mit der Oberfläche communicirten, durch lehmige, kieselige Erde; die andern nur durch wohl von atmosphärischen Wassern gelöste Kieselerde, die sich als ein verschieden, namentlich weiss und hellblau, auch wohl durch Eisen gelb oder bräunlich gefärbter Chalcedon, entweder in concentrischer Form, oder stalaktitisch, oder in horizontalen Schichten niederschlug, also mit Ausnahme der Amethystkrystalle in derselben Weise, wie die Achate in den Mandelräumen zu Oberstein und in Brasilien vorzukommen pflegen, was uns neuerlichst NOEGGERATH so klar auseinander setzte.

Sehr interessant und ganz einzig in ihrer Art ist aber eine andere Ausfüllungsweise jener Räume, welche wie ich glaube, bis jetzt noch nicht bekannt ist, sich aber doch wohl auch anderswo finden möchte; schlägt man nämlich solche Löcher auf, so fällt Einem nicht selten ein weisses, höchst feines Pulver entgegen, so dass man auf die Vermuthung kommt, es möchte dasselbe aus den Kieselpanzern von Infusorien bestehen; die genauere Untersuchung durch das Mikroskop ergab aber bei 200 mal Vergrösserung, dass durchaus keine Infusorien zu entdecken, sondern dass es viel-

mehr lauter kleine, im höchsten Grade regelmässig ausgebildete vollkommen durchsichtige Bergkrystalle sind, meist in der gewöhnlichen Quarzform mit verhältnissmässig langen Säulen von $\frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{200}$, gewöhnlich von $\frac{1}{100}$ Pariser Linien Länge. Die Säulenflächen dieser zierlichen Krystalle sind häufig auch horizontal gestreift, und letztere liegen merkwürdiger Weise völlig frei neben einander, so dass selbst selten mehrere zusammengewachsen sind. Dieses Factum möchte wohl der Aufmerksamkeit der Mineralogen würdig seyn, da so viel ich weiss, unter ähnlichen Umständen ein solches Vorkommen freier, vollkommener Krystalle niemals beobachtet wurde; es ist um so interessanter, als die Materie, aus der sie sich niederschlugen, doch wohl ebenfalls ein atmosphärisches, also kohlen-saures Wasser war, welches die Kieselsäure aufzulösen vermochte, und wenn es die gehörige Ruhe fand, sie niederschlug. Die nahe liegende Frage, warum in dem einen Falle sich kompakte, unkrystallinische Chalcedone in Schalen, in dem andern hingegen lose Krystalle ausbildeten, möchte wohl schwer zu beantworten seyn; die Gegenwart pflanzlicher Reste scheint keinen Einfluss geübt zu haben, da sowohl Chalcedone wie Bergkrystalle in beiden Arten von hohlen Räumen sich zeigen.

Wie schon erwähnt, wechselt die Farbe des gewöhnlich weissen Hornsteins, und wenn derselbe an den Kanten mehr durchscheinend wird, wenn der Bruch aus dem Splittrigmuschligen mehr ins Flachmuschlige übergeht, so findet sich je nach Verschiedenheit der Farbe und dem Grade der Durchsichtigkeit ein chalcedon- oder feuersteinartiges Quarzgestein, wobei jedoch zu bemerken ist, dass der schönblaue oder weissliche Chalcedon im Ganzen ziemlich selten ist; von seinem Vorkommen in den Hohlräumen war bereits die Rede.

Auf der andern Seite geht der Hornstein, jedoch mit schärferer und bestimmter erkennbarer Grenze in

H a l b o p a l

über, welcher dann eben so in verschiedenen Farben auftritt, wie jener. Wir haben hier aber wohl zu unterscheiden zwischen einem mehr dem Schwimmsteine ähnlichen, weisslichen Halbopale, der dann auch als vollkommener Schwimmstein vorkommt, und durch die Verwitterung entstanden rindenartig die kleineren Chalcedon- und Hornsteinbröckchen, aber auch die grössern Blöcke hin und wieder überzieht, und zwischen einem Halbopale, welchen ich im Gegensatze zu jenem einen primären nennen möchte, der, wie schon gesagt, mit mehr oder weniger deutlicher, manchmal horizontaler Grenze, ja wie geschichtet dem Hornsteine verbunden ist, sich aber nie im Innern eines grossen Blockes, oder so unmittelbar aus dem Hornsteine hervorgehend findet, wie Chalcedon und Feuerstein. Er bildet meist äussere selbst grössere Partien grosser Blöcke des Hornsteins, und dann umschliesst er oft mehr oder weniger voluminöse eckige Stücke jener Gesteine. Er ist meist kleinmuschlig und scharfsplittrig im Bruche und zeigt vorzüglich die lebhafteren gelben, braungelben, schwärzlichen, seltner röthlichen oder

weisslichen Farben, hat einen nicht unbedeutenden Fettglanz und scheint an den Kanten durch. Selten ist eine grünlichgraue Varietät.

Eine Erklärung der Entstehung dieser Opale an unserer Localität möchte wohl manche Schwierigkeit haben, doch kommt uns hier eine andere Localität, die Braunkohlen-Sandsteinbrüche vom Quegsteine im Siebengebirge vielleicht zur Erklärung zu Hilfe. Es findet sich dort in leeren, durch ausgewitterte Pflanzentrümmer entstandenen Räumen, wie auf den Schichtungsflächen zwischen den Lagern des sehr feinförnig, innig durch Kieselcement gebundenen Sandsteines ein ganz ähnlicher nur in seinen Farben etwas ausgezeichneter, manchmal herrlich lauchgrüner Halbopal in sehr dünnen, fein über einander liegenden Schichten, zum Theil aber auch in grösseren und dann fein muschlig brechenden Massen, bei denen die Schichtung nicht mehr erkennbar ist. Hier kann man sich beim Anschauen der Uebergänge aus papierdünnen Lagen zu dem massigen, übrigens nie einen Fuss mächtigen Gesteine des Gedankens kaum erwähnen, dass auch diese Halbopale ein secundäres Product, oder vielmehr ein Educt sind, nur nicht wie jene Schwimmsteine Producte einer von aussen gegen innen vordringenden Verwitterung, sondern vielmehr einer Auslaugung mittelst der atmosphärischen Wasser. Dass sie hier nicht primären Ursprungs sind, beweisen sowohl die häufiger stalaktitischen Formen, wie auch die oft noch unvollkommene Ausfüllung der Schichtungsklüfte. Diese Erklärung möchte aber kaum an unserer Localität bei Muffendorf zureichen, vielmehr wird hier Folgendes wahrscheinlich:

Das besprochene Quarzlager ist wie durch die Conchylien erwiesen worden, die Ablagerung eines Sumpfes, welcher wohl durch Kieselquellen die Masse der Kiesel-erde zugeführt erhielt; die Umstände seiner Entstehung sind also ähnlich wie bei jenen Braunkohlensandsteinen, nur dass dort sandige Massen ins Spiel kommen. Nachdem die Hornsteine gebildet und vielleicht schon mehr oder weniger erhärtet waren, scheinen sie hin und wieder zerrissen worden zu seyn, so dass sich auch einzelne Stücke lösten; dabei mochten die Kieselquellen des Sumpfes einen grössern Gehalt an Eisen-oxydul enthalten, auch sonst wohl etwas modificirt seyn, so dass sich die Halbopale bilden konnten, welche vorzüglich die Risse ausfüllten, die Trümmer umhüllten, und sich hin und wieder auch horizontal ablagerten.

Uebrigens kommen auch in diesen Halbopalen Versteinerungen, und zwar dieselben wie in den Hornsteinen vor; sie sind nur weniger deutlich erkennbar, indem meist die Versteinerungsmasse die Schalen vollständig erfüllt hat. Auch dieses Vorkommen spricht für unsere Ansicht.

Nachdem wir im Vorhergehenden die mineralogische Beschaffenheit unserer Quarze aus einander gesetzt haben, wenden wir uns jetzt zu einer näheren Betrachtung der in ihnen vorkommenden

V e r s t e i n e r u n g e n .

Zunächst also, obwohl diess etwas pomphaft klingt, die fossilen

W i r b e l t h i e r e .

Von solchen habe ich nur einen einzigen Knochen aufzuweisen, nämlich den auf Taf. IV Fig. 1 in natürlicher, Fig. 2 und 3 in vierfacher Grösse abgebildeten Wirbel, welcher offenbar einem Thiere aus der Familie der ungeschwänzten Batrachier angehört; die geschwänzten Salamandrinen und Tritonen sind von vornherein ausgeschlossen, indem sie weit mehr in die Länge gezogene Wirbel, mit viel dünneren Querfortsätzen als ihre Verwandten haben.

Es fand sich dieser Wirbel in einer ganz ausgezeichnet schönen Matrice im Hornstein; von ihm selbst war keine Spur mehr vorhanden; ein Gegendruck in Gutta-Percha lieferte ein vortreffliches Bild desselben. Er steckt mit seiner unteren convexen Körperfläche und mit den beiden Querfortsätzen schief so im Steine, dass die hintere Hälfte des Wirbelbogens mit dem Stachelfortsatze und den oberen Gelenkfortsätzen nicht zu sehen ist.

Die uns zugekehrte untere ellipsoidische convexe einfache Fläche entspricht, da stets die untere gegen den Schwanz hinsehende runde Fläche des Körpers die convexe, die dem Kopfe zugekehrte die concave bei den Batrachiern ist, dieser Schwanzfläche des Wirbels; da ferner die Spiralfortsätze immer mit dem Wirbelbogen nach hinten gekehrt sind, so dass die vordere breite Fläche des Wirbelkörpers, welche uns zugekehrt ist (b) die Bauch- oder die Brustfläche; diese ist nicht sehr convex, fast quadratisch und zeigt einige Ernährungslöcher. Die ziemlich breiten und kurzen, über den Zwischenwirbelausschnitten (c) abgehenden Querfortsätze haben an ihrem Ende ein dickeres Knöpfchen (d) und sind durch zwei seitliche Furchen etwas herausgehoben, eine charakteristische Eigenthümlichkeit, welche wie auch die folgende, an keinem der von mir verglichenen Froschwirbel vorkommt, wo sie nämlich mit den unteren schaufelförmigen senkrecht stehenden Gelenkfortsätzen in Verbindung stehen und den Bogen bilden helfen, sind sie stark schaufelförmig (e) verbreitet. Ueber den Bogen und den Dornfortsatz lässt sich nichts bestimmen; übrigens stehen die Querfortsätze gegen den Kopf hin geneigt.

Vergleichen wir nun hiermit die Wirbel unserer lebenden Batrachier, so ist sehr zu bedauern, dass bei der ausserordentlichen Variation derselben bei den einzelnen Species die vorhandene Literatur sich auf die Einzelheiten nicht näher einlässt, und da mir ausser *Pipa dorsigera*, die gänzlich von dieser Form differirt, keine ausländische Batrachier zur Vergleichung zu Gebote stand, so kann ich nur über die hiesigen Arten referiren. Hier müssen denn zunächst die Gattungen *Alytes*, *Bombinator* und *Hyla* ausgeschlossen werden, indem bei diesen allen der Wirbelkörper im Verhältniss zu den übrigen Theilen sehr vorwiegt, der Bogen mit dem Dornfortsatze sehr glatt

erscheint, und die Querfortsätze ausserordentlich kurz und zart sind; auch die schon näher stehende Gattung *Pelobates* ist abweichend. Am meisten sind die Wirbel der Gattungen *Rana* und *Bufo* mit dem vorliegenden fossilen Wirbel übereinstimmend. Wenn nun bei den beiden lebenden deutschen Froscharten *Rana temporaria* und *R. esculenta* allerdings eine ähnliche schaufelförmige Verbindung der Querfortsätze mit dem Bogen, und zwar nur an dem dritten Halswirbel vorkommt, so stehen doch hier die Querfortsätze, welche bei diesen Wirbeln stets am längsten sind, indem sie fast das Doppelte der Länge des Körpers haben, immer in vollkommen rechtem Winkel zur Wirbelsäule; bei *Bufo (cinereus)* wenden sich die Querfortsätze dieses dritten Wirbels mehr nach hinten und sind auch sehr hoch und lang; dagegen stimmt der achte oder vorletzte Wirbel dieser Thiere (siehe Taf. II Fig. 4 und 5) von allen andern verglichenen am meisten mit unsern fossilen überein, nur sind die Schaufeln (e) nicht so breit an die Querfortsätze sich ansetzend, der Körper tritt nach vorn gewölbt hervor, und ähnliche Differenzen machen sich sonst noch bemerklich.

Dass der Gedanke an eine Vergleichung mit den Wirbeln der zu Orsberg bei Linz am Rheine in der Braunkohle gefundenen *Rana diluviana* GOLDF. (*Palaeobatrachus Goldfussii* TSCHUD.), wie überhaupt mit den fossil gefundenen Fröschen nahe lag, versteht sich von selbst. Obwohl mir eine Vergleichung vieler Exemplare des GOLDFUSS'SCHEN Frosches zu Gebote stand, so sind doch leider bei allen die Wirbel so zusammengedrückt und unbestimmt, dass irgend etwas Sicheres festzustellen hier unmöglich ist.

Die übrigen fossilen Batrachier, welche sich bei GIEBEL *) zusammengestellt finden, ergeben folgendes:

Die drei Species *Rana (Rana antiqua, Volhynica und acquensis)* sind zum Theil unbeschrieben, zum Theil nur nach vorhandenen Gliederknochen bestimmt, und da die Wirbel keiner einzigen entweder vorhanden oder beschrieben sind, so ist über diese weiter nichts zu sagen. Unter den von H. VON MEYER **) mitgetheilten und vortrefflich abgebildeten fossilen Batrachiern von Oeningen ist an *Latonia (Seyfriedii)* eben so wenig zu denken, was sich bei Vergleichung der Abbildungen und der Beschreibung ***) ergibt, wie an *Pelophilus*, da von diesem alle andern Knochen, nur aber nicht die Wirbel zur Vergleichung erhalten sind, auch die Uebereinstimmung des übrigen Skeletts mit *Alytes* und *Bombinator* die Aehnlichkeit der Wirbel in Zweifel ziehen lässt. Die sehr schön erhaltene *Palaeophrynus Gessneri* TSCHUD. †), welche nach MEYER unserer *Bufo Culamita* sehr ähnelt, liegt leider so auf dem Bauche, dass wir gerade die hintere

*) Siche dessen Fauna der Vorwelt Bd. I, 2. Abth. Seite 17 u. s. f.

**) Siche dessen: »zur Fauna der Vorwelt.«

***) S. I. c. S. 18 ff. Taf. 4 und 5.

†) Siche H. v. MEYER I. c. S. 24 ff. Taf. V Fig. 2.

Bogenpartie der Wirbelseite, nicht aber die bei unserem Wirbel nur noch sichtbare Bauchseite, welche die Körper zeigt, sehen können; allerdings hat der vorletzte Wirbel in der Richtung, Form und Länge seiner Querfortsätze mit dem unsrigen grosse Aehnlichkeit, doch scheinen die schaufelartigen Verbreitungen dieser letzteren entweder zu fehlen, oder sie sind, als offenbar sehr zart, nicht erhalten worden; auch mögen sie bei der Ansicht vom Rücken aus nicht in der Deutlichkeit hervortreten, wie von vorne gesehen. Jedenfalls ist also die Aehnlichkeit wohl nicht ganz abzuweisen, wenn auch an eine Identificirung nicht gedacht werden kann.

Das Resultat dieser unserer etwas weitläufigen Untersuchung wäre dann, dass unser Wirbel einem unserem *Bufo* ähnlichen Batrachier angehört habe, und obwohl dieser Knochen so ausgezeichnet schön erhalten ist, lässt sich doch wohl ein weiteres kaum sagen; vielleicht ergibt sich ein günstigerer Erfolg, wenn die von H. v. MEYER aus den Tertiärschichten des Mainzer Beckens uns versprochenen Batrachier erst bekannt seyn werden.

Sonstige Wirbelthierreste liessen sich eben so wenig auffinden, wie organische Reste niederer Classen, ausser den gleich zu beschreibenden Conchylien und einer Crustacee. Es findet sich nämlich hin und wieder eine kleine $\frac{3}{4}$ — 1 P. L. lange

Cypris mit länglicher fast dreimal so langer, als breiter Schale, welche an beiden Enden zugerundet einen sanft eingebogenen, oben hingegen sanft gerundeten Schlossrand besitzt; diese auf Taf. II unter Fig. 30 a von der Seite, in Fig. 30 b im Durchschnitte (hier eines hohlen Abdruckes) abgebildete Species stimmt mit der *Cypris angusta* REUSS *) aus den Kalkmergeln von Kostenblatt so genau überein, dass ich nicht anstehe, sie für dieselbe zu halten.

Unter den

C o n c h y l i e n

scheinen nur Einschaler vorhanden zu seyn; es ist mir wenigstens keine zweischalige Muschel zu Gesichte gekommen. Die vorhandenen Schnecken also gehören grösstentheils der Familie der Helicoideen, nur eine Gattung der Familie der Trochoiden an. Diese letztere, eine *Paludina*, ist nur durch eine, von jenen übrigen die Gattung *Lymnaeus* durch zwei, die Gattung *Planorbis* durch drei Arten vertreten.

Die Gattung *Lymnaeus* möchte man bei oberflächlicher Betrachtung durch drei verschiedene Species repräsentirt halten, doch ergibt die nähere Untersuchung Folgendes.

Ausgezeichnet und ziemlich häufig ist eine ziemlich grosse Art**) mit kurzem bauchigen Gewinde und sehr grossem letzten Umgange, welche man zum Theil ganz falsch

*) S. DUNKER und H. v. MEYER Beiträge zur Naturgeschichte der Vorwelt II. I. 1849. S. 16 f.

**) S. Taf. II, Fig. 6, Fig. 7 und Fig. 8.

für *Lymnaeus longiscatus* BRONGN. *), zum Theil, und so bestimmte sie GOLDFUSS in der Sammlung des Bonner Museums, für *Lymnaeus corneus* BRONGN. gehalten hat. Nur zwei einzige, noch dazu zwei unvollständige Exemplare habe ich gefunden, welche in der That mit dieser BRONGNIART'schen Art sehr nahe übereinzustimmen scheinen. Das bessere Exemplar **) ist nur in einem hohlen Abdrucke der Schale vorhanden, und steckt so mit der Spitze im Hornsteine, dass der letzte Umgang zum Theil verloren gegangen ist. Die Beschaffenheit des ziemlich spitzen Gewindes mit seinen 6 Umgängen kommt dem *Lymnaeus corneus* BRONGN. so nahe, dass man wohl berechtigt ist, dasselbe für diese Art zu halten; ein anderes unvollständigeres Exemplar unterstützt diese Ansicht.

Die übrigen vier bis fünf guten (neben vielen schlechten) Exemplare, welche aber leider nie die Mündung sehen lassen, und wovon ich eines unter Fig. 6 vom Rücken und in Fig. 8 von der Seite abgebildet habe, weichen hingegen wesentlich von *Lymnaeus corneus* ab. Sie sind charakterisirt durch das kurze, dick konische, wenig abgesetzte Gewinde mit vier höchstens fünf Umgängen, von welchen der letzte mehr als drei Viertel der ganzen Länge beträgt, sehr gross und bauchig aufgeblasen ist. Die Mündung scheint eiförmig zu seyn. Die Länge des ausgewachsenen Exemplares beträgt 12—13, die Breite 6—7½ P. Linien.

Diese Charaktere stimmen mit keiner mir bekannten lebenden Art genau überein, so weit ich dieselben in der ziemlich reichhaltigen Sammlung des Bonner Museums und in den Arbeiten von DRAPARNAUD und PFEIFFER vergleichen konnte. Am nächsten kommt unter ihnen noch *Lymnaeus ovatus* DRAP. ***), dessen kegelförmig treppiges Gewinde bei fünf Umgängen spitzer und schlanker, wie überhaupt die ganze Form graziöser und nicht so plump ist; auch erreicht diese Species höchstens eine Länge von 9—11 P. L., während die Breite des letzten Umganges (7 P. L.) im Verhältnisse dazu grösser ist.

Unter den fossilen Arten sind es vor Allem zwei, welche zur Vergleichung herbeizuziehen sind †). Mehr in der Form als in der Grösse steht *Lymnaeus ventricosus* DESH. ††) unseren Exemplaren nahe, doch weicht das Gewinde ziemlich ab. Am näch-

*) Vergl. ZEHLER l. c. S. 218 und THOMAE l. c. S. 54.

**) S. Taf. II. Fig. 9.

***) S. DRAPARNAUD *histoire des Mollusques* p. 50 Pl. II fig. 31 und 31' und C. PFEIFFER *Land- und Wassertschnecken*. Cassel 1821. S. 89. Taf. IV. fig. 21.

†) Die hier und weiter berücksichtigte, mir zu Gebote stehende Literatur war folgende: BRONGNIART *sur les Terrains de l'eau douce* in d. Ann. d. mus. Bd. VII und Bd. XV p. 372 ff.; BRARD *sur les Lymnées fossiles etc.* ebend. Bd. XV S. 406 ff.; DESHAYES *Description des coquilles fossiles* Bd. II. S. 99. Taf. VIII.; REUSS *Beschreibungen fossiler Ostracoden u. s. w.* in DUNKER und H. v. MEYER's Beiträgen Bd. II. Abth. 1. 1849. S. 11 ff.; THOMAE *fossile Conchylien aus den Tertiärschichten bei Hochheim u. Wiesbaden* in Jahrb. d. Vereins f. Naturk. in Nassau 1845. p. 143 ff.

††) l. c. S. 99 Taf. XVII. Fig. 1 und 2.

sten von allen fossilen Formen steht *Lymnaeus pachygaster* THOM. *), abgesehen von seiner viel bedeutenderen Grösse, bietet jedoch auch bei ihm das Gewinde wegen der stärker abgesetzten sechs Umgänge eine nicht ganz unbedeutende Abweichung dar, und wenn man nicht einerseits die unwahrscheinliche Annahme, dass unsere Exemplare alle nicht ausgewachsen seyen, machen oder auf der andern Seite den Begriff der Species weiter fassen will, so muss man doch wohl beide als verschiedene Arten betrachten. Von *Lymnaeus corneus*, welcher ein weit schlankeres Gewinde mit sechs Spirenumgängen hat, welche nicht wie bei unserer Art sich zu einem fast ununterbrochenen Kegel an einander legen, sondern mehr treppenförmig abgesetzt sind, scheint jedoch die Differenz so bedeutend zu seyn, dass wir die Bestimmung von GOLDFUSS wohl entschieden verwerfen müssen. An *Lymnaeus longiscatus* ist aber gar nicht zu denken: höchstens könnte man jüngere und auf der Seite liegende Exemplare, wie sie allerdings nicht selten vorkommen **), mit jener Species verwechseln, was jedoch bei genauer Vergleichung nicht wohl möglich ist.

Da uns nun leider weder alle lebenden noch alle fossilen bekannten Arten, deren eine so grosse Zahl ist, zu Gebote stehen, so würde es für uns misslich seyn, dieser entschieden von den verglichenen abweichenden Species einen Namen zu geben und wir lassen die specielle Bestimmung also dahin gestellt.

Die Gattung *Planorbis*

ist durch drei Arten vertreten, von welchen die erste und grösste offenbar *Planorbis rotundatus* BRONGN. ***) durch das mässig langsam sowohl in Breite als in Höhe, und zwar hier auf der Unterseite schneller, als auf der Oberseite anwachsende Gewinde, welches also auf der Unterseite tiefer genabelt erscheint, von dem viel kleineren und dickeren *Planorbis cornu* BRONGN., welcher häufiger vorkommt, sich unterscheidet †); bei letzterem wächst das Gewinde in jeder Beziehung schneller an, und zwar hier umgekehrt auf der Oberseite mehr in der Höhe, so dass eben diese die tiefer genabelte ist; auch der Querschnitt der Umgänge erscheint bei letzterer Art mehr viereckig, während er bei jener mehr schroff eiförmig mit der Spitze des Eies etwas nach oben gekrümmt ist. Beide Arten stehen bekanntlich unserem lebenden *Planorbis corneus* sehr nahe, so dass dieser das unmittelbare Mittelglied zwischen den beiden fossilen bildet.

Eine dritte, kleinere 2—3 Linien grosse Art, welche sehr häufig vorkommt, habe ich unter Fig. 12—15 Taf. II abgebildet. Das Gehäuse ist auf der Oberseite kaum

*) l. c. S. 155.

**) Vergl. Taf. II. f. 7.

***) S. Taf. II. fig. 10 und b.

†) S. Taf. II. fig. 11.

genabelt, mehr convex; die vier bis fünf, im Querschnitte dreieckigen Umgänge wachsen in der Breite wie in der Höhe auf der Oberseite fast gar nicht, auf der Unterseite aber schneller an und sind auf der letztern etwas treppenförmig abgesetzt. Mit diesen Charakteren kommen genau keine der mir bekannten lebenden oder fossilen Planorben überein; nahe steht unter den ersteren *Planorbis vortex*, dessen Unterseite aber meist fast völlig eben ist, während bei dem fossilen ähnlichen *Planorbis declivis* BRAUN die Umgänge auf der Unterseite etwas stärker in die Höhe anwachsen; dieser letztere steht jedoch dem unsrigen ausserordentlich nahe, und ich möchte sie fast für identisch erachten. Er kommt vor im Süßwassermergel von Wiesbaden.

Ausser diesen Schnecken, von welchen besonders die letzte sehr häufig ist, kommen zahlreiche Paludinen vor, welche aber, wenn gleich die Exemplare, deren Mündung niemals deutlich zu sehen ist, etwas variiren, was ja auch bei lebenden Arten der Fall, auf eine einzige Species zurückzuführen rathsam seyn möchte; da man sie auch aus dem Steine isoliren kann, so ist auch nach der verschiedenen Lage in demselben die Ansicht eine etwas verschiedene. Die Art hat folgende Eigenthümlichkeiten *): Gewinde lang gezogen konisch, mehr oder weniger spitz mit 6—7 Umgängen, von denen der letzte mehr oder weniger stark angeschwollen ist; er beträgt entweder ein Drittel oder fast die Hälfte der ganzen Schalenlänge ($1\frac{1}{2}$ —3 Linien). Die Schale ist mehr oder weniger deutlich gestreift.

Fast völlig übereinstimmend ist *Paludina elongata* MÜNST. aus dem Süßwasserkalke von Mombach, weniger *Paludina acuta* BRAUN aus den tertiären Mergeln von Wiesbaden; bei beiden nehmen die Windungen jedoch rascher zu, wodurch der Kegel kürzer und breiter wird. Von den lebenden Arten ist *Paludina viridis* LAMK. die nächst kommende, doch ist sie ebenfalls nicht so spitz konisch. Da aber keines unserer Exemplare die Mündung deutlich zeigt, so ist auch hier wohl eine nähere Bestimmung unzulässig.

Ausser den angeführten Versteinerungen kommen nur noch kleinere Limnaeenformen vor, die sich aber alle wohl als jüngere Exemplare auf die obige Art zurückführen lassen.

Im Uebrigen ist hiermit die Betrachtung der fossilen Thiere unserer Hornsteine geschlossen, da ich auch, wie gesagt, nach Infusorien mich vergeblich umgesehen habe, und somit gehen wir zur Beschreibung der

fossilen Pflanzenreste

über, welche zwar im Allgemeinen nicht schlecht erhalten sind; da sie aber meist nur aus Rhizomen und Stengelstücken bestehen, an denen die Stellung der Gefässe wie das innere Gewebe durchaus nicht erkennbar ist, so hat die Bestimmung dersel-

*) Vergl. Fig. 16 und 17 Taf. II.

ben ihre bedeutenden Schwierigkeiten. Glücklicher Weise hat sich mir wenigstens mit Gewissheit das Vorhandenseyn einer fossilen *Nymphaea* ergeben. Es finden sich von derselben nicht allein die wegen der Blatt- und Wurzelansätze so höchst charakteristischen Rhizome, sondern man entdeckt auch hin und wieder auf dem Bruche der Hornsteine, wie in ihnen die Blatt- oder Blütenstengel der Pflanze stecken, welche man jedoch nur auf dem Querschnitte als solche mit Bestimmtheit erkennen kann; dass sie nicht den Rhizomen als Blattstielansätze zugehören, geht daraus hervor, dass sie sich nur einzeln zeigen, während bei dem Rhizom nicht nur fast immer die Narben der Wurzelansätze, sondern auch die Narben mehrerer Blattstiele neben einander erscheinen. Da sich diese Stengeltheile eben nur hierdurch von einzelnen Blattstielnarben des Rhizoms unterscheiden, so habe ich es unterlassen, eine Abbildung derselben zu liefern.

In Betreff der letzteren ist zu bemerken, dass bis jetzt allerdings nie ein ganzes aufgefunden ist, sondern nur hin und wieder tritt ein grösserer oder kleinerer Theil eines solchen deutlich erkennbar, obwohl wie es scheint, etwas zusammengedrückt, hervor. Diese uns erhaltenen Theile *) stimmen genau sowohl mit Beschreibung als Abbildung der *Nymphaea Arethusae* BRONGN. **) überein. Wir sehen dieselben Blattstielnarben des Rhizoms ***), welche, rundlich erhaben, vorzüglich fünf grössere von einer verschiedenen Menge kleinerer umgebene cylindrische Vertiefungen zeigen; unter diesen dieselben in verschiedener Zahl vorhandenen Wurzelfasernarben, rundliche concentrische Eindrücke von verschiedenem Durchmesser †). Stellung und Zahl der Höhlungen wie der Narben variiren ebenso bei unsern Exemplaren wie in der BRONGNIART'schen Abbildung, und bei unserer *Nymphaea alba*, während das ganz nahe verwandte *Nuphar luteum* ein auffallend verschiedenes Rhizom hat. Es bleibt also wohl — so weit überhaupt von einem solchen Theile über Identität einer Pflanzenspecies entschieden werden kann, kein Zweifel, dass diese Ueberreste der *Nymphaea Arethusae*, die zuerst in den Mühlsteinen von Longjumeau gefunden wurden, angehören.

Hier erlaube ich mir unmittelbar die Beschreibung eines wohl ohne Frage derselben Pflanze angehörenden Samenkornes anzuschliessen, welches nur zweimal und zwar im Opale gefunden wurde. Höchst wahrscheinlich rühren auch die nicht seltenen kleinen, regelmässigen, eirunden Löcher in den Hornsteinen von solchen Körnern her, da sie in ihren Umrissen wenigstens diesem Korne völlig entsprechen. Dasselbe ist nur

*) Siehe Taf. II. Fig. 18.

**) S. CUVIER *recherches sur les ossements foss. nouv. édit.* Tome III. P. 369 und die Abbildung Tome II. Taf. XI. fig. 10.

***) Taf. II. fig. 18 a.

†) Fig. 18 b.

1 Linie lang und $\frac{1}{2}$ breit, eirund, zeigt einen eirunden Querschnitt, und an der, der Eispitze im Querschnitte entsprechenden Seite zieht sich eine Naht hin, nach welcher zu sich die Oberfläche des Kornes etwas dachförmig gestaltet *). An der scheinbaren Eispitze befindet sich ein kleiner kreisrunder in die Naht auslaufender Eindruck, aus dessen Mitte sich ein kleiner Kegel erhebt; offenbar entspricht der letztere dem aus den Eihäuten hervorsehenden Kerne. Die ganze Oberfläche des Kornes ist fein granulirt und zeigt unter dem Mikroskope **) eine zellige Textur. Der Kern hat nun allerdings grosse Aehnlichkeit mit den von BRONGNIART als *Carpolites ovulum* ***) beschriebenen Samen von derselben Localität, wo sich seine Nymphäe fand. Aber dieses letztere ist völlig glatt; da es frei in dem Gesteine lag, so zweifelte BRONGNIART, ob er eine Frucht mit fehlendem Pericarp, oder ein Samenkorn mit theilweise fehlenden Eidecken vor sich habe; es ist also möglich, dass wir hier das vollständige Eichen — es lag eines fest in der Masse, mit seinen Häuten vor uns haben, und dass somit vielleicht beide Körner ebenfalls identisch sind; denn dass dieselben Samen von Nymphäen sind, wird wohl bei der grossen Uebereinstimmung mit lebenden Nymphäen, namentlich hier mit *Nuphar luteum*, nicht bezweifelt werden. Obige Frage ist aber sehr schwierig zu entscheiden; ja die so scharf erkennbaren einzelnen Zellen der Oberfläche des vorliegenden Kornes lassen auch uns in Ungewissheit, ob nicht auch hier bereits ein Theil der Eihäute zerstört worden, ehe die Versteinerung vor sich ging. Da jedoch petrefactologisch die verschiedene Oberfläche einen entschiedenen Unterschied darbietet, so möchte man vielleicht dieses Korn als *Carpolites granulatus* hinstellen können.

Ausser diesen beiden leidlich bestimmbar Pflanzenresten finden sich noch mehrere und zwar in grösserer Menge und Verbreitung, deren Bestimmung grössere Hindernisse entgegenstehen. Wir vermögen sie unter folgende Kategorien zu bringen:

1. Knollige rundliche Wurzeln von verschiedenen Dimensionen bis zu einen Fuss Länge und 1 bis 2 Zoll Dicke, welche mit kugligen, warzenartigen Auswüchsen versehen und hin und wieder mit kleinen kreisrunden Impressionen bedeckt sind †). Von ihnen gehen undeutliche, sich auch wohl verzweigende Stengeltheile aus, an denen ähnliche kleine runde Eindrücke und Querrunzeln bemerklich sind. Auch dünnere Wurzelfasern finden sich an ihnen. Ein Analogon unter lebenden Sumpfpflanzen ist mir nicht bekannt. Diese Theile sind meist nur als hohle Abdrücke in der Masse des Gesteines vorhanden, aus denen alles Organische verschwunden ist. Die

*) S. Taf. II. Fig. 19 a das Korn doppelt, Fig. 19 b und c 9mal vergrössert; in der Figur 19 b von oben gesehen.

**) Fig. 2 c.

***) l. c. Bd. III. S. 364 und Taf. XI. f. 6.

†) Vergl. Fig. 20 und 21 Taf. II.

Figuren sind von Abdrücken in Gutta-Percha entnommen. Fig. 20 zeigt ein solches Rhizom mit Stengel- und Wurzeltheilen von der Seite, Fig. 21 von unten, während hier bei a und b Stengeltheile nach oben aufsteigen.

2. Mehr gestreckte, runzliche, dünnere Rhizome mit vorwaltender Längsrichtung in verschiedener Erstreckung; die Dicke beträgt meist 2—4 Linien; von oben nach unten sind diese wurzelartigen Theile elliptisch, gleichsam zusammengedrückt, was offenbar aber nicht durch die Versteinerung geschah, indem nur in dieser Richtung und nur bei den kriechenden Theilen des Rhizoms dieser Uebergang von der cylindrischen zur zweischneidigen Form hervortritt *). In mehr oder weniger kleinen Zwischenräumen treten deutlich bemerkbare Querrunzeln, von welchen hie und da wie kleine am Rande fein gezähnte und fein längsgestreifte Scheideblätter **) mehr oder weniger deutlich hervorgehen. Zwischen diesen Querrunzeln zeigen sich ebenfalls kreisrunde Impressionen, höchst wahrscheinlich von Wurzelfasernarben herrührend. Von diesen horizontalen Theilen steigen nach abwärts dünnere Wurzelfasern, nach aufwärts dicke stengelartige Gebilde auf, deren Textur wie Oberfläche aber undeutlich ist. Die Stengel haben eine ungleiche Oberfläche mit feinen Längsriefen, hin und wieder kreisrunde Narben.

3. Stengelartige Theile, welche ich unter Fig. 6 a und b derselben Tafel wieder gegeben habe; es sind cylindrische gestreckte Gebilde mit einem Durchmesser von 3 bis 6 Linien, feingerunzelter längsgestreifter Oberfläche. Wo, wie es scheint, die Oberhaut entfernt ist ***), sieht man unter ihr gröbere Längsriefen hervortreten. Ob Knoten vorhanden sind, lässt sich nicht mit Sicherheit sagen; es scheint aber, dass diese Theile Internodialstücke sind, indem sie mit den unter der folgenden Nummer beschriebenen Stengeln, welche deutliche Knoten zeigen, zusammen vorkommen und mit ihnen die Beschaffenheit der Oberfläche theilen.

4. Stengel, von derselben Oberfläche und Dimension, sind an einer Stelle zum Theil abgebrochen, und man sieht †) in einem hohlen Raume des Stengels ein oben abgestumpftes, konisches Stück sich erheben, dessen dem Kegelmantel entsprechende Oberfläche von, der Längsaxe gleichlaufenden, Löchern durchbohrt ist, welche in diesen hineindringen und von innen nach aussen zu kleiner werden; die Schnittfläche des Kegels ist frei von ihnen. Letztere sind deutlich die Oeffnungen von Luftgängen und offenbar haben wir die entblösten Scheiden von Gramineenstengeln vor uns, wie diess aus der Vergleichung namentlich mit *Phragmites* entschieden erfolgt.

*) S. Taf. II. Fig. 22.

**) Fig. 22 a.

***) Fig. 23 a, α.

†) Fig. 24 a und 24 b, Fig. 25.

5. Zuweilen finden sich stengelartige undeutlich quengerunzelte Theile mit unregelmässig längsgeriefter Oberfläche und mit einigen kreisförmigen Narben, wie Fig. 27 zeigt. Seitlich gehen von ihnen knospen- oder sprossenartige Theile aus *), die bei genauerer Untersuchung sich als keulenartige, sphäroidisch geendete Körper kund geben, mit spiralig umgehenden gezähnelten feinen Linien, von welchen Scheidenblättern oder auch jungen Blättern ähnliche Organe ausgehen, welche unmittelbar anliegend, umgekehrt herzförmig ziemlich die Hälfte des Stengels umfassen und fein längsgestreift und am Rande gezähnt sind. Auf der Mitte des sphäroidischen dickeren Endes befindet sich eine kleine napfförmige Grube und bemerkt man hin und wieder auch sonst unregelmässig vertheilt kreisrunde Impressionen.

6. Weniger deutlich sind Theile wie Fig. 29; sie sind den vorigen ähnlich, doch fehlen die blattscheidenartigen Gebilde, dagegen treten Querrunzeln und Längsstreifen deutlicher hervor. Beides scheinen knospen- oder sprossenartige Organe zu seyn, von denen aber nicht bestimmt gesagt werden kann, ob sie mit den früher beschriebenen zusammengehören oder nicht. *Phragmites*, *Glyceria* und andere Gräser, auch die Carexarten haben, wenigstens so weit ich sie der vorgerückten Jahreszeit wegen vergleichen konnte, weit spitzere Sprossen. Etwas Aehnliches bietet allenfalls *Butomus umbellatus* dar.

Wenn es sich nun um eine botanische Bestimmung der aufgeführten Pflanzenreste handelt, so scheint es wohl, dass sie wenigstens zum grossen Theile wenn nicht einem und demselben Pflanzengeschlechte, doch jedenfalls wohl einer Pflanzenfamilie und zwar der der Gramineen angehören. Ueber die unter Nr. 1 aufgeführten Theile wage ich allerdings kein ganz bestimmtes Urtheil abzugeben, da diese auch an Rhizome anderer Sumpfpflanzen (z. B. *Rumex*) erinnern. Die Uebrigen dagegen gehören vielleicht alle selbst einer Art an; das gilt besonders für die unter Nr. 2—4 beschriebenen, von welchen wir die quengerunzelten Rhizome, die Stengel mit längsgestreifter Oberfläche und mit konisch abgestumpften, mit Luftgängen versehenen Scheiden erhalten finden; allerdings lässt sich diess Zusammengehören nicht bis zur Evidenz erweisen, da ich ausser dem in Fig. 6 b abgebildeten Stücke kein einziges vor mir habe, bei welchem ein solcher Stengel unmittelbar mit einem ähnlichen Rhizome zusammenhinge, wenn gleich alle diese Theile neben und durch einander im Hornsteine vorkommen. Ueber die unter 5 und 6 angeführten Reste bin ich zweifelhaft, möchte sie aber jedenfalls wenn nicht derselben, doch einer nahe verwandten Species zuschreiben. Rhizome und Stengel gleichen sehr denen der Gattungen *Arundo* (*Phragmites*), *Scirpus*, *Typha*, zum Theil nur *Acorus*, *Iris* u. A. Jedenfalls wird es am passendsten seyn, wenn wir, wenigstens die unter 2—4 aufgeführten der Gattung *Culmites* etwa als *C. striatus* unterordnen, da eine genauere Bestimmung wohl unmöglich ist. In Bezug

*) Fig. 27 a und Fig. 28 derselbe Theil vergrössert.

auf dieses Urtheil bin ich den freundlichen Mittheilungen des Herrn Prof. GÖPPERT in Breslau vielen Dank schuldig, welchen ich demselben hiermit öffentlich wiederholt ausspreche.

Ich füge hier noch eine kurze Notiz über die Braunkohlensandsteine von Lannesdorf bei; in diesen finden sich, wohl wegen der Grobheit des Materials durchaus keine thierischen Organismen erhalten, dagegen sind Hölzer ausserordentlich zahlreich, leider aber nur im Abdrucke vorhanden, indem die Substanz nicht versteinert, sondern gänzlich zerstört worden ist. Die Bestimmung hat also keine Anhaltspunkte, zumal da die Rinde bereits von der Einschliessung entfernt gewesen zu seyn scheint. Es haben übrigens diese oft ziemlich langen und geraden Theile mit unsern Coniferenhölzern im Habitus eine gewisse Aehnlichkeit. Einmal fand sich hier ein Theil eines dornigen Zweiges mit kleinem Seitendorne abgedrückt, mit welchem ich jedoch wenig zu machen weiss, da die Dornen unendlich vieler und verschiedener Pflanzen einen ganz ähnlichen Habitus an sich tragen.

Wir gehen über zu der Betrachtung der

Lagerungsverhältnisse.

Wir haben bereits oben angeführt, wie die eckigen Hornsteinblöcke mit den splittigen kleineren Fragmenten von Hornstein, Chalcedon, Feuerstein und Halbopal in einer schwarzen, wenig mächtigen Dammerde eingehüllt liegen; wie unter dieser scharf abgesetzt eine bröcklige, wenig schmierige gelbe Erde auftritt, welche offenbar ein Trachytconglomerat ist, auf welchem die Hornsteine abgelagert sind. In dieser Weise erstrecken sie sich längs des Weges, welcher nach Marienforst führt, an dem Bergrücken hinab. Etwa 500 Schritt weit, so lange man sich noch im Walde befindet, ergaben Aufschürfungen die nämlichen Verhältnisse. Tritt man aber aus dem Walde auf das Feld heraus, so wird die überliegende lössartige Dammerde so mächtig, dass sich die unterliegenden Gesteine nicht ermitteln lassen. Man trifft dagegen im Felde umher liegend noch bis an den Godesbergerbach einzelne frei liegende Blöcke von den besprochenen Hornsteinen, die hier meist mehr abgerundet sind. Einzelne rundliche Blöcke von Braunkohlensandstein, von röthlichem Hunsrücker Quarzfels und selbst von Basalt liegen aber ebenfalls zerstreut umher, und deuten auf einen späteren Transport durch die Wässer an diese Stelle hin.

Zu beiden Seiten des Weges weiter oben hinaus lässt sich das Lager nur noch etwa 20 Schritt etwas mehr gegen Nordost, weniger gegen Südost in der Breite, welche also etwa 40 Schritt beträgt, verfolgen, bis dann einerseits südwestlich Quarz-, Quarzfels-, Grauwacken- und Braunkohlensandsteingeschiebe in der Dammerde zerstreut liegen, so dass auch selbst das Aufschürfen keine Hornsteine mehr nachweist; und andererseits nach dem Rheine zu das Trachytconglomerat vollkommen deutlich unter der dünnen ebenfalls hornsteinlosen Dammerde auftritt.

Gegen Norden lässt sich dies erdige Trachytconglomerat noch eine Meile verfolgen; dann findet sich Löss, und unten im Thale unmittelbar hinter Godesberg ist die ziemlich verwitterte Grauwacke in einem kleinen Steinbruche aufgeschlossen, und zeigt hier ein Streichen in der 7ten Stunde, also die allgemeine Streichungsrichtung des Rheinischen Gebirges, neben einem Einfallen gegen NW. unter einem Winkel von 20°. Auch in der nicht weit von dieser Stelle entfernten Quelle des Draitscherbrunnens fand man beim Fassen derselben die Grauwacke anstehend.

Der gegen Osten vorgeschobene steiler abfallende Kamm unsers Rückens wird durch einzelne aus dem Trachytconglomerate hervorgebrochene und von demselben umfasste Basaltmassen gebildet; sie führen den Gesamtnamen „am Wachholder,“ und sind am besten in einem mehr gegen Muffendorf hin gelegenen, etwas grösseren der fünf Steinbrüche aufgeschlossen. Hier stehen mächtige, ziemlich unregelmässige, mannigfach durch horizontale Risse in mehr oder weniger dicke Platten zerlegte Säulen von 2—5' Durchmesser an, welche gegen Osten etwas einfallen. Der Basalt zeigt einen splittrigkörnigen Bruch, ist bläulichschwarz und enthält selten deutlich erkennbare Olivenpartieen, ausserdem weisse und grünliche, undurchsichtige Opale, Arragonit und Hornblende; ZEHLE^{*)} führt auch noch Kalkspath, Feldspath und Sphärosiderit an. Nach oben sind die Säulen von einer braungrünen Erde, dem Producte ihrer Verwitterung bedeckt, in welcher kuglige concentrisch schalige Basaltmassen mit stark verwitterter Rinde liegen, und zwar so, dass man von der mehr oder weniger festen Säule an, den allmählichen Uebergang vortrefflich beobachten kann; da die Verwitterung die Ecken natürlich am ersten angreift, so wandelt sich hier, eben so wie an der Käsegrotte in Berteich, die prismatischen über einander liegenden Säulenstücke zunächst in kuglige um, und diese Kugeln schälen sich mehr und mehr ab, so dass endlich nur noch ganz kleine Kugeln zurückbleiben, welche lose in der Erde liegen; sehr gut lässt sich diess auch in den übrigen mehr nördlichen Steinbrüchen, welche zum Theil sehr verschüttet sind, beobachten. An den Stellen, wo man den Basalt aus dem Trachytconglomerate hervortreten sieht, ist dieselbe von einem dunkeln, chokoladefarbenem zerreiblichen Basalttuffe umgeben, der sich deutlich von dem erdigen, immer einzelne Trachytbröckchen enthaltenden Conglomerate scheidet. Mehr in der Ebene überdeckt der Löss das Conglomerat.

Geht man längs des Gehänges hin nach Muffendorf, wobei man sich abwechselnd auf den beiden Gesteinsmassen befindet, so gelangt man endlich in der Nähe des Ortes ganz in das Gebiet des Trachytconglomerats, welches wir jetzt näher betrachten werden. Am besten ist es in dem öfter erwähnten Hohlwege aufgeschlossen. Hier sieht man es in der bedeutenden Mächtigkeit von 70—80 Fuss — die Tiefe lässt sich nicht weiter bestimmen, wahrscheinlich jedoch würde man bald auf den Basalt oder

*) Siehe dessen Siebengebirge S. 219.

eher noch auf die Grauwacke stossen — horizontal über einander gelagerte Schichten bilden, die sich durch die Zwischenlagerung und die grössere oder geringere Häufigkeit, wie auch durch die Grösse der Trachytblöcke deutlich von einander unterscheiden lassen.

Das Gestein ist ziemlich locker und besteht aus einer gelblichweisslichen trachytischen Erde, welche jene Blöcke von Wallnussdicke bis zur Mächtigkeit von etwa 4 Cubikfuss umschliesst. Dieser Trachyt ist im Allgemeinen noch sehr wohl erhalten, und es lassen sich mit Bestimmtheit zwei Varietäten desselben unterscheiden:

Die grössten und häufigsten Massen zeigen eine graulichweisse, feinkörnige, im Bruche erdige Grundmasse, in welcher sich meist zahlreiche, kleinere, weisse Feldspathparthien neben zollgrossen und grösseren, entweder säulenförmigen einfachen oder tafelförmigen Zwillingskrystallen glasigen Feldspaths porphyrtartig ausgesondert finden. Manche der letzteren sind gebrochen, ohne dass der Riss die Grundmasse weiter durchsetzt. Dieses Gestein, obwohl theilweise mehr verwittert, ist mit dem vom Drachenfels im Siebengebirge durchaus identisch, und es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass diese höchst charakteristischen nirgends als an der bezeichneten Localität anstehenden Trachytblöcke eben daher rühren, und durch die Wässer, sie sind ja wie alle übrigen völlig abgerundet, hierher transportirt wurden.

Eine zweite Varietät des Trachytes lässt kleine, weissliche, kaolinartig verwitterte Feldspathkrystalle, zahlreiche braune Glimmerblättchen und Hornblende in einer grauröthlichen Grundmasse erkennen, sich nicht mit Bestimmtheit auf ein anstossendes Gestein zurückführen, und wiewohl sie mit gewissen an der Wolkenburg im Siebengebirge vorkommenden Trachyten eine bedeutende Aehnlichkeit hat, möchte ich doch die Identität beider nicht mit Gewissheit hinstellen.

Eine dritte Art trachytischen Gesteins, welche ZEHLE^r *) als blockweise im Conglomerate vorkommend anführt, und welche an den kleinen wohlausgebildeten Feldspathkrystallen neben grünlichen Hornblendeparthien erkennbar seyn und von Berkum auf der linken Rheinseite herkommen soll, habe ich nicht aufgefunden, ohne dass ich die Möglichkeit des Vorkommens jedoch bestreiten will. Hingegen finden sich Blöcke eines trachytischen Zersetzungsconglomerats vor, mit violettgrauer Farbe, erdigem Bruche und undeutlichen, weissen, zersetzten Feldspathkörnchen, welche deutliche Schichtung erkennen lassen. Es gehören diese Blöcke offenbar einem trachytischen Zersetzungsconglomerate an, wie sich diese so häufig in der Umgebung trachytischer Eruptionen finden, und sind von ihrer ursprünglichen Lagerstätte losgerissen, da es von ziemlicher Festigkeit ist, bei dem Transporte durch die Wässer abgerundet und hierher geführt worden.

*) S. l. c. S. 220.

Von der am Ende des Weges auf der Höhe stattfindenden Verwerfung der horizontalen Schichten war bereits oben die Rede *). Möglicherweise ist dieselbe durch das Hervordringen der naheliegenden Basalte am Klosterberge und am Wachholder verursacht. Es zeigt leider das Trachytconglomerat in der unmittelbaren Umgebung der letzteren, keine Schichtung. Für die spätere Entstehung der Basalte spricht übrigens die (wie es scheint) gänzliche Abwesenheit von Basalttrümmern unter den abgelagerten Gesteinen des Conglomerates, die doch schwerlich fehlen würden, wenn die Basalte des Wachholder-, Klosterberges oder Lühsberges bereits vorhanden gewesen wären. Auch sieht man nicht ein, warum nicht auch diese Basaltmassen wenigstens die ersteren, von den Trachytgeröllen überdeckt sind, wenn die Ablagerung der letzteren nach der Entstehung der Basalte Statt hatte, da sie doch an höher gelegeneren Stellen des Rückens gefunden werden. Alles dies wird aber erklärlich, wenn wir die grössere Jugend der Basalte statuiren, welche ja zum grossen Theile mit nur wenigen Ausnahmen auch im gegenüber liegenden Siebengebirge angenommen werden muss.

In einem etwas südlicher von Muffendorf auf die Höhe des Klosterberges führenden Hohlwege, wie auch in einem zwischen den beiden Wegen befindlichen verfallenen Steinbruche lässt sich das Conglomerat ebenfalls beobachten, doch ist es nicht so aufgeschlossen, um über die Schichtungsverhältnisse bestimmte Auskunft zu geben.

Am Klosterberge wird das Trachytconglomerat wie bereits erwähnt, wiederum vom Basalte entschieden durchsetzt; an den Grenzen tritt ein ähnlicher Tuff auf, auch scheint eine kleine Stelle in einem südlicheren Wege aufgerichtete Schichten des Trachytconglomerats zu zeigen, mindestens ist hier dasselbe in fast senkrechter Richtung sehr zerklüftet. Der Basalt ist der nämliche wie der des Wachholders, jedoch stärker verwittert und in kleine faustgrosse Kugeln zerfallen. Weiterhin findet man unter denselben Verhältnissen, eben so von einem Tuffe umhüllt, kleine Basaltmassen zwischen dem Conglomerate empordringend.

An dem Wege, welcher von der Kirche von Muffendorf durch den Löss gegen den Haiger Hof hinaufführt, sieht man kuglig verwitterten Basalt unter Geröllmassen anstehen, in welchen letzteren neben zahlreichen Quarzgeschieben Hunsrücker Quarzfels, Grauwacke, Braunkohlensandstein, auch einzelne abgerundete Basalt- und Trachytconglomeratstücke vorkommen; letztere gehören einem feinen, kaolinartigen, weissgelblichen Zersetzungsconglomerate an, in welchem sich hin und wieder Blätter und andere Pflanzenreste finden. Uebrigens ist diess offenbar dieselbe jüngste allgemeine Bedeckung, welche nicht allein die ganze westlich von der besprochenen Gegend gelegene Hochebene, wie die weiter südlich und östlich gegen Lannesdorf hin befindlichen Höhen, sondern das ganze Vorgebirge weit nach Nordwesten hin überlagert.

*) Vergleiche das Profil Fig. 1.

Gegen den Lühnsberg hin lässt sich die Grenze des Trachytconglomerates wegen des allverbreiteten Lösses nicht weiter bestimmen; jenseits des Berges gegen Süden hin tritt es wohl nicht mehr auf, es müsste denn völlig verdeckt seyn.

Der basaltische Kegel des

L ü h n s b e r g e s ,

von welchem sich eben nicht mit Bestimmtheit angeben lässt, aus welchen Gesteinmassen er hervorbricht, wahrscheinlich ist es die Grauwacke, tritt, wie bereits erwähnt wurde, nur nach der Rheinseite hin frei aus dem Gebirge hervor und ist uns in mehr als einer Beziehung interessant. Zunächst fällt sogleich die Form der der Hauptsache nach meilerartig gruppirten Säulen in die Augen; es sind nämlich die Seitenflächen der Säulen durch quer über sie hinlaufende Einkerbungen, welche in unregelmässigen Zwischenräumen von einander stehen, in ähnlicher Weise gestaltet, wie die Zickzacksäulen von Oberkassel, wiewohl am letzteren Orte die Erscheinung weit ausgebildeter und regelmässiger hervortritt *). So bilden unsere Lühnsberger Säulen ein vorzügliches Mittelglied zwischen den seltenen, rein prismatischen mit geraden Seitenflächen und den gegliederten und käseartigen Formen von Staffa und der Landskrone im Ahrthale. Aus einem älteren Steinbruche, welcher über dem jetzt im Gange begriffenen weiter oben gegen die Spitze des steil abfallenden Berges hin liegt, habe ich die Säulengruppe der Tafel III zur Erläuterung des Gesagten beigelegt.

Was den Lühnsberger Basalt selbst betrifft, so zeigt er grosse Uebereinstimmung mit dem oben vom Wachholder beschriebenen; er ist blauschwarz, splittrigkörnig im Bruche und enthält ausser säuligem Arragonit, Kalkspath, Sphärosiderit, schöne, offenbar durch spätere Infiltration in den Blasenräumen zum Theil in concentrischen, verschiedenfarbigen Schalen abgesetzte grüne und weisse, undurchsichtige, auch wohl halbdurchsichtige oder milchige Opale. Olivin scheint sehr selten, Hornblende oft in grösseren Parthien, wie auch Labrador vorzukommen. Einmal fand ich auch als Einschluss ein durch die Hitze zerrissenes und glasig verändertes Quarzstückchen, welches, wie man sie auch zu Oberkassel im Siebengebirge und anderswo findet, aus der Tiefe mit heraufgebracht zu seyn scheint. Ueberhaupt hat das Gestein in jeder Beziehung grosse Aehnlichkeit mit dem von Oberkassel.

Verfolgen wir hinter dem Lühnsberge den vom Haigerhofe nach Lannesdorf führenden Fussweg, so gelangen wir den Wald verlassend noch auf der Höhe an die hier zum Zwecke der Pfeifenfabrication in Gruben vortrefflich aufgeschlossenen Braunkohlenthone und Sandsteine, mit deren näheren Verhältnissen wir uns jetzt zu beschäftigen haben. Obenauf sehen wir unter dem Humus eine sehr verschie-

*) S. NÖRGERATH in FRÖRING'S Notizen 1848. N. 164 und C. O. WEBER in den Verhandlungen d. n. Vereins f. Rheinald. u. Westphalen. Jhrgg. VI. S. 155

den 4—12 Fuss mächtige Schicht des bereits oben beschriebenen Gerölles liegen, welches zunächst eine 6 Fuss mächtige Lage eines feinen, weisslichen oder bläulich- und gelblichgrauen, plastischen, hin und wieder etwas sandigen Thones bedeckt. Dann folgt ein 2—3 Fuss starkes Lager eines sehr feinkörnigen, und durch Kieselmasse innig gebundenen Braunkohlensandsteines, unter welchem wieder in unbestimmter Mächtigkeit der Thon auftritt. Aus dem Auftreten eines etwas gröberem, mehr sandigen und nicht so innig gebundenen Sandsteines in einer weiter unten gelegenen Grube, die zahlreiche Holzabdrücke — die Hölzer selbst sind daraus verschwunden — enthält, in der Mächtigkeit von 10—12 Fuss eben so zwischen den Thon eingelagert, lässt sich vielleicht schliessen, dass zwei solche Zwischenlagerungen von Sandstein Statt haben, doch ist diese zweite untere Schichte nur an dieser einen Stelle sichtbar. In dem Thone finden sich zuweilen kleine Parthien Braunkohle.

Verfolgt man den Hohlweg in das Thal, so kommt man weiter unten an eine Stelle, wo unter der Decke des plastischen Thones eine fast gänzlich gebleichte, weisse oder hellröthliche, sandige, schiefrige Grauwacke mit ziemlich steil aufgerichteten Schichten und dem Streichen in der 6ten Stunde auftritt; sie ist hier so aufgelöst und gebleicht, dass man fast glauben sollte, der Thon sey unmittelbar aus ihr hervorgegangen, wenn man nicht letzteren deutlich abgeschnitten über den Köpfen der Grauwacke aufgelagert sähe. Ob diese eigenthümliche Metamorphose des Gesteines durch kohlen-saure Quellen, oder durch den überliegenden Thon durch Einwirkung von oben herunter bewirkt worden, will ich nicht entscheiden. Doch hat die erstere Ansicht Manches für sich, da einmal kohlen-saure, durch die Grauwacke aufsteigende Quellen bekanntlich eine solche Bleichung und Zersetzung der Grauwacke leicht hervorbringen, dieselben auch noch jetzt in der Umgegend nicht selten sind, früher aber namentlich um die Zeit der plutonisch-vulkanischen Thätigkeit dieser Erdregion hier vielleicht noch häufiger waren, und endlich eine solche Einwirkung des Thons auf die Grauwacke sonst nicht bekannt ist. Zwischen den Schichtungs- und Schieferungsklüften findet sich übrigens hier ein fleischfarbiger Speckstein.

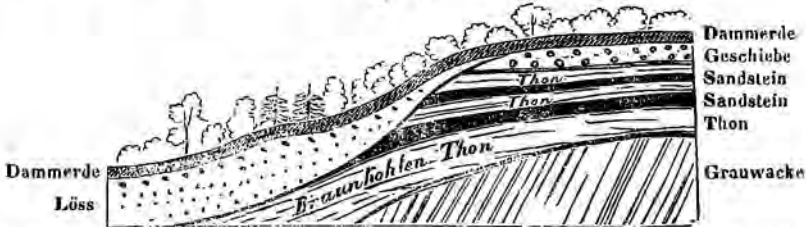
An dem gegenüberliegenden Abhange soll die Grauwacke ganz in ähnlicher Weise unter dem Thone auftreten, doch habe ich die dort aufgeschlossenen Stellen nicht aufgefunden.

Noch mehr abwärts liegen im Wege, wie auch gegen Norden auf den Feldern am Gehänge des Lühsberges abgerundete Blöcke eines sehr groben conglomeratartigen Sandsteines, welcher bis faustgrosse Quarzgerölle in sandig quarzigem Bindemittel enthält; übrigens nirgends ansteht. Wahrscheinlich sind die Blöcke durch Wasser transportirt, mindestens von ihrer, wenn auch vielleicht nicht sehr entfernten Lagerstätte fortgerissen, und stehen wahrscheinlich in demselben Verhältnisse zu den hiesigen Braunkohlensandsteinen, wie ein ganz ähnliches am Quegstein im Siebengebirge gegenüber zwischen den Sandsteinen schichtenweise vorkommendes grobes Quarzconglomerat.

Endlich tritt gegen Lannesdorf zu in grosser Mächtigkeit von 40' — 60' der Löss auf, deutlich über den Thon gelagert, der sich unter ihm nicht weiter verfolgen lässt.

So möchte sich das Profil des besprochenen Abhanges etwa in der Weise gestalten, wie es Fig. 19 zeigt.

Fig. 19.



Von Lannesdorf führt über den Rücken, welcher, das Zilliger Haidchen genannt, gerade hinter Mehlem zwischen dem von Bochem herabkommenden, den Fuss des Roderberges, des bekannten äussersten Eruptionskraters unserer Eifel, bespülenden und dem Lannesdorfer Bache sich hinzieht, ein Hohlweg auf die Höhe zu den Mehlemer Thongruben. In diesem und in den von den andern Seiten heraufkommenden Hohlwegen, namentlich in der sogenannten Deusenberger Schlucht *) zeigen, wie auch schon C. THOMAS **) und nach ihm ZEHLER ***) angeben, zwischen den Löss eingelagerte Schichten kleiner erbsengrosser Rapilli, eben so wie die ausgezeichneten durch die Einwirkung des vulkanischen Feuers, in welches sie hineingeriethen, mit einer glasisgen Rinde umhüllten Quarz- und Grauwackengeröllstücke, welche auf dem Roderberge selbst zwischen den Rapillis vorkommen, dass die Thätigkeit dieses Vulkans zwischen die Periode der Löss- und Alluviumbildung hineinfiel.

Die Thonlager des Zilliger Haidchens sind lange nicht so schön aufgeschlossen, wie die bei Lannesdorf; es finden sich auch hier einzelne eckige Blöcke von Braunkohlensandstein, doch liess sich kein zusammenhängendes Lager derselben entdecken. Nach Liessem zu steht über der Grauwacke ziemlich mächtig eine erdige und feste Braunkohle mit Zwischenlagern von Pazinkohle und weissen, feinblättrigen Infusorienlagern an, welche oben mit Gerölle bedeckt ist. Wenn auch hier Blöcke des Sandsteins vorkommen, so vermag ich doch nichts über die näheren Lagerungsverhältnisse anzugeben. — Es bleibt uns dann endlich noch die

geologische Bestimmung

des relativen Alters und der wahrscheinlichen Entstehungsweise unserer Süsswasserquarze übrig, denn dafür haben wir von vornherein die Hornsteine wegen der Süsswasserconsumtion zu erklären uns vorgenommen.

*) Den auf der Karte mit I, II und III bezeichneten Stellen.

**) S. dessen: der vulkanische Roderberg, Bonn 1835 S. 38 ff.

***) S. l. c. S. 231.

Was nun hier zunächst das Alter dieses kleinen Absatzes in localer Beziehung betrifft, so ist wohl keine Frage, dass wenn auch die Ablagerung eine spätere Zerstörung, die offenbar weniger durch die Wasser, als vielmehr durch sonstige Einwirkung, wahrscheinlich aber durch eine Zerreiſung bei Emporhebung der Basalte vor sich gegangen, erlitten hat, dieselbe doch an ihrer ursprünglichen Stelle sich befindet, da wir nirgends anderswo Spuren von derselben entdecken konnten, auch die einzelnen Blöcke, als durchaus nicht abgerundet, keine Spuren irgend welches Transportes an sich tragen; wie sollten sie auch in solcher Menge an einem so beschränkten Orte zusammen gebracht seyn? Später allerdings scheinen einzelne Blöcke vom Wasser ergriffen und über den Abhang zerstreut zu seyn, was wir ja bereits oben andeuteten. Dann aber ist auch wohl gewiss, dass die Süßwasserquarze jünger sind, als das unter ihnen abgelagerte Trachytconglomerat und somit auch jünger, als der Drachenfels. Zu den Thonen und Sandsteinen bei Lannesdorf stehen die Hornsteine in keiner Beziehung, wenigstens liess sich durchaus kein relatives Verhältniss zu diesen der Analogie nach wenigstens wohl älteren Bildungen auffinden.

Ueberhaupt sieht es um die Bestimmung des Alters des Rheinischen Braunkohlensystemes, namentlich der fehlenden Versteinerungen wegen, weniger in Bezug auf die Trachyte und Basalte des Siebengebirges und seiner Umgegend, nicht sehr günstig aus. Ueberall jedoch scheint der Trachyt älter zu seyn, als das Braunkohlengebirge; nirgends wenigstens sieht man ihn direct über demselben gelagert, oder dasselbe offenbar von ihm gehoben; wenn hin und wieder allerdings, wie z. B. am Quegstein das Trachytconglomerat die Braunkohlensandsteine offenbar überlagert, so ist diess noch kein Beweis für das jüngere Alter der Trachyte; man findet aber hin und wieder, wie namentlich zu Utweiler das Trachytconglomerat unter der Braunkohle *), über dieser den Thon und dann darüber den Basalt, was offenbar für das jüngere Alter der Braunkohle in Bezug auf den Trachyt, für das ältere in Bezug auf den Basalt spricht; letzteres ist aber nicht immer der Fall, wie man denn ja überhaupt eine gewisse längere Periode, in welcher nach und nach, wie Trachyte, so am Rheine später die Basalte empordrängen, annehmen muss. Beim Wintermühlhofe im Siebengebirge am sogenannten Quegsteine findet sich der Braunkohlensandstein auf plastischem Thone unter einem Einfallen seiner Schichten von 18° gegen den Petersberg (Basalt) hin, ruhend; man könnte hier an eine Hebung durch den Basalt denken, eben so gut berechtigt ist aber die Annahme, dass diese Schichten sich nicht auf ihrem früheren Platze befinden, sondern durch einen Bergschlupf auf dem plastischen Thone in diese Lage gelangt seyen: keine dieser Ansichten steht hinter der andern zurück, da ein direkter Beweis an solchen Localitäten leider eine Unmöglichkeit wird. Denn ich kann durchaus nicht mit ZEHLEER **) übereinstimmen, welcher diesen Sandstein vom Queg-

*) S. NOEGGERATH: Zusammenvorkommen von Basalt und Braunkohlen. KARSTEN'S Archiv V. 1832. S. 138. ff.

**) S. dessen Siebengebirge S. 136 f.

steine nicht für einen bloss mechanischen Absatz aus dem Gewässer gelten, sondern vielmehr zugleich chemische Kräfte und namentlich durch Vermittlung einer höhern Temperatur dabei haben walten lassen will. Diese sucht er dann in einer Frittung vermittelst der Hitze des aufsteigenden Basaltes vom Petersberge; und hier ist eine solche Annahme eine sehr bedenkliche, wenigstens lässt sich mit ihr durchaus nicht das Vorkommen einzelner Schichten, welche durchaus diesen Habitus der Frittung nicht an sich tragen, und zwischen den andern mitten inne gelagert sind, wie diess namentlich bei den Blätterführenden Schichten der Fall ist, vereinigen. Auch zeigen die oberen Sandsteine von Lannesdorf, welche zwischen den weissen gar nicht veränderten oder etwa gar gebrannten Thonen liegen, ganz denselben Habitus. Ich glaube vielmehr, dass die letztern nur von einer sehr innigen Zementirung und Durchdringung der höchst feinkörnigen Sandsteine mit Kieselgallerte herrührt, woraus sich denn auch erklärt, dass einzelne Schichten, bei deren Bildung vielleicht die Quellen, welche die Kieselsäure hergaben, nicht so reichhaltig an der letzteren waren, einen mehr rein sandigen Charakter zeigen, wie z. B. auch die untern Sandsteine von Lannesdorf. In diesen Sandsteinen vom Wintermühlenhofe kommen in feinkörnigen Schichten übrigens auch höchst zahlreiche und gut erhaltene Blattabdrücke dicotyledonischer Pflanzen vor, über die wir vielleicht nächstens Specielleres mitzutheilen im Stande seyn werden.

Ohne uns noch weiter auf die Erörterung der Zeitverhältnisse der Niederrheinischen Braunkohlenformation einzulassen, verweisen wir hierüber nur namentlich auf NOEGGERATH'S „Einiges über Braunkohlensand und Sandstein u. s. w.“ *) und auf die Zusammenstellung, welche neuerlichst AD. OVERWEG in seiner Dissertation über die Wolsberge bei Siegburg **) gegeben hat. So viel scheint gewiss zu seyn, dass überall diese Formation jünger ist, als die Trachyte, zum Theil auch wohl als die Basalte, dass die Bildung des Trachytcglomerats, das Emporsteigen mancher Basalte zu verschiedenen Zeiten innerhalb der Braunkohlenepoche statt fand, und dass im Allgemeinen, während sehr häufig sich die verschiedenen Glieder dieser Formation local ersetzten, eine bestimmte Ordnung in der Reihenfolge derselben nicht leicht fest zu stellen ist; indem an einigen Orten, so namentlich zu Lannesdorf, der plastische Thon, an andern der Braunkohlensand und Sandstein, wie zu Liedberg ***) und an andern Localitäten, als das älteste Gebilde der Braunkohlenformation auftritt, während die Braunkohlen selbst zum grossen Theile über dem plastischen Thone liegen, oft wieder von demselben überlagert werden, und endlich die ganze Formation mit einer mächtigen Ablagerung von Gerölle geschlossen wird.

So lässt sich denn aus den geognostischen Verhältnissen, die uns leider hier die einzige Stütze für geologische Bestimmung sind, indem wie es scheinen will

*) In dessen Rheinland-Westphalen IV. S. 364.

**) Bonn 1847 S. 6 ff.

***) S. NOEGGERATH I. c. S. 372 ff.

die Petrefacten in den Thonen und Sandsteinen fast gänzlich fehlen *), weiter nichts folgern, als dass die Süsswasserquarze von Muffendorf ebenfalls nur jünger sind, als die Trachyte, während geognostisch das Verhältniss zu den übrigen Gliedern der Braunkohlen unserer Gegend ein völlig unermitteltes bleibt.

Wie ungenügend eine solche Altersbestimmung von sedimentären Schichten nach dem Emporsteigen eruptiver Massen ist, während doch das Umgekehrte der Fall seyn sollte, braucht nicht aus einander gesetzt zu werden. Es scheint übrigens dennoch nicht unwahrscheinlich, dass die Braunkohlensandsteine nicht reine Süsswasserbildung, sondern eine Bildung des flachen Ufermeeres sind, da die Blätter wie auch die Holzabdrücke für die Nähe des festen Landes sprechen. Es bleibt uns demnach weiter nichts übrig, als durch das Vergleichen der Petrefacten und durch das Vorkommen der Süsswasserkiesel an andern Orten wenigstens annähernd das Alter der Muffendorfer Hornsteine anderen Tertiärgebilden gegenüber festzustellen.

Wenn es nun aber einerseits bei allen Tertiärgebilden, namentlich wo Süsswasser und Meeresbildungen mit einander wechseln, wegen ihrer, wie es scheint durchaus localen, daher von einander unabhängigen und ausserdem durch klimatische Einflüsse differirenden Entstehungsweise schon sehr schwierig ist, zwischen zweien von einander ganz gesonderten, in verschiedenen Becken und oft gewiss zu sehr verschiedenen Zeiten erfolgten Ablagerungen überhaupt nur ein Altersverhältniss anzugeben, zumal da manche Conchylien auch bestimmt zeitlich verschiedene Tertiärbildungen hindurchgehen, so muss diess um so precärer werden bei Gesteinen, die, wie die unsrigen, nur wenige bestimmte Petrefacten darbieten. Es kann hier wohl nicht mehr davon die Rede seyn, nach dem procentigen Vorkommen lebender Arten kurzweg unseren Quarzen ihre Stellung anzuweisen (die hier gewiss ganz fälschlich, da, wie es scheint, keine lebende Art darin enthalten, in das pliocene Gebirge hineinfallen würde); wir weisen nur, ohne auf den Streit über die Artenbestimmung und die Identität lebender und fossiler Arten einzugehen, in der Kürze auf die grosse Schwierigkeit hin, welche die Behauptung, dass diese oder jene Art lebend nicht mehr vorkomme, sich entgegenstellt, da es wohl selten einem Forscher vergönnt ist, alle bekannten Arten zu überschauen, geschweige denn, dass gewiss bei diesen Thierclassen auf der Erde noch jetzt Arten existiren, von denen wir keine Ahnung haben.

Die einzigen von uns gefundenen, auch anders woher bekannten Arten waren, wie wir oben gesehen, mit Bestimmtheit nur *Planorbis rotundatus* und *Planorbis cornu*. Beide kommen, um zuerst die als feststehend angenommene Norm für Tertiärgebilde, das Pariser Becken, zu vergleichen, in den Mülhsteinen von Montmo-

*) Ein einziges Cardium fand Herr Berghauptmann von Dreben, wie er mir mitzutheilen die Güte hatte, vor einigen Jahren in einem feinkörnigen, quarzigen Sandsteine bei Glasbach in der Nähe von Mühlheim am Rhein.

rency und Fontainebleau und in den Süßwasserkalken des letzteren Ortes vor *), und wir werden somit verwiesen auf die dritte Süßwasserbildung, auf die allerjüngsten Schichten des Pariser Beckens unmittelbar unter dem Diluvium, welche der älteren Bestimmungsweise nach als miocene Bildungen betrachtet werden. *Planorbis rotundatus* kommt allerdings auch zu Soissons und Bagnoux im plastischen Thone **) und nach ELIE DE BEAUMONT ***) in den Gypsen vor; nehmen wir an, was doch kaum zu bezweifeln, dass unsere Nymphaea mit der *Nymphaea Aretusae* BRONGN. identisch ist, und abstrahiren wir davon, dass eine Pflanzenart auch zu verschiedenen Zeiten vorkommen kann, so werden wir neben dem feststehenden Vorkommen von *Planorbis cornu* noch bestimmter auf jene jüngste Süßwasserbildung hingewiesen. Leider fehlen, wie es scheint, die sogenannten Gyrogoniten, die Samenkörner der Charen, welche jener Pariser Formation eigenthümlich sind, bei uns in den Muffendorfer Quarzen gänzlich.

Unter den Böhmischen, im Allgemeinen nach REUSS dem mittleren Tertiärgebilde angehörenden, mit den Süßwasserbildungen von Oeningen, namentlich aber des Mainzer Beckens gleichstehenden Braunkohlengebilde, ist es vorzüglich der Süßwasserkalk von Kostenblatt mit seinen Halbopalen, welcher vielleicht — denn die Aehnlichkeit des Gesteins kann natürlich keinen Grund zur Vergleichung abgeben — wegen der darin vorkommenden *Cypris angusta* mit unserem Süßwasserquarze parallelisirt werden könnte. Allein die übrigen in ihm enthaltenen Reste, namentlich von Lymnaeen und Planorben sind wie REUSS †) angibt, eben so wie die zu Miereschowitz in den Halbopal führenden Tuffen vorkommenden, unbestimmbar, und wir können daher über das Verhältniss zu diesen, der ältern Reihe des böhmischen Tertiärgebirges angehörenden Bildungen weiter nichts bestimmen. Die jüngeren Süßwasserquarze von Littmitz, wie die Süßwasserkalke von Tuchorzik und Kolosoruk ††) sind zwar ausserordentlich reich an Conchylien, enthalten auch mehrere Lymnaeen (*Lymnaeus acutus*, *L. medius* und *L. Thomae*) und Planorben (*Planorbis applanatus*, *Pl. pseudammonius* und *Pl. decussatus*), aber keine der bei uns in den Hornsteinen vorkommenden Arten; sie scheinen überhaupt wohl jünger, als diese zu seyn.

Sehr zu bedauern ist, dass wir über die Süßwassergebilde des Mainzer Beckens und die darin vorkommenden Conchylien noch so wenig Genaueres wissen; und ob-

*) Siche BRONGNIART l. c. in den Ann. d. Mus. XV. S. 371 und in CUVIER Rech. sur l. ossem. foss. II. S. 297.

**) S. Cuv. rech. II. S. 262.

***) S. VooT Lehrbuch der Geologie I. S. 365.

†) S. dessen geognostische Skizze der tertiären Süßwasserschichten Böhmens in DUMMER'S Beiträgen. II. 1. 1849. S. 8.

††) S. REUSS l. c. S. 10 ff. und in dessen Umgebungen von Teplitz und Bilin. Prag 1840. S. 164 f.

wohl zu vermuthen, dass wir dort noch manche Anhaltspunkte für unsere Bestimmung finden werden, so können wir doch hierüber nichts näheres feststellen.

Eben so verhält es sich mit den bei Kreuznach vorkommenden Süßwasserquarzen. Eine aus denselben herrührende von Hrn. v. DECHEN mir mitgetheilte Lymnaeus ist nicht vollständig, scheint aber *L. corneus* zu seyn.

Wenn wir demnach einigermaßen berechtigt sind, die fraglichen Süßwasserquarzen den oberen Süßwassergebilden von Paris zu parallelisiren, so möchte auch wohl feststehen, dass sie jünger als die Braunkohlenthone und Sandsteine unserer Gegend und jedenfalls den Versteinerungen nach älter als der Löss sind. Wenn man, zwar ziemlich allgemein *), die deutschen Braunkohlen und Braunkohlensandsteine dem Pariser untersten plastischen Thone parallelisirt, so ist doch diese Bestimmung eine gar zu precäre, und möchte sich am Ende nur auf Gesteinsähnlichkeiten reduciren; jedenfalls darf sie nicht als allgemein gültig angenommen werden. Eines der jüngsten Glieder des Niederrheinischen Tertiärgebirges sind unsere Quarze ohne Frage.

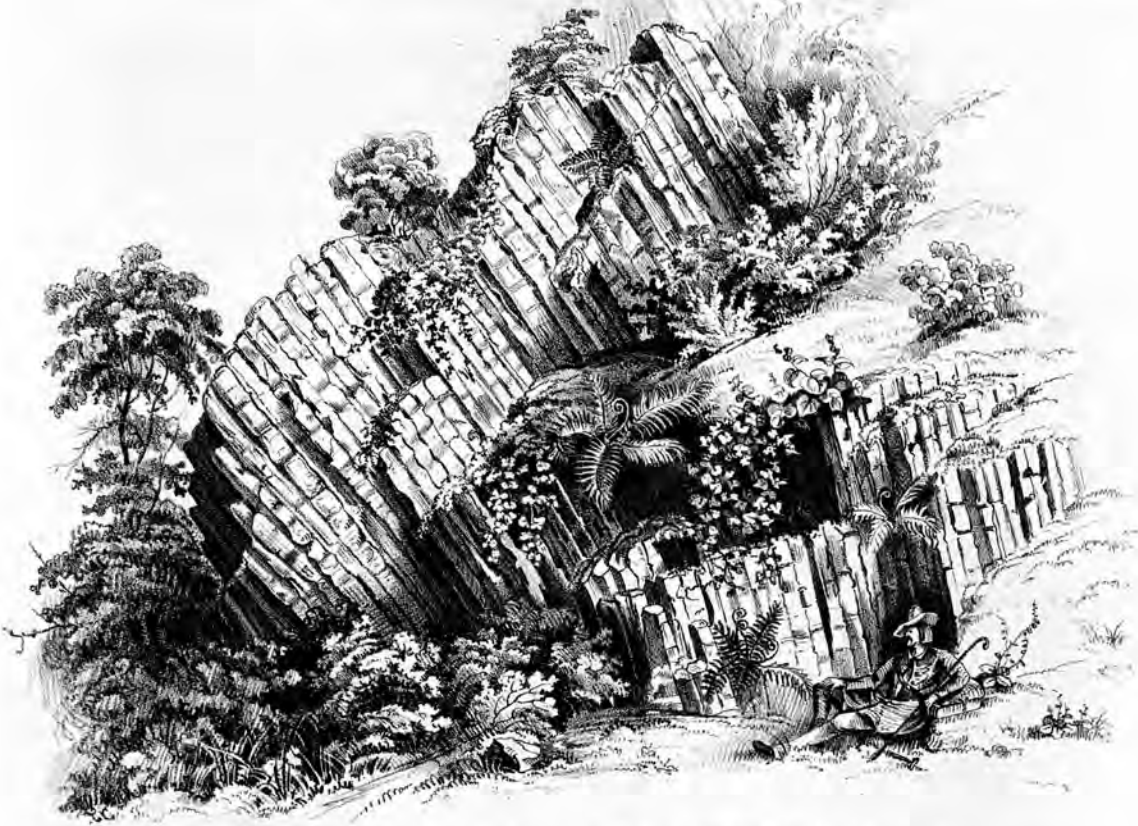
Somit würde denn das freilich nicht sehr eklatante Ergebniss unserer Untersuchung seyn, dass wir in den Muffendorfer Süßwasserquarzen die später, vielleicht durch die Emporhebung der benachbarten Basalte, und zum Theil nachher noch durch Fluthen, welche die Trümmer über das nahe gelegene Gehänge zerstreuten, zerstörte und zerrissene Ablagerung eines kleinen Süßwassersumpfes, welcher wahrscheinlich durch kieselhaltige Quellen genährt wurde, vor uns sehen; derselbe fiel der Zeit nach in die mittlere oder jüngere Tertiärepoche, welches letztere nicht sattsam entschieden werden kann, also in eine der heutigen Erdperiode nicht ferne Zeit hinein, welche dem Emporsteigen eines Theils des trachytischen und basaltischen Siebengebirges folgte, nach welcher die Ablagerung des Rheingerölles und des Lösses kam.

Es thut mir im Uebrigen leid, dass ich hier zum Schlusse kein so poetisches Bild von der damaligen Physiognomie unserer Gegend entwerfen kann, wie es uns HEER **) von dem reich entwickelten, stillen Leben um die sanften Ufer des Oeninger Sees entrollt. Hier fristeten damals nur wenige Thiere ihr Leben; aber aus stiller Tiefe tauchten schlanke Wasserlilien hervor, und wenn auf ihren Blättern ein Frosch oder eine Kröte ihr einsames Lied quackte, so mochten ihre Augen über dem kahlen Horizonte aus dunkler Waldnacht im Abendglanze den Drachenfels und die Wolkenburg treffen, wie sie die goldenen Fluthen des gewaltigen Rheinstromes an stolzer Klippe zerschellen liessen.

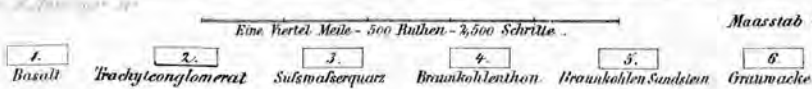
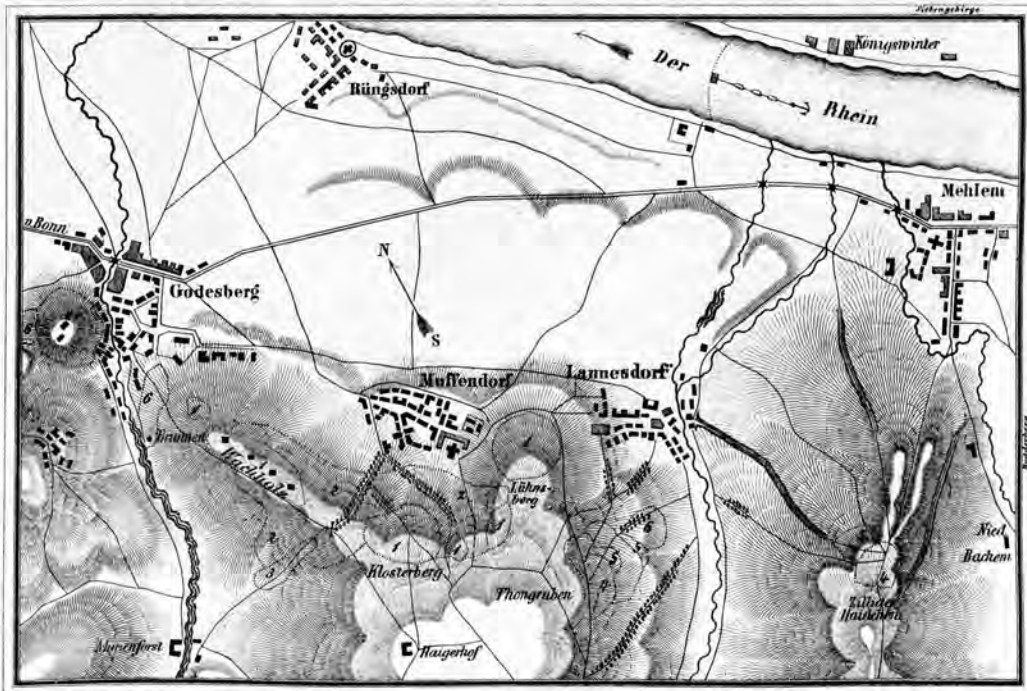
*) S. COTTA Geognosie im Anhang.

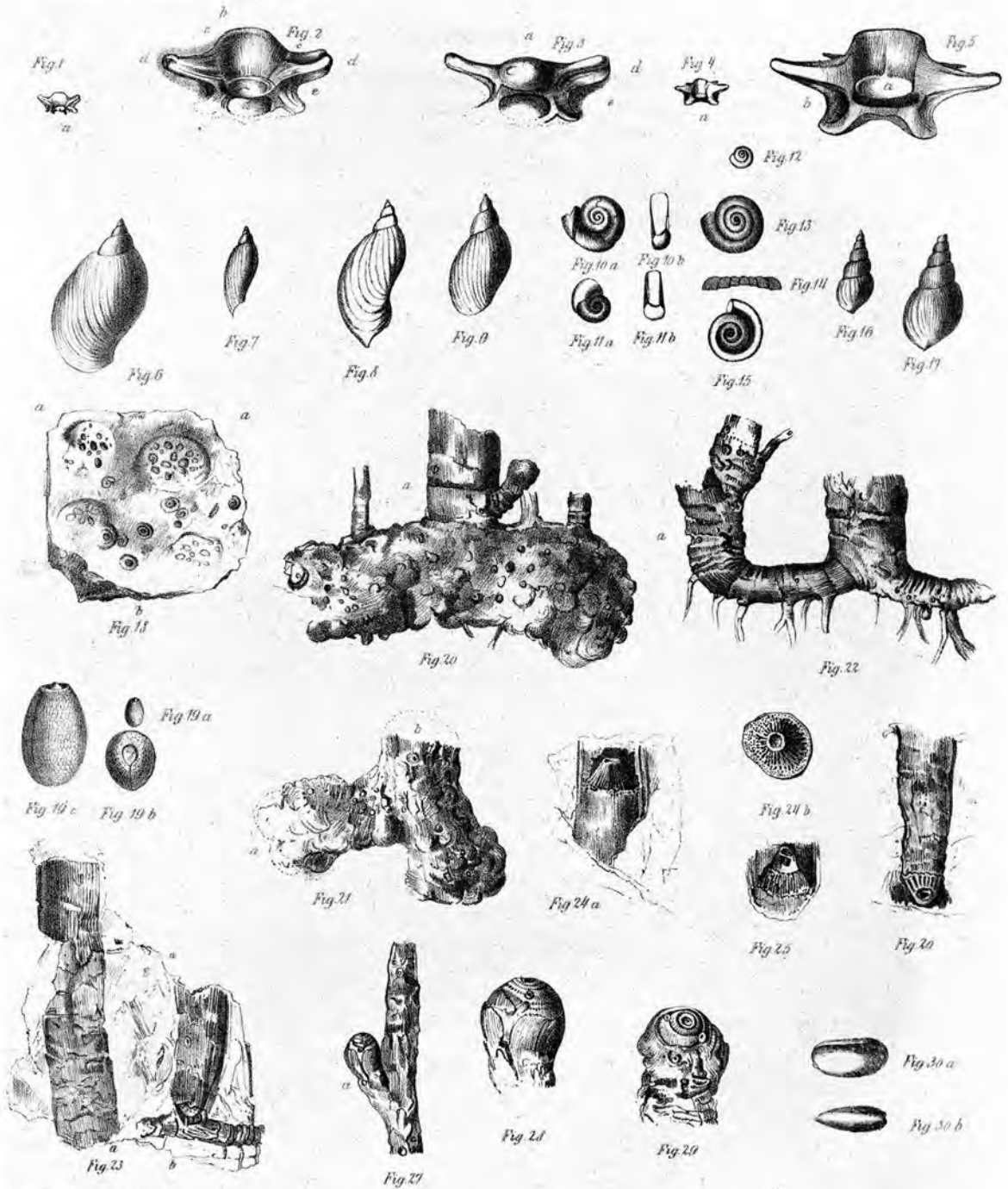
**) S. Verhandlungen der schweizerischen naturf. Gesellsch. bei ihrer Versammlung zu Winterthur 1847. S. 159.

Gruppe von Säulenbasalt in einem alten Bruche am Lühnsberge bei Muffendorf, oberhalb des gegenwärtig 1849 im Gange begriffenen.



Geologische Karte der Umgegend von Muffendorf bei Bonn.





C.O. Weber del. Hartinger dir.

- Fig. 1 - 3. Rana
- Fig. 4 - 5. Bufo cinereus
- Fig. 6 - 8. Lymnaeus
- Fig. 9. - Lymnaeus corneus Brongn.
- Fig. 10. - Planorbis rotundatus Brongn.
- Fig. 11. - Planorbis cornu Brongn.

- Fig. 12 - 15. Planorbis declivis - Brau.
- Fig. 16 - 17. Paludina elongata Münst.?
- Fig. 18. - Nymphæa arethusa Brongn.
- Fig. 19. - Carpolites granulatus
- Fig. 20 - 29. Rhizome und Stengel (22-25. Calamites striatus)
- Fig. 30. - Cypris angusta Reuss

III. Ueber Raute, Prisma und Kegel in akrometrischer Beziehung.

Von

Joseph Riedl v. Leuenstern.

Mitgetheilt am 16. August 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Die Spitzen prismatischer Körper wurden (Naturwiss. Abh. III. Bd. 2. Abth. S. 87.) als nächstfolgender Gegenstand bezeichnet.

Zwischen den beiden Klassen der Pyramiden und Prismen aber, steht noch als nicht zu überspringendes Mittelglied, die Raute (*Rhombus solidus*).

Die Pyramiden sind nämlich: Tetrakro-Tetraeder, Pentakro-Pentaeder, Hexakro-Hexaeder u. s. f.; oder, die Zahlen ihrer Spitzen und ihrer Flächen sind einander gleich.

Die Prismen, welche die Ordnungen: Hexakro-Pentaeder, Oktakro-Hexaeder, Dekakro-Heptaeder u. s. f. enthalten, geben die Zahl der Spitzen fortschreitend um 1, 2, 3, ... grösser als die der Flächen.

Den Uebergang machen die Rauten, als: Pentakro-Hexaeder, Hexakro-Oktaeder, Heptakro-Dekaeder u. s. f., bei welchen die Zahl der Spitzen um 1, 2, 3... minder als jene der Flächen ist.

Sie bestehen aus zwei Pyramiden, während ein Prisma drei derselben in sich begreift, und sollen eben so wenig darum schweigend übergangen werden, weil sie nur Doppelpyramiden, als man unterlassen dürfte die Vierecke in eine besondere Classe zu bringen, weil sie nur Doppeldreiecke sind. Und um so mehr gebührt ihnen ein eigenes Fach, als in der ersten und dritten ihrer hier genannten Ordnungen sich Regelkörper dritten Ranges, in der zweiten aber einer der fünf reinen Regelkörper befindet.

Es werden also hier zuerst Rauten, dann Prismen vorgenommen, insoferne ihre Eigenschaften sich von jenen der Pyramiden unterscheiden; endlich wird das allgemeine, vergleichende Mass auf die Spitzen der konischen Körper in Anwendung gebracht, worauf noch eine Tabelle berechneter Beispiele folgt.

Die Abtheilung: Ueber die Summen der Körperwinkel an Pyramiden enthielt in den Paragraphen 36 bis 38: Allgemeine Bestimmungen und Eintheilung der Pyramiden,

in den Paragraphen 39 bis 52: Lehrsätze und Rechnungsformeln,
 53 „ 60: Erläuterungen der Tabellen, und
 61 „ 70: Aufgaben zeichnender Darstellung.

71. Fünf Punkte im Raume, deren zwei die Pole einer senkrechten oder schiefen, die Ebene der drei andern durchschneidenden Axe sind, bestimmen zehn Linien, und zwar, von der Axe abgesehen: neun Kanten, sechs Dreiecke, fünf Spitzen, wovon zwei mit dreiseitigen, drei mit vierseitigen Körperwinkeln, und bilden so die einfachste Raute (Rhombus Pentakro-Hexaedrum).

Kommt ein neuer Punkt hinzu, der aber in jener durch drei festgestellten Ebene (Mittelfläche) liegen muss, so entsteht:

eine vierseitige Raute, mit zwölf Kanten, acht Dreiecken, sechs Spitzen;
 eben so eine fünfseitige, „ fünfzehn „ zehn „ sieben „
 und eine (n)seitige, „ (3n) „ (2n) „ (n+2) „

Von den Spitzen aber sind immer zwei (n)seitig, die übrigen vierseitig. Diese Classe übertrifft jene der Pyramiden noch an Reichthum der Gebilde; indem jede Pyramide mit jeder auf derselben Grundfläche möglichen andern verbunden seyn kann, und so die unendliche Mannigfaltigkeit sich unendlichfach steigert. Einige Summen symmetrischer (d. h. aus zwei ähnlichen Pyramiden bestehender), senkrechter und auf Regelmehlecken errichteter Rauten, sind aus den Tabellen A bis F der Pyramiden (III. Bd. 2. Abth.), durch Verdoppelung der Werthe zu erhalten.

72. Von der unmessbar grossen Länge der Axe beginnend, wo 360° die äusserste Grenze der Werthe ist, nehmen die Summen an symmetrischen, senkrechten Rauten mit gleichseitig dreieckiger Mittelfläche beständig ab, bis am Doppeltetraeder aus sechs gleichseitigen Dreiecken $ADBCE'$ (Fig. 30) das Minimum = $252^\circ. 41'. 26''$, 3... eintritt.

Dieser ist wegen seiner Eigenschaften: sechs congruente Regelflächen, eine siebente ebenfalls congruente als Mittelfläche, und einerlei Kanten; dann wegen der Mängel: zweierlei Spitzen und zwei umschriebene Kugeln — unter die Regelkörper dritten Ranges zu zählen.

Von hier aus wachsen die Summen bis ans Ende der Reihe, wo die Axe Null und das Maximum = 720° wird.

Andere Reihen dreiseitiger Rauten weichen mehr oder minder von diesem Gesetze ab. So ist (aus S. d. K. an Pyr. 58) bekannt, dass es Reihen von Pyramiden und folglich auch von Rauten gibt, in welchen die grössten Summen nicht mehr als hier die kleinste betragen, die kleinste derselben aber zu Nichts wird.

73. Das sphärische Pentakron $AEBCE'$ (Fig. 31) ist der nächste unvollkommene Regelkörper der oben besprochenen Reihe, in ihrem wieder zunehmenden Theile.

Der dritte Rang gebührt ihm, da er congruente Flächen hat und in einer Kugel eingeschrieben ist; dagegen sind seine Mängel: die sechs Dreiecke nur gleichschenkelig, folglich zweierlei Kanten und zweierlei Spitzen.

Seine Berechnung ist in der Tabelle A nicht aufgeführt und wird hier nachgetragen.

Die Bedingung, dass er zur Mittelfläche ein gleichseitiges Dreieck hat und ihm die Kugel umschrieben ist, gibt AE als Sehne eines Quadranten und AC als Sehne eines Drittelkreises; also den Kugelstrahl als Einheit genommen:

$$AE = 2\sin 45^\circ; \quad \frac{AC}{2} = \sin 60^\circ; \quad \text{und } \cos(EAC) = \frac{\sin 60^\circ}{2\sin 45^\circ},$$

oder in jedem der sechs Dreiecke die Winkel an der Grundlinie

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} &) = 52^\circ. 14'. 19'', 52\dots \\ & / = 52. 14. 19,52\dots \end{aligned} \right\} \\ \text{am Scheitel} & \quad = \frac{75. 31. 20,95\dots}{180. 0. 0,0} \end{aligned}$$

woraus man (nach S. d. K. an Pyr. 44. 46) die Körperwinkel:

$$A = B = C = 50^\circ. 39'. 57'', 60\dots$$

$$E = E' = 55. 23. 20,92\dots$$

$$\text{und die Summe} = 262^\circ. 46. 43,68\dots \text{ erhält.}$$

74. Nun folgt die rechtwinkelige Raute, AFBCF' (Fig. 32), welche in den vierten Rang der Regelkörper gehört, indem sie zwar aus congruenten Halbquadraten besteht, dafür aber zweierlei Kanten, zweierlei Spitzen und zwei umschriebene Kugeln hat. Von diesem Körper ist zu erinnern, dass sein doppelter Körperinhalt, mehr dem Regeltetraeder seiner grössern Kante, gleich ist dem Kubus der kleinern Kante; denn es ist

$$AFBC + b'f'BC + a'f'CA + c'f'BA = 2AFBCF'$$

$$\text{und darum} \quad 2AFBCF' + A'f'BC = FBb'c'f'a'A'c'.$$

Die Körperwinkel sind (nach Tabelle A):

$$A = B = C = 38^\circ. 56'. 32'', 8\dots$$

$$F = F' = 90. 0. 0,0$$

$$\text{und die Summe} = 296. 49. 38,4\dots$$

75. Es seyen ein gleichseitiger Doppeltetraeder: ADBCD' (Fig. 30) und eine mit demselben auf einerlei Mittelfläche zu errichtende rechtwinkelige Raute: AfBCf' in ein identisches Kugelpaar einzuschreiben, wozu der Halbmesser R gegeben.

Ein Drittheil der Länge R wird auf einer Axe achtmal aufgetragen, so sind die äussern Pole D, D', als Scheitel des erstgenannten Körpers bestimmt; denn $Dm = mD' = \frac{1}{3}R$ ist bekanntlich die Höhe des eingeschriebenen Regeltetraeders. Bildet man dann mit dem Strahle R, aus den Theilungspunkten: 3, 5, zwei Kugelflächen und theilt den Kreis, in welchem sie sich schneiden, in drei gleiche Bogen, so ist

auch $AD = AD' = AB = BC$ u. s. f. Setzt man nun die Länge einer solchen Kante als Einheit, so ist der Durchmesser der umschriebenen Kugel:

$$Df' = D'f = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ und } Dm = mD' = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

In der Pyramide $AfCB$ aber müssen die zweierlei Kanten, wegen der in f rechten Scheitelwinkel sich verhalten:

$AC : Af = 1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$; und wenn $An = nC$, so muss auch

$nf' = \frac{1}{2}$; ferner, als Drittheil der Höhe des gleichseitigen Dreiecks:

$$nm = \sqrt{\frac{1}{12}}; \text{ folglich } mf' = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{1}{6}} \text{ seyn.}$$

Es ist also wieder: $Df' = Dm + mf' = \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$;

und die verlangten Scheitelpunkte f, f' , treffen mit den innern Polen beider Kugeln zusammen.

76. Die Summen vierseitiger Rauten (Hexakro-Oktaeder), haben als äusserste Grenzen an beiden Enden ihrer Reihen, den Werth der ganzen Kugelfläche, 720° .

In der gesammten Reihe der symmetrischen, senkrechten, mit einem Quadrat als Mittelfläche, erscheint (übereinstimmend mit Tabelle B) als Minimum der reine Regeloktaeder, der hier als Coryphaee aller Rauten an seinem Platze steht.

Jede seiner Spitzen misst: $77^\circ.53'.5''.56\dots$ und die Summe:

$$467.18.33.36\dots$$

Hierher gehört das merkwürdige Geschlecht der mehr oder minder verschobenen Oktaeder mit congruenten Gegendreiecken (S. d. K. an Pyr. 64 bis 68; Fig. 23), welche auf rhomboidischer Mittelfläche: $eghk$, aus zwei gleichen und ähnlichen Pyramiden: $efghk = hiekg$ bestehen. Ihre Abstammung aus den Tetraederpyramiden, deren Kerne sie bilden, ist dort hinreichend besprochen; eben so ihre sonstigen Eigenheiten und die Ermittlung ihrer Körperwinkel aus der Stammpyramide.

77. Aus der Tabelle C ergibt sich auf dieselbe Weise, die Reihe der symmetrischen, senkrechten, auf Regelvielecken errichteten Heptakro-Dekaeder, mit äusserster Grenze des Werthes bei 1080° , von wo die Summen abnehmen bis $631^\circ.20'.26''.6\dots$ und dann wieder zunehmen bis 720° . Jene kleinste Summe gehört dem Regeldekaeder (Fig. 33), aus zehn gleichseitigen Dreiecken und fünfzehn gleichen Kanten. Die Mängel dieser Raute, welche nicht gestatten, selbe in einen höhern als den dritten Rang zu bringen, sind, dass sie in keine Kugel passt und zweierlei Werthe der Spitzen hat; nämlich zwei zu:

$$150^\circ.56'.53''.75\dots \text{ am Scheitel, und fünf zu:}$$

$$65.53.19.82\dots \text{ an der Mittelfläche.}$$

Einer umschriebenen Kugel entbehrend, hat dieser Dekaeder gleichwohl einigen Ersatz darin, dass seine sieben Spitzen der Oberfläche eines ausgezeichneten Rotationskörpers angehören.

Es sey in einem Sphaeroid, dessen Axe zum Durchmesser des Aequators im aufsteigenden äussern und mittlern Verhältnisse steht, ein Kör-

per eingeschrieben, den fünf gleichweit abstehende Punkte im Aequator und zwei in den Polen bestimmen; so werden die zehn Seitenkanten aus beiden Scheiteln, den fünf Mittelkanten gleich, und es wird der erwähnte Dekaeder dargestellt seyn. Denn es ist

$R = Cr$, der Halbmesser des Aequators oder die halbe grosse Axe;

$z = db = CD$, die Höhe des Scheitels über die Mittelfläche oder die halbe kleine Axe.

der Zehneckseite gleich, wegen des gegebenen Verhältnisses;

$f = AB = ab$, die Fünfeckseite oder eine der fünf Mittelkanten;

$k = DA = Dr$, eine der zehn Seitenkanten; folglich

$$f^2 = R^2 + z^2;$$

Es ist aber auch $(Dr)^2 = (Cr)^2 + CD^2 = R^2 + z^2 = k^2$; und daher alle Kanten gleich:

$$f = k = (AB) = (DA).$$

78. Symmetrische, senkrechte Rauten aller mehr als fünfseitigen Regelvielecke (vergl. S. d. K. an Pyr. 51 und die Tabellen D, E) können, da mehr als zehn gleichseitige Dreiecke in einer Raute nicht möglich sind, in ihren Reihen keine Wendepunkte haben. Ihre kleinste Summe ist demnach allgemein bei der kürzesten Axe, und = 8 rechten Winkeln. Die grösste aber,

für sechsseitige = 16 rechten Winkeln

„ siebenseitige = 20 „ „

„ (n) seitige = 4(n-2) „

79. Wenn man auf jeder Dreieckfläche einer Raute nach Willkühr einen Punkt bestimmt, und diese alle durch gerade verbindet, so entsteht ein Prisma; durch dasselbe Verfahren wird auch dem Prisma eine Raute eingeschrieben. Dabei tauschen Spitzen und Seiten immer ihre Zahlen gegeneinander aus: Dem Pentakro-Hexaeder ist ein Hexakro-Pentaeder, dem Hexakro-Oktaeder ein Oktakro-Hexaeder eingeschrieben und umschrieben; Heptakro-Dekaeder erzeugen Dekakro-Heptaeder und umgekehrt u. s. w.

Unter den möglichen eingeschriebenen Prismen ist aber eines in jeder Raute, das ihren eigentlichen Kern bildet und jedenfalls parallele Kanten und Grundebenen erhält, die Raute mag wie immer schief und unsymmetrisch seyn. Die beiden Grundflächen desselben sind unter sich congruent und der Mittelfläche der Raute ähnlich, nur in gewendeter Stellung.

Der Körperinhalt dieses Kernes ist ein Neuntel seiner Raute.

Es sey dem schiefen Pentakro-Hexaeder: $SABC\Sigma$ (Fig. 34) das Prisma einzuschreiben, welches den genannten Forderungen entspricht.

Wenn $d, e, g, \delta, \varepsilon, \gamma$, als Schwerpunkte der sechs begrenzenden Dreiecke ermittelt sind, so werden die senkrechten Höhen von d, e, g , über die Mittelebene (ABC) einander gleich und betragen ein Drittheil (= Mm) der Höhe des Scheitels S über dieselbe Ebene, und gleichmässig sind $\delta, \varepsilon, \gamma$, in der Gegenrichtung, in unter sich gleicher Tiefe, welche auch ein Drittheil (= $M\mu$) des Höhenunterschiedes zwischen der Ebene (ABC) und dem Scheitel Σ ist. Denn ein ebenes Dreieck mag wie immer geneigt seyn, so bleibt sein Schwerpunkt auf $\frac{1}{3}$ der Erhöhung seines Scheitels über eine

durch die Grundlinie geführte Ebene. Die Ebenen (deg), ($\delta\varepsilon\gamma$) sind folglich mit (ABC) und unter sich parallel.

Nun aber geben die Schwerlinien: Sd , Se , Sg , $\Sigma\delta$, $\Sigma\varepsilon$, $\Sigma\gamma$, indem sie ihrer Darstellung zufolge die Grundlinien in D , E , G , halbiren, wodurch zugleich:

$$\text{DE} = \frac{1}{2}\text{AC}; \quad \text{EG} = \frac{1}{2}\text{AB}; \quad \text{GD} = \frac{1}{2}\text{BC}$$

wird, in den Dreiecken:

$$\text{SDE}, \text{SEG}, \text{SGD}, \Sigma\text{DE}, \Sigma\text{EG}, \Sigma\text{GD},$$

ihrem Gesetze nach, die Verhältnisse:

$$\text{Sd}:\text{SD} = \text{Se}:\text{SE} = \text{Sg}:\text{SG} = \Sigma\delta:\Sigma\text{D} = \Sigma\varepsilon:\Sigma\text{E} = \Sigma\gamma:\Sigma\text{G} = 2:3; \quad \text{ferner:}$$

$$\text{de}:\text{DE} = \text{eg}:\text{EG} = \text{gd}:\text{GD} = 2:3; \quad \text{und}$$

$$\delta\varepsilon:\text{D}\text{E} = \varepsilon\gamma:\text{E}\text{G} = \gamma\delta:\text{G}\text{D} = 2:3; \quad \text{woraus folgt:}$$

$$\text{de} = \delta\varepsilon = \frac{1}{3}\text{AC}; \quad \text{eg} = \varepsilon\gamma = \frac{1}{3}\text{AB}; \quad \text{gd} = \gamma\delta = \frac{1}{3}\text{BC}.$$

Erstens sind also die Dreiecke: $\text{deg} = \delta\varepsilon\gamma$, congruent und parallel; daher die

Kanten: $\text{d}\delta = \text{e}\varepsilon = \text{g}\gamma$, gleich und parallel;

Zweitens: jedes dieser beiden Dreiecke ist ein Neuntel des Mitteldreiecks ABC .

Endlich ist, wie oben gezeigt: $\text{Mm} + \text{M}\mu = \frac{1}{3}(\text{MS}' + \text{M}\Sigma) = \frac{1}{3}\text{S}'\Sigma$; oder die Höhe des Prisma gleich einem Drittel der Höhe der Raute, und demnach ist das verlangte Kernprisma an Körperinhalt gleich einem Neuntel der Raute, und wird durch die Schwerpunkte der einschliessenden Dreiecke bestimmt.

Im umgekehrten Falle ist noch leichter zu beweisen, dass eine durch die Schwerpunkte der Seiten des Prisma erzeugte Kernraute ein Zwölftel seines Körpermasses, folglich in der zweiten Abstammung $= \frac{1}{12}$ der ursprünglichen Raute ist.

80. Die Classe der prismatischen Körper, zu deren Feststellung im Raume mindestens drei Paar Punkte erfordert werden, von welchen nicht drei in einer geraden liegen dürfen; zerfällt der Lage der Kanten nach, in parallele, convergente und anomale.

An den ersten sind die beiden Grundflächen entweder congruent und gleichlaufend, oder unähnlich und geneigt: (Ordnung 1, 2.)

Die convergenten Prismen (gemeinhin gekürzte oder Rumpf-Pyramiden genannt), haben gleichfalls, nach der parallelen oder schiefen Lage der Ebenen, entweder ähnliche oder verschobene Grundflächen: (Ordnung 3, 4.)

Es kommen daher vier Ordnungen von Prismen, in Hinsicht auf das Mass ihrer Körperwinkel zu beachten; denn mit der fünften, welche die anomalen, von nicht übereinstimmenden Kanten, und daher nicht von Ebenen, sondern ganz oder zum Theile von Konoidflächen geformten Spitzen begreift, haben wir hier nichts zu thun, weil gekrümmte *) oder verdrehte Flächen keine messbaren Winkel einschliessen.

*) Die einzige Ausnahme unter allen krummen Flächen macht der Mantel des Kegels, dessen weiterhin gedacht wird.

81. In Folge der prismatischen Gestalt tritt unterscheidend die Eigenschaft hervor, dass nur dreikantige Spitzen vorkommen können, und dass jeder Tangentenwinkel (vergl. Mass II. Bd. 9) nicht mehr und nicht weniger als zweimal in der Summe erscheint, so dass allgemein bei (n) Seitenkanten und $(2n)$ Grundkanten, statt zweier Tangentenwinkel einen Dieder gesetzt,

die Summe aller $(2n)$ Spitzen, gleich der Summe der $(3n)$ Dieder, weniger $(4n)$ rechten Winkeln ist.

82. An Prismen mit parallelen Grundebenen: (Ordnung 1, 3.), gleichviel ob sie auf ihren Seitenkanten recht oder schief stehen, ergänzen sich die $(2n)$ Dieder der Grundkanten gegenseitig auf (n) Halbkugeln oder $(4n)$ rechte Winkel; dadurch wird (vergl. Mass, 10 bis 13):

die Summe der Spitzen gleich dem Werthe der (n) Dieder der Seitenkanten. Sind nun auch die Seitenkanten parallel: (Ordnung 1) und folglich die Dieder derselben zusammen $2(n-2)$ Viertelkugeln gleich, so erhält man die Summe der Körperwinkel, (welche im ganzen Reiche der Körper sonst nirgends als hier beständig ist):

für ein dreiseitiges Prisma 1. Ordnung: gleich vier rechten Winkeln;
für die Parallelepipeden und trapezischen

Prismen	„	acht	„	„
für ein Prisma aus (n) Parallelogrammen	„	$4(n-2)$	„	„

83. Der Regelpentaeder, Fig. 35, aus drei Quadraten $(abcd)$, zwei gleichseitigen Dreiecken $(efg = aby)$, neun gleichen Kanten und sechs congruenten Spitzen, jede zu 60° ; ist hinreichend als Beispiel für das erste der genannten Geschlechter. Dieses einfachste aller Prismen gehört zu den Regelkörpern dritten Ranges, und steht unter diesen dem zweiten Range fast am nächsten, indem ihm dazu nur die symmetrische Theilung der Kugelfläche mangelt, welche ihm umschrieben ist.

Wird seine Kante: $ab = bd = ef$, als Einheit genommen, so geben die Coordinaten $i\gamma = \frac{1}{2}$, und $\gamma k = if = \sqrt{\frac{1}{3}}$, den Kugelstrahl als Hypothenuse $= ik = \sqrt{\frac{7}{12}} = 0,763762\dots$

84. Aus dem zweiten Geschlechte, welches alle recht- und schiefwinkligen Oktaero-Hexaeder mit parallelen Seiten- und Grundflächen begreift, und deren acht Spitzen immer zusammen dem Mass der ganzen Kugel $= 720^\circ$ entsprechen, sey hier der Kubus, der vollkommenste aller geradlinigen Körper, die Einheit des Körpermasses, vorzugsweise genannt.

Unter den schiefwinkligen zeichnet sich aus:

Die Familie der Rhombal-Hexaeder (Fig. 36, 37), mit zwölf gleichen Kanten, sechs congruenten Rhomben, zwei scharfen und vier stumpfen Spitzen. Eine Art derselben ist der Rhombal-Kubus, aus Rhomben, deren jeder aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht; (Fig. 36) ein Regelkörper vierten Ranges, der dadurch anziehend wird, dass er eine einfache, klare Probe der allgemeinen Summe liefert. Denn wenn

er nach zwei seiner kleinern (den Kanten gleichen) Diagonalen, z. B: AC, EF, in parallelen Richtungen nach den Spitzen B und D, durch die Ebenen ACD, BEF, zerschnitten wird, so entfallen:

zwei Regeltetraeder	{	ADCG, mit der Summe = 126°. 20'. 43'',...	und es bleibt:
	}	EBFH, „ „ = 126. 20. 43,...	
ein Regeloktaeder ABCDEF	„	„	woraus sich
die Gesamtsumme des Rhombal-Kubus		= 720. 0. 0.	

85. Von allen mehrseitigen Prismen mit parallelen Kanten und Grundflächen, die man insgesamt kürzer Parallelprismen nennen dürfte, gilt das (82) ausgesprochene Gesetz, ohne Ausnahme, ob das Vieleck (Stammfläche), worauf sie gegründet sind, auch schiefwinkelig und ungleichseitig sey. Einzelner Beispiele bedarf es hier nicht weiter. Die Zahlen ihrer Elemente und Summen der Körperwinkel schreiten fort wie folgt:

Zahl der Seitenflächen:	n =	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...
„ „ Ebenen:	n + 2 =	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...
„ „ Spitzen:	2n =	6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...
„ „ Kanten:	3n =	9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ...
Summen in rechten Winkeln: $4(n-2) =$ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...		

86. Für jene Prismen, deren Seitenkanten parallel, deren Grundebenen aber gegeneinander geneigt sind (schiefabgeschnittene Prismen; Ordnung 2), gilt obiges Gesetz als Mittelmaass, von dem sie wachsend oder abnehmend, mehr oder minder beträchtlich abweichen. Je gleicher die Winkel und Seiten der Stammfläche, desto geringer, je spitziger ihr kleinster Winkel und je länger seine Schenkel, desto grösser wird diese Abweichung.

Es sey abc (Fig. 38) das Stammdreieck, ad, be, cf, die Seitenkanten eines Pentaeders, und abM eine seiner Grundflächen, deren dritte Spitze M, nach der Richtung cm in unbestimmter Ferne liegt; ich sage nun: Das Maximum der Summe der drei Körperwinkel a, b, M, findet statt, wenn die Seitenwinkel dam', ebm', so nahe als möglich an 180° sind, wodurch M in der Verlängerung von cm endlos weit gerückt wird, und wenn zugleich der Winkel bca beinahe Null ist.

Der mittlere Werth: $a + b + M = 180^\circ$, müsste sich ergeben, wenn M in c läge, wodurch abc selbst zur Grundfläche würde. Je mehr aber die Winkel dac, ebc, wachsen und je grösser cm wird, um so stumpfer ist die Neigung an der Kante ab; je kleiner man zugleich bca und damit die Neigung an der Kante fm annimmt, desto unveränderter bleiben die Neigungen an den Kanten am', bm', so dass die Summe bis 360° wächst, wenn die sechs Tangentenwinkel, von deren Werthe sie abhängt:

$$\left. \begin{array}{l} t_{(ad)} = 90^\circ \\ t_{(ab)} = 180 \\ t_{(am^1)} = 90 \\ t_{(bm^2)} = 90 \\ t_{(be)} = 90 \\ t_{(fm)} = 0 \end{array} \right\} \text{haben, und folglich die Spitzen} \left\{ \begin{array}{l} a = t_{(ad)} + t_{(ab)} + t_{(am^1)} - 180^\circ = 180^\circ; \\ b = t_{(be)} + t_{(ab)} + t_{(bm^2)} - 180^\circ = 180^\circ; \\ M = t_{(am^1)} + t_{(bm^2)} + t_{(fm)} - 180^\circ = 0^\circ; \\ \text{zusammen} = 360^\circ. \end{array} \right.$$

Ist nun derselbe Fall an der Gegenfläche deN, wenn nämlich fn, dn', en' unbestimmbar gross gedacht werden; so erreicht auch die Summe d + e + N das äusserste Mass von 360°; und das Grösste für das ganze Prisma ist = 720°.

Um auch die Bedingung für das Minimum darzustellen, denke man die Kante ab mit dem Dreieck abM als nicht bestehend; dagegen dμ¹, eμ², als ununterbrochene Seitenkanten weithin verlängert, indessen durch einen Schnitt von c gegen μ, äusserst wenig nach innen von der Richtung m abweichend, mit einer masslos entfernten neuen Kante μ¹μ² = ab das neue, in c unendlich spitzige Grunddreieck cμ¹μ² erzeugt wird.

Das Ende des Körpers, welches sich an seinem wahren Orte nicht darstellen lässt, versinnliche man sich, indem man das Ganze verkehrt, ab für μ¹μ² nimmt; so dass m¹a, m²b, als Schenkel des jetzt in der Ferne liegenden Winkels c erscheinen, und man wird finden, dass die Summe an der Grundfläche cμ¹μ² auf Null herabsinkt.

Denn die Neigung an der Kante ab (oder der damit gemeinten: μ¹μ²) wird unbestimmbar klein, im äussersten Falle Null; eben so jene an der Kante fc und deren Verlängerung, wegen des spitzigen Stammdreiecks efd, die übrigen aber bleiben unverändert, wie oben, und es werden die sechs Tangentenwinkel, wenn man die Figur wieder in ihre wahre, vorige Lage wendet:

$$\left. \begin{array}{l} t_{(\mu^1 d)} = 90^\circ \\ t_{(\mu^1 \mu^2)} = 0 \\ t_{(\mu^1 c)} = 90 \\ t_{(\mu^2 c)} = 90 \\ t_{(\mu^2 e)} = 90 \\ t_{(c f)} = 0 \end{array} \right\} \text{und durch sie die Spitzen} \left\{ \begin{array}{l} \mu^1 = t_{(\mu^1 \mu^2)} + t_{(\mu^1 d)} + t_{(\mu^1 c)} - 180 = 0; \\ \mu^2 = t_{(\mu^1 \mu^2)} + t_{(\mu^2 c)} + t_{(\mu^2 e)} - 180 = 0; \\ c = t_{(c f)} + t_{(\mu^2 c)} + t_{(\mu^1 c)} - 180 = 0; \\ \text{zusammen} = 0. \end{array} \right.$$

Nimmt man hierauf dieselben Verhältnisse für die Gegenfläche an, so wird auch dort die Summe f + n¹ + n² = 0; und das Kleinste für die ganze Summe der Prismen dieser Ordnung: gleich Null. Das Grösste aber ist: das doppelte Mittelmass.

So unbeschränkt die Möglichkeit ist, dass sich diese Summen gegen das Grösste oder Kleinste wenden, eben so häufig müssen auch die Fälle seyn, wo sich die Neigungen der Ebenen gegenseitig so ausgleichen, dass sich das Ergebniss dem Mittelmass nähert.

87. Prismen mit convergenten Seitenkanten und parallelen Grundebenen (Ordnung 3) können auch als horizontal abgeschnittene Pyramiden behandelt werden, wobei das ergänzende Stück eine der ergänzten ähnliche Pyramide ist.

Die Summe ihrer Körperwinkel ist (nach 82) gleich der Summe ihrer Seitendieder. Sie ist aber nicht eine beständige, wie bei den aus Parallelogrammen gebildeten (Ordnung 1.); sondern: die für jene erwiesenen, allgemeinen Summenwerthe sind für diese ein Minimum. Im äussersten Falle nämlich, wo der Convergenzwinkel unbestimmbar klein ist, kehren sie zum Gesetze der Parallelpyramiden zurück; in allen übrigen Fällen sind sie grösser und nähern sich dem Maximum, welches dort eintritt, wo die Höhe Null und jeder Seitendieder gleich vier rechten Winkeln wird. Die äusserste Grenze ist also, da von $(2n)$ Spitzen die Hälfte gleich Null wird, für die Summe der übrigen: (n) Halbkugeln.

88. Die Prismen (Ordnung 4.) mit convergenten Seiten- und Grundebenen, geben für die Summe ihrer Spitzen (wie bei 81 allgemein) die Summe der Dieder aller Kanten, weniger (n) Halbkugeln.

Auch diese wachsen mit abnehmender Höhe, minderer Convergenz der Grundebenen und zunehmender Regelmässigkeit der Stammfläche, bis zum doppelten Mittelmass, oder sinken bis Null herab, je mehr die Seitenkanten parallel, der Abschnitt schief und, (wie bei 86) der eine Winkel der Stammfläche äusserst klein wird.

89. Es sey zur Darstellung eines convergenten Prisma mit parallelen Grundebenen: $ABGDEabgde$, (Fig. 39) gegeben die Grundfläche $A'B'G'D'E'$, dann von zweien die Gegenfläche bildenden Punkten, z. B.: a, d , die Fusspunkte a', d' , auf der ersten Grundebene; endlich die vertikale Höhe Ff ;

zu finden alle Körperwinkel und Kanten.

Da die senkrecht auf die Grundebene fallende Axe der Convergenz ff' in einer Ebene mit den gleichlaufenden Höhenlinien aa', AA' liegen muss, so sind auch deren Fusspunkte in einer geraden: f, a', A' , und eben so f', d', D' , u. s. w.

Weil ferner die Vielecke beider Grundflächen, als parallele Durchschnitte convergenter Kanten ähnlich sind, und bei ähnlichen Flächen, wenn zwei oder mehr Linien der einen mit den gleichnamigen der andern parallel oder identisch sind, auch alle übrigen parallel seyn müssen; so sind auch die auf die Grundebene entworfenen Seiten der Gegenfläche: $a'b'g'd'e'$ parallel mit $A'B'G'D'E'$.

Auch wird jede auf eine Seitenfläche gezogene und eine Grundkante $A'B'$ mit der Gegenkante $a\beta'$ senkrecht verbindende $\alpha a''$ gleich der Hypotenuse des rechten Winkels seyn, welchen die Höhe ($a'a'' = Ff$) mit dem Abstände $a'a''$ zwischen beiden auf eine Ebene entworfenen Kanten $a'b'$ und $A'B'$ bildet.

Endlich ist jede Seitenkante Aa, Ee, \dots gleich der geraden $A'x, E'\varepsilon, \dots$ welche in der Entfaltungsebene, aus einem gegebenen Scheitel der Grundfläche A, E, \dots nach dem durch obige Hypotenuse bestimmten Punkte x, ε, \dots geführt wird.

Man trage also nach Angabe die Punkte $A', B', G', D', E', a', b'$, auf und bestimme durch die geraden $A'a', D'd'$, verlängert bis zu ihrem Durchschnitt f' , den Fusspunkt des Convergencescheitels; ziehe sodann $B'f', G'f', E'f'$, auf welchen die gleichlaufenden $e'd'$ zu $E'D'$, $g'd'$ zu $G'D'$, $a'b'$ zu $A'B'$, die übrigen Punkte e', g', b' , feststellen.

Auf jeder Seite der entworfenen Gegenfläche sind hierauf aus den beiden Ecken senkrechte von unbestimmter Länge $a'\alpha, a'\alpha', b'\beta, b'\beta', g'\gamma, g'\gamma', d'\delta, d'\delta', e'\epsilon, e'\epsilon'$, zu errichten, deren Durchschnitte auf den Seiten der ersten Grundfläche oder ihrer Verlängerung, die Punkte a'', b'', g'', d'', e'' bezeichnen.

Eben so werden die Punkte: $a''', b''', g''', d''', e'''$, auf den verlängerten Kanten der zweiten Grundfläche, durch $Ff = a'a''' = b'b''' = g'g''' = d'd''' = e'e'''$, (die gegebene Höhe) gefunden, und diese dienen wieder, um aus a'' mit $a''a'''$, aus b'' mit $b''b'''$, aus g'' mit $g''g'''$, aus d'' mit $d''d'''$, aus e'' mit $e''e'''$, durch die Bogen $a'''\alpha, b'''\beta, g'''\gamma, d'''\delta, e'''\epsilon$, die Höhen der Seitenflächen, und indem man $A'\alpha' = A'\alpha, B'\beta' = B'\beta, G'\gamma' = G'\gamma, D'\delta' = D'\delta, E'\epsilon' = E'\epsilon$ macht, die entfalteten Seitenkanten zu bestimmen.

Endlich bilden die Seitenwinkel: $\alpha A'B', B'A'E', E'A'\alpha'$, den Körperwinkel A ,
 „ „ $\beta B'G', G'B'A', A'B'\beta'$, „ „ B ,
 „ „ $\gamma G'D', D'G'B', B'G'\gamma'$, „ „ G ,
 „ „ $\delta D'E', E'D'G', G'D'\delta'$, „ „ D ,
 „ „ $\epsilon E'A', A'E'D', D'E'\epsilon'$, „ „ E ,
 „ „ $A'\alpha\beta', b'a'e', \epsilon\alpha'A'$, „ „ a ,
 „ „ $B'\beta\gamma', g'b'a', \alpha\beta'B'$, „ „ b ,
 „ „ $G'\gamma\delta', d'g'b', \beta\gamma'G'$, „ „ g ,
 „ „ $D'\delta\epsilon', e'd'g', \gamma\delta'D'$, „ „ d ,
 „ „ $E'\epsilon\alpha', a'e'd', \delta\epsilon'E'$, „ „ e .

90. Gegeben eine Ebene der Lage nach; dann zu drei, einer nicht bekannten Ebene angehörenden Punkten α, β, δ , die Fusspunkte A, B, D , auf jener erstern, und die senkrechten Höhen H_A, H_B, H_D , über dieselbe;

zu finden der Neigungswinkel φ des Durchschnittees beider Ebenen.

Man denke sich einen um die vertikalen Entwurfslinien Aa, Bb, Dd , beschriebenen Cylinder, von allen Seiten mit berührenden Ebenen umgeben, und die Punkte α, β, δ , der Reihe nach auf jeder dieser Ebenen entworfen, dabei beachte man den veränderlichen Entwurf der Winkel dieses Dreiecks, und man wird finden, dass der mittelste *) der Höhe nach (hier β) an zwei entgegengesetzten Punkten dieses Umkreises einen kleinsten Werth hat, dagegen an zwei andern, deren Richtung

*) Lügen zwei dieser Punkte gleich hoch, so dass sie sich in jenem Entwurfe in einen Punkt vereinigen; so wäre eben dadurch auch eine gerade Linie und der Neigungswinkel gegeben.

senkrecht auf der erstern steht, das Grösste mit 180° erreicht. Die beiden letztern parallelen Ebenen, auf welchen in Folge dessen $\alpha\beta\delta$ eine gerade Linie bildet, sind es, auf denen sich in der Verlängerung dieser geraden im Durchschnitte mit der Grundebene der gesuchte Neigungswinkel darstellt; und die Abstände (auf eben dieser Linie) verhalten sich wie ihre Höhenunterschiede.

Werden nun (Fig. 41) die gegebenen Höhen $H_A = Aa$, $H_B = Ah_1$, $H_C = Ah_2$. errichtet und die Grundebene ABD nach abd versetzt, ferner die entworfenene gerade ad so getheilt, dass sich

$$ap : ah_1 = ad : ah_2 = pd : h_1h_2$$

verhalte, wobei p den Ort des Punktes β auf derselben bezeichnet, und zu $p\beta$ in der Verlängerung nach β_2 als vertikale, die parallelen $d\delta_2$, $a\alpha_2$, wie auch (als Richtungslinie des Durchschnitte der Ebene, in welcher α_2 , β_2 , δ_2 , die besprochene gerade bilden sollen, mit der Grundebene) rechtwinkelig auf $d\delta$, die horizontal gedachte $d\varphi$, (auf welcher α_3 als neuer Fusspunkt erscheint) gezogen; so hat man nur noch die Höhen $H_A = Aa$, von α_3 nach α_2 , $H_D = Ah_2$, von d nach δ_2 aufzutragen und $\delta_2\alpha_2$ bis zum Durchschnitte mit $d\varphi$ zu führen, um in $\delta_2\varphi d$ die verlangte Zeichnung des Neigungswinkels zu erhalten.

Sind aber die Elemente des Dreiecks der Fusspunkte a , b , c , und ihre Höhen in Zahlen gegeben, so hat man aus dem Winkel bda , der Seite bd und der nach obigem Verhältnisse zu den Höhenunterschieden berechneten Seite pd , den Winkel:

$$pbd = bd\delta_2 \text{ und die Linie:}$$

$$\beta_3\delta_3 = (bd) \cdot \text{Sin}(pbd), \text{ endlich aus dieser:}$$

$$(\beta_3\delta_3) \text{ tang } \varphi = h_1h_2; \text{ oder } \text{tang } \varphi = \frac{h_1h_2}{\beta_3\delta_3}.$$

In vielen Fällen kann es bequemer seyn, den Winkel bad und die Seiten ab und ap zu benutzen, welche letztere sich aus

$$ah_2 : ah_1 = ad : ap \text{ ergibt; und so den Winkel:}$$

$$apb = ad\delta_2 \text{ zu bestimmen, woraus sich:}$$

$$\alpha_2\delta_3 = (da) \cdot \text{Sin}(ad\delta_2) \text{ endlich:}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{ah_2}{\alpha_2\delta_3} \text{ findet.}$$

91. Gegeben zur Darstellung eines prismatischen Körpers: $ABGDEMNa b g d e m n$, (Fig. 40) mit convergenten Kanten und geneigten Grundebenen,

die eine Grundfläche: $A'B'G'D'E'M'N'$ vollständig, und von drei Spitzen der andern, die Fusspunkte: a' , b' , d' , mit ihren Höhen: H_a , H_b , H_d ; zu finden alle Winkel und Kanten.

Nachdem zuerst, wie bei 89, der Fusspunkt f der Convergenz, durch das Zusammentreffen der geraden $A'a'$, $B'b'$, $D'd'$, ermittelt ist, können durch diesen die fehlenden vier Fusspunkte nur gefunden werden, wenn die Richtung und der Neigungs-

winkel des Durchschnit­tes beider Grundebenen bekannt sind. Desswegen wird (der Deutlichkeit wegen, seitwärts: Fig. 41) das gegebene Dreieck $a'b'd'$ nach abd übertragen, um mittelst der Höhenunterschiede: $ah_2 = H_d - H_a$, $ah_1 = H_b - H_a$, und $h_1h_2 = H_d - H_b$, durch das (in 90) gezeigte Verfahren erstens den Richtungswinkel $bd\varphi$ zu gewinnen, zu $d\varphi$ dann eine parallele $\varphi'F'$ (Fig. 40) durch den äussersten Punkt N' der gegebenen Grundfläche zu führen und den gleichfalls bestimmten Neigungswinkel so in φ' aufzutragen, dass $d'\delta$ auf $\varphi'F'$ senkrecht errichtet, der Punkt δ' und folglich auch die Punkte β' und α' über eben dieser Grundlinie $\varphi'F'$ auf ihren gegebenen Höhen H_d , H_b , H_a , (wie in Fig. 41: δ_2 , β_2 , α_2 , über der Linie $d\varphi$) stehen, und auch $\delta'\varphi' = \delta_2\varphi$ sey.

Auf der Grundlinie $\varphi'F'$ erscheinen vertikal entworfen, die Spitzen an der Grundfläche, in der Reihe: N' , A_2 , M_2 , E_2 , B_2 , D_2 , G_2 ; der Scheitel S der Convergenz kann daher durch drei sich daselbst schneidende Kantenlinien $A_2\alpha'$, $B_2\beta'$, $D_2\delta'$, schon genügend festgestellt, aus demselben aber sogleich die übrigen gezogen, und auf der Neigungslinie die Punkte ν' durch SN' , μ' durch SM_2 , ε' durch SE_2 , γ' durch SG_2 , bezeichnet werden.

Von diesen vier Punkten aus erhält man die vier noch unbekannt­ten Fusspunkte:

n' durch die vertikale von ν' auf $N'f$ gezogen,
 m' „ „ „ μ' „ $M'f$ „
 e' „ „ „ ε' „ $E'f$ „
 g' „ „ „ γ' „ $G'f$ „ und es findet nun die

weitere Anwendung des Verfahrens (nach 89) statt, mit dem Unterschiede, dass dort nur eine gemeinschaftliche, hier aber wegen der schiefen Ebenen, verschiedene Höhen aufzutragen sind.

Die Punkte a' , b' , g' , d' , e' , m' , n' , durch gerade verbunden, bilden den Entwurf der zweiten Grundfläche auf der Ebene der ersten.

Ueber n' geht senkrecht auf die Richtung $M'N'$ die gerade n_2 nach n_1

„	n'	„	„	„	$N'A'$	„	n_5	„	n_7
„	a'	„	„	„	$N'A'$	„	a_2	„	a_4
„	a'	„	„	„	$A'B'$	„	a_5	„	a_7
„	b'	„	„	„	$A'B'$	„	b_2	„	b_4
„	b'	„	„	„	$B'G'$	„	b_5	„	b_7
„	g'	„	„	„	$B'G'$	„	g_2	„	g_4
„	g'	„	„	„	$G'D'$	„	g_5	„	g_7
„	d'	„	„	„	$G'D'$	„	d_2	„	d_4
„	d'	„	„	„	$D'E'$	„	d_5	„	d_7
„	e'	„	„	„	$D'E'$	„	e_2	„	e_4
„	e'	„	„	„	$E'M'$	„	e_5	„	e_7
„	m'	„	„	„	$E'M'$	„	m_2	„	m_4
„	m'	„	„	„	$M'N'$	„	m_5	„	m_7

Die senkrechten Höhen über die Grundlinie $\varphi' F'$ werden in der Richtung der Seiten der Grundfläche aufgetragen und zwar:

die Höhe: ν' in der Richtung: $N' M'$, von n_2 nach n_3 und in d. Richt. $N' A'$, von n_5 nach n_6
 „ α' „ „ $A' N'$, „ a_2 „ a_3 „ „ $A' B'$, „ a_5 „ a_6
 „ β' „ „ $B' A'$, „ b_2 „ b_3 „ „ $B' G'$, „ b_5 „ b_6
 „ γ' „ „ $G' B'$, „ g_2 „ g_3 „ „ $G' D'$, „ g_5 „ g_6
 „ δ' „ „ $D' G'$, „ d_2 „ d_3 „ „ $D' E'$, „ d_5 „ d_6
 „ ϵ' „ „ $E' D'$, „ e_2 „ e_3 „ „ $E' M'$, „ e_5 „ e_6
 „ μ „ „ $M' E'$, „ m_2 „ m_3 „ „ $M' N'$, „ m_5 „ m_6

Dann wird: $n_2 n_4 = n' n_3$, dann $n_5 n_7 = n' n_6$, und die Kante: $N' n_4 = N' n_7$
 $a_2 a_4 = a' a_3$, „ $a_5 a_7 = a' a_6$, „ $A' a_4 = A' a_7$
 $b_2 b_4 = b' b_3$, „ $b_5 b_7 = b' b_6$, „ $B' b_4 = B' b_7$
 $g_2 g_4 = g' g_3$, „ $g_5 g_7 = g' g_6$, „ $G' g_4 = G' g_7$
 $d_2 d_4 = d' d_3$, „ $d_5 d_7 = d' d_6$, „ $D' d_4 = D' d_7$
 $e_2 e_4 = e' e_3$, „ $e_5 e_7 = e' e_6$, „ $E' e_4 = E' e_7$
 $m_2 m_4 = m' m_3$, „ $m_5 m_7 = m' m_6$, „ $M' m_4 = M' m_7$

Es bleibt nun noch die wahre Gestalt der obern Grundfläche darzustellen, wozu die zwar richtig bestimmten Kanten in der Entfaltung:

$$a_4 n_7, b_4 a_7, g_4 b_7, d_4 g_7, e_4 d_7, m_4 e_7, n_4 m_7,$$

doch nicht hinreichend sind. Wir haben aber in der gehörig geneigten Linie $\varphi' \gamma' = \varphi \gamma_2$ (Fig. 40. 41.) die Abscissen schon gefunden und können auf der Richtungslinie $\varphi' F'$ senkrechte Ordinaten nach den Fusspunkten ziehen und messen; es ergibt sich demnach die Lage der Punkte:

γ	durch die Abscisse:	$\varphi \gamma_2$	und Ordinate:	$g' = \gamma_2 \gamma$
δ	„	$\varphi \delta_2$	„	$d' = \delta_2 \delta$
β	„	$\varphi \beta_2$	„	$b' = \beta_2 \beta$
e	„	$\varphi \epsilon_2$	„	$e' = \epsilon_2 \epsilon$
μ	„	$\varphi \mu_2$	„	$m' = \mu_2 \mu$
α	„	$\varphi \alpha_2$	„	$a' = \alpha_2 \alpha$
ν	„	$\varphi \nu_2$	„	$n' = \nu_2 \nu$

und endlich die Bestimmung aller vierzehn Körperwinkel:

A	durch die Seitenwinkel:	$a_4 A' N'$, $a_7 A' B'$, $N' A' B'$,
B	„	$b_4 B' A'$, $b_7 B' G'$, $A' B' G'$,
G	„	$g_4 G' B'$, $g_7 G' D'$, $B' G' D'$,
D	„	$d_4 D' G'$, $d_7 D' E'$, $G' D' E'$,
E	„	$e_4 E' D'$, $e_7 E' M'$, $D' E' M'$,
M	„	$m_4 M' E'$, $m_7 M' N'$, $E' M' N'$,
N	„	$n_4 N' M'$, $n_7 N' A'$, $M' N' A'$,

a	durch die	Seitenwinkel:	$n; a_6 A', b_6 a_7 A', \gamma \alpha \beta,$
b	„	„	$a_7 b_6 B', g_6 b_7 B', \alpha \beta \gamma.$
g	„	„	$b_7 g_6 G', d_6 g_7 G', \beta \gamma \delta,$
d	„	„	$g_7 d_6 D', e_6 d_7 D', \gamma \delta \varepsilon,$
e	„	„	$d_7 e_6 E', m_6 e_7 E', \delta \varepsilon \mu,$
m	„	„	$e_7 m_6 M', n_6 m_7 M', \varepsilon \mu \nu,$
n	„	„	$m_7 n_6 N', a_6 n_7 N', \mu \nu \alpha.$

92. Ein ebener Flächenraum, gebildet von sich schneidenden krummen Linien, oder auch von geraden mit krummen wechselnd, hat allerdings auch Ecken; aber diese sind nicht messbar, folglich keine Winkel. Denn sie bleiben nicht, wie Winkel aus zwei geraden: beständig sich ähnlich als Kreisabschnitte, bei veränderlichem Halbmesser. Einige Alte meinten zwar: Der Winkel aus Bogen und Tangente wäre kleiner als der kleinste messbare Winkel und doch grösser als Null; der Winkel aus Bogen und Durchmesser grösser als der grösste spitzige und doch noch kein rechter u. s. w. Aber damit ist nicht viel mehr gesagt, als wenn man einfach gestehen will, das vergleichende Mass der ebenen Winkel sey auf solche Ecken nicht anwendbar. Auch die Annahme, der Winkel zweier Bogen auf der Ebene, sey dem Winkel ihrer Tangenten gleich, führt auf die bekannten Widersprüche der Wechselwinkel, wovon der eine mit auswärts strebenden Bogen nicht grösser seyn soll, als der andere mit sich immer nähernden, nach innen gekrümmten. Selbst auf der Sphäre werden nur die Winkel grosser Kreise, nicht aber die Durchschnitte von Bogen der kleinen Kreise durch ihre Tangentenwinkel richtig vertreten.

Mit gleichem Rechte gilt von der Spitze eines Körpers, dass sie nur dann als Winkel messbar ist, wenn der durch sie bestimmte Abschnitt der Kugel sich bei jedem möglichen Halbmesser ähnlich bleibt.

Daher sind alle Spitzen, welche von Theilen der Kugelfläche, von ellipsoidischen, paraboloidischen, konoidischen oder unregelmässigen krummen Flächen, (auch von ebenen mit solchen krummen Seitenflächen in Verbindung) gebildet werden, in dem hier ausgesprochenen Sinne keine Körperwinkel.

93. Stellt man aber die Frage, wie die von einer krummen Fläche begrenzte Spitze bedingt seyn müsse, um mit unserm Masse gemessen zu werden — so antworten wir: Vom Scheitel mitten durch den innern Raum eine Ebene gelegt, soll diese in jeder Wendung um eine Axe, den gleichen, geradlinigen Durchschnittswinkel erzeugen; so dass, den Scheitel in den Mittelpunkt der Kugel gesetzt, jeder Strahl aus demselben nach der Oberfläche geführt, seiner ganzen Länge nach der krummen Fläche angehört und sie nirgend verlässt, und dass der eingeschlossene Raum, auch bei wachsender und abnehmender Kugel, ihr beständig sich ähnlicher, verhältnisslicher Theil bleibt.

Eine solche Fläche ist der Mantel des Kegels. Es können aber durch denselben dreierlei Formen messbarer Spitzen entstehen:

- 1.) eigentliche Kegelwinkel, ohne Kanten, nur vom Mantel gebildet;
- 2.) Kegeltheilwinkel, einerseits vom Mantel, andererseits von Ebenen begrenzt (Fig. 42.); diese sind entweder Einschnittwinkel: $EKA D r$, $DKAB m$, mit 3 Kanten, oder Abschnittwinkel: $BKD n$, BKE , mit 2 Kanten.
- 3.) Kegelhohlwinkel (Erfüllung des Zwischenraumes der Kegelwinkel, Fig. 43. 46.) durch drei oder mehr sich berührende Mäntel aus einem gemeinschaftlichen Scheitel so umschlossen, dass die Berührungslinien zu Kanten werden.

94. Für das Verhältniss des Körpermasses zweier durch Kegelmäntel gebildeter Ausschnitte A , a , einer Kugel deren Strahl = 1, die gegebenen Scheitelwinkel der Durchschnitte aber D , d , sind, finde ich nach bekannten Gesetzen den kürzesten Ausdruck:

$$A : a = \left(\sin^2 \frac{D}{4} \right) : \left(\sin^2 \frac{d}{4} \right).$$

Wie diese Ausschnitte, verhalten sich aber (nach 6. vergl. M. d. K.) auch die Körperwinkel, deren jeder in Sekunden:

$$K = 8R'' \cdot \sin^2 \frac{D}{4}$$

gleich dem Produkte des Sinusquadrats des Vierteldurchschnittes in die ganze Kugelfläche ist.

95. Es sey nun zur Darstellung des auf einer berührenden Ebene entfalteten Kegelmantels, gegeben der akrometrische Werth der Spitze K ; zu finden der Bogen des Kreisausschnittes M .

Den Winkel D des Durchschnittees als bekannt vorausgesetzt, wäre der gesuchte Bogen gleich dem Produkte aus dem Sinus des halben Durchschnittees in die Fläche der Halbkugel. Man hat also zuerst D zu suchen durch:

$$\sin \frac{D}{4} = \sqrt{\left(\frac{K}{8R''} \right)}; \text{ und dann ist}$$

$$M = 4R'' \cdot \sin \frac{D}{2}.$$

96. Zur Messung eines Kegeltheilwinkels: $DKAB m = K_t$, (Fig. 42) ist erstens erforderlich: Der Werth der Spitze des ganzen Kegels = K , oder auch weil einer aus dem andern leicht zu finden, der ebene Durchschnittswinkel $D = EKB$; zweitens, der Bogen DB des Kreises $EDBE$ als Mass des Einschnittes DCB . Da der gegebene ein Einschnittwinkel ist, so genügt das Verhältniss:

$$4R'' : DB'' = K : K_t.$$

Ist aber ein Abschnittwinkel: $BKD n = K_a$ zu bestimmen, so hat man von dem gefundenen Werthe des Einschnittes noch die Spitze der Pyramide $DKAB n = p$ abzuziehen, deren Mass die Seitenwinkel, oder grossen Kreisbogen: AB , BD , DA , geben.

$$K_a = K_t - p.$$

97. Um drei- oder mehrkantige Kegelhohlwinkel (Fig. 44. 43.) zu messen, muss man die Kegel, aus denen sie gebildet sind, und die Linien der Berührung: pa , pb , pd , pe , ... vollständig kennen. Sind diese gegeben, so sind es auch die Sehnen: ab , bd , da , de , ea , ...; und durch diese die Pyramiden: $apbd$, $apbde$, ...; ferner die Halbmesser der Kugelsegmente, welche zugleich Grundflächen der Kegel sind, die Bogen: ab , bd , da , ... zu den gleichnamigen Sehnen, die Höhen der Kegelaxen, die Ausschnittpyramiden, endlich die daraus zu findenden Einschnittwinkel und Abschnittwinkel.

Von der zuerst ermittelten Spitze der Stammpyramide p werden dann die umgebenden drei oder mehr Abschnittwinkel abgezogen. Der Rest ist der verlangte Werth des Hohlwinkels.

$$K_h = p - k_a - k'_a - k''_a - \dots$$

98. Die allseitige Gleichförmigkeit der Spitze eines geraden Kegels macht, dass sich dieselbe für den Augenschein besser als irgend eine zur allgemeinen Vergleichung der Körperwinkel eignet, indem man wie bei ebenen Winkeln, sogleich den grössern aus zweien erkennt, und die Täuschung wegfällt, welche bei Pyramiden und andern geradlinigen Körpern gewöhnlich ist. Es schien daher nicht zwecklos, die Zahlenwerthe einiger bemerkenswerthen Kegelspitzen aus der ganzen sie alle umfassenden Reihe von Null bis zur Halbkugel hervorzuheben, und sowohl unter sich, mit den ihnen angehörigen ebenen Winkeln am Scheitel des Durchschnittes und am entfalteten Mantel, als auch mit den gleich grossen, anderer Formen zusammenzustellen.

Das erste, was bei Eröffnung dieser Reihe auffällt, ist die ganz andere und viel richtigere Bezeichnung der Schärfe feiner Nadelspitzen nach akrometrischem Mass, als nach dem Durchschnitte. Jenes steigt im Anfang (von Fig. 45 bis Fig. 46) um das siebenzigfache, während Durchschnitt und Mantel sich nur zehnfach vermehren.

99. Folgende Spitzen senkrechter Pyramiden sind zur Vergleichung mit den entsprechenden Kegelwinkeln, den Tabellen A, B, C, (Summen d. K. III. Bd. 2. Abth.) entnommen und nebst dazu berechneten Durchschnitten und Mantelwinkeln hier eingereiht:

(Fig. 48.) Die Spitze des Regeltetraeders.

(Fig. 49.) Der Mittelpunktwinkel des Regelikosaeders, oder die Spitze einer der zwanzig Pyramiden, in welche dieser Körper von der Mitte aus theilbar ist.

(Fig. 51.) Der Mittelpunktwinkel des Regeldodekaeders, oder die Spitze einer seiner zwölf fünfseitigen Pyramiden.

(Fig. 54.) Die Spitze des Regeloktaeders.

(Fig. 55.) Die Spitze des Regelhexaeders (Kubus), und zugleich der Mittelpunktwinkel des Regeloktaeders, oder der rechte Körperwinkel. Dieser wird noch weiter unten besprochen.

(Fig. 59.) Der Mittelpunktwinkel des Kubus, oder die Spitze einer der sechs vier-

seitigen Pyramiden aus welchen er besteht; auch die Spitze einer der sechs dreiseitigen Centralpyramiden des sphärischen Pentakron.

(Fig. 60.) Die Spitze des Regelikosaeders; zugleich eine Polarspitze des Heptakro-
Dekaeders.

(Fig. 61.) Die Spitze des Regeldodekaeders.

(Fig. 62.) Der Mittelpunktwinkel des Regeltetraeders.

100. Der gleichseitige Kegel (Fig. 50) hat zum Mantel den Halbkreis und $48^{\circ}.13'.51''.04\dots$ ist sein akrometrisches Mass; er hält also ziemlich das Mittel zwischen den Centralpyramiden der beiden reinen Regelkörper (Fig. 49. 51).

101. Der rechtwinkelige Kegel ist eine Benennung, um die eine Streitfrage bestehen könnte, wenn man nicht von vorne herein mit der nöthigen Unterscheidung einschreiten und sich über die getrennten Begriffe durch Beinamen verständigen wollte. Nach dem vergleichenden Mass ist ein rechter Körperwinkel dem achten Theile der Kugel gleich; ein Kegel, dessen Spitze in die Mitte der Kugel gestellt, einen Ausschnitt bildet, dessen Körpermass achtmal in der Kugel ohne Rest enthalten ist (Fig. 55), kann daher ein akrometrisch rechter Kegel genannt werden, da er 90° misst, ob-
schon sein Scheitel im vertikalen Durchschnitte nur

$$D = 82^{\circ}.49'.9''.3\dots \text{ ist.}$$

Der Rechnung genügt die Bezeichnung, aber dem Auge widerspricht sie; auch lässt sich der Kugelraum überhaupt nicht mit Kegeln ausfüllen, und in diesem Sinne würde die Benennung nur auf die Spitzen des Regelhexaeders passen. Denn auch der zweite rechte Kegel, oder dem Alter nach der erste: der Kegel des Apollonius *) (Fig. 57) hätte keinen gegründeten Anspruch auf dieselbe; will man für ihn geltend machen, dass er dem Auge rechtwinkelig erscheint, weil sein Durchschnitt 90° hat, so ist er dagegen als Körperwinkel schon bedeutend stumpf (um mehr als 15 Grade grösser als die Spitze des Kubus), nämlich:

$$K = 105^{\circ}.26'.29''.61\dots$$

und also noch weniger als sein Gegner, achtmal in der Kugel denkbar. Sechs solcher Kegel mit den acht dazwischen liegenden Hohlwinkeln erfüllen den sphärischen Raum genau (Fig. 44), und da die Summe der Kegelwinkel:

$$6K = 632^{\circ}.38'.57,66\dots \text{ ist, so bleibt für die Hohlwinkel:}$$

$$8K_h = 87.21.2,33\dots \text{ und für jeden derselben (apbd):}$$

$$K_h = 10.55.7,7\dots$$

102. Eine Eigenschaft des APOLLONIUS'schen Kegels kann ich mitzutheilen nicht unterlassen: Das Mass seiner Spitze in Kugelgraden, mehr dem Bogen seines Mantels in Kreisgraden ist dem Nennwerthe nach, der Halbkugel gleich. (Tab. G. Fig. 57.) Der Grund findet sich leicht aus 94, 95.

*) APOLLONIUS scheint sich vorzugsweise mit diesem Kegel beschäftigt zu haben, da er seine Parabel den rechtwinkelligen Schnitt nannte, was bei jedem andern Kegel unrichtig gewesen wäre.

Diese Wahrnehmung führte mich aber auf den Gedanken, dass es auch einen Kegel geben müsse, dessen Durchschnitt dem Bogen gleich ist, welcher den Mantelwinkel auf einen Umkreis ergünzt; so dass der aufgerichtete Kegel (Fig. 58) in den Kreisausschnitt des entfalteten Mantels, oder vielmehr der Mantel in zweifachem Sinne an den Kegel passt. Ich fand:

$$\begin{array}{r} D = 94^{\circ}. 51'. 56'', 1... \\ M = 265. 8. 3,8... \\ \hline 360. 0. 0,0 \end{array}$$

Eben so ermittelte ich den Kegel (Fig. 53), dessen Körperwinkel denselben Werth hat als sein Durchschnitt:

$$K = D = 75^{\circ}. 39'. 36'', 88...$$

die einzige Spitze im ganzen Umfange der Körperlehre, an welcher das gonometrische Mass mit dem akrometrischen gleichbedeutend ist.

Von der schärfsten Spitze (Tabelle G.) bis hierher bleibt der Körperwinkel kleiner als der Durchschnitt, und beide zusammen kleiner als der Mantel. Von hier an bis ans Ende der Reihe wird beständig K grösser als D, und endlich K = M.

103. Es seyen für den grössten in die Kugel einzuschreibenden Kegel, der Durchschnitt, der Körperwinkel und der Mantel zu finden.

Wenn der Durchmesser der Kugel = 1, und die Höhe des eingeschriebenen Kegels = 1 - x gesetzt wird, so ist das Körpermass desselben allgemein:

$$K = (x^3 - 2x^2 + x) \cdot \frac{\pi}{3}; \text{ daher:}$$

$$d(K) = 3x^2 dx - 4x dx + dx = 0; \text{ und:}$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}; \text{ oder:}$$

$$x' = +1, \text{ für den kleinsten,}$$

$$x = +\frac{1}{3}, \text{ für den grössten Kegel; d. h.}$$

Die Höhe des grössten Kegels in der Kugel ist $\frac{2}{3}$ ihres Durchmessers (Fig. 52). Folglich ist:

$$r \cos D = \frac{r}{3}, \text{ und:}$$

$$D = 70^{\circ}. 31'. 56'', 3... \text{ woraus (nach 94. 95.)}$$

$$K = 66. 4. 3,5... \text{ und}$$

$$M = 207. 51. 20,3... \text{ gefunden wird.}$$

104. Es sey der krumme Ausschnitt eines gegebenen Kegelmantels, von dessen aufgerichtetem Kegel ein Stück durch den Parabelschnitt getrennt worden, in der Entfaltung darzustellen.

Wird der unendlich kleine Kegel mit der Spitze gleich Null, an der obersten Grenze der Reihe parabolisch geschnitten, so erscheint seine Parabel als Embryo und wiederholt sich genau so auf der kleinen Entfaltung, die Arme von der Mitte abge-

wendet nach aussen gerichtet. Der Kegel an der untersten Grenze aber, wo die Spitze die Halbkugel erfüllt, dagegen die Höhe Null wird, ist identisch mit dem entfalten Mantel, folglich auch die Parabel, — kein Embryo, congruent mit dem Ausschnitte, dessen Arme in der Gegenrichtung der obigen, sich nach der Mitte und über diese hinaus nach dem Umkreise strecken.

Dieses genügt, um zu wissen, wie sich beim Fortschreiten nach einem Gesetze, die veränderliche Krümmung des gesuchten Ausschnittes innerhalb der Reihe gestalten muss. Unmittelbar nach jenem ersten Schnitte mit der imaginären Parabel, folgen in ununterbrochener Ordnung alle möglichen Hyperbeln zweiten Grades, mit dem Brennpunkte zwischen ihrem Scheitel und dem Rande der Entfaltung, vom spitzigsten Asymptotenwinkel immer zunehmend; bis mitten in der Reihe eine Wendung stattfindet, von wo aus alle dieselben Hyperbeln, mit dem Brennpunkte zwischen ihrem Scheitel und dem Mittelpunkte der Entfaltung, also negativ, in rückläufiger Ordnung mit abnehmenden Asymptotenwinkeln erscheinen, und die verkehrte imaginäre Parabel den Schluss macht.

An dem Orte der Wendung muss eine Hyperbel stehen, deren Brennpunkt und Scheitel eins sind, oder mit andern Worten: es muss dort einen Kegel geben, dessen parabolischer Mantelausschnitt in der Entfaltung eine gerade Linie ist.

Ich verlängere den Kegel ($ec'e'$) (Fig. 47) und seinen parabolischen Schnitt ($e..3..$) bis an den Kreis (ab), in dessen Mitte (m) sich die Axe des Kegels und die Ebene des Schnittes begegnen, damit der Punkt des Einschnittes (e) gleich weit von der Spitze des Kegels (c) und dem Rande seiner Grundfläche (a) abstehe. Mit dem Strahle $ca = cb$ ziehe ich den Bogen des entfalten Mantels DE und stelle den Mantelwinkel nach Angabe, $M = DE$ mitten über die Axe. Durch dieses Verfahren habe ich schon drei Punkte der Hyperbel bestimmt; nämlich S , den Scheitel, indem $cS = ce$ auf der Axe abgeschnitten wird; dann A und B , nachdem der Bogen DE in vier gleiche getheilt und $DA + BE = AB$ gemacht worden. Denn DE ist dem Umkreise gleich, dessen Durchmesser ab , und der durch den Parabelschnitt in mm' halbirt ist. A und B entsprechen also dem Punkte (m) und seinem diametralen Gegenpunkte (m'), weil AB den Halbkreis in der Entfaltung vertritt. (Fig. 50. 63.)

Bis hierher ist fürs erste entschieden, dass der Ausschnitt ASB in dem Kegel (Fig. 47) eine spitzige, in dem Kegel (Fig. 50) eine stumpfe, bei (Fig. 63) aber eine überstumpfe oder negative Hyperbel ist, wodurch sich das oben vorläufig Ausgesprochene thätlich bestätigt. Nun kann man aber leicht so viele Punkte der Hyperbeln bestimmen, als man zur beschreibenden Darstellung wünscht, indem man den aufgerichteten Halbkreis der Grundfläche aob in beliebig viele gleiche Theile, den Bogen AB aber in eben so viele theilt; z. B. $a, 1, 2, 3, 0, 3, 2, 1, b$; und $A, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, B$; ferner von dem Halbkreise auf die Grundlinie die ihm entspricht, durch die senkrechten $11, 22, 33, 33, 22, 11$, diese Theilung überträgt; die geraden, und wie man

nicht vergessen darf, alle einander gleichen: $ca, c1, c2, c3, cm, c3, c2, c1, cb$, aus der Spitze an den Rand des aufgerichteten Mantels, auch eben so die ihnen entsprechenden Strahle: $cA, c3, c2, c1, c0, c1, c2, c3, cB$, nach dem Umkreis der Entfaltung führt; endlich von der Linie em , welche die Grenze des Ausschnittes vorstellt, die Durchschnittspunkte 1, 2, 3, an die Endpunkte der (parallele Kreise bedeutenden) Geraden 111, 222, 333, und von da weiter durch die Bogen 1, 2, 3, gleichförmig zu beiden Seiten bis zu deren Durchschnitten mit den gleichnamigen Strahlen der Entfaltung bringt. (Fig. 47.)

105. In Beziehung auf den vorhin erwähnten Wendepunkt in der Kegelreihe, bleibt noch die Frage zu erörtern: bei welchem Werthe des Mantelwinkels die zuerst gefundenen drei Punkte des Ausschnittes in einer geraden stehen? und dann, welchem Kegel dieser Mantel angehört?

Es ist aber, wie wir gesehen (Fig. 47. 50. 63) die Entfernung des hyperbolischen Scheitels vom Mittelpunkte des Kreises der Entfaltung, nach meinem Verfahren immer dem halben Strahle dieses Kreises gleich: $CS = \frac{1}{2}CB$; und eben so ist beständig der Bogen: $(BE) = \frac{1}{4}(DABE)$.

Die drei Punkte A, S, B... können daher nur dann sich in einer geraden befinden, und mit ihnen die ganze Hyperbel; wenn der Cosinus des vierten Theiles des Mantelwinkels dem halben Strahle gleich ist: $\text{Cos}(BCS) = \frac{1}{2}(BC)$. In diesem Falle aber ist

$(DABE) = M = 240^\circ. 0'. 0'',0$ und die Spitze des Kegels (Fig. 56):

$$K = 91.40.18,4\dots$$

$$D = 83.37.14,2\dots$$

Um den Stoff gänzlich zu erschöpfen, müssten auch die Körperwinkel der schiefen und elliptischen Kegel untersucht werden, welche obgleich an der Kugelfläche von Krümmen doppelter Krümmung begrenzt, doch nach den angenommenen Grundsätzen annähernd messbar sind und in so fern allerdings eine eigene Besprechung verdienen.

Tabelle G.

Vergleichung der Winkel am Kegel.

Körperwinkel :	Ebene Winkel		Nachweisung der Eigenschaften.
	am Scheitel des Durchschnittes :	am entfalteten Mantel :	
K =	M =	D =	
0°. 0'. 49",34..	1°. 0'. 0",0	3°. 8'. 29",59	(98. Fig. 45.)
0. 3. 17,38..	2. 0. 0,0	6. 16. 58,3..	
0. 7. 24,10..	3. 0. 0,0	9. 25. 25,3..	
0. 13. 9,48..	4. 0. 0,0	12. 33. 49,7..	
0. 20. 33,50..	5. 0. 0,0	15. 42. 10,7..	
0. 29. 36,12..	6. 0. 0,0	18. 50. 27,1..	
0. 40. 17,30..	7. 0. 0,0	21. 58. 38,9..	
0. 52. 36,99..	8. 0. 0,0	25. 6. 44,3..	
1. 0. 0,0	8. 32. 35,2..	26. 48. 50,9..	
1. 6. 35,13..	9. 0. 0,0	28. 14. 42,98..	
1. 22. 11,67..	10. 0. 0,0	31. 22. 33,8..	(98. Fig. 46.)
2. 0. 0,0	12. 5. 4,6	37. 53. 40,5..	
3. 0. 0,0	14. 48. 14,4	46. 22. 43,9..	
3. 4. 47,4..	15. 0. 0,0	46. 59. 21,9..	
4. 0. 0,0	17. 5. 53,3..	53. 30. 58,8..	
5. 0. 0,0	19. 7. 14,7..	59. 47. 28,6..	
5. 28. 9,1..	20. 0. 0,0	62. 30. 48,0..	
6. 0. 0,0	20. 57. 2,2..	65. 27. 8,1..	
7. 0. 0,0	22. 38. 4,3..	70. 38. 49,1..	
8. 0. 0,0	24. 12. 10,7..	75. 28. 18,5..	
8. 32. 0,3..	25. 0. 0,0	77. 55. 5,8..	
9. 0. 0,0	25. 40. 37,7..	79. 59. 37,5..	
10. 0. 0,0	27. 4. 16,1..	84. 15. 27,4..	
12. 16. 0,1..	30. 0. 0,0	93. 10. 29,5..	hyperbol. Ausschnitt (104. Fig. 47.)
15. 0. 0,0	33. 11. 44,4..	102. 50. 5,1..	
16. 39. 42,8..	35. 0. 0,0	108. 15. 24,7..	
20. 0. 0,0	38. 22. 34,5..	118. 19. 17,7..	
21. 42. 38,3..	40. 0. 0,0	123. 7. 38,2..	
25. 0. 0,0	42. 57. 24,5..	131. 48. 5,1..	
27. 24. 12,0..	45. 0. 0,0	137. 45. 57,7..	
30. 0. 0,0	47. 6. 46,5..	143. 52. 29,7..	
31. 35. 10,8..	48. 21. 39,0..	147. 27. 36,2..	Tetraeder (99. Fig. 48.)
33. 43. 45,1..	50. 0. 0,0	152. 8. 33,3..	
35. 0. 0,0	50. 56. 55,2..	154. 50. 18,5..	
36. 0. 0,0	51. 41. 1,9..	156. 55. 13,2..	
40. 0. 0,0	54. 31. 55,4..	164. 55. 27,1..	Ikosaeder (99. Fig. 49.)

K =	D =	M =	Nachweisung der Eigenschaften.
48°.13'.41"0..	60°. 0'. 0",0	180°. 0'. 0",0	gleichseit. Kegel u. hyperbolisch. Ausschnitt (100. Fig. 50.)
50. 0. 0,0	61. 7. 0,7..	183. 1.48,1..	Dodekaeder (99. F. 51.)
60. 0. 0,0	67. 6.52,6..	198.59.50,9..	
65. 6.18,9..	70. 0. 0,0	206.29.15,0..	Maximum (103. Fig. 52.)
66. 4. 3,5..	70.31.56,30..	207.51.20,3..	
70. 0. 0,0	72.40.19,5..	213.18.26,0..	K=D (102. Fig. 53.)
74.23.34,0..	75. 0. 0,0	219. 9.14,7..	
75.39.36,88..	75.39.36,88..	220.47.45,8..	Oktaeder (99. Fig. 54.)
77.53. 5,5..	76.48.25,7..	223.37.51,1..	
80. 0. 0,0	77.53. 5,5..	226.16.26,9..	K. rechtwink. (99. 101. Fig. 55.)
84.13.27,8..	80. 0. 0,0	231.24.12,6..	
90. 0. 0,0	82.49. 9,3..	238. 7. 3,3..	geradliniger Ausschnitt (105. Fig. 56.)
91.40.18,4..	83.37.14,2..	240. 0. 0,0	
100. 0. 0,0	87.31.24,4..	248.59.52,4..	K. d. Apollonius. K+M =360° (101. 102. Fig. 44. 57.)
105.26.29,61..	90. 0. 0,0	254.33.30,38..	
116.28.34,7..	94.51.56,1..	265. 8. 3,8..	D+M=360° (102. Fig. 58.)
120. 0. 0,0	96.22.45,7..	268.19.41,2..	Kubus, Centr. Pyr. (99. Fig. 59.)
121.52.56,6..	97.10.50,7..	270. 0. 0,0	(M=2K)
128.35.47,3..	100. 0. 0,0	175.46.33,6..	
144. 0. 0,0	106.15.36,7..	288. 0. 0,2..	Ikosaeder u. Dekaaeder (99. Fig. 60.)
150.56.54,0..	109. 0. 1,9..	293. 4.57,2..	
153.30.44,9..	110. 0. 0,0	294.53.41,0..	Dodekaeder (99. F. 61.)
169.41.42,6..	116.10.29,4..	305.35.17,0..	
180. 0. 0,0	120. 0. 0,0	311.46. 8,7..	Tetraeder (99. Fig. 62.)
207.51.26,7..	130. 0. 0,0	326.16.14,8..	
236.52.21,9..	140. 0. 0,0	338.17.21,6..	hyperbol. Ausschnitt negativ (104. 105. F. 63.)
240. 0. 0,0	141. 3.26,7..	339.24.39,8..	
266.49.30,4..	150. 0. 0,0	347.44. 0,0..	
270. 0. 0,0	151. 2.41,9..	348.34. 6,0..	
297.29.11,9..	160. 0. 0,0	354.31.50,9..	
328.37.25,9..	70. 0. 0,0	358.37.48,2..	
360. 0. 0,0	180. 0. 0,0	360. 0. 0,0	

Fig. 30.

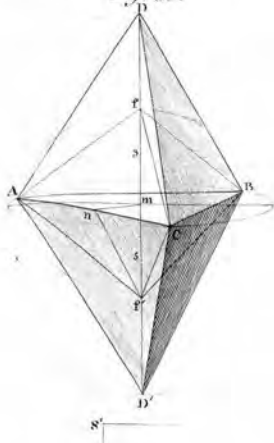


Fig. 31.

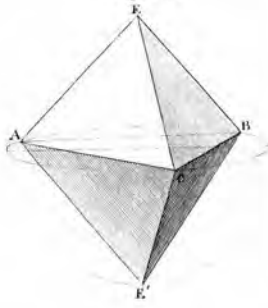


Fig. 35.

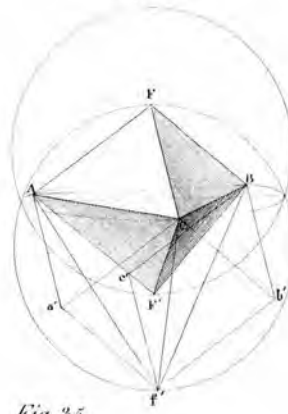


Fig. 33.

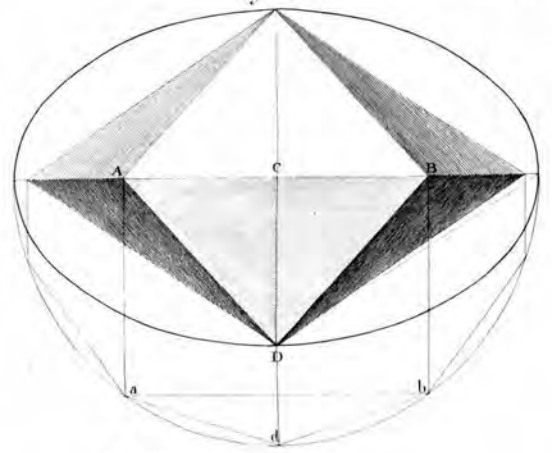


Fig. 34.

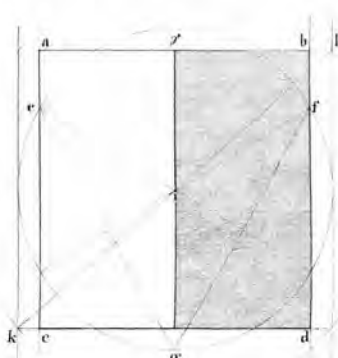
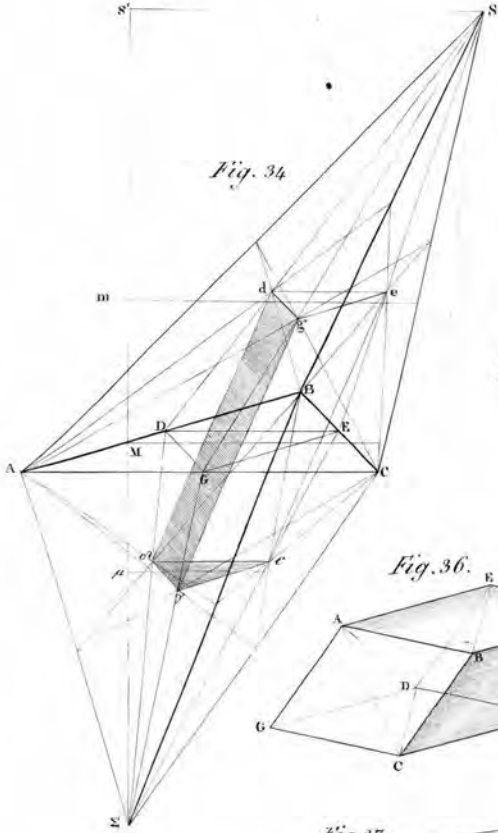


Fig. 39.

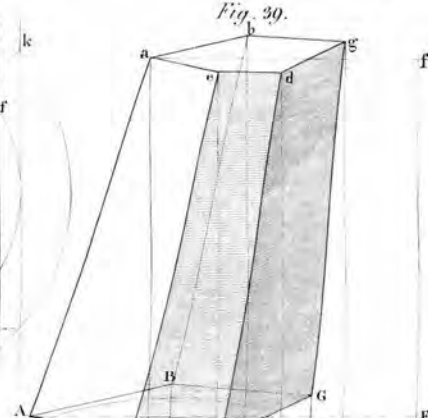


Fig. 36.

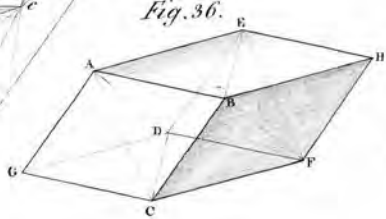


Fig. 37.

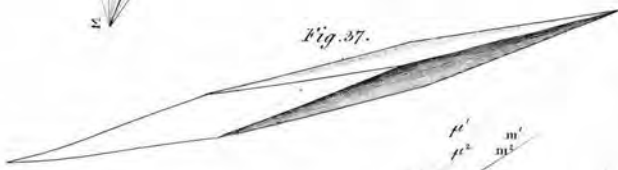
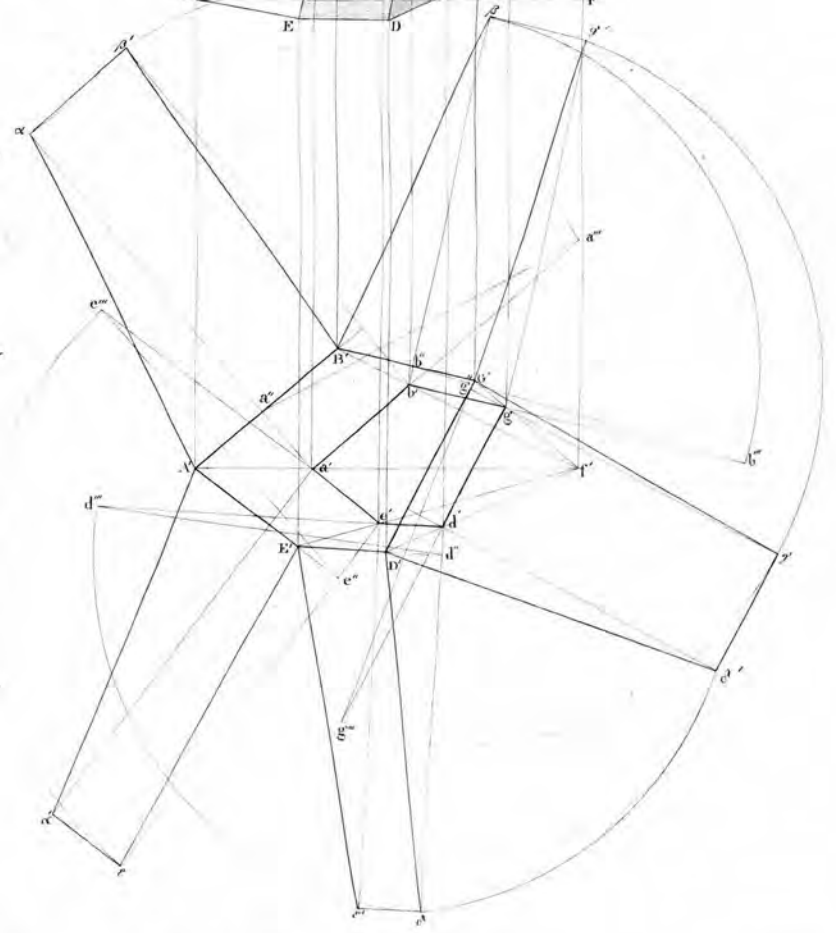
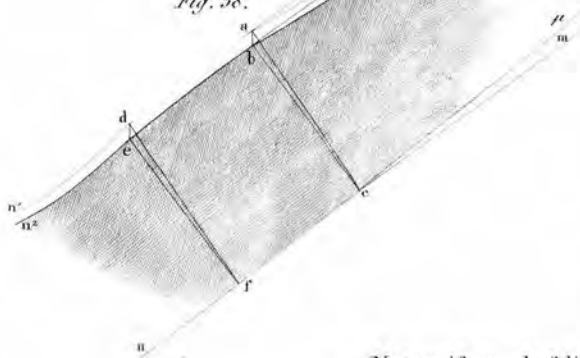
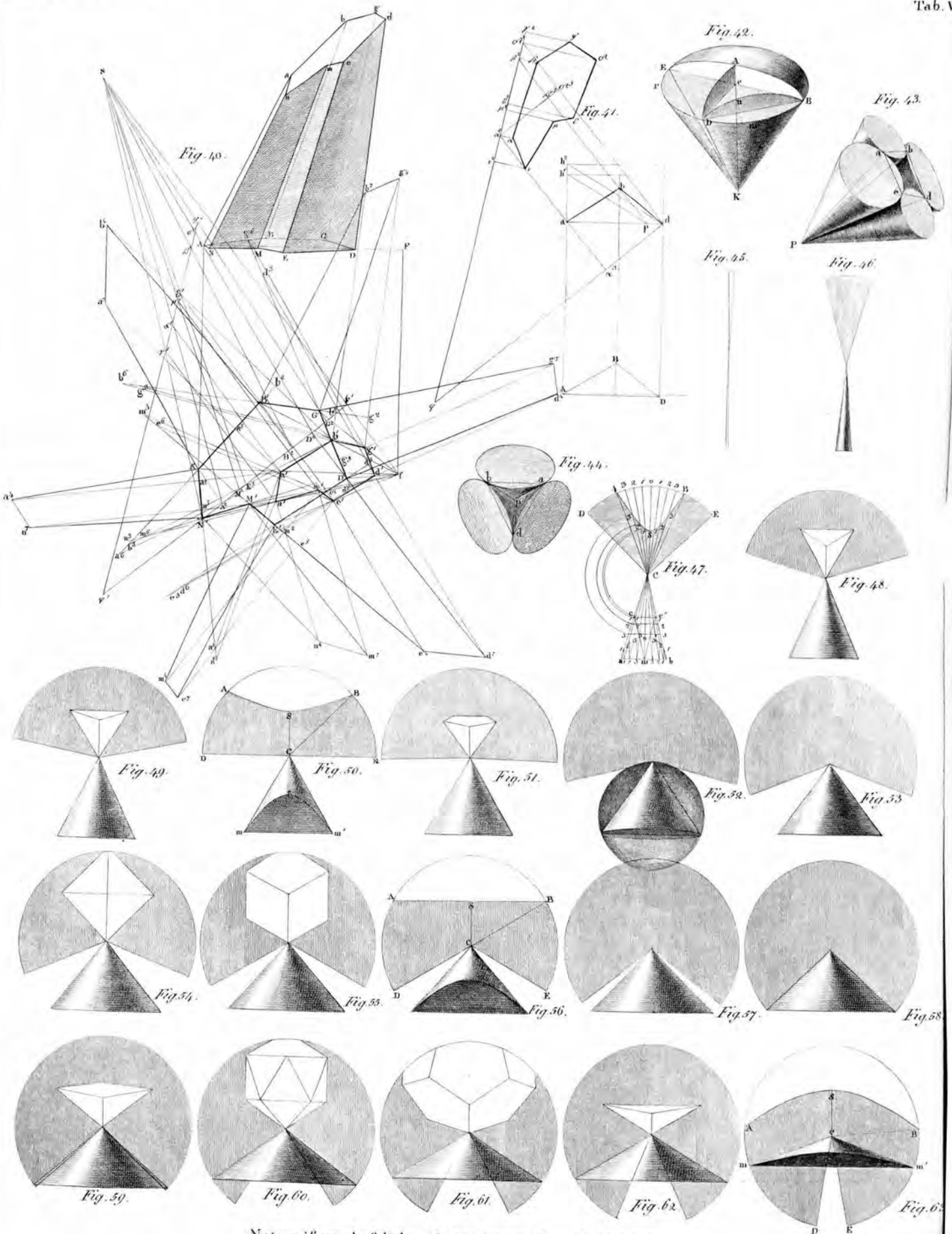


Fig. 38.





IV. Ueber die Achatmandeln in den Melaphyren,
namentlich
über die von Theiss in Tirol.

Von

Dr. Gustav Adolph Kenngott.

Mit zwei lithographirten Tafeln.

Mitgetheilt am 3. December 1850 in der Sitzung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

Von dem Director der k. k. geologischen Reichs-Anstalt Herrn Sectionsrath **WILHELM HAIDINGER** aufgefördert *), zufolge der bereits bekannten Thatsachen und mit Benützung des reichen Materials, welches die Sammlung der Achatmandeln von **Theiss** bei **Klausen** in **Tirol** in dem k. k. montanistischen Museum zu **Wien** und die des k. k. Herrn General-Landes und Hauptmünz-Probirers **ALEXANDER LÖWE** dar-

*) Herr Dr. G. A. KENNGOTT hat auf meine Bitte die Achatmandeln von Theiss bei Klausen in Tirol einer genaueren Untersuchung unterworfen, und die gegenwärtige Mittheilung zusammengestellt. Längst beabsichtigte ich es selbst zu thun, veranlasst durch die ausgedehnten und lehrreichen Vorräthe unserer Sammlungen. Später trat noch die Anregung durch die zwei freundlichen und gehaltvollen Sendschreiben des trefflichen NOEGGERATH in dem vorigen dritten Bande der Abhandlungen dazu. Ich war einen Augenblick wankend, ob ich nicht das ganze Material zum Studium an ihn selbst nach Bonn senden sollte. Aber die grosse Schwere der Gegenstände, noch mehr die Pflicht selbst zu arbeiten, oder in der Nähe Arbeit zu veranlassen, überwog. Ein hoffnungsvoller tüchtig vorgebildeter junger Mann, Hr. VICTOR Ritter v. ZEPHAROVICH, begann unter meiner Leitung das Studium. Er hatte selbst vor zwei Jahren die Localität in Gesellschaft der Herren v. HAUER und Dr. HÖRNES besucht. Doch riefen ihn seine montanistischen Studien vor der Vollendung der Arbeiten über die Achatmandeln von Wien hinweg, und es war also wieder eine Unterbrechung eingetreten, da ich leider mich nicht selbst des Gegenstandes so speciell annehmen konnte, als ich wohl gewünscht und es das grosse Interesse desselben verdient hätte. Es konnte mir daher Nichts erwünschter seyn, als Hr. Dr. KENNGOTT's viel geübtes Auge, und ausgedehnte mineralogische Kenntnisse zu gewinnen, als er Breslau verliess und sich entschloss, Wien und Oesterreich zu seinem Aufenthalte zu wählen, und ich ergreife mit grossem Vergnügen hier die Gelegenheit, ihm meinen verbindlichsten Dank für diese schöne Arbeit darzubringen. W. Haidinger.

böte, ein möglichst vollständiges Bild der Bildung von Achatmandeln in den Melaphyren zu entwerfen, um auf diese Weise die Gelegenheit nicht vorbeigehen zu lassen, ein reichliches und für die Theorie fruchtbares Material zu benützen und dem Beispiele zu folgen, welches der Herr geh. Bergrath JACOB NOEGGERATH in seinen beiden an Herrn W. HAIDINGER gerichteten Sendschreiben über die Achatmandeln in den Melaphyren gegeben hat (Naturwissenschaftliche Abhandlungen gesammelt und herausgegeben von W. HAIDINGER Wien 1849 Band III, Abth. 1. pag. 93 ff. und pag. 147 ff. oder die Separatabdrücke der beiden Sendschreiben daraus I und II.), bin ich gern dieser Aufforderung nachgekommen und hege die Hoffnung, derselben durch die nachfolgende Abhandlung über die Achatmandeln in den Melaphyren, vorzüglich die von Theiss einigermassen entsprochen zu haben.

Herr W. HAIDINGER hatte bereits in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien (Berichte über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften Band VI. Juli 1849. p. 62 ff.) in Folge des ersten der beiden genannten Sendschreiben in Kürze die Theorie besprochen und es lassen sich nach ihm die verschiedenen Bildungsperioden etwa folgender Gestalt an einander reihen:

1. Vulkanische Eruptivmasse des Gesteins, zähflüssig mit Gasblasen.
2. Bewegung der Gesteinmasse, entweder in bestimmten Richtungen (L. v. BUCH: Parallelismus der Lage der Mandeln im Melaphyr von Ilesfeld, gewiss auch bei Klausen in Tirol), oder unregelmässig (NOEGGERATH, in der Nahegegend).
3. Während der Verschiebung der Form der Blase bröckelt die angrenzende Masse von dem obern Theile des Hohlraumes ab und bildet am Boden ein unregelmässiges Haufwerk. (Klausen. HAIDINGER's Handb. der bestimmenden Mineralogie S. 316.)
4. Die Hohlräume bereits fest begrenzt, werden sammt dem umgebenden Gesteine von trockenen Klüften durchsetzt und zum Theil die beiden Seiten derselben an einander verschoben. (NOEGGERATH.)

Bis hierher ist das Innere der Hohlräume noch nicht in die Verhältnisse getreten, welche einen Absatz von fremdartiger Materie bedingen.

5. Eintritt der Bewegung der Gebirgsfeuchtigkeit, welche die auflöselichen Stoffe auf derselben in einer bestimmten Richtung durch das Gestein hindurchführt. Aus dem chemisch aufgeschlossenen, übrigens starren Gesteingerippe werden die löslichen Theile hinweggenommen und in den grösseren Höhlungen, in Sprüngen u. s. w. setzen sie sich ab. NOEGGERATH benennt speciell und gewiss mit Recht, als die Vermittler der Ausfüllung heisse kohlen säurehaltige Quellen.

6. Alle Wände des Hohlraums sind von gleicher Beschaffenheit, der Hohlraum selbst mit gespannter Flüssigkeit erfüllt. Das Durchschwitzen, Filtriren beginnt gleichförmig auf der ganzen Oberfläche. Die ersten Lagen von Jaspis, Chalcedon, Opal — verschwindend kleine Individuen oder amorphe Körper — werden abgesetzt.

7. Die abgesetzte Schicht wird nach und nach für die Bewegung der auflöselichen Körper mehr und mehr undurchdringlich. Mehrere Punkte bleiben übrig, oft auch

nur ein einziger, durch welche das Aeussere noch mit dem Innern in Verbindung ist. Lagen werden fortwährend auf den undurchdringlich überzogenen Wandungen abgesetzt, lassen aber zunächst dem Orte der Verbindung den Zuführungskanal in der Mandel erkennen. Diess ist insbesondere von NOEGGERATH in dem Sendschreiben durch neuere und ältere Beobachtungen vollgiltig nachgewiesen worden.

8. Bei reichlicher Zuführung von Materie wird die Mandel voll. Bei langsamerem Vorgange bilden sich zu Innerst die Krystalle. Ein Theil der Mandel bleibt leer.

9. Veränderungen in der Natur der Gebirgsfeuchtigkeit, nach Inhalt, Temperatur, mechanischer und chemischer Spannung, bedingen den Absatz verschiedenartiger Mineralspecies. Dieser Abschnitt kann sehr lang seyn, denn er begreift zum Beispiele die Pseudomorphosenbildung von Prehnit nach Analcim in Schottland und Rheinbaiern, nach Mesotyp in Tirol, die von Feldspath nach Analcim und Laumonit in Schottland, die von Quarz nach Mesotyp in Island, nach Stilbit in Tirol u. s. w.

10. Die Klüfte, welche durch volle Mandeln hindurchgehen und die Theile manchmal an einander verrücken; von NOEGGERATH klar nachgewiesen, so wie auch die späteren zerstörenden Einwirkungen von Druck, der die Schalen zerbricht, von atmosphärischen Wassern, die erdige Sedimente in manchen Mandeln hinterlassen und andern Verhältnissen.

Wenn ich in dem Nachfolgenden versucht habe, der an mich ergangenen Aufforderung des Herrn Director W. HAIDINGER zu entsprechen und dazu das, was mir die Achatmandeln aus dem Melaphyr von Theiss bei Klausen in Tirol darboten, zur Beweisführung benützt habe, würde es mir sehr angenehm seyn, wenigstens das erreicht zu haben, dass der Leser diese Blätter nicht ganz unbefriedigt bei Seite legen möge. In wie weit ich meinen Zweck erreicht habe, werde ich aus den beistimmenden oder widersprechenden Urtheilen derer entnehmen, welche über die Bildung der Achatmandeln umfassendere Studien als ich, gemacht haben. Die Fortsetzung derselben wird es mir vielleicht möglich machen, noch mehr zur Sicherstellung der nachfolgenden Theorie auffinden zu können.

Den Verlauf der Bildung versuche ich, wie folgt, darzustellen und füge zur Beweisführung an dem geeigneten Orte die Beschreibung einzelner zum Belege dienender Achatmandeln von dem genannten Fundorte bei, ohne jedoch alle derselben Art aufzuführen, weil dadurch nur unnöthige Wiederholungen entstanden wären.

I.

Die mit Gasblasen erfüllte und zähflüssige Eruptivmasse bewegt sich von unten nach aufwärts. (Bildungsperiode der Hohlräume.)

Darüber, dass die feuerflüssig erweichte, teigartige Eruptivmasse, wo überhaupt Melaphyr mit Achatmandeln vorkommt, während ihres Emporsteigens mit Gasblasen erfüllt war, und diese sich mit der Eruptivmasse einerseits, als auch nach dem Ge-

setze der Schwere für sich andererseits gleichzeitig aufwärts bewegt haben, herrscht kein Zweifel, und es ist daher nicht nothwendig, hier die anderwärts vielfältig vorgebrachten Beweise zu wiederholen, wo es sich wesentlich darum handelt, die Art der Ausfüllung zu besprechen. Es ist hierbei auch als gleichgültig anzusehen, ob die Gasblasen mit aus dem Innern, dem Ausgangspunkte der Eruptivmasse emporgestiegen sind, oder ob sie sich in der Masse während des Emporsteigens entwickelt haben, oder ob die Gase der aufsteigenden Eruptivmasse gefolgt sind und sie so in Blasenform durchdrungen haben, in jedem Falle sind sie als ursprüngliche anzusehen und jederzeit, wo sie vorkommen, ein charakteristisches Merkmal der Gesteinmassen selbst in Bezug auf ihren vulkanischen Ursprung, im Gegensatz zu solchen hohlen Räumen, welche sich in Gebirgsmassen durch Auswitterung einzelner Theile bilden können.

Die Gestalt der Blasenräume, welche von Anfang an durch das in den Hohlräumen enthaltene Gas bedingt wird, ist nicht allein an verschiedenen Orten sehr mannigfaltig und abwechselnd, sondern auch an demselben Orte ungleich, so wie auch wiederum im Allgemeinen eine gewisse Uebereinstimmung nicht zu verkennen ist. Ihre Gestaltsverhältnisse stimmen sehr nahe mit denen der Blasenräume in den Laven neuerer Zeit überein, an denen man wegen der bequemerer Zugänglichkeit gewiss die Gesetzmässigkeit der Bildung überhaupt weit besser studiren könnte. Die Abweichungen in der Gestalt werden vorzüglich durch den Flüssigkeitsgrad der Eruptivmasse und ihre Bewegung, durch die Expansibilität der in den Blasenräumen enthaltenen Gase, durch die gegenseitige Anziehung der Blasen, durch die Anzahl und Grösse derselben, durch das Bestreben des expansiblen Gases sich schneller fortzubewegen als die zähflüssige Masse selbst oder durch die Wirkungen desselben nach dem Gesetze der Schwere, durch die Richtung des Flusses der Eruptivmasse, durch den von den umgebenden Gesteinmassen auf die sich fortbewegende Eruptivmasse ausgeübten Druck, durch den Druck der Eruptivmasse selbst auf die Blasen und noch manche andere minder wichtige Ursachen bedingt. Da aber diese Ursachen an verschiedenen Orten nahezu dieselben sind, so wird man dadurch eine gewisse Uebereinstimmung in der Gestalt der Blasenräume verschiedener Orte nicht unerklärlich finden, so wie auch die Abweichungen eines Ortes bei dem Ausgange von einer bestimmten Gestalt eine gewisse Normalgestalt herausfinden lassen, von welcher sich die andern vorkommenden Gestalten mehr oder weniger entfernen.

Wenn wir, das Vorkommen der vollständigen Kugelform selbst nicht ausgeschlossen, von der Eiform (Tafel VII Fig. 1) als einer wenig verlängerten Kugelform ausgehen, wobei durch die Expansionskraft des Gases verbunden mit der Einwirkung der Schwere, der obere Theil des Hohlraumes eine grössere Ausdehnung als der untere gewinnt, so gibt die Längenaxe AB die Richtung von unten nach oben an. Die Schnitte senkrecht auf diese Axe sind Kreise von verschiedenen Durchmesser, und die ovalen senkrecht durch die Axe geführten unter einander gleich. Diese Eiformen können wir uns zunächst als allmählig durch den allgemeinen Zug der zähflüssigen Masse in der Art

verändert denken, dass sie länger werden. Auf diese Weise werden sie durch die Modificationen (Fig. 2 und 3) den Charakter des Eiförmigen verlieren und keulenförmig werden (Fig. 4), wenn der seitliche Druck allseitig derselbe und die Bewegung der Eruptivmasse nur eine verticale wäre. Diess ist aber nicht der Fall, wenigstens nur in seltenen Fällen denkbar; wir bemerken dagegen meist die Einwirkung eines diametralen Druckes von zwei Seiten, hervorgebracht durch die beiden festen Gesteinswände, zwischen welchen die Eruptivmasse aufwärts steigend gedacht werden muss, und dadurch werden die ei- bis keulenförmigen Gestalten breit gedrückt. Hierbei ist die Einwirkung des seitlichen Druckes, obgleich der ganzen Länge nach derselbe gleich ist, nach unten scheinbar stärker und in dieser Weise auch wahrzunehmen; ich sage aber ausdrücklich nur scheinbar stärker nach unten, weil dort gerade die Zusammenpressung sichtbar ist, nach oben aber durch die Expansion des Gases verbunden mit der Einwirkung der Schwere zum Theil aufgehoben wird. Die hierdurch entstehenden Gestalten sind gerade diejenigen, welche man am besten mit dem Ausdruck des Mandelförmigen bezeichnen kann, wenn sie auch von der Gestalt der Mandelfrucht darin abweichen, dass sie nach unten keine Spitze wie diese, sondern eine Schärfe zeigen, welche sich auf beiden Seiten nach aufwärts fortsetzt. Von verschiedenen Seiten betrachtet, bieten sie einen verschiedenen Anblick dar, so dass, wenn wir sie so ansehen, dass der durch die Axe AB geführte grösste Schnitt sichtbar ist, sie etwa die in Fig. 5 angegebenen Umrisse zeigen, wogegen, wenn man sie so stellt, dass der durch die Axe AB geführte kleinste Schnitt sichtbar ist, sie Umrisse zeigen, wie sie in Fig. 6 angegeben sind. Die horizontalen oder senkrecht auf die Axe AB geführten Schnitte sind entweder Ellipsen oder dadurch, dass der seitliche Druck die unten hervorgebrachten Schärfen auch nach beiden Seiten aufwärts sich fortsetzend zeigt, aus zwei elliptischen Segmenten zusammengesetzte Gestalten, die nach unten in der kürzeren Axe schnell abnehmen (Fig. 7). Diese Gestalt ist für die Achatmandeln dann besonders denkbar, wenn die aufsteigende Eruptivmasse zwischen zwei senkrechten Gesteinswänden in die Höhe steigend gedacht wird, und die Ausdehnung nach der Axe AB wird durch einen bedeutenden Grad von Zähigkeit der teigartigen Masse hervorgebracht, wodurch die Mandeln an Länge und Flachheit zunehmen.

Für die Mandeln von Theiss und sicherlich für die vieler anderer Orte ist diese Gestalt noch nicht die Normalgestalt, wenn wir diesen Namen gebrauchen, um eine Gestalt zu bezeichnen, welche die vorzüglichsten Bedingungen der Gestaltung für einen bestimmten Ort ausdrücken soll und von der ausgehend man die übrigen als Abweichungen betrachtet, welche durch besondere Nebenursachen hervorgebracht werden, sondern eine ähnliche, bei welcher die beiden Seiten C ungleich gedrückt erscheinen und sich verschieden zeigen, wie die Fig. 8 angibt, so dass man die beiden Seiten C und C' zu unterscheiden hat. Die eine derselben gleicht den Seiten C der vorigen, die andere aber C' ist bedeutend flacher bis eben. Hierdurch wird der Anblick der Mandeln, wenn man sie so stellt, dass man die Umrise der durch die Axe AB geführten klein-

sten Schnitte sieht, so seyn, wie Fig. 8 angibt, wogegen der Anblick fast derselbe wie oben in Fig. 5 seyn wird, wenn man sie so stellt, dass man die Umrisse der durch die Axe AB geführten grössten Schnitte sieht, wobei aber gewöhnlich nach unten die Mandeln breiter als oben erscheinen. Fig. 9. Die horizontalen oder senkrecht auf die Axe AB geführten Schnitte werden dann entweder eine Vereinigung zweier ungleichen Ellipsenhälften zeigen, oder nur einen Abschnitt einer Ellipse durch eine der längeren Axe parallel geführte gerade Linie. Fig. 10.

Diese Gestalt kann in ihrer von der vorigen abweichenden Modification am besten darin ihre Erklärung finden, dass die Eruptivmasse einzelner Orte und wahrscheinlich auch die von Theiss nicht vertical, sondern in schiefer Richtung aufgestiegen ist, wodurch, wenn sie nicht anders als Gangmasse betrachtet wird, die platter gedrückte Seite C' dem Liegenden, die gekrümmte C dem Hangenden zugewendet erscheinen muss, weil nach der letztern Richtung die Expansionskraft des Gases und die Einwirkung desselben nach dem Gesetze der Schwere am stärksten ist, wie wir es uns nach der Fig. 11 denken können. Je mehr die Richtung der aufsteigenden Masse von der Verticallinie abweicht, um so flacher müssen dann nothwendig die Mandeln erscheinen, jedoch wird dabei immer ein Unterschied, wie der von den Mandeln bei Theiss angegebene stattfinden müssen.

Dass die in Rede stehenden Eruptivmassen in der That nur als gangartige Massen anzusehen sind, so gross auch ihre Ausdehnung in den Gebirgen erscheinen mag, indem sie aus der Tiefe durch normale oder andere abnorme Gebirgsmassen emporsteigen, ist eine hinlänglich begründete geologische Thatsache. wenn wir auch dieselben nicht immer in dieser Weise sehen können, weil sie nicht allein in entstandene Spalten einfließen, sondern auch aus dem Gange ausgetreten anders zu benennende Massen durch Anlagerung auf anderem Gestein bilden.

NOEGGERATH (I p. 2) hat sich auch für die Annahme einer gewissen Normalgestalt ausgesprochen und als solche eine ziemlich nahe birnförmige Gestalt aufgestellt, wobei weniger Rücksicht auf eine bestimmte Oertlichkeit genommen wird. Er sagt a. a. O. darüber Folgendes:

„Die Gestalt der Mandeln ist mannigfach abweichend, je nachdem der Druck, die Ungleichartigkeit der Flüssigkeit der Melaphyrmasse und die gegenseitige Anziehung der Blasenräume mehr oder weniger die normale Form der Blasen modificirt haben. Man sieht zuweilen fast völlig kugelige, ganz flache, krumme und sattelförmig gebogene Mandeln, kurz die wunderbarsten Missbildungen; aber dabei lässt sich doch eine gewisse Normalgestalt herausfinden, welche, von dem Beobachter einmal richtig aufgefasst, die Tendenz dazu fast in jedem noch so sehr abweichenden Exemplare zu erkennen gibt. Es ist diejenige einer ziemlich nahe birnförmigen Gestalt, welche aber an einer Seite mehr oder weniger plattgedrückt erscheint, wodurch denn auch unten weniger eine Spitze, wie eine mehr oder minder scharfe Kante sich zeigt. Die Modification der in der weichen Masse aufgestiegenen Blase gegen die reine Gestalt der Birne ist

durch Seitendruck hervorgebracht, den sie während ihrer Bewegung erlitten hat, und nicht selten übte ein solcher Druck an zwei oder gar an mehreren Seiten seinen Einfluss aus, wodurch dann allerlei seltsam verdrückte Formen hervorgerufen worden sind.

Wenn ich mich dafür ausgesprochen habe, eine dem örtlichen Vorkommen entsprechende Gestalt als Normalgestalt anzunehmen, welche von den einflussreichsten Bedingungen abhängig ist, so will ich damit durchaus nicht gemeint haben, dass diese Normalgestalt eine allgemeine aller Orte unzulässig mache. Ich habe bereits gesagt, dass, da die auf die Gestalt hinwirkenden Ursachen an verschiedenen Orten nahezu dieselben sind, man dadurch eine gewisse Uebereinstimmung in der Gestalt der Blasenräume verschiedener Orte nicht unerklärlich finden werde, nur möchte ich mir dabei die Bemerkung erlauben, ob es nicht angemessen wäre, bei den allgemein üblichen Ausdrücken „Achatmandeln und Mandelsteine“ auch die Mandelgestalt als die Normalgestalt aller festzuhalten, da es wohl im Ganzen gleichgültig bleibt, entweder von einer nahe birnförmigen Gestalt zu sprechen, welche mehr oder weniger seitlich plattgedrückt erscheint, oder von einer mandelförmigen Gestalt, welche nicht in eine Spitze, sondern in eine Schärfe ausgeht, die Mandelfrucht aber eine constantere Form zeigt als die Birnfrucht.

Von der Normalgestalt finden die mannigfachsten Abweichungen Statt, welche durch einzelne der mitwirkenden Ursachen bewirkt werden, und bei aufmerksamer Betrachtung sich auch erklären lassen. Zu den häufigeren unter denen von Theiss gehören ausser den verlängerten, bis zur Concavität eingedrückten Gestalten auch die verkürzten Gestalten mit bis zur Concavität der Seite C' fortgehender Eindrückung derselben, Fig. 12, wodurch kappenförmige bis halbkugelige Gestalten hervorgehen, welche eine ebene oder mehr oder minder concave Basis zeigen. Dergleichen Eindrückungen bis zur Concavität mögen häufig höchst wahrscheinlich durch den Gegendruck der über- und neben einander sich fortbewegenden Blasen hervorgegangen seyn. Der gegenseitige Druck kann auch, wie an Achatmandeln anderer Orte beobachtet worden ist, Eindrücke an mehr als zwei Seiten der Blasen sichtbar machen. (NORRGERATH I. p. 2.) Dergleichen Abweichungen lassen sich auch durch eine Abweichung von der vorangehenden verticalen oder schiefen Richtung des Aufsteigens erklären, wenn man sich die Eruptivmasse über das durchbrochene Gestein zu Tage gekommen überfließend vorstellt, wobei bei der Anlagerung auf anderem Gestein der seitliche Druck aufgehoben wird und der Gestaltung, wenn anders nicht die grosse Zähigkeit der Eruptivmasse es hindert, und die festwerdende Oberfläche mit der entgegengesetzt liegenden zum Theil festen Unterlage der Umgestaltung eine enge Grenze setzen, ein neuer Spielraum geboten wird. Die bereits bestimmt gestalteten Blasen werden durch ein solches ange deutetes Ueberfließen der Masse mannigfache Modificationen erleiden, so dass es wohl an solchen Orten sehr schwierig werden möchte, eine Normalgestalt herauszufinden oder eine Beziehung der vorkommenden Gestalten zu dem Ganzen der Masse festzustellen. Am erklärlichsten werden wir in solchen Fällen eine Verflachung und Verkür-

zung in der Axe AB finden, so wie auch eine gewisse Richtung in einer horizontalen oder wenig davon abweichenden Ebene sichtbar werden kann, wie wir dies z. B. an den kleinen Blasenräumen wahrnehmen, welche in unendlicher Anzahl an der Oberfläche oder nahe derselben sichtbar sind. Dergleichen kommen nach der Angabe des Herrn Schichtmeister ALEX. v. BISCHOFF, welcher die Förderung der für den Herrn General-Landes und Haupt-Münz-Probirer LÖWE bestimmten Mandeln leitete, bei Theiss vor, und an einem Handstücke, worin dieselben in grosser Menge sichtbar waren (Fig. 13), liess sich, bei aller Unregelmässigkeit der im Allgemeinen kugeligen Gestalten, eine gewisse Gleichförmigkeit der Lage und Ausdehnung nicht verkennen.

Ausser einfachen Blasen lassen sich auch verbundene in der Art finden, dass einzelne Blasen zusammentraten, sich aber wegen der grossen Zähflüssigkeit der Eruptivmasse nicht vollkommen zu einer ganzen mit den einzelnen übereinstimmenden vereinigen konnten, sondern nur zum Theil mit einander, wenn man sich so ausdrücken darf, verflossen, und sich durch die einzelnen übrig gebliebenen Segmente als Zwilling-, Drillings- u. s. w. Missgeburten darstellen, wie sie NOEGGERATH (I. pag. 3) benennt, um den Begriff der mathematischen Regelmässigkeit der mit den Benennungen Zwillinge, Drillinge u. s. w. belegten Krystallbildungen fern zu halten. Vereinigungen dieser Art würden verdeckt werden, wenn die Eruptivmasse eine leichtflüssige wäre; sie muss daher im Gegentheil sehr zähflüssig, meist schon bedeutend steif gewesen seyn, doch findet man auch, wie NOEGGERATH a. a. O. angibt, zusammengeflossene Mandeln, so vollkommen in eine vereinigt, dass die ursprüngliche Trennung nur durch einen rinnenförmigen Einschnitt an der Oberfläche sichtbar wird, und von diesem Extreme aus lassen sich die Uebergänge bis zu zwei nur mit geringer Berührung verbundenen Blasen verfolgen, und durch sie werden die merkwürdigsten Missgestaltungen gebildet.

Aus der vorangehenden Betrachtung der Gestalten geht demnach hervor, dass, so mannigfaltig sie auch seyn mögen, es an den meisten Fundorten von Achatmandeln wahrscheinlich seyn wird, eine im Allgemeinen gleichmässige Art der Gestaltung vorauszusetzen, welche man auch im Stande seyn wird, herauszufinden, dass aber die Abweichungen von der Normalgestalt nach beiden Extremen, der Kugelform oder den Gestalten, denen man kaum einen Namen geben kann, gross sind und gross seyn müssen, weil in jedem Moment an den verschiedenen Stellen die Bedingungen relativ sehr verschieden seyn können. Namentlich werden den einschliessenden Gesteinswänden zunächst die grössten Verschiedenheiten und abnormsten Bildungen sichtbar seyn, weil diese selbst auf die Beschaffenheit der Masse von grossem Einflusse sind, und sie während des Emporsteigens, im Gegensatz zu dem Inneren der Masse bedeutend beeinträchtigen.

So lange die Bewegung der Eruptivmasse fort dauert und dieselbe noch einen Grad von Flüssigkeit zeigt, gestalten sich die Mandelräume und erreichen ihren Endpunkt der Gestaltung entweder bei dem Stillstande der Bewegung, oder können sich selbst

noch nach dem Stillstande gestalten, weil die Beweglichkeit des Gases auf die festwerdende Masse noch in einem gewissen, wenn auch freilich schwachen Grade einwirkend gedacht werden muss.

Wenn die während der Bildungsperiode der Hohlräume, als der ersten der Achatmandelbildung, entstandenen Gestalten bis zu diesem Zeitpunkte angelangt es einerseits möglich machen zu erklären, dass der allgemeine Charakter der Blasenräume ein übereinstimmender in derselben und in verschiedenen Eruptivmassen sey, dass die Ausdehnung in einer Richtung vorherrschend ist und um so entschiedener hervortritt, je grösser der Raum ist, in welchem man die Mandeln in ihrer Lage beobachten kann, und in welchem die auf die regelmässige Ausbildung störend einwirkenden Ursachen gering waren, und dass auch eine gewisse Parallelität der Lage in manchen Fällen vorhanden ist, wie L. v. BUCH den sehr merkwürdigen Parallelismus der Mandeln von Ilfeld am Harz untereinander im Gestein in v. LEONH. Taschenb. für Min. u. s. w. 1824. p. 430 erwähnt, bei welchem die Längensaxen der Mandeln untereinander gleichlaufend und die keilförmigen Schärfen mehr oder weniger nach unten gekehrt sind, wie ein solcher nach Herrn BISCHOFF's Angaben an den Achatmandeln von Theiss zufolge eines an Herrn A. LÖWE gerichteten mir vorliegenden Schreibens gleichfalls sichtbar ist und aus den mir zu der gegenwärtigen Arbeit in grosser Anzahl vorliegenden Achatmandeln von daher sich schliessen lässt, so streiten auf der anderen Seite die grossen Abweichungen eines Ortes nicht gegen ein allgemeines Bildungsgesetz der Formen, und man wird die Möglichkeit einräumen müssen, aus dem allgemeinen Charakter der Mandeln eines Ortes auf die geognostischen Verhältnisse der Eruptivmasse, so wie umgekehrt aus denselben auf die möglicherweise vorkommenden Mandeln, selbst wenn deren noch keine an einem bestimmten Orte gefunden seyn sollten, schliessen zu können.

Ueber die Anzahl und Grösse der Hohlräume lässt sich nichts allgemein angeben, da beide an den verschiedenen Fundorten mannigfach wechseln und vorzüglich von der Menge des sich entwickelnden Gases abhängen. Gewöhnlich aber und auch bei Theiss findet man, dass nach der Oberfläche der Eruptivmasse zu die kleinsten vorhanden sind, und ihre Zahl ungemein gross ist, während nach dem Innern oder nach unten zu die grösseren oder grosse und kleine neben einander in allen Grössenverhältnissen jedoch in geringerer Anzahl angetroffen werden. Man kann sich diess wohl am besten daraus erklären, dass nicht allein die Gase von unten der Eruptivmasse nachdringen und in ihr emporsteigen, sondern dass auch gleichzeitig in der Masse selbst beständig eine Gasentwicklung stattfindet und denselben bei dem Hervortreten der Eruptivmasse zu Tage durch die schnelle Abkühlung der Oberfläche und der derselben zunächst liegenden Theile nicht Zeit gelassen wird, sich zu grösseren zu vereinen, wie diess im Inneren, wo die Masse einen grösseren Grad von Flüssigkeit besitzt, weit eher möglich wird und wir selbst in scheinbar einfachen solche vor uns haben, welche durch Vereinigung mehrerer entstanden sind, ohne dass wir ihre Vereinigung durch ein sichtbares Zeichen erkennen können. Vielleicht wird auch durch die Einflüsse der äus-

seren Luft und durch den minder starken Druck, welcher vorher durch die einschliessenden Gesteinswände auf die Masse ausgeübt wurde, die Gasentwicklung befördert, so wie auch von Anfang an den obern Theilen eine geringere Dichtigkeit eigen seyn kann.

Was die Natur der Gase betrifft, welche die genannten Blasenräume in der Eruptivmasse bildeten, so dürfte sich darüber kaum mit einiger Wahrscheinlichkeit etwas sagen lassen, da, wenn auch mannigfache Versuche über die Beschaffenheit der die heutigen Laven begleitenden Gase angestellt wurden, man durchaus nicht veranlasst ist, eine Uebereinstimmung der mit den Laven auftretenden Gase und der mit den Melaphyren aufgetretenen vorzusetzen. Mögen auch die Melaphyre insofern mit den heutigen Laven Uebereinstimmung zeigen, dass man sie als Analogon derselben ansehen kann, und selbst beide in ihren Gemengtheilen Aehnlichkeit, ja selbst Gleichartigkeit zeigen, so bleiben uns für die Gase nur Vermuthungen. Sie werden demnach, wie man vermuthen kann, von der Art gewesen seyn, dass sie selbst nicht Stoffe enthielten, welche sich in den Hohlräumen als krystallinische Mineralien absetzen konnten, wie wir dergleichen an Wänden und in Spalten heutiger Laven oder in deren Hohlräumen antreffen, sondern dass sie Gase waren, welche wie Wasserdampf, Wasserstoffgas, Stickstoffgas u. dgl. nur die Räume bildeten und sich später, ohne eine weitere Spur ihres Daseyns oder ihrer Beschaffenheit zu hinterlassen, entfernten. Daraus ist auch die noch theilweise erkennbare Beschaffenheit der Wandungen zu erklären, dass sie mehr oder weniger glatt gewesen sind und durch die bei dem Festwerden eintretende krystallinische Ausbildung der einzelnen Gemengtheile kleine Erhöhungen und Vertiefungen, abhängig von der krystallinischen Textur der festgewordenen Masse und der Grösse des Korns zeigen.

II.

Die mit Gasblasen erfüllte Eruptivmasse ist fest und in dem Zustande der Abkühlung begriffen. (Nachbildungsperiode der Hohlräume.)

In dieser Periode ist keine oder nur eine sehr geringe Veränderung der Form vorzusetzen, weil die Unbeweglichkeit der Masse keine Bewegung gestattet. Die noch möglichen Veränderungen sind aus der Beschaffenheit der Mandeln leicht zu erkennen. Durch das Erkalten der Eruptivmasse nämlich, vermindert sich allmählich das Volumen, hierdurch entstehen durch die Contraction der einzelnen Massentheile Risse und Sprünge, und den Gasen wird dadurch Gelegenheit gegeben, sich nach und nach aus den Hohlräumen zu entfernen, so wie dadurch der später eintretenden Durchdringung mit Wasser der Weg gebahnt wird, da dergleichen Risse und Sprünge in ihrer Verbreitung durch die ganze Eruptivmasse in ihrer Grösse oder Kleinheit keine sichtbare Grenze zeigen. Treten dazu noch grössere Ortsveränderungen einzelner Theile der ganzen Massen, welche durch die Contraction oder durch von aussen wirkende Ursachen eine Senkung oder Hebung einzelner Theile hervorbringen können, so wer-

den diese in ihren Folgen auf die Gestalt der Hohlräume sichtbar seyn. Dergleichen Folgen sind, dass sich einzelne Theile der festen Wandungen lösen und in das Innere der Hohlräume hineinfallen, wodurch sie auf dem Boden derselben ein lockeres Haufwerk grösserer oder kleinerer Brocken des festen Eruptivgesteins bilden. Da ein Lösen einzelner Theile der Wandungen auch noch auf andere Weise stattfinden kann, wie weiter unten gezeigt werden wird, es sich aber kaum unterscheiden lässt, welche dergleichen Haufwerke auf dem Boden jetzt oder später sich gebildet haben, so werde ich einige Beispiele davon, wie sie sich an der Mehrzahl der Theisser Mandeln zeigen, später anführen, ohne jedoch die Möglichkeit absprechen zu wollen, dass dergleichen an ihnen vorkommende Haufwerke auch aus dieser Periode stammen. Auf grössere Wirkungen, nämlich Hebungen oder Senkungen grösserer Theile des Eruptivgesteins deuten Verschiebungen hin, welche in der Art eingetreten sind, dass durch grössere sich fortsetzende Klüfte die Mandeln in zwei Segmente getheilt worden sind und eines sich an dem andern verrückte, wodurch sie nicht mehr an einander passen. Verschiebungen dieser Art vor der Ausfüllung der Hohlräume konnte ich an den mir vorliegenden Mandeln von Theiss nicht wahrnehmen, sie sind aber von NÖGGERATH (I. pag. 4) beschrieben worden. Ich erlaube mir, die darauf bezügliche Stelle ihrer Bedeutsamkeit wegen, wörtlich beizufügen:

„Ein anderer Beweis für die ursprünglich leeren Räume der Achat- und Amethystmandeln liefern die Fig. 3 und 4 (hier, da ich sie copirte, die Fig. 14 und 15). Die erstere ist eine Mandel von etwa 15 bis 16 Zoll grösstem Durchmesser vom Weisselberge bei Oberkirchen im Kreise St. Wendel. In diesem Beispiele ist die Blase, d. h. das Gestein, welches den mandelartigen Raum enthielt, vor der Ausfüllung desselben zerspalten; ein Riss setzte hindurch und zerspaltete die Wandungen der Blase. Es ist dabei eine Verschiebung der beiden Bruchstücke diess- und jenseits des Risses erfolgt, wie solche Erscheinungen im Grossen bei Rücken und Gängen so oft vorkommen. In der Zeichnung ist die Verschiebung nur im Profil zu sehen, sie ist aber an dem Stücke selbst an der Oberfläche um die ganze Mandel herum deutlich und zusammenhängend zu verfolgen. Die Ausfüllungslagen im Innern der Mandel nehmen an dieser Verschiebung keinen Theil, sie sind davon nicht betroffen und konnten auch davon nicht betroffen werden, weil sie noch nicht vorhanden waren, wie die Verschiebung erfolgte. Ein zweites Exemplar dieser Art ist eine kleinere Mandel von etwa 4 Zoll grösstem Durchmesser, vom Galgenberge bei Idar herrührend. Die Verschiebung an derselben ist verhältnissmässig viel grösser und mag nahe an ein Drittel Zoll betragen.“

Wie weit die Abkühlung der Eruptivmasse fortschreiten müsste, um ein Eindringen von Wasser, welches die Ausfüllung der Hohlräume durch mit ihm eingehende Mineralsubstanzen herbeiführt, möglich zu machen, lässt sich theoretisch nicht bestimmen, eben so wenig aber nach den bis jetzt gemachten Erfahrungen über die vulkanischen Erscheinungen und Quellen mit Wahrscheinlichkeit aussprechen. Es bleibt auch im Ganzen für die verschiedenen Theorien über die Ausfüllung der Achatmandeln ziemlich

gleichgültig, wenn man nur eine ungefähre Grenze im Auge behält, nämlich die des Siedepunktes des Wassers. Wenn auch gleichzeitig mit dem Emporsteigen der feurig-flüssigen Eruptivmassen das Auftreten warmer Quellen verknüpft gewesen seyn mag oder dieselben in mehr oder minder kurzer Zeit folgten, wie man aus den noch jetzt eintretenden Erscheinungen vulkanischer Ereignisse schliessen kann, so wird es doch wahrscheinlich seyn anzunehmen, dass solche Wasser nicht eher in die erkaltende Eruptivmasse eindringen konnten, als bis dieselbe unter 80° R. erkaltet war, weil bei einer höheren Temperatur das mit der Eruptivmasse in Berührung tretende Wasser nothwendig in Gasgestalt verwandelt werden musste und somit jede regelmässige Ablagerung der in ihm enthaltenen Substanzen unmöglich wurde, wie wir dieselbe in den meisten Achatmandeln finden. Es gibt freilich einzelne Mandeln, namentlich unter denen von Theiss, welche mit einer oder mehreren Mineralsubstanzen ohne alle Regelmässigkeit der Ablagerung erfüllt sind, es dürfte aber bei ihnen angemessener erscheinen, die unregelmässige Ausfüllung als eine Folge des sich schnell fortbewegenden und durch eine verhältnissmässig hohe Temperatur stark beweglichen fliessenden heissen Wassers anzusehen, als ihre Zeit über die einer Temperatur von 80° zu setzen, wobei freilich auch die in dem Wasser aufgelöst enthaltenen Mineralsubstanzen durch eine rasch eintretende Verwandlung des flüssigen Wassers in Wasserdampf sich unregelmässig hätten absetzen müssen. Ich glaube demnach in einem geringeren Irrthum mich zu befinden, wenn ich eine Erkaltung der Eruptivmasse bis unter den Siedepunkt des Wassers voraussetze, um den Beginn der dritten Periode eintreten zu lassen, als wenn ich eine theilweise Durchdringung mit Wasser über dieser Temperatur annehmen wollte, welche sicher noch durch andere Ursachen unterstützt hätte werden müssen.

III.

Die Hohlräume werden ganz oder zum Theil erfüllt, die ausfüllenden Mineralien durch heisse Quellen zugeführt und von Aussen nach Innen zu abgesetzt. (Bildungsperiode der Mandeln.)

Die Ausfüllung der durch Gase gebildeten Hohlräume ist schon vielfach Gegenstand der Untersuchungen und theoretischer Erörterungen gewesen und lässt sich wohl kaum auf eine befriedigendere Weise erklären als auf dem von LEOPOLD v. BUCH angegebenen und von Anderen verfolgten Wege. Auch NOEGGERATH hat durch seine Untersuchungen diese Theorie in ein klares Licht gestellt und durch die beiden oben angeführten Sendschreiben hinreichende Beweise geliefert. An sie mich anschliessend erkläre ich auch die Entstehung der Achatmandeln von Theiss.

Wenn überhaupt Wasser diejenigen Mineralsubstanzen aufgelöst enthielt, welche die Ausfüllungsmassen der Achatmandeln bilden, so fragt es sich zunächst, woher dieses Wasser gekommen und wie es in die Eruptivmasse und in die Hohlräume derselben gelangt ist. Wir halten es für überflüssig, darüber zu sprechen, dass die ausfüllenden

Mineralsubstanzen auf andere Weise als durch Wasser in die Hohlräume eingeführt worden sind, weil bei der offenbar bewiesenen Thatsache, dass die Ausfüllung erst nach der Bildung der Hohlräume erfolgte, alle Erscheinungen der Achatmandeln, wie dieselben in ihrem Verlaufe gezeigt werden sollen, auf keinem andern Wege zu erklären sind, als dass Wasser das Material in die Hohlräume schaffte. Ausfüllungen anderer Art, wie sie durch Gase hervorgebracht werden können, lassen sich auf den ersten Blick unterscheiden und da für solchergestalt zum Theil oder ganz ausgefüllte Hohlräume der Name Achatmandeln nicht gebraucht wird, so fallen sie von selbst nicht in den Bereich unserer Betrachtung.

Dass die Ausfüllungsmassen der Achatmandeln durch heisse und wie NOEGGERATH angibt, kohlen säurehaltige Quellen zugeführt worden seyen, steht nicht allein mit der Art der Erfüllung, sondern auch mit der Natur der ausfüllenden Massen im Einklange. Es sey mir erlaubt, das Resumé nach der in seinem ersten Sendschreiben vorangeschickten Betrachtung einzelner Achatmandeln mit seinen eigenen Worten (I. p. 8) anzuführen, um daran festhaltend die Theorie zu verfolgen. Er sagt:

„Nach allen diesen Verhältnissen des Achatvorkommens im Melaphyr kann man nur der Meinung huldigen, dass dasselbe durch Ursachen, welche nur örtlich, nicht allgemein im ganzen Melaphyrgebirge thätig gewesen sind, erzeugt worden sey. Diese Annahme verträgt sich sehr gut mit den Wirkungen heisser kohlen säurehaltiger Quellen, welche nach der Bildung des noch heissen oder auch bereits erkalteten Melaphyrs auf den Spalten desselben hervorbrachen; die Spalten selbst werden Folgen der Contraction und der mechanischen Wirkung gewesen seyn, welche letztere durch die fortgesetzten Hebungen hervorgerufen wurden. Jene heissen Quellen werden solcher Art gewesen seyn, wie sie als Nachwirkung vulkanischer Actionen in der Nähe noch thätiger oder schon erloschener eigentlicher Feuerberge nicht selten zu Tage treten. Ich glaube wenigstens, dass die Bildung der Achate und der übrigen Mineralien, welche diese in den Mandeln begleiten, jetzt nicht mehr fortschreite und ihr Ende erreicht habe; letzteres wird mit dem völligen Erkalten des Melaphyrs und jener Quellen zusammengefallen seyn. Ohne diese Voraussetzung wäre die locale Erscheinung der Achate im Melaphyr unter so sehr von einander abweichenden Umständen, wie ich sie schildert habe, nicht denkbar. Nur gerade da, wo zufällig heisse Quellen das Gestein durchdrangen, entstanden die Achatausfüllungen.“

Die Analogie der neueren und älteren vulkanischen Erscheinungen macht es in der That höchst wahrscheinlich, dass auch nach dem Empordringen der Melaphyre gleich dem heutiger Laven eigenthümliche Veränderungen in der nächsten Umgebung hervor gebracht wurden, wozu namentlich die Erscheinung heisser Quellen gehört, welche bei der ohnehin grossen Disposition zu chemischen Veränderungen in einem solchen Zeitpunkte durch ihre auflösende Kraft als die reichlichsten Träger der in den Mandeln enthaltenen Ausfüllungsmassen angesehen werden können. Abgesehen davon, dass die häufige Erscheinung von einer abnehmenden Ausfüllung der hohlen Räume von unten

nach oben, wie auch NOEGGERATH es in der Nahegegend beobachtet hat, dass die Mandeln in den tiefen Thaleinschnitten gefüllt und die Blasenräume in den höheren Punkten leer sind, abgesehen also von dieser Erscheinung, welche schon für die Quellen als die nächsten Vermittler der Ausfüllung sprechen möchte, so ist die Annahme, dass die eindringenden Atmosphärwasser durch ihre verhältnissmässig weit geringere Auflöslichkeit zuerst und allein im Stande gewesen wären, den Stoff zur Ausfüllung herbeizuschaffen und die Mandelräume so wie wir sie finden auszufüllen, wenig begründet.

Wollten wir auch denselben die Fähigkeit einräumen, durch ihren Gehalt namentlich an Kohlensäure die Zersetzung der Melaphyrmasse zu bewirken, da wir hier nicht darauf zu sehen haben, ob die in den Achatmandeln enthaltenen Stoffe für unsere gewöhnlichen Begriffe im Wasser auflöslich erscheinen oder nicht, und es uns nicht zusteht, unsere Wirkungen mit denen in der Natur zusammenzustellen und als gleich anzunehmen, so müsste sich zunächst in den Mandeln verschiedener Orte eine fast völlige Uebereinstimmung der Ausfüllungsmassen voraussetzen lassen, weil die Melaphyre und die Atmosphärwasser verschiedener Orte nahezu dieselben Bestandtheile haben; wir finden aber grössere Verschiedenheiten in den erfüllenden Mineralien, deren Ursache nicht in dem Melaphyr selbst nachzuweisen ist. Es müssten ausserdem stets die oberen Hohlräume am meisten erfüllt erscheinen und eine Abnahme nach unten sichtbar seyn, wovon gerade, wie bereits angeführt, das Umgekehrte beobachtet worden ist; es müssten ferner die Elementarbestandtheile der Ausfüllungsmassen dieselben seyn, wie die der unzersetzten Melaphyrmassen, in allen Mandeln desselben Melaphyrs dieselben Mineralien enthalten seyn und die Achatmandelbildung in gleicher Weise fort-dauern, wofür die Erfahrung nicht spricht, es müsste namentlich auch der starke Eisengehalt, welcher den Melaphyren eigen ist und durch die Zersetzung des Gesteins am ersten sichtbar wird, sich in den Ablagerungen, vorzüglich den ersten wieder finden; die Färbung aber durch Eisen ist meist nur eine sehr geringe oder fast gar nicht sichtbar, wie es an den Achatmandeln verschiedener Fundorte und auch den von Theiss zu sehen ist, und man kann ganz wohl unterscheiden, wo und wie die Färbung einzelner Theile durch die zunächst liegenden Theile der Melaphyrsubstanz, welche durch das bereits mit seinem Inhalte eingedrungene Wasser erreicht und angegriffen wurde, erfolgt ist, während die grösseren Massen vollkommen frei sind, die gerade am meisten geeignet gewesen wären, das durch Eisen bedingte Pigment mitzuführen und durch die ganze Masse vertheilt aufzuweisen. Es müssten endlich durch die Annahme, dass nur Atmosphärwasser die Ausfüllung der Achatmandeln hervorgebracht habe, gerade diejenigen Geologen, welche gegen eine Ausfüllung durch Zuführungskanäle sprechen, um so eher dieselben anzunehmen gezwungen werden, weil die Ablagerungen nur sehr allmählig stattfinden könnten und dabei dem von Neuen zugehenden Wasser ein Eintritt in das Innere gestattet seyn müsste, da man wohl nicht wie sie gerade annehmen kann, dass eine durch Atmosphärwasser herbeigeführte Zersetzung und Aus-

scheidung einzelner Stoffe aus der Gesteinmasse auf einmal so viel Material zugeführt haben sollte, um die Mandeln, ohne die Wandungen sonderlich anzugreifen, vollständig mit Ausfüllungsmasse zu versehen, deren Anordnung und Ablagerung auf eine andere als die zu schildernde Weise Statt gefunden hätte.

Die häufige Gegenwart solcher Quellen, welche wir mit grosser Wahrscheinlichkeit für die damalige Zeit voraussetzen können, macht es weit eher möglich, dass auch sie zuerst die Absätze in den Mandeln lieferten, während der langsame Zersetzungsprocess durch Atmosphärwasser erst später begann, als die Gesteinmasse durch ihr längeres Verbleiben an der Luft nach und nach von oben herab geeigneter dazu wurde, und wie ich weiter unten zu zeigen mich bemühen werde, auf die Achatmandeln nicht ohne Einfluss geblieben ist.

Die Quellen entnahmen daher ihre Substanzen, welche sie in die Hohlräume einführten, nicht aus dem emporgestiegenen Gestein, sondern aus der Umgebung, woher sie gekommen, denn durch das Aufsteigen der Melaphyrmassen wurden die umliegenden Gebirgsmassen für Zersetzungen empfänglich gemacht, während die Eruptivmasse erst einer späteren Zeit der Zerstörung wartete. Wie gross aber die Einflüsse des emporgestiegenen Melaphyrs auf die Umgebung gewesen sind, ist allen Geologen hinreichend bekannt und der Melaphyr der Tyroler Alpen liefert davon die grossartigsten Beweise.

Es ist bei der Annahme derartiger Quellen, welche ausserhalb der Melaphyrmassen Mineralsubstanzen in sich aufnahmen und sie den Hohlräumen derselben zuführten, keinesweges zu läugnen, dass in einem gewissen Zeitraume die Möglichkeit eintreten könnte, dass selbst während der Fortdauer dieser Quellen durch die Atmosphärwasser den Achatmandeln Mineralien zuzugingen, ich sehe aber ihren Beitrag für sehr untergeordnet an. Die reichliche Menge, die Gleichartigkeit, der regelmässige und durchgehends wahrnehmbare Wechsel der Absätze, die Verschiedenheit der Ausfüllungsmassen und ihrer Aufeinanderfolge an verschiedenen Fundorten, die abweichenden Bestandtheile von denen der Melaphyrmassen, die nothwendig für die Krystallisation vorauszusetzenden längeren Zwischenräume, die Ruhe während der Dauer der Ausfüllung und andere Umstände sprechen für eine Zuführung durch ursprünglich warme Quellen, deren Bestandtheile von der Zusammensetzung der lokal vorkommenden Gebirgsmassen abhängen und durch äussere Ursachen unabhängig von der Substanz des Melaphyrs zu verschiedenen Zeiten wechseln konnten, welche Quellen im Verlaufe der Zeit allmählig in ihrer Temperatur abnahmen, zu Zeiten unterbrochen oder auch durch andere ersetzt wurden, in ihrer Dauer aber keinem zu bestimmenden Zeitalter unterworfen gewesen sind.

Die Achatmandeln von Theiss enthalten als vorzüglichste Ausfüllungsmassen Kieselerde und Kalkspath in der Reihenfolge, dass die ersten Ablagerungen Chalcedonquarz in verschiedenen Abänderungen mit fast dichtem bis grobkörnigen krystallinischen Kalkspath sind, auf diese krystallinisch stänglicher und krystallisirter Quarz mit blät-

trigem oder krystallisirtem Kalkspath folgen und selten auf den krystallinischen Quarz wiederum etwas Chalcedonquarz folgt. Der Chalcedonquarz ist gewöhnlich von grauer Farbe und zeigt geringe Nuancen in Farbe und Durchsichtigkeit, selten sind röthliche durch Eisenoxyd bedingte Färbungen wahrzunehmen. Der mit dem Chalcedonquarz gleichzeitig zugeführte und abgesetzte Kalkspath ist meist feinkörnig, dessen wechselnde Grösse des Kornes ihn einerseits fast dicht erscheinen lässt, während er auf der andern Seite grobkörnig und deutlich blättrig wird. Beide sind innig mit einander verwachsen und lassen sich in dieser Weise unzweifelhaft als gleichzeitige Bildungen erkennen, dabei wechseln sie in ihrem Zusammenvorkommen mannigfach und bilden in einzelnen Mandeln innige Gemenge, welche man kaum durch das Auge unterscheiden kann; in andern Mandeln dagegen sind sie deutlich unterschieden und der Chalcedonquarz umhüllt die krystallinisch ausgeschiedenen Kalkspaththeile. Die Farbe des Kalkspathes ist grau bis fleischroth. Der krystallinische Quarz, welcher entweder nur stänglig ist, oder bei noch sichtbaren Hohlräumen an den Enden ausgebildete Krystalle zeigt, ist gewöhnlich weiss ins Graue oder ins Wasserhelle, seltener sind die Krystallenden amethystfarben. Der mit ihm gleichzeitig vorkommende Kalkspath ist entweder krystallinisch mit deutlichen und grossen Spaltungsflächen oder krystallisirt, die Farbe desselben, namentlich des letztern weiss ins Gelbliche und die Durchsichtigkeit gering. Die gleichzeitige Bildung ist aus ihrem Vorkommen deutlich zu erkennen und die Krystalle beider Mineralien sind dicht mit einander verwachsen, so wie auch bisweilen vollkommen ausgebildete Quarzkrystalle, in der vorherrschenden Form des Dihexaeders *D*, mit keinen oder nur sehr schwachen Abstumpfungen der Seitenkanten durch das hexagonale Prisma der Hauptreihe, in blättrigen Parthien des Kalkspathes eingebettet liegen.

Diese eigenthümliche Art des Zusammenvorkommens von Chalcedonquarz, krystallinischem Quarz und Kalkspath, welche sich so sichtlich in den verschiedensten Abstufungen erkennen lässt, deutet unzweifelhaft darauf hin, dass die heissen Quellen Kieselerde und Kalkspath aufgelöst enthielten und sicher durch irgend welchen Einfluss eine mit der Zeit wechselnde Beschaffenheit hatten, wodurch zuerst die Chalcedonbildung, später die des krystallinischen und krystallisirten Quarzes bedingt wurde. Auf diese folgt körniger oder krystallisirter Datolith in ansehnlicher Menge und weist eine Veränderung des Inhaltes der Quellen nach, welche die Entstehung neuer vermuthen lässt. Ausser diesen angeführten Mineralien, und durch die Art ihres Vorkommens als Produkte einer späteren Zeit erkennbar, sind in den Achatmandeln von Theiss Krystalle und krystallinische Parthien verschiedener zeolithischer Species, wie Comptonit, Laumonit, Stilbit, Heulandit, Harmotom und Apophyllit, selten dichter Markasit und Hämatit. Dass die Art der Ausfüllung so war, wie L. v. BUCH und NOEGGERATH behauptet und bewiesen haben, dass sich allmählig die einzelnen Mineralien oder die unterscheidbaren Abänderungen in steter Folge auf einander absetzten und dem von

Neuem zugehenden Wasser durch Zuführungskanäle Gelegenheit zum Zutritt gegeben wurde, zeigen auch die Achatmandeln von Theiss.

Die Ausfüllung der Achatmandeln, mögen sie einfache oder zusammengesetzte seyn, ging demnach in folgender Weise vor sich:

Das in der Umgebung der Eruptivmasse durchbrechende Wasser heisser Quellen, welches vornehmlich Kieselsäure und kohlenzure Kalkerde aufgelöst enthielt, verbreitete sich in die Eruptivmasse eindringend in aufsteigender Richtung allmählig von unten nach oben, wobei die vollständige Durchdringung durch die unendlich zahlreichen und in allen Graden der Grösse wechselnden Sprünge und durch die Blasenräume befördert wurde. Die Hohlräume wurden von Wasser erfüllt, welches einen Theil der aufgelösten Substanzen an den Wandungen derselben absetzte.

Die Ablagerung kann eine gleichartige oder ungleichartige seyn, wie die Mandeln nachweisen lassen, so dass ein bestimmendes Gesetz derselben nicht angenommen werden kann, weil uns die Regelmässigkeit einzelner nicht berechtigt, nach ihr den Vorgang in gleicher Weise für alle zu bestimmen. Der Chalcedon ist es namentlich, welcher die successive Aufeinanderfolge am deutlichsten sehen lässt, und da derselbe an den Achatmandeln von Theiss so wie der krystallinische Quarz den vorherrschenden Theil der Ausfüllung ausmacht und dadurch gewissermassen den Verlauf am deutlichsten zeigt, so wollen wir ihn auch vorzüglich im Auge behalten. Der Kalkspath, welcher durch seine ausgezeichnete Krystallisationstendenz den Gang der Ablagerung hier nicht, wie in den sinterartigen Absätzen anderer Orte und Vorkommnisse so zeigt, im Gegentheil meist störend auf die Regelmässigkeit einwirkt, bildet wie schon oben erwähnt wurde, körnige Parthien verschiedener Art, welche mit dem Chalcedon mannigfach verwachsen sind und durch ihre schnellere Ausscheidung aus der Flüssigkeit oft gleichsam die Stützpunkte für den Chalcedon abgaben.

Es setzten sich entweder in dem ganzen Hohlraume gleichmässige Lagen ab, oder es ist ein Einfluss der Schwere in der Art bemerkbar, dass sich in den unteren Theilen mehr Masse anhäuften als in den oberen, wodurch am Ende ein Theil des Hohlraumes unbedeckt blieb; oder es setzten sich zuerst an einzelnen Punkten Theilchen an, welche zu kleinen kugligen oder nierenförmigen Gestalten sich vergrössern und auf sie folgen dann sich weiter erstreckende Lagen in der bereits angegebenen Weise. Dabei findet aber selten eine vollständige Bekleidung der Fläche des Hohlraumes statt, sondern es bleiben, wenn nicht noch aus anderem Grunde, so doch wenigstens durch die fortgesetzte Bewegung des Wassers in dem ganzen Eruptivgestein einzelne Theile frei und bilden die Zuführungskanäle. Wir haben uns dieselben aber, wie ich an den Mandeln von Theiss beobachtet habe, nicht allein als runde Oeffnungen an verschiedenen Punkten des Hohlraumes zu denken, sondern sie bilden oft fortlaufende, wenn ich so sagen darf, klaffende Oeffnungen, wie Spalten, welche aber nicht mit später zu erwähnenden Spalten anderer Art verwechselt werden dürfen. Die Art der ersten Ab-

gerungen würde sich nach den beobachteten Mandeln etwa wie in Tab. VII Fig. 16 — 23 bildlich darstellen lassen, wobei verschiedene Durchschnitte gewählt sind.

Die Dicke der einzelnen Lagen ist meist eine geringe und bei genauer Beobachtung zeigt es sich, dass die Lagen dünner sind, als wie sie uns auf den ersten Blick durch hervortretende Farbenunterschiede und wechselnde Grade der Durchscheinheit zu seyn scheinen. Beide allein lassen uns nicht mit Genauigkeit die Dicke der Lagen erkennen, da nicht immer nothwendigerweise jede Lage durch einen Unterschied deutlich wird, sondern oft mehrere ganz gleiche auf einander folgen und so scheinbar eine einzige bilden. Sie sind dabei für das unbewaffnete Auge so innig fest aneinander gelegt, dass sie nicht allein dicke Lagen, sondern selbst derbe Massentheile gleicher Art zu bilden scheinen, und nur selten gelingt es durch eine zufällige Bruchfläche zu erkennen, dass es eine Aufeinanderfolge vieler gleichen Lagen ist. In diesem Falle zeigt der im Ganzen muschlige bis unebene Bruch concentrische oder parallel laufende Reifung, welche oft so fein ist, dass man sie nur durch eine starke Vergrößerung erkennt. Das Anschleifen nützt hierbei sehr wenig, da dadurch nur die Farbenunterschiede mehr hervorgehoben werden. Bisweilen kann man auch die dünnen Lagen als schaalige Absonderung wahrnehmen, wenn der Zusammenhang sehr gering ist.

Von der Concavität der Fläche des Hohlraumes hängt im Ganzen die Concavität der Lagen ab und es ist demnach die nothwendige Folge, dass, wenn einzelne Theile der Wandung eben gewesen sind, auch die darauf abgesetzten Lagen eben sind. Diess zeigt sich bei den Achatmandeln von Theiss da, wo die Fläche C' eben ist, und ich glaube, dass man wohl nicht so allgemein das Vorkommen horizontaler Lagen den Mandeln Deutschlands absprechen kann, wie LEOPOLD v. BUCH in v. LEONH. Taschenb. für Min. Jahrg. 1824. pag. 483 gethan hat, woselbst er anführt, dass horizontale Ablagerungen in den Mandeln der Achate weder in Deutschland noch in Frankreich vorkommen, dass dagegen horizontale Bildungen überall in den brittischen Inseln und im Norden von Europa beobachtet würden. Mandeln, wie die weiter unten in Tab. VII Fig. 8 und 12 dargestellten würden gewiss eben so vollständige horizontale Lagen zeigen, und die wenigen vorhandenen können nicht anders wie als horizontale betrachtet werden. Wenn auch freilich der Unterschied nicht so entschieden auftritt, wie z. B. NOEGGERATH in einer sogenannten brasilianischen Mandel*) (I. pag. 11 Fig. 13) angegeben hat, so ist darum das Vorhandenseyn horizontaler Lagen nicht so allgemein abzusprechen, und am wenigsten darum, weil die Seite C in der Melaphyrssubstanz nicht etwa horizontal gelegen hätte, was wir auch nicht von den ebenen Lagen wissen, welche in den Mandeln anderer Orte vorkommen. Dessgleichen muss ich auch einer von L. v. BUCH a. a. O. gemachten

*) Die sogenannten brasilianischen Achate, wie sie im Handel genannt werden, kommen nach NOEGGERATH (II. pag. 4) nicht aus Brasilien, sondern aus einem dieses Land begrenzenden Staate, dem von Monteviden (Buenos Ayres gegenüber). Sie sollen als Geschiebe in einem Nebenflusse vom Rio de la Plata vorkommen.

Bemerkung widersprechen, woselbst er angibt, dass die Mandeln von Hefeld ihre Ablagerung in der Weise zeigen, dass nach oben die Lagen an Dicke zunehmen, wie etwa die Fig. 24 angibt, und dabei ausdrücklich bemerkt, dass er an den Mandeln von Theiss dasselbe Verhalten gesehen habe, bei allen, die er bei seiner Gegenwart daselbst zer schlagen liess. Die Mehrzahl wenigstens der von mir gesehenen und mit denen von Hefeld zusammenzustellenden Mandeln zeigt keine Abnahme der Lagen nach der unteren Schärfe A, sondern eine Zunahme, wie die Fig. 25 zeigt und an der beispielweise abgebildeten Mandel Fig. 5 Taf. VIII zu sehen ist. Dass dieses sehr leicht denkbare Verhältniss der Lagen wenigstens kein abnormes und vereinzelt ist, lässt sich auch aus v. LEONHARD'S Worten schliessen, wenn er pag. 216 des 2ten Bandes der Basalt-Gebilde etc. Stuttgart 1832 sagt: „Die Mandeln in senkrechter Stellung gedacht, haben die Lagen ihrer beträchtlichsten Stärke am oberen kolbenförmigen Ende, nach unten nehmen dieselben allmählig ab, um zuletzt oft beinahe unmerkbar zu werden. Minder häufig, so scheint es, tritt das umgekehrte Verhältniss ein, indem die Stärke der Lagen am unteren keilförmig zugespitzten Ende bedeutender wird.“

Durch die mechanisch auflösende Kraft des Wassers werden vom Beginn der Ausfüllung an einzelne Theile der festen Gesteinsmasse, welche die Wände bildet, erweicht und sinken in den Hohlraum hinein, wobei sie entweder auf den Boden des mit Wasser erfüllten Hohlraumes fallen und so, wenn noch keine Lage sich abgesetzt hat, von den ersten Ablagerungen gleich den übrigen Theilen der Wandung umkleidet werden, oder wenn bereits schon Lagen vorhanden waren, dieselben herabdrücken, hindurchfallen und auf die bereits vorhandenen des Bodens zu liegen kommen, oder wenn die abgelagerten Schichten schon einige Consistenz erreicht haben, durch dieselben schwebend gehalten werden und nur wenig in das Innere der Mandeln versenkt erscheinen. Da bereits schon in der zweiten Periode durch entstandene Sprünge einzelne Theile der festen Wandungen in den Hohlraum hineingefallen seyn konnten und von da ab ein Haufwerk auf dem Boden bildeten, so werden diese losen Brocken in der Art der Umhüllung und Uebertragung sich kaum von denen unterscheiden lassen, welche bei dem Anfange der Ausfüllung auf den Boden herabsanken, so dass es in solchem Falle unbestimmbar bleibt, zu welcher Zeit sie niederfielen. Für die aber, welche inmitten der abgelagerten Massen schweben und nahe dem Gipfel der Mandel oder der oberen Fläche liegen, ist die Zeit der Trennung unzweifelhaft zu bestimmen. Die in der zweiten Periode entstandenen Sprünge werden auch die Trennung einzelner Theile der Wandungen durch die mechanische Auflöslichkeit des Wassers erleichtern und dadurch die ursprüngliche Gestalt des Blasenraumes gänzlich verändern, wenn man nicht mehr von einzelnen Brocken sprechen kann, welche sich loslösen, sondern wenn grosse Stücke in der Nachbarschaft der Mandel und von ihr ausgehend und durch die auch sie durchsetzenden Sprünge mit ihr in nächster Verbindung stehend, durch die sich aus dem Wasser absetzenden Lagen gleichsam mit in den Bereich der Mandel gezogen werden. In dieser Weise finden sich, vorzüglich an grösseren Mandeln von Theiss, Stücke,

welche oft grösser als die Mandeln selbst sind, durch die äusseren Chalcedonlagen mit dem theilweise zerstörten Hohlraume verbunden, und durch sie gehen wiederum mannigfache kleinere Sprünge hindurch und werden gleichfalls ausgefüllt.

Es ist diese Störung der Gestalt an den Mandeln von Theiss eine so häufige Erscheinung, dass man unter den grösseren wenige findet, welche nicht ansehnliche Mengen des durch Sprünge zerklüfteten Eruptivgesteins oder wenigstens grössere oder kleinere Brocken in ihrer Ausfüllungsmasse enthalten, wodurch die Regelmässigkeit der Ausfüllung sehr gehindert wurde, und bisweilen verschiedene Abtheilungen unregelmässiger Gestalt neben dem Hauptraume gebildet wurden, so dass, wenn z. B. die Chalcedonablagerungen nicht vollständig den ganzen Raum erfüllten, nicht allein in der ursprünglichen Mandel ein Raum hohl blieb, welcher später durch krystallinischen Quarz ausgefüllt wurde, sondern auch in den Lücken und Klüften zwischen den Bruchstücken ähnliche kleinere, aber unregelmässige Räume sich bildeten, welche den Verlauf der Ausfüllung bis zur Ablagerung von krystallinischen Quarz eben so zeigen, wie die ursprüngliche Mandel. Selbst kleinere Fragmente können ähnliche Abtheilungen hervorbringen, weil, wie man deutlich sieht, sie gewissermassen Stützpunkte für die Ablagerung darboten und dadurch leicht eine feste Verbindung zwischen zwei entgegengesetzt liegenden Punkten möglich gemacht wurde, welche unter anderen Verhältnissen nicht entstanden wäre, und so sogar einzelne Theile gänzlich oder für eine Zeit von der Verbindung mit dem ganzen Raume abschloss. Alle derartigen Erscheinungen aber bleiben nur Ausnahmen von der allgemeinen Regel der Ausfüllung und zeigen hier nur an, dass die Melaphyrmasse von Theiss nach der Erkaltung sehr zerklüftete.

Von der Menge der in dem Wasser aufgelösten Substanzen hängt die Dicke der einzelnen Lagen ab, so wie durch geringe unwesentliche Beimengungen Verschiedenheiten einzelner in Farbe und Durchscheinheit hervorgebracht werden, beides aber gewährt uns keinen Anhaltspunkt für das Zeitmaass, welches wir etwa für die Ausfüllung herauszufinden Willens seyn möchten. Wie unhaltbar diese Punkte für eine solche Bestimmung sind, sehen wir an Niederschlägen heisser Quellen, bei denen es doch wenigstens möglich ist, annäherungsweise eine Zeit zu schätzen, binnen welcher eine Schicht einzelner Lagen eine gewisse Dicke erreicht hat; hier aber ist eine derartige Schätzung grundlos, weil wir nicht wissen, durch welche Ursachen und wie lange der Zutritt neuer Wassermengen von einer Mandel abgehalten wurde. Es ist daraus auch erklärlich, dass wir nicht in allen Mandeln dieselben Lagen in ähnlicher Dicke und von ähnlicher Beschaffenheit finden, weil durch die Art der Zuführung und Ausfüllung von vornherein Unterschiede eintreten müssen.

Die ersten Ablagerungen, bei den Mandeln von Theiss Chalcedon und Kalkspath in ungleichem Mengenverhältniss, geben ein festes und dauerndes Bild des Hohlraumes und schmiegen sich innig an die Unebenheiten der Wandungen an, wenn nicht eine grössere und partielle Ansammlung nach dem Boden zu Statt findet und sogar ein Theil der obern Wandung frei bleibt, oder die Wandungen durch die Erweichung verändert werden.

Allmählig werden die gebildeten Lagen, die längere Zeit hindurch einen gewissen Grad von Weichheit und Verschiebbarkeit in ihren kleinsten Massentheilchen behalten können, fest und bieten ausser den schon vorhandenen Zuführungskanälen durch die bei dem Festwerden einwirkende Contraction der kleinen Theilchen durch entstehende zarte Risse und Sprünge Raum und Zugang für nachfolgende Wasser. Allmählig aber werden die Lagen undurchdringlicher, die Zuführungskanäle enger und der Zugang erschwerter, wodurch die Mengen derselben abgelagerten Mineralsubstanzen in verschiedenen Mandeln desselben Ortes ungleich erscheinen und wir einzelne Mandeln finden, welche ganz von Chalcedon oder Gemengen von Chalcedon und Kalkspath erfüllt sind, während andere nur dünne Lagen desselben zeigen. Dass hiebei auch die Grösse der ursprünglichen Hohlräume beiträgt, ist leicht ersichtlich, denn wenn die Ablagerung von der Menge des aufgelösten Materials abhängig ist, so müssen die kleineren zuerst erfüllt werden, vorausgesetzt, dass der Zutritt zu allen derselbe ist. Das letztere ist aber nicht der Fall, da die Zuführungskanäle ungleich sind und daher nicht immer verhältnissmässig gleiche oder entsprechende Mengen Zutritt erhalten, wenn namentlich die Zugänge momentan verschlossen werden und erst nach mehr oder weniger längern Zeiträumen durch die mechanische und chemische Einwirkung des Wassers wieder geöffnet werden.

In den seltensten Fällen wird durch die sich absetzenden Lagen der Eingang den nachfolgenden Wassermengen versperrt und es kann selbst ohne sichtbare Zuführungskanäle die Gebirgsfeuchtigkeit in das noch hohle Innere eindringen. Ich glaube hierbei durch den von W. Haidinger passend gebrauchten Ausdruck Gebirgsfeuchtigkeit nicht missverstanden zu werden, als spräche ich von anderem als durch die heissen Quellen zugeführten Wasser, es ist der allgemeinste und kann sowohl für dieses als auch für das von oben eindringende Atmosphärwasser gebraucht werden. Es ist kein Grund vorhanden, dass die völlig bewiesene Annahme der Zuführungskanäle auch eine gleichzeitige andere Art der Durchdringung ausschliessen sollte, wodurch die erstere unterstützt wird. Der Widerspruch, welchen Noeggerath (I. 8) dagegen erhebt, kann nach meiner Ansicht nicht als so vollständig begründet angesehen werden, dass er für die Achatmandeln die Ausfüllung durch ein successives Durchschwitzen (wie Haidinger diese Durchdringung bezeichnet) der steinbildenden Flüssigkeit durch die bereits gebildeten Lagen ganz in Abrede stellt. Er sagt darüber a. a. O.:

„Ich bin zwar so fest, wie irgend Einer davon überzeugt, dass die Wasser oder die sogenannte Gebirgsfeuchtigkeit viele scheinbar völlig dichte Mineralien durchdringen könne. In meiner Abhandlung über das Färben vieler Substanzen aus der Quarzgatung habe ich nämlich die schlagendsten Beweise geliefert, wie mit färbenden Stoffen geschwängerte Flüssigkeiten diese Mineralien zu durchdringen im Stande sind. Aber gerade die Art und Weise, wie bei dem künstlichen Färben die wechselnden Lagen der Chalcedone und ähnlicher Massen von diesen Flüssigkeiten durchdrungen werden,

beweist, dass nur gewisse Lagen mehr oder minder porös sind, um irgend eine künstliche Färbung anzunehmen, und dass diese Lagen wieder mit anderen abwechseln, welche für die Flüssigkeiten völlig undurchdringbar, also auch nicht porös sind, auf welchen abweichenden Eigenschaften die Kunst des Färbens der gebänderten Quarze, der Onyx, Sardonyx, der Cameensteine überhaupt wesentlich beruht. Ich bitte sehr, in dieser Beziehung meine Abhandlung vergleichen zu wollen. Wie wäre es daher möglich, dass ein Durchschwitzen der sogenannten Gebirgsfeuchtigkeit den successiven Absatz der Lagen von aussen nach innen in den Mandeln bewirkt haben könnte? Die früher gebildeten, dichten, nicht porösen, für die Gebirgsfeuchtigkeit undurchdringbaren Lagen, welche mit durchdringbaren abwechseln, würden ein unüberwindliches Hinderniss aller weiteren Fortbildung von neuen Lagen im Innern der Mandel entgegengesetzt haben.

So richtig das Gesagte erscheint, und bis auf einen gewissen Punkte ist, ist dennoch damit zugegeben, dass für einzelne Lagen eine Durchdringung durch die Gebirgsfeuchtigkeit möglich ist und nur soweit, als sie in der That möglich ist, will ich sie als auf die Bildung wirksam betrachten. Wir finden darin nichts Naturwidriges und der Theorie Widersprechendes, dass nicht eine Art der Wirksamkeit, so lange es möglich ist, die andere unterstützen könnte. Selbst wenn jede Achatmandel den Zuführungskanal oder mehrere nachweisen liesse, könnten wir davon sprechen, dass die Gebirgsfeuchtigkeit einzelne Lagen durchdringt, wenn wir auch nicht behaupten wollen, dass sie alle zu durchdringen im Stande ist. Selbst der Zustand der einzelnen Lagen, wie wir sie jetzt vorfinden und auf dem Wege der künstlichen Färbung als poröse und undurchdringbare unterscheiden, kann streng genommen nicht als von Anfang an derselbe angenommen werden, weil durch die allmählig zunehmende Ablagerung, Contraction beim Festwerden und Durchdringung durch die Gebirgsfeuchtigkeit minder poröse Lagen undurchdringlich werden können, selbst wenn sie es nicht für die zunächst auf sie folgenden Lagen gewesen sind. Dass aber durch die Durchdringung selbst durch das Durchschwitzen der mit Mineralsubstanz geschwängerten Feuchtigkeit minder poröse Lager undurchdringlich werden können ist sehr leicht denkbar und von einer allmählichen Contraction der Lagen beim Festwerden geben uns leere Räume zwischen denselben den klarsten Beweis.

Das Vorhandenseyn der Zuführungskanäle hat NOEGGERATH durch viele Beispiele bewiesen und die Mandeln von Theiss bieten zahlreiche Beispiele, von denen ich hier einige anführen will.

Die in Fig. 26 und Fig. 27 dargestellte Mandel ist wie die Fig. 26 angibt, eine zusammengesetzte Mandel, der grössere und kleinere Blasenraum m und n sind durch einen fast ringsum sichtbaren rinnenförmigen Einschnitt h in ihrer Verschmelzung als ursprünglich getrennt gewesene zu erkennen. Der grössere Hohlraum hatte eine wenig gedrückte, nahezu eiförmige Gestalt, die Gestalt des kleineren ist unregelmässig und auf der Seite zum Theil platt, zum Theil stark eingedrückt. Die durch das Zer-

schlagen sichtbar gewordene und in Fig. 27 in natürlicher Grösse dargestellte Hälfte, wobei die Trennung zum Theil längs des rinnenförmigen Einschnittes fortgeht und dann in die grössere Mandel übergeht, zeigt als erste Ausfüllung grauen Chalcedon c in kaum unterscheidbaren Lagen, auf ihn folgt eine schwache Lage durch Eisenoxyd blutroth gefärbten Chalcedons d. Die nächste Ausfüllungsmasse und die an Masse überwiegende ist weisser bis blaulichweisser ins blassviolblaue gehender stängliger Quarz e, welcher einen hohlen Raum k im Innern übrig liess und in diesem frei ausgebildete Krystallenden zeigt, zu unterst aber, wo er auf dem Chalcedon aufsitzt, fast körnig ist. Die mit dem Buchstaben m bezeichneten Massen sind wesentlich grünlich weisser Datolith, der an der Oberfläche auch Krystalle zeigt, hier aber nur im Durchschnitt zu sehen ist. Mit ihm ist Kalkspath vergesellschaftet, welcher ausserdem die mit f bezeichnete stänglige Parthie von graulichweisser Farbe bildet. Bei g ist der Zuführungskanal, welcher sich äusserlich durch eine schwache Vertiefung markirt. Ob er der einzige dieser Mandel ist, habe ich durch eine fernere Zertheilung nicht untersucht, da es genügend erschien, dass die zufällige Trennung so schön die in Frage stehende Stelle entblöste; es ist aber wahrscheinlich, dass auf der entgegengesetzten Seite links ein zweiter ist, wo die zweite Anhäufung des Datoliths mit Kalkspath zu sehen ist. Die Krystallspitzen des Quarzes im inneren hohlen Raume sind mit einzelnen aufliegenden zarten Nadeln einer zeolithischen Species geziert, welche ich nicht näher untersucht habe.

Ein concaves Bruchstück einer Mandel, wahrscheinlich von der oberen Wölbung herrührend, zeigte auf seiner Oberfläche in der festen Chalcedonrinde einen geschlängelt fortlaufenden, fast rinnenförmigen Eindruck (Taf. VIII fig. 1), welcher auf keinen späteren Sprung der Mandel hindeutete, weil er sich nach beiden Seiten von der Tiefe aus allmählig verflachte, überdiess auch durch seine Richtung nicht daran denken liess. Das Bruchstück der Mandel enthielt als Ausfüllungsmasse wenig grauen Chalcedon, milchweissen stängligen im inneren Hohlraume schön krystallisirten Quarz mit starkem Glasglanze auf den Krystallflächen und eine Parthie weissen grossblättrigen Kalkspathes; die beiden letzteren waren stark durchscheinend bis durchsichtig. Zwischen dem Quarz und zum Theil auf den Krystallen, so wie auch im Kalkspath, welcher dadurch stellenweise grünlich gefärbt wurde, konnte man mehr oder weniger grosse Parthien eines fast erdigem Chlorit ähnlichen Minerals sehen, welches ich für Melaphyrsubstanz halte, die durch das Wasser mechanisch aufgelöst und in die Mandel geführt wurde. Durch sie wurde auch die Fig. 1 Taf. VIII angedeutete geschlängelte Rinne in der Färbung von der übrigen Chalcedonrinde unterschieden. Eine Zertheilung des Stückes, so dass diese Rinne quer durchbrochen wurde, zeigte, wie Fig. 2 Taf. VIII angibt, dass sie ein Zuführungskanal war g. Der Chalcedon c nimmt an Dicke nach ihr zu ab, bis zum Verschwinden, desgleichen der zunächst auf den Chalcedon folgende fast feinkörnige Quarz d. Auf diesen folgt der stänglige und krystallinische Quarz e und der mit ihm verwachsene Kalkspath f. Die mit n bezeichneten und in der Skizze

dunkel gehaltenen Flecke sollen die grüne erdige Substanz darstellen. Ihr Eintritt in das Innere ist offenbar, wie die über d fortlaufenden kleinen Parthien zeigen, nach dem des vorher eingetretenen körnigen Quarzes erfolgt. Fig. 3 Taf. VIII stellt eine andere Bruchfläche des Mandelstückes dar, wo grössere Parthien der grünen Substanz zu sehen sind.

Einen bedeutend grösseren Zuführungskanal zeigte eine Mandel von ziemlich regelmässiger mandelförmiger Gestalt, ein wenig in der Richtung AB verkürzter als gewöhnlich und auf der Seite C' nur zum Theil eben; im Uebrigen stark gewölbt. Sie ist vollständig erfüllt mit grauem Chalcedon und milchweissem wenig stängligen Quarz. Zertheilt zeigte sie, wie Fig. 4 angibt, auf der sichtbaren Bruchfläche die Vertheilung der Massen in der angegebenen Art, dass a den grauen wenig durchscheinenden Chalcedon mit einzelnen blutrothen Punkten, b den weissen durchscheinenden krystallinischen Quarz vorstellt. Bei z ist ein breiter Zuführungskanal zu sehen, welcher auf der Oberfläche o der Mandel über einen Zoll weit zu verfolgen ist, wie die im Lichte unterschiedene Stelle der Oberfläche angibt. Inmitten des Quarzes nimmt man durch den Glanz und die Härte unterscheidbare Parthien weissen Kalkspathes wahr.

Eine noch massenhaftere Zuführung in Bezug auf die Grösse der freigebliebenen Oberfläche zeigt die in Fig. 5 abgebildete Mandel, bei der man fast nicht von einem Zuführungskanal sprechen kann, sondern eher von einer Ausfüllung, wie sie weiter oben besprochen und in Fig. 21 Taf. VII angedeutet wurde, wo nämlich die Chalcedonmasse a von grauer ins Röthliche fallender Farbe nicht vollständig den Hohlraum bekleidete, sondern sich nach der Tiefe zu in Masse ansammelte; auf diese folgt feinkörniger fleischrother Kalkspath b, welcher stellenweise mit der Chalcedonmasse vermischt erscheint, so dass man eine bestimmte Abgrenzung kaum wahrnimmt und sie selbst durch die Zeichnung noch zu scharf ausgedrückt ist. Auf diesen fleischrothen Kalkspath folgt gelblich weisser feinkörniger Kalkspath c, welcher den noch übrigen Raum vollständig ausfüllt.

Ein ähnliches Bild der Ausfüllung gibt uns die in Fig. 6 im Durchschnitt im Viertel der natürlichen Grösse dargestellte Mandel, welche fast ganz aus weisslichgrauem Chalcedon a besteht. Den Raum, welchen derselbe unerfüllt liess, füllte eine gelblichweisse feinkörnige Kalkspathmasse b aus, welche an den Grenzen mit dem Chalcedon innig verwachsen ist. Durch die Linie c wird in der Figur eine fast im ganzen Umkreise der Mandel zu verfolgende Lage weissen fast undurchsichtigen Chalcedons angedeutet. Stellenweise ist die Färbung beider Ausfüllungsmassen auch röthlich durch Eisenoxyde und die Mandel selbst hat eine unregelmässig knollige Gestalt mit vielen Unebenheiten in ihrer Convexität.

Ein ferneres Beispiel eines Zuführungskanales geben die in Fig. 7 und 8 dargestellten Bruchstücke einer Mandel. In Fig. 7 stellt a blaulichgrauen Chalcedon dar, welcher auf der einen Seite des Zuführungskanales g allmählig, auf der andern schnell an Dicke abnimmt; auf ihn folgt körnigstängliger Quarz b von weisser Farbe und die

übrige Masse c und d ist vorherrschend grünlichweisser Datolith mit beigemengtem schwach röthlichweissen Kalkspath. Die Datolithmasse ist zum Theil derb, zum Theil in kleinen Krystallen und in der Figur sind durch d und c die Parthien unterschieden, wo einerseits der Datolith mehr derb, andererseits mehr in Krystallen sichtbar wird. Der Kalkspath ist untergeordnet. Der in der Zeichnung schwarz dargestellte Theil ist ein fest anhängender Theil der Melaphyrmasse. Eine fernere Zertheilung des besprochenen Stückes, so dass der Theil rechts von der dunklen Linie wegfiel, zeigte es so, wie die Fig. 8 darstellt, wo man auch auf der anderen Seite die allmähliche Abnahme des Chalcedons e wahrnimmt. Die Fig. 9 zeigt die natürliche Grösse des Zuführungskanals, wie derselbe als ein schwacher grubenförmiger Eindruck auf der Oberfläche zu sehen ist und ringsum nicht gleichförmig sich in der Oberfläche verliert, sondern einzelne weiter fortlaufende Rinnen zeigt, wie wir es etwa bei einer in festem Erdboden durch Regenwasser gebildeten Vertiefung sehen, in welche das Wasser durch einzelne Rinnen zuläuft, welche es in dem Boden rings um die Vertiefung bildete.

Die in Fig. 10 dargestellte Mandel, oder vielmehr das Bruchstück zeigt uns zunächst, wie grauer ins Bläuliche oder Röthliche ziehender Chalcedon a zuerst den Hohlraum erfüllte, und grosse durch Sprünge zerklüftete Stücke des dem Hohlraum zunächst liegenden festen Gesteins mit in den Hohlraum hineinzog, nachdem sie durch die mechanisch wirkende Auflöslichkeit des Wassers vollständig getrennt waren. Ausser dem grossen Stücke bemerkt man überall kleine Theilchen, welche losgeweicht in der Chalcedonmasse versanken. Dabei ist die mit a bezeichnete Masse nicht durchgehends Chalcedon, sondern stellenweise ist blättriger Kalkspath von schmutzig gelblicher Färbung bis zum Ueberwiegen über die Chalcedonmasse beigemengt. Dergleichen Stellen sind in der Masse e durch die grösseren sich durchkreuzenden Striche dargestellt. Grosse und kleine Sprünge durchsetzen an dieser und an andern Stellen der Mandel die dunkelgrüne Gesteinsmasse, wie in h und g angedeutet ist und wobei h vorherrschend Chalcedon, die ausgefüllte Kluft g vorherrschend Kalkspath enthält. Der nach dieser Ausfüllung übrig gebliebene hohle Raum von geringer Dimension wurde durch aufeinander folgende Lagen abwechselnd weissen und grauen Chalcedons c fest begrenzt; auf diesen folgte weisser d nach der Mitte zu schwach bläulich gefärbter k stänglicher Quarz, welcher in der Mitte e noch Raum gewann, freie Krystallenden bestimmt zu gestalten. Der bei g gezeichnete Zuführungskanal zeigt, wie die Massen nach einander in den Hohlraum gelangten und die mit f bezeichnete Stelle ist mit Kalkspath, wie er sich auch sonst noch in der Chalcedonmasse verstreut zeigt, erfüllt. Der scheinbar homogene Chalcedon a zeigte übrigens an einem Ende der Mandel vorzüglich schön, wie er äusserst feine gleiche Lagen übereinander darstellt, deren Vorhandenseyn man nur durch die Art des Bruches erkennen kann. An einzelnen Stellen tritt eine Färbung durch Eisenoxyd hervor, jedoch sehr untergeordnet, und zuweilen sieht man in der scheinbar homogenen Masse kleine Kugeln durch den Bruch bloss

gelegt, um welche auch eine wegen der gleichen Färbung nicht sichtbare concentrische Ablagerung erfolgte.

Ein Bruchstück einer anderen Mandel, von der ich nur bedauere, nicht mehr als dieses Bruchstück gesehen zu haben, verdient als ein schöner Beleg angeführt zu werden (Fig. 11). Die erste Ausfüllungsmasse ist der graue Chalcedon a, dessen Farbe hier grösstentheils durch Roth modificirt wird, so dass er stellenweise blass gefärbtem Carneol gleicht. Auf ihn folgen regelmässige an Dicke verschiedene Schichten c weissen und grauen Chalcedons und zuletzt eine dicke Lage d reinweissen nur an den Kanten durchscheinenden Chalcedons. Ueber diesem liegt milchweisser stängliger Quarz e, welcher nach der Mitte (des ursprünglich zu denkenden Hohlraumes) ins Amethystfarbene übergeht f und einige Krystallspitzen zeigt. An diesem in der Fig. 11 dargestellten Bruchstücke zeigte sich ein scharf ausgeprägter Zuführungskanal g, welcher, wenn man das Stück ansieht und namentlich mit der Loupe die betreffende Stelle betrachtet, sehr deutlich die Art der Erfüllung durch ihn sehen lässt. Bei der mit g bezeichneten Stelle erstreckt sich sichtlich die Quarzmasse unter den sichtbaren Chalcedon und es wäre sehr Schade gewesen, durch einen Schnitt den weisslichen weitem Verlauf bloss zu legen, weil man sicher riskirt hätte, die überdiess hinreichend zur Ueberzeugung führende Stelle unnöthig zu zerstören, da der stänglige Quarz sehr leicht abbröckelt. Die mit k bezeichneten Stellen enthalten viel der vom Wasser erweichten Gebirgssubstanz und sind grau; ausserdem sieht man auf der Bruchfläche des Chalcedons in der Zeichnung links strahlige zarte Parthien l, welche einem andern Mineral angehören. Bemerkenswerth sind die drei schwarz gehaltenen Stellen m, welche ein allmähliges Eindringen der Gebirgsfeuchtigkeit durch eine erosive Thätigkeit, ausgeübt auf die feste Chalcedonmasse dokumentiren. Es sind drei kleine Kanäle, welche endlich auch als Zuführungskanäle für andere Mineralien gedient hätten, welche für jetzt nur in ihrer Nähe sich festsetzen konnten, so weit ihnen die fortdauernd zerstörende Thätigkeit der Gebirgsfeuchtigkeit bereits Raum gegeben hatte. Hier sieht man also sehr deutlich, wie durch den ursprünglich vorhandenen Zuführungskanal die Mandel erfüllt wurde und wie in der Folge neue Zuführungskanäle gebildet werden können.

Ich halte es für überflüssig, die Zahl der Beispiele zu vermehren und will hier nur noch dreier Mandeln gedenken, welche zur Vervollständigung des früher Gesagten dienen, nämlich der Mandeln, welche in Fig. 12, 13 und 14 dargestellt sind. Die erstere Fig. 12, welche die Normalgestalt der Theisser Mandeln zeigt, ist eine von denen, woran man deutlich sieht, dass die Ausfüllungsmasse an Quantität gegen die Schärfe A und die Seite c' zunimmt. Der Chalcedon a, welcher die erste Ausfüllungsmasse ausmachte, hat sich in den bezüglichen Theilen allein festgesetzt, in ihm bemerkt man einzelne heller gefärbte Theile f, welche auch concentrische Lagen zeigen und unregelmässige Stücke. Auf diese folgt dunkel blaulichgrauer Chalcedon b, welcher deutlich aufeinander folgende Lagen zeigt; ihm zunächst liegt körniger oder kurzstängliger

Quarz c von blaulichgrauer Farbe, und auf diesen stängliger Quarz d von weisser Farbe. Der innere unregelmässig und bis auf mehrere grössere oder kleinere Löcher erfüllte Raum ist mit einem Gemenge aus Quarz und grünlichweissem Datolith e erfüllt.

Die in Fig. 13 abgebildete Mandel von unregelmässig kugelförmiger Gestalt zeigt, wie zunächst der äussersten Wandung sich kleine kuglige Parthien blass fleischrothen Chalcedons a absetzten. Diese wurden von grauem b fleischrothem und röthlichgrauem Chalcedon c in wechselnden Lagen überdeckt; hierauf folgte stängliger Quarz d von wasserheller oder graulicher Färbung mit einem Stich ins Blaue und den innen übrig gebliebenen Raum füllte grünlichweisser Datolith e aus. Die mit f bezeichnete Stelle ist kein Zuführungskanal, sondern daselbst war das fehlende Stück seitlich abgeschlagen.

Fig. 14 endlich stellt den Durchschnitt einer eiförmigen Mandel dar, welche vorherrschend mit dunkelgrauem Chalcedon c erfüllt ist. Bei ihr sieht man die von den Wandungen losgeweichten Theile b sowohl im unteren als im oberen Theile, wie sie in die Chalcedonmasse versunken sind und von ihr schwebend gehalten wurden; im oberen Theile namentlich sieht man es deutlich, wie sich allmählig einzelne Theile nach einander lösten und wegen der gelatinösen Beschaffenheit des noch weichen Chalcedons nicht tiefer herabzufallen vermochten. Die mit d bezeichneten lichtereren Theile sind durch Eisenoxyd roth oder braunroth gefärbte Stellen. Der innerste Raum wurde durch körnigen Quarz f ausgefüllt, so wie auch ein demselben ähnliches kleines Stück im untern Theile sich vorfindet. Da es interessant erschien bei dieser Mandel, welche so wenig Quarz im Inneren enthielt, den Zuführungskanal für diesen ausfindig zu machen, liess ich sie dem gegebenen Durchschnitte parallel in Platten schneiden, diese zeigten zwar eine Zunahme der Quarzmasse und eine Aenderung in der Art, dass der Quarz im Inneren von Neuem Chalcedon, ähnlich dem äussern, in geringer Menge enthielt und als innersten Kern wiederum Quarz, nach keiner Seite aber die gesuchte Verbindung mit aussen, sondern nur mit dem im unteren Theile der Mandel in der Figur 14 bemerkten Quarzfragmente, so wie auch an verschiedenen Stellen der Umwandung mehrere dergleichen hervortraten. Eine neue Theilung endlich des letzten Stückes senkrecht auf die Fläche der erwähnten Schnitte zeigte den Zuführungskanal da, wo ich ihn vermuthete.

Nachdem ich hiermit durch die vorgebrachten Beispiele, deren Anzahl vermehrt werden könnte, die Existenz der oft in Frage gestellten Zuführungskanäle auch an den Achatmandeln von Theiss nachgewiesen und gezeigt habe, wie dieselben auf das klarste die Art der Ausfüllung beweisen, ist es kaum nöthig, darauf einzugehen, dass es überhaupt kein Grund gegen die in Rede stehende Theorie sey, dass man die Zuführungskanäle so selten wahrnehme. Sie sind durchaus nicht so selten, als man gewöhnlich glaubt oder glauben zu machen sucht; es bedarf nur einer sorgfältigen Untersuchung und ich glaube nicht zu viel zu behaupten, wenn ich im Sinne der Theorie ausspreche, dass man an jeder Mandel, welche mehr als eine Ausfüllungsmasse zeigt, den oder die Zuführungskanäle auffinden muss. Trotzdem dass dieselben, so lange noch eine weitere Erfüllung möglich ist, durch die beständige Circulation und Bewegung der Gebirgs-

feuchtigkeit offen erhalten werden, so ist es aber so leicht möglich und oft auch der Fall, dass sie, bevor die Mandel gänzlich ausgefüllt worden ist, verschlossen werden und dadurch einer fernern Ausfüllung ein Ende machen. Oft aber werden sie auch wieder geöffnet oder durch die auflösende (gleichviel ob mechanische oder chemische) Kraft der Gebirgsfeuchtigkeit neu gebildet, in vielen Fällen aber wieder durch andere Einwirkungen neu geschaffen.

Ob man aber überhaupt im Stande sey, die Existenz und die Oertlichkeit des Zuführungskanals von aussen zu erkennen, bevor man die Mandel selbst zertheilt, diese Frage lässt sich nicht mit Bestimmtheit beantworten, weil gewöhnlich die fest an der Oberfläche anhängende und gleichsam innig mit der Chalcedonmasse verwachsene Melaphyrmasse der ganzen Oberfläche ein gleichmässiges Aussehen verleiht und durch die sehr kleinen Massentheilchen der Melaphyrmasse, welche in die äusserste Lage suspendirt und eingelagert sind, die ganze Oberfläche eine gleichmässige dunkle Farbe erhält. In diesem Falle gelang es mir oft, durch starke Benetzung mit Wasser oder verdünnter Säure die Verschiedenheit der Oberfläche herauszufinden. Bisweilen bilden die Zuführungskanäle Erhabenheiten oder Vertiefungen, welche nur an einzelnen Stellen (Punkten ist wohl im Ausdrucke zu schwach) oder in länger fortlaufenden Linien (Leisten oder Rinnen) sichtbar sind, und ich habe Gelegenheit gehabt, diese verschiedenen Fälle zu beobachten.

In Bezug auf die Erscheinung, dass die Zuführungskanäle sich durch Erhabenheiten markiren, habe ich noch einer Stelle aus NOEGGERATH'S Abhandlung zu erwähnen, welche beweist, dass dergleichen Hervorragungen selbst an einzelnen Fundorten normal sind. Er beschreibt (I. pag. 9) eine Achatmandel aus der Nahegegend, an welcher der mit Amethyst gänzlich verstopfte Zuführungskanal sich noch bis ausserhalb des Mandelumrisses ausdehnt, so dass die Mandel mit einer Hervorragung, einem zapfen- und knospenartigen Körper versehen erscheint. Dass, fährt er an dem angegebenen Orte fort, die Erscheinung solcher hervorragenden Zapfen oder Knospen an den Achatmandeln zu Utzenbach ganz gewöhnlich, gewissermassen normal ist, ergibt sich schon aus der Beschreibung derselben, welche JOHANN JACOB FERBER in seinen „Bergmännischen Nachrichten von den merkwürdigsten mineralischen Gegenden der Herzoglich Zweibrücken'schen u. s. w. Länder“ (Mietau 1776) mitgetheilt hat. Er vergleicht die dortigen Achatmandeln hinsichtlich ihrer Form mit Echiniten verschiedener Gattungen, beschreibt die daran vorkommenden Zapfen, gibt sogar, freilich schlechte, Abbildungen dieser Gebilde mit ihren ansitzenden Zapfen und sagt, dass sie durch diese Zapfen mit der Achatmutter verbunden seyen. — Als Achatmutter gelten ihm aber die Gänge- und Spaltenausfüllungen (die Leisten) von Jaspis, Chalcedon, Amethyst u. s. w., welche den Melaphyr durchsetzen. Er weist daher auf die unverkennbarste Weise auf den Zusammenhang der Mandeln mit den Gängen und Leisten, den eigentlichen weitem Zuführungswegen der Kieselsubstanz hin.

Dass ähnliche Ausfüllungen anderer leerer Räume, als der eigentlichen Blasenräume, stattfinden, wie NOEGGERATH I. p. 6 bewiesen hat, wenn sie auch nicht aller Orten angetroffen werden, ist leicht ersichtlich, weil in ihnen (den Sprüngen und Klüften) der Ort zu gleichen Ablagerungen gegeben ist, eben so leicht ist es aber auch erklärlich, dass man sie nicht immer findet, weil durch ihre continuirliche Verbindung untereinander der Gebirgsfeuchtigkeit Gelegenheit gegeben ist, die bereits abgelagerten Substanzen fortzunehmen, was weniger leicht in den Achatmandeln möglich ist.

Während dieses Zeitraumes der Bildung von Achatmandeln können auch untergeordnete Modificationen der Form Statt finden, wenn die Gebirgsfeuchtigkeit Theile der Wandungen auflöst und deren Bestandtheile fortführt, wodurch die Gestalt der ersten Hohlräume abgeändert wird und dadurch, dass die hohlgewordenen Räume nicht unerfüllt bleiben, sondern neue Substanzen in ihnen abgesetzt werden, auch die Gestalt der Achatmandeln sich gleichmässig verändert. Die neu abgesetzten Substanzen können zum Theil mit denen im Innern harmoniren, oder wenn sie der spätern Periode angehören, verschieden davon seyn, ihr Vorhandenseyn aber kann leicht auf den Gedanken führen, dass die ersten Lagen der ursprünglichen Mandel sich nicht den durch die Hohlräume gegebenen Wänden angeschlossen hätten, und so eine falsche Vorstellung von der Art der Ausfüllung erzeugen.

Es können ausserdem auch in dieser Bildungsperiode oder nach ihrem Abschluss neue Veränderungen in der örtlichen Lage der Gebirgtheile eintreten, womit auch die Veränderung in der Natur der Quellen zusammenhängen kann und durch welche Zerspaltungen mit oder ohne gleichzeitige oder später eintretende Verschiebungen einzelner Theile der Melaphyrmasse hervorgehen. Ihre Folge ist, dass bisweilen die Mandeln zerklüftet werden (ja sogar auch zerquetscht werden, wenn sie nicht voll waren), ihre Theile sich aneinander verschieben und die entstandenen Sprünge für die Mandeln zu Zuführungskanälen werden, welche aber durchaus nicht mit den oben geschilderten zu wechseln sind, wenn sie auch auf gleiche Weise zur ferneren Ausfüllung des noch hohlen Innern dienen und mit gleicher Masse erfüllt erscheinen. Waren die Mandeln bereits gefüllt, so wurden dergleichen Sprünge durch sichtlich verschiedene Substanzen ausgefüllt und dadurch der Zusammenhang zwischen den einzelnen Theilen wieder hergestellt. Dergleichen Sprünge sind eine nicht seltene Erscheinung, und sie zeigen sich oft an einzelnen Mandeln in reichlicher Zahl und von verschiedener Dimension und Ausdehnung. NOEGGERATH hat (I. 4. 5) Beispiele dieser Art angegeben und bei den Achatmandeln von Theiss sind später entstandene Sprünge häufig zu sehen. Ich beschränke mich darauf, nur ein einziges Beispiel anzuführen, nämlich die in Fig. 15 dargestellte Mandel. Ihr Inhalt ist Kieselerde in verschiedenen Abänderungen. Die äusserste Hülle cc ist halbdurchsichtiger blaulichgrauer Chalcedon in mehreren aufeinanderfolgenden dünnen Lagen, von denen sich einzelne durch eine mehr ins Weisse fallende Farbe und geringere Durchscheinheit markiren. Auf diese folgt nach Innen

blaulichweisser durchscheinender Chalcedon d in vielen aufeinanderfolgenden Lagen, welche durch die Abnahme des Weiss und die Zunahme der Durchscheinheit unterschieden sind. Auf diese folgt, scharf abgegrenzt, krystallinischer Glasquarz e von graulichweisser Farbe, dessen Reinheit der Farbe und Durchsichtigkeitsgrad nach dem Innern zu zunimmt, so dass die äussersten Theile fast wasserhell und durchsichtig sind. Aus der Unebenheit der inneren Umrandung und einzelnen scharf hervortretenden Linien ist zu entnehmen, dass er freie Krystallenden zeigte, so wie die zahlreichen Risse auf eine Aggregation stänglicher Krystalloide hinweisen. Das Innere ist mit dunkellauchgrüner, stellenweise weisslich grüner Jaspismasse f gefüllt, wie durch die verschiedene Schattirung derselben angedeutet ist. Ihr Eindringen in das Innere der Mandel ist aus den beiden Gängen g ersichtlich, welche mit derselben Masse erfüllt sind und sich im Zusammenhange mit dem Innern durch nichts unterbrochen zeigen. Die grüne Färbung ist durch fein vertheilte pulverförmige Theilchen der mechanisch aufgelösten Melaphyrmasse zu erklären, welche als Pigment in der kieselerdehaltigen Flüssigkeit suspendirt waren. Auf der Seite A der Mandel sieht man unregelmässig vertheilte Brocken, welche mehr oder weniger vollständig mit Chalcedonmasse umhüllt sind, so dass sie entweder durch diese getrennt erscheinen oder dicht aneinander liegen. An der Seite B ist eine mit k bezeichnete kuglige concentrisch schalige Chalcedonmasse zu sehen. Unter den durch h angedeuteten und durch Chalcedon cämentirten Bröckchen sind einzelne durch Eisenoxyd gefärbt, wodurch sie graulichweiss mit einem Stich ins Gelbrothe erscheinen und einzelne ziegelrothe Flecke zeigen. Die Fig. 16 zeigt, wie die Spalte g auf der Oberfläche der Mandel verläuft, wobei die punktirte Linie den Verlauf auf der untern nicht sichtbaren Fläche angibt. An der Mandel selbst ist der Verlauf durch eine deutliche dunkelgrüne Linie von gleicher Breite wie g in Fig. 15 zu erkennen.

Hierher gehört auch eine schon von LASIUS gemachte Bemerkung, zum Beweise, dass auch ihm dergleichen Erscheinungen nicht entgangen sind. Er sagt pag. 270 in seinen Beobachtungen über das Harzgebirge, Hannover 1789 Theil I:

„Zuweilen finden sich in dem Trappgebirge einige kleine Klüfte, von 1 bis 2 Linien mächtig, welche mit Chalcedonmasse ausgefüllt sind und Onyxstreifen haben. Ich sah eine solche Kluft mitten durch eine Achatkugel durchsetzen. Es schien hier der Chalcedon die Achatkugel wieder zusammengeleimt zu haben, die vielleicht bei einer Spaltung des Felsens zugleich mit ihm zerrissen war. Von verschiedenen Zerrüttungen des Felsens zeugten mir mehrere im Gebirge noch festsitzende durch Felsenklüfte getrennte Achatkugeln, deren eine Hälfte aber nie genau gegen die andere übersass, sondern die eine Hälfte war immer etwas gegen die andere Hälfte gesunken und verschoben.“

IV.

Die Achatmandeln werden durch die Einflüsse des Atmosphärwassers verändert und befinden sich in einem fortdauernden Zustande der Nach- und Umbildung. (Nach- oder Umbildungsperiode der Mandeln.)

Die Frage, ob die Achatmandelbildung ein Ende habe und zu einer gewissen Zeit als abgeschlossen zu betrachten sey, kann nach meiner Meinung nur unter gewissen Beschränkungen mit Ja, muss dagegen im Ganzen mit Nein beantwortet werden. NOEGGERATH betrachtet die Bildung als geschlossen und einer frühern Epoche angehörig, weil die heissen Quellen, als die temporären Nachweisungen vulkanischer Actionen auch wieder aufhören, und in dieser Beziehung hat er vollkommen richtig geurtheilt, wenn ich überhaupt mir erlauben darf, über seine Ansicht ein Urtheil auszusprechen, indem seine Studien über die Achatmandeln so sehr umfassende gewesen sind. Seine eigenen Worte darüber habe ich bereits oben angeführt und füge nur noch dem Gesagten eine Stelle aus dem ersten Sendschreiben pag. 12 hinzu: „In manchen grösseren Mandeln kommt in den inneren übrig gebliebenen nicht mit kieseligen oder anderen festen Mineralien erfüllten Räumen eine feine, stark mit Eisenoxydhydrat gemengte und oft ganz daraus bestehende Erde vor. Ich habe diese Erscheinung nicht bloss in den Nahegehenden, sondern auch bei brasilianischen Mandeln beobachtet. Noch andere solcher Mandeln sind mit Wasser erfüllt. Beides halte ich für jüngere Einführungen, nachdem die eigentliche Basaltbildung schon aufgehört hatte. Die ockerige Erde wird aus dem zersetzten Melaphyr entstanden seyn und sie ist mit dem Wasser durch noch offen gebliebene Zuführungskanäle in die Mandeln gelangt. Wenn diese Erklärung, wie sie fast unabweisbar seyn dürfte, richtig ist, so liegt darin auch wohl ein fernerer Beweis, dass die eigentliche Achatbildung einer früheren Epoche angehört, und daher längst zum Abschluss gekommen seyn dürfte.“

In diesem Sinne und unter dieser Beschränkung können wir einen Abschluss der Achatbildung annehmen, welcher mit dem Ende der dritten von mir aufgestellten Periode zusammenfällt, wenn wir überhaupt nur auf einen wirkenden Factor, auf die heissen Quellen, Rücksicht nehmen. Sie sind es gewesen, welche die Hohlräume mit Wasser versahen, welche die verschiedenen Mineralsubstanzen in der beschriebenen Weise absetzten und somit die Achatmandeln bildeten. Ihr Aufhören bedingt nothwendig ein Ende dieser Bildung, darum aber noch nicht ein Ende der Bildung überhaupt, weil ausser ihnen auch andere Factoren der Bildung thätig seyn können und es für die Achatmandeln auch in der That sind. Wollten wir daher mit dem Aufhören der heissen Quellen die Bildung der Achatmandeln geschlossen betrachten, so ist vorerst zu bedenken, dass die Mineralien in den Gebirgsmassen, so wie die Gebirgsmassen selbst in einem Zustande fortdauernder Umbildung begriffen sind und dass die Achatmandeln dieser Art von Bildung auf gleiche Weise unterworfen seyn müssen. Wenn

freilich die Art derselben eine andere ist, als die frühere, weil die wirkenden Factoren sich geändert haben, so ist es für uns kein Grund, den Zustand der Achatmandeln als stabil von da an zu betrachten, wo die heissen Quellen aufgehört haben. Wir dürfen nur beide Perioden unterscheiden und wenn wir die erste durch die heissen Quellen hervorgerufene und mit ihnen andauernde Periode die der Bildung der Achatmandeln nannten, die auf sie folgende als die Periode der Nach- oder Umbildung benennen, weil in ihr entweder noch andere Mineralien in den Achatmandeln als die früheren sich bilden oder die in der ersten Periode gebildeten, Veränderungen erleiden oder beide Zustände gleichzeitig eintreten. Die Erscheinungen dieser Periode sind vielleicht grösser und umfassender als wir glauben, zumal wir nicht immer im Stande sind zu bestimmen, zu welcher Epoche die erste Bildungsperiode ihren Abschluss erreicht habe und durch welche äussere Zeichen dieser Abschluss für uns sichtbar ist.

So wie in der ersten Periode der Mandelbildung die Wasser heisser Quellen wirksam waren und in die Hohlräume die zur Ausfüllung nöthigen Materialien einführten, ist in der Periode der Nach- oder Umbildung das Atmosphärwasser der thätige Factor, welcher eben so, wie die obigen den bis zu einem gewissen Punkte gebildeten Mandeln Materialien zur ferneren Ausfüllung zuführt, dieselben aber im Gegensatz zu den obigen aus der Melaphyrmasse selbst und aus den in ihr befindlichen Achatmandeln entnimmt, weil ein allmählicher Umwandlungs- oder Zersetzungsprocess von oben nach unten durch die Luft und das Atmosphärwasser beginnt und beständig fort dauert. Die Zuführung und Ablagerung wird im Allgemeinen mit der oben geschilderten Aehnlichkeit haben, jedoch wird dabei zu berücksichtigen seyn, dass die Quantitäten bedeutend geringer sind, wodurch der Charakter der Bildung ein verschiedener seyn wird. Dass NOEGGERATH selbst diesem Gedanken nicht ganz fern gewesen seyn dürfte, glaube ich aus seinen eigenen Worten schliessen zu dürfen, wenn er sagt, dass die eigentliche Achatbildung einer früheren Epoche angehört. Liegt darin nicht schon ein Gegensatz ausgesprochen? Dürfte man nicht schon die von ihm angegebenen Absätze ocheriger Substanzen als Beweise einer späteren Bildung annehmen, an die er bereits gedacht, welche er aber nicht des Vergleiches mit der eigentlichen Achatbildung werth gehalten hat. Mag er und andere den Werth dieser Bildungen noch so gering anschlagen, so kann man doch zunächst sie nur als spätere Bildungen anerkennen. Ich glaube jedoch, dass die Producte der Nach- und Umbildungsperiode sich nicht allein auf dergleichen Absätze beschränken, sondern ich bin der Ansicht, dass man in ihren Bereich auch die verschiedenartigen zeolithischen Mineralien zu ziehen habe, welche sich in den Achatmandeln vieler Orte vorfinden. Ihre Elemente sind die des zersetzten Melaphyrs und man kann ihre Bildung aus demselben leicht nachweisen, so wie auch die Art ihres Auftretens in den Mandeln selbst für eine Bildung nach den regelmässigen Ablagerungen und sogar für eine Bildung durch niedersteigende Gebirgsfeuchtigkeit spricht.

Schon die Erfahrung, dass warme und kalte Quellen vulkanischen Ursprungs eine grosse Constanz ihrer Zusammensetzung oder ihres Inhaltes zeigen, spricht dafür, dass

die verschiedenartigen zeolithischen Mineralien im Gegensatz zu den gleichmässigen Ablagerungen von Chalcedon, Quarz und Kalkspath, welche man am häufigsten in den Achatmandeln findet, nicht auf einem Wechsel des Inhaltes der Quellen beruhen. Warum sollten wir gerade für angemessen finden, nachdem man so deutlich zu beobachten im Stande gewesen ist, wie die heissen Quellen, welche die Achatmandeln bildeten, in ihrem Gehalte constant waren und zuletzt auf ein Aufhören und einen längeren Zustand der Ruhe hinweisen, ein Auftreten solcher Quellen anzunehmen, welche in ihrem Gehalte mannigfach wechseln, da es doch am einfachsten ist, die Bildung der zeolithischen und der noch neben ihnen vorkommenden Mineralien in dem niedersteigenden Atmosphärwasser begründet zu suchen. Hierfür spricht auch ausser der Mannigfaltigkeit dieser Mineralien im Gegensatz zu den andern ihnen vorangegangenen die Art ihres Vorkommens, dass sie nämlich oft nur in einzelnen Theilen der Mandeln sich vorfinden, worauf sich auch die Bemerkung v. LEONHARD'S in seinem Lehrbuche der Geognosie und Geologie pag. 42 bezieht, dass, wenn neben den kieseligen Mineralien auch noch andere, wie die zeolithischen vorhanden sind, sich dieselben in krystallinischen Parthien und Krystallen zeigen, dann seltener in der Mitte quarziger Drusen, öfter im obern Theile der Mandeln zusammen vorkommen. Auch die Beobachtung, dass die Grubenwasser dieselben Bestandtheile aufgelöst enthalten, ist ein Beweis, dass die zeolithischen Mineralien durch die in die Felsmassen eindringenden Tagewasser und durch die Zersetzung des Gesteins entstehen. Ihre Einwirkung kann sich selbst schon in einen Theil der Periode erstrecken, in welcher die heissen Quellen noch wirksam sind, so dass wir die Produkte beider Factoren im Innersten der Mandelräume mit einander gemengt finden, wie zuweilen in den Mandeln von Theiss mit dem Datolith innig verwachsene zeolithische Parthien.

Es würden somit als die in die Um- oder Nachbildungsperiode gehörigen Produkte die zeolithischen Mineralien, die Ablagerungen ocheriger und grünerdeartiger Mineralien gehören, ausserdem aber auch die vielfach beobachteten Pseudomorphosen in Achatmandeln verschiedener Orte, deren Bildung sicherlich nicht in die vorangegangene Periode gerechnet werden kann. Auch an den Achatmandeln von Theiss sieht man häufig, wie die aus der Bildungsperiode stammenden Mineralien allmählig durch die niedersteigende Gebirgsfeuchtigkeit fortgeführt werden, indem besonders der Kalkspath die Spuren einer allmählichen Zerstörung durch Wasser an sich trägt. Als eine Folge der allmählichen Auflösung und Wegführung kann man es auch ansehen, dass man oft, namentlich in den oberen Theilen der Melaphyrmasse leere Mandeln findet, ohne dass dadurch ausgesprochen ist, dass alle hohle Mandeln die Folge einer Entleerung sind. Wo nur Hohlräume mit zeolithischen Mineralien erfüllt sind, wie es besonders in den Basalten der Fall ist, lassen sich die Einwirkungen aufsteigender Wasser nicht erkennen und letztere sich mit Wahrscheinlichkeit absprechen; in ihnen sind dann nur die niedersteigenden Wasser, verbunden mit einer allmählichen Zersetzung des Gesteins verbunden gewesen, wesshalb man bei ihnen in der Regel zunächst den Wandungen rin-

denförmige Ablagerungen grünerdeartiger Substanzen und dann die Krystalle zeolithischer Mineralien findet, eine Bildung, wie sie in den Achatmandeln der Melaphyre erst nach dem Aufhören der heissen Quellen eintritt.

Dass aber nothwendig die Bildung der Achatmandeln in den Melaphyren, wie ich zu zeigen versucht habe, zwei bestimmt verschiedene Perioden erfordert, glaube ich mit fester Ueberzeugung aussprechen zu können und wir können demnach die Bildung der Achatmandeln nicht als vollständig abgeschlossen betrachten, wenn wir in ihnen Vorgänge anzunehmen gezwungen sind, welche auch in der jetzigen Zeit fort dauern. Die Erscheinungen der zweiten Periode im Gegensatz zu denen der ersten, der eigentlichen Achatbildung, tragen vorzugsweise den Stempel der grössten Mannigfaltigkeit an sich und alle in sie gehörigen Produkte, mögen die eingeführten Mineralien ocheriger und erdiger Natur seyn, oder die schönsten Krystalle, bilden in ihrer Summe die Mandeln. Ihre Produkte, welche oft den Keim der nothwendigen Vergänglichkeit von ihrem Ursprunge an in sich haben, sind nur ein geringes Gegenstück zu den grossartigsten Beweisen fort dauernder Umänderungen in den Gebirgsmassen.

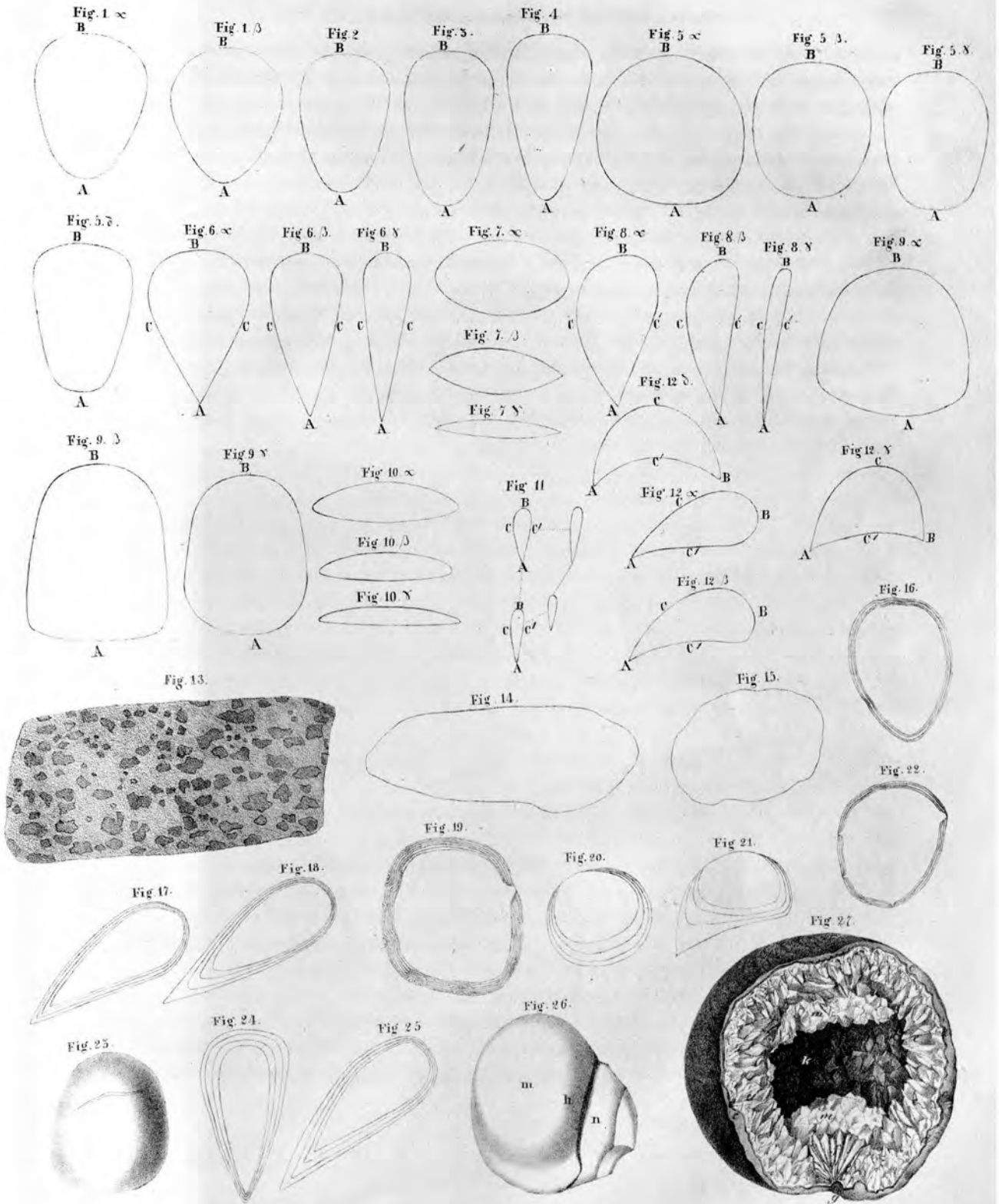


Fig. 1.

Fig. 4.

Fig. 5.

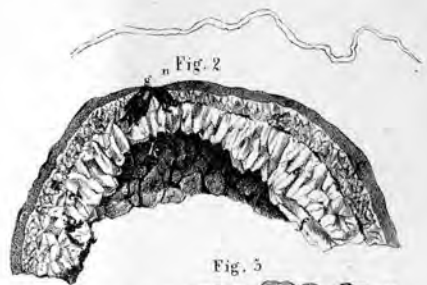


Fig. 3.



Fig. 7.

Fig. 8.



Fig. 10.



Fig. 9.



Fig. 11.



Fig. 12.

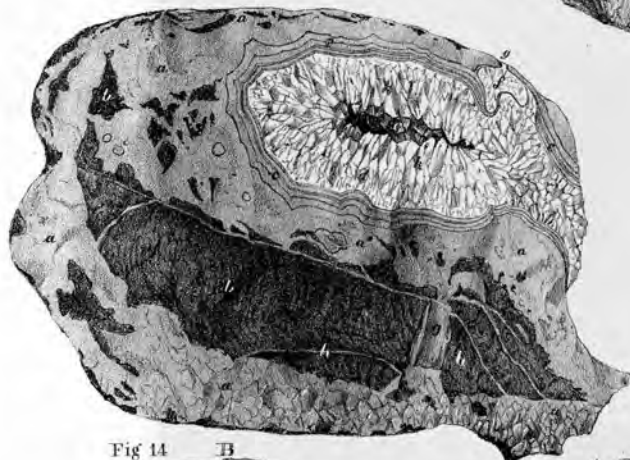


Fig. 14.

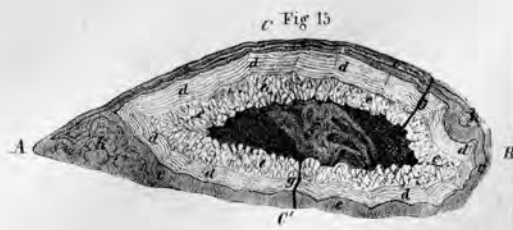
Fig. 15.



A



Fig. 16.



I. Skizzen aus dem Gebiete der höheren Gleichungen.

Von

Simon Spitzer.

Mitgetheilt am 26. April 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Ich wage es, Skizzen meiner Arbeiten hier nieder zu legen. Die beiden früheren Mittheilungen in dem III. Bande der naturwissenschaftlichen Abhandlungen, Abth. 2, S. 109 und 143, sollen die Anfänge bilden, diese die erste Fortsetzung. — Ich habe hier Manches allgemeiner, Manches strenger aufgefasst, als in den früheren Aufsätzen, auch manches Neue hinzugefügt. — Möge der freundliche Leser es nachsichtig beurtheilen.

1.

Geometrisches Bild der binomischen Gleichungen:

$$z = u^n - 1.$$

Ich setze $u = x + y\sqrt[n]{-1}$, und erhalte alsdann:

$$z = x^n - 1 - \binom{n}{2} y^2 x^{n-2} + \binom{n}{4} y^4 x^{n-4} - \dots$$
$$y \left\{ \binom{n}{1} x^{n-1} - \binom{n}{3} y^2 x^{n-3} + \binom{n}{5} y^4 x^{n-5} - \dots \right\} = 0.$$

Die letzte Gleichung wird Null für:

$$y = 0, \quad y = x \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \quad y = x \operatorname{tg} 2 \cdot \frac{180^\circ}{n}, \dots y = x \operatorname{tg} (n-1) \cdot \frac{180^\circ}{n},$$

wovon man sich durch unmittelbares Substituiren leicht überzeugen kann, denn setzt man $y = x \operatorname{tg} m \cdot \frac{180^\circ}{n}$, so geht sie über in:

$$x^n \left\{ \binom{n}{1} \operatorname{tg} m \cdot \frac{180^\circ}{n} - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 m \cdot \frac{180^\circ}{n} + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 m \cdot \frac{180^\circ}{n} - \dots \right\} = 0,$$

oder, wenn man die Gleichung mit $\cos^n m \cdot \frac{180^\circ}{n}$ multiplicirt, in:

$$x^n \left\{ \binom{n}{1} \cos^{n-1} m \cdot \frac{180^\circ}{n} \sin m \cdot \frac{180^\circ}{n} - \binom{n}{3} \cos^{n-3} m \cdot \frac{180^\circ}{n} \sin^3 m \cdot \frac{180^\circ}{n} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{5} \cos^{n-5} m \cdot \frac{180^\circ}{n} \sin^5 m \cdot \frac{180^\circ}{n} - \dots \right\} = 0.$$

Allein, der in Klammern stehende Ausdruck ist nichts anders als $\sin n \left(m \cdot \frac{180^\circ}{n} \right)$ oder $\sin m \cdot 180^\circ$, d. h. gleich Null, also wird wirklich die letzte Gleichung für $y = x \operatorname{tg} m \cdot \frac{180^\circ}{n}$ befriedigt.

Hiefür wird aber die erste Gleichung

$$z = -1 + x^n - \binom{n}{2} x^n \operatorname{tg}^2 m \cdot \frac{180^\circ}{n} + \binom{n}{4} x^n \operatorname{tg}^4 m \cdot \frac{180^\circ}{n} - \dots$$

oder

$$z = -1 + \frac{x^n}{\cos^n m \cdot \frac{180^\circ}{n}} \left\{ \cos^n m \cdot \frac{180^\circ}{n} - \binom{n}{2} \cos^{n-2} m \cdot \frac{180^\circ}{n} \sin^2 m \cdot \frac{180^\circ}{n} + \dots \right\}$$

oder

$$z = -1 + \frac{x^n}{\cos^n m \cdot \frac{180^\circ}{n}} \cos m \cdot 180^\circ,$$

oder endlich für:

$$y = x \operatorname{tg} m \cdot \frac{180^\circ}{n}; \quad z = -1 + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{\cos^n m \cdot \frac{180^\circ}{n}} \quad (1)$$

Man hat daher folgende Systeme von Gleichungen:

$$z = -1 + x^n, \quad z = -1 + \frac{x^n}{\cos^n \cdot \frac{180^\circ}{n}}, \quad z = -1 + \frac{x^n}{\cos^n 2 \cdot \frac{180^\circ}{n}}, \quad z = -1 + \frac{x^n}{\cos^n 3 \cdot \frac{180^\circ}{n}} \quad (2)$$

$$y = 0, \quad y = x \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \quad y = x \operatorname{tg} 2 \cdot \frac{180^\circ}{n}, \quad y = x \operatorname{tg} 3 \cdot \frac{180^\circ}{n}$$

u. s. f. die durchgehends ebenen Curven entsprechen, und zwar n an der Zahl. Alle diese Gleichungen leisten der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^n = (1 + z)^2 \quad (3)$$

Genüge, man kann daher statt der Gleichungen (1) auch folgende zwei Gleichungen aufstellen:

$$y = x \operatorname{tg} m \cdot \frac{180^\circ}{n}, \quad (x^2 + y^2)^n = (1 + z)^2 \quad (4)$$

und diese sagen uns, dass alle die Curven (2) Meridiane einer Rotationsfläche sind, deren Gleichung (3) ist. Wird das Curvensystem (4) durch die Ebene $z = \alpha - 1$ geschnitten, so erhält man für die Durchschnittspunkte die Orte der n Wurzeln von $u^n = \alpha$.

2.

Geometrischer Ort der symmetrischen Functionen der Wurzeln.

Es sey

$$1) \quad z = u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \dots + A_{n-1} u + A_n$$

die Gleichung eines Systemes von Curven, und

$$z = \alpha$$

die Gleichung einer Ebene, welche nothwendigerweise das System der durch 1) vorgestellten Curven in n Punkten schneidet, weil die Gleichung

$$2) \quad \alpha = u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \dots + A_{n-1} u + A_n,$$

n Wurzeln hat. Sie seyen:

$$u_1 = x_1 + y_1 \sqrt{-1}$$

$$u_2 = x_2 + y_2 \sqrt{-1}$$

$$\dots$$

$$u_n = x_n + y_n \sqrt{-1}$$

und führen geometrisch construirt zu den Durchschnittspunkten des Curvensystemes (1) mit der Ebene $z = \alpha$. Würde ich in derselben Ebene einen Punkt suchen, dessen u (der reelle Theil desselben ist x, der imaginäre das y) gleich $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ist, so könnte ich denselben finden, ohne noch die Wurzeln u_1, u_2, \dots, u_n selbst zu kennen, da ja ihre Summe gleich $-A_1$ ist.

Nun betrachte ich dasselbe Curvensystem (1) durch die Ebene $z = \alpha'$ geschnitten, dadurch werden die Wurzeln der Gleichung:

$$3) \quad \alpha' = u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \dots + A_{n-1} u + A_n$$

anders seyn, etwa

$$u_1 = x'_1 + y'_1 \sqrt{-1}$$

$$u_2 = x'_2 + y'_2 \sqrt{-1}$$

$$\dots$$

$$u_n = x'_n + y'_n \sqrt{-1}$$

und somit wird auch die Ebene $z = \alpha'$ in n Punkten geschnitten, die aber andere Abscissen und andere Ordinaten haben, als die in der Ebene $z = \alpha$ sich befindenden Durchschnittspunkte. — Allein, wenn ich in $z = \alpha'$ einen Punkt suchen würde, dessen u gleich $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ist, so würde ich wieder finden $u = -A_1$.

Für $z = \alpha''$, $z = \alpha'''$, ... folgt dasselbe, somit ist $u = -A_1$ die Gleichung einer, mit der Axe der z parallelen Geraden, die von den Ebenen $z = \text{Const.}$ in solchen Punkten geschnitten wird, dass deren u stets die Summe der u ist, die den Durchschnittspunkten derselben Ebene mit dem Curvensysteme 1) zukommen.

Genau dasselbe liesse sich sagen für einen Punkt, dessen u gleich dem nten Theile der Summe der u's der Durchschnittspunkte ist, woraus folgt, dass $u = -\frac{A_1}{n}$ die Gleichung einer mit der Axe der z parallelen Geraden ist, die von den Ebenen $z = \text{Const.}$ in Punkten geschnitten wird, die die Schwerpunkte sind, von den Durchschnittspunkten derselben Ebene mit dem Curvensystem (1). Für Curven 3ten Grades lässt sich hieraus folgender Satz ableiten. Ist nämlich:

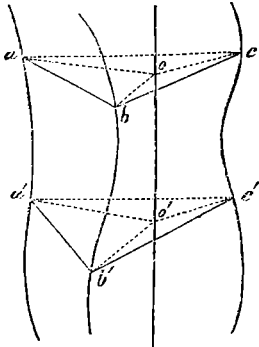
$$z = u^3 + (a_1 + b_1 \sqrt{-1}) u^2 + (a_2 + b_2 \sqrt{-1}) u + (a_3 + b_3 \sqrt{-1}),$$

so ist die Gleichung der letzt erwähnten Geraden

$$u = -\frac{1}{3}(a_1 + b_1 \sqrt{-1}),$$

oder wenn statt u, $x + y \sqrt{-1}$ geschrieben wird:

$$x = -\frac{a_1}{3}, \quad y = -\frac{b_1}{3}.$$



Eine Ebene $z = \alpha$ schneide das System der Curven in den Punkten a, b, c und die Gerade in O . Die drei Dreiecke aob, boc, coa sind stets von gleicher Fläche, wie immer auch α ist. Lassen wir dem z alle Werthe zwischen 0 und O' zukommen, so wird jedes der genannten Dreiecke einen bestimmten Raum durchlaufen, und alle diese drei durchlaufenen Räume sind von demselben Inhalte.

Gehen wir nun weiter in der Untersuchung der Eigenschaften unseres Systemes, der durch die Gleichung

$$1) \quad z = u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \dots + A_{n-1} u + A_n$$

repräsentirten Curven. — Würden wir in der Ebene $z = \alpha$ einen Punkt suchen, dessen $u = u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{n-1} u_n$ ist, so wäre es gleich A_2 , und diess findet statt, unabhängig von α , somit ist wieder $u = A_2$ die Gleichung einer, mit der z Axe parallelen Geraden, die von der Ebene $z = \text{Const.}$ in Punkten geschnitten wird, deren u stets gleich ist $u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{n-1} u_n$, und wo, wie schon gesagt, $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ die Coordinaten der jedesmaligen Durchschnittspunkte repräsentiren.

Genau dasselbe findet statt, wenn wir in der Ebene $z = \alpha$ einen Punkt suchen, dessen u irgend eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung 1) ist, wenn nur die Ordnungszahl derselben kleiner als n ist, es sind nämlich alsdann immer diese Punkte in einer mit der z Axe parallelen Geraden. — Sobald aber ein Punkt gesucht wird, dessen u eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung von der Ordnung n ist, z. B. u gleich dem Producte aller Wurzeln, also $u = u_1 u_2 u_3 \dots u_n$, so hat man:

$$u = \pm A_n - z,$$

was die Gleichung einer Geraden ist, die auf der Ebene xy schief steht. Setzt man statt $\pm A_n$, $a + b\sqrt{-1}$, statt u , $x + y\sqrt{-1}$, und sondert die reellen und imaginären Glieder, so erhält man:

$$x = \alpha - z, \quad y = \beta.$$

So lange die Ordnungszahl der symmetrischen Function inclusive zwischen n und $2n - 1$ liegt, erhält man im Allgemeinen eine schiefe Gerade, wird aber die Ordnungszahl grösser als $2n - 1$, bleibt sie aber kleiner als $3n$, so werden die Gleichungen zwischen x, y, z vom 2ten Grade seyn, daher der Ort solcher Punkte eine Curve zweiten Grades und allgemein: Der geometrische Ort der Punkte, deren u irgend eine symmetrische Function der u 's der Durchschnittspunkte ist, ist eine Curve m ten Grades, wenn die Ordnungszahl der symmetrischen Function inclusive zwischen mn und $(m+1)n - 1$ liegt.

3.

Erweiterung der Theorie des Grössten und des Kleinsten.

1. Bei Gleichungen mit Einer Unbekannten.

Sey $z=f(u)$ die Gleichung eines Systemes von Curven; durch Substitution von $u = x + y\sqrt{-1}$ erhalten wir:

$$z = f(x) - \frac{y^2}{2} f''(x) + \frac{y^4}{24} f^{(4)}(x) - \dots$$

$$y \left\{ f'(x) - \frac{y^2}{6} f'''(x) + \frac{y^4}{120} f^{(5)}(x) - \dots \right\} = 0$$

als Gleichungen derselben.

Die Gleichungen der Berührungslinie am Punkte x, y, z sind:

$$\zeta - z = (\xi - x) \left[f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \frac{y^4}{24} f^{(5)}(x) - \dots \right]$$

$$- (\eta - y) \left[y f''(x) - \frac{y^3}{6} f^{(4)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(6)}(x) - \dots \right]$$

$$(\xi - x) \left[y f''(x) - \frac{y^3}{6} f^{(4)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(6)}(x) - \dots \right]$$

$$+ (\eta - y) \left[f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \frac{y^4}{24} f^{(5)}(x) - \dots \right] = 0,$$

oder abkürzend geschrieben:

$$\zeta - z = (\xi - x) P - (\eta - y) Q$$

$$(\xi - x) Q + (\eta - y) P = 0,$$

wo

$$P = f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \frac{y^4}{24} f^{(5)}(x) - \dots$$

$$Q = y f''(x) - \frac{y^3}{6} f^{(4)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(6)}(x) - \dots$$

ist, und ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten der Berührungslinie bezeichnen. Diese Tangente mache mit den drei Axen die Winkel α, β, γ , die nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie aus den Gleichungen:

$$\cos^2 \alpha = \frac{P^2}{(P^2 + Q^2)(1 + P^2 + Q^2)}, \quad \cos^2 \beta = \frac{Q^2}{(P^2 + Q^2)(1 + P^2 + Q^2)}; \quad \cos^2 \gamma = \frac{P^2 + Q^2}{1 + P^2 + Q^2}$$

bestimmt werden. Nun weiss man, dass für jene höchsten und tiefsten Punkte der Curve, wo keine Unterbrechung der Stätigkeit stattfindet, die Tangente horizontal, also $\gamma=90^\circ$, und diess findet statt, wenn $P=0$ und $Q=0$ ist. Ist für gewisse Punkte der Haupt- oder conjugirten Curven $P=0, Q=0$, so folgt aber hieraus noch nicht, dass sie schon höchste oder tiefste seyn müssen, sie könnten ja auch bloss Wendepunkte seyn.

Wir wollen nun die Bedingungen aufsuchen, die noch stattfinden müssen, wenn Punkte der Curve, für die $P=0$ und $Q=0$ ist, höchste oder tiefste seyn sollen. Geben $x + y\sqrt{-1}$ die horizontale Projection eines solchen Punktes, z seine Höhe, oder was

dasselbe ist, x sey die Abscisse, y die Ordinate und z die dritte Coordinate dieses Punktes. — Für den nächsten Punkt dieser Curve sey das x in $x + \xi$, das y in $y + \eta$, das z in z' übergegangen, wo ξ und η kleine, von einander abhängige Zuwächse bedeuten, und daher ist:

$$z' = f[(x+y\sqrt{-1}) + (\xi+\eta\sqrt{-1})],$$

und wenn man entwickelt:

$$z' = f(x+y\sqrt{-1}) + (\xi+\eta\sqrt{-1})f'(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{6}(\xi+\eta\sqrt{-1})^3 f'''(x+y\sqrt{-1}) + \dots$$

oder

$$z' - z = (\xi + \eta\sqrt{-1}) f'(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}(\xi + \eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{6}(\xi + \eta\sqrt{-1})^3 f'''(x+y\sqrt{-1}) + \dots$$

Es ist aber $f'(x+y\sqrt{-1})$ nichts anders als $P + Q\sqrt{-1}$, mithin Null, da $P = 0$ und $Q = 0$ ist, daher hat man:

$$z' - z = \frac{1}{2}(\xi + \eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{6}(\xi + \eta\sqrt{-1})^3 f'''(x+y\sqrt{-1}) + \dots$$

und nun betrachten wir das Glied $\frac{1}{2}(\xi + \eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1})$, weil diess als das prädominirende das Zeichen von $z' - z$ bestimmt. Der imaginäre Theil desselben ist entweder für sich der Nulle gleich, oder wenn nicht, so tilgt er sich mit den andern imaginären Gliedern rechter Hand, da $z' - z$ reel ist. Ist der reelle Theil von $\frac{1}{2}(\xi + \eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1})$ für beliebig gewählte ξ positiv, so hat man ein Minimum, ist er negativ, so hat man ein Maximum.

Beispiel. Man suche die Maximum- und Minimum-Werthe von

$$1) \quad z = u^4 - 4u^3 + 14u^2 - 20u + 12.$$

Die abgeleitete Gleichung ist:

$$2) \quad 4u^3 - 12u^2 + 28u - 20 = 0$$

und sie hat die Wurzeln $u = 1$, $u = 1 + 2\sqrt{-1}$, $u = 1 - 2\sqrt{-1}$, die durchgehends das z reel machen, und zwar der Ordnung nach 3, -13 , -13 . — Die Gleichung 1) zerfällt für $u = x + y\sqrt{-1}$ in folgende Systeme von Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} z = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 12 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} z = 3 - 8y^2 + y^4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} z = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 12 - y^2(6x^2 + 12x + 14) + y^4 \\ y^2 = x^2 - 2x + 5 \end{cases}$$

Untersuchen wir nun, ob die Punkte, die die Coordinaten

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -13 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -13 \end{cases}$$

haben, höchste oder tiefste sind.

Die durch die Gleichungen (1) gegebene Curve kann bloss durch den von den drei Punkten gehen, dessen Coordinaten $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$ sind. — Für diese Curve ist

$n=0$, weil alle Punkte derselben in der Ebene $y=0$ liegen, und $f'(u) = 12u^2 - 24u + 28$ wird hierfür 16, also ist $(\xi + n\sqrt{-1})^2 f''(u) = 16\xi^2$, also für jedes ξ positiv, daher ist dieser in (1) liegende Punkt ein tiefster.

Den Gleichungen (2) leisten die Coordinaten aller drei Punkte Genüge — für alle Punkte dieser Curve ist $\xi=0$, weil die Curve in der Ebene $x=1$ liegt, ferner ist für $x=1, y=0, z=3, f''(u)=16, \frac{1}{4}(\xi+n\sqrt{-1})^2 f''(u) = -8n^2$, dah. dies ein höchst. Pkt. $x=1, y=+2, z=-13, f''(u)=-32, \frac{1}{4}(\xi+n\sqrt{-1})^2 f''(u) = 16n^2$ „ „ „ tiefst. „ $x=1, y=-2, z=-13, f''(u)=-32, \frac{1}{4}(\xi+n\sqrt{-1})^2 f''(u) = 16n^2$ „ „ „ „ „

Den Gleichungen (3) entsprechen bloss die zwei Punkte:

$$\begin{array}{ll} x = 1 & x = 1 \\ y = 2 & y = -2 \\ z = -13 & z = -13 \end{array}$$

Für $x=1, y=2, z=-13$ ist $f''(u) = -32, \frac{1}{4}(\xi+n\sqrt{-1})^2 f''(u) = -16(\xi^2 - n^2 + 2\xi n\sqrt{-1})$. Man hat daher zu sehen, wie das Zeichen von $\xi^2 - n^2$ beschaffen ist. — Die Gleichung der horizontalen Projectionen der Curve (3) ist: $y^2 = x^2 - 2x + 5$, setzt man in sie statt $x=1+\xi$, statt $y=2+n$, so ist: $\xi^2 = n^2 + 4n$, daher $n = -2 + \sqrt{4 + \xi^2}$ (weil n als kleine Zahl nicht $-2 - \sqrt{4 + \xi^2}$ gleich seyn kann), und folglich der reelle Theil von $\frac{1}{4}(\xi+n\sqrt{-1})^2 f''(u)$ gleich $-16 \cdot 4n = -64(-2 + \sqrt{4 + \xi^2})$, d. i. negativ, wie ξ auch beschaffen ist, also dieser Punkt ein höchster. — Eben so zeigt sich, dass der andere Punkt ein höchster ist.

4.

Die Winkel, die die Tangente der höchsten oder tiefsten Punkte mit den beiden Axen der x und der y macht, werden gefunden, wie schon früher bemerkt, aus den Gleichungen:

$$\cos^2 \alpha = \frac{P^2}{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)}, \quad \cos^2 \beta = \frac{Q^2}{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)},$$

wo $P=0$ und $Q=0$ ist. Es erscheinen daher $\cos^2 \alpha$ und $\cos^2 \beta$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Wir wollen, anstatt sie zu bestimmen, vielmehr die Tangente des Winkels berechnen, den diese horizontale Berührungslinie mit der Axe der x macht. Diese ist

gegeben durch $\frac{dy}{dx}$, und wird gefunden, wenn man die Gleichung der horizontalen Projection der Curven, nämlich:

$$y \left\{ f'(x) - \frac{y^2}{2 \cdot 3} f'''(x) + \frac{y^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f^{(5)}(x) - \dots \right\} = 0$$

differenzirt. Man erhält hierdurch die Gleichung:

$$(1) \quad Q + P \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

die sich in $0+0 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ verwandelt, woraus man natürlich für $\frac{dy}{dx}$ keinen Werth ziehen kann. Differenzirt man aber die Gleichung (1) nochmals, und setzt der Kürze halber:

$$P' = f''(x) - \frac{y^2}{2} f^{(5)}(x) + \frac{y^4}{24} f^{(6)}(x) - \dots$$

$$Q' = y f'''(x) - \frac{y^3}{6} f^{(6)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(7)}(x) - \dots$$

so ist:

$$Q' + P' \frac{dy}{dx} + P \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} (P' - Q' \frac{dy}{dx}) = 0$$

oder, wenn man ordnet, und berücksichtigt, dass $P = 0$ ist,

$$2) \quad Q' + 2P' \frac{dy}{dx} - Q' \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

woraus für $\frac{dy}{dx}$, d. h. für die Tangente des Winkels, der die Berührungslinie mit der Axe der x macht, stets zwei reelle Werthe folgen, die, wenn man sie mit a und a_1 bezeichnet, der Gleichung

$$1 + aa' = 0$$

genügen, und daher anzeigen, dass an denjenigen Punkten der Curven, für die $P = 0$, $Q = 0$ und nicht zugleich $P' = 0$, $Q' = 0$ sind, es zwei Berührungslinien gibt, die aufeinander senkrecht stehen. Wäre aber auch $P' = 0$, $Q' = 0$, so müsste man (2) differenziren, wodurch man für $\frac{dy}{dx}$ eine Gleichung 3ten Grades erhielte, die, wenn man:

$$P'' = f'''(x) - \frac{y^2}{2} f^{(6)}(x) + \frac{y^4}{24} f^{(7)}(x) - \dots$$

$$Q'' = y f^{(4)}(x) - \frac{y^3}{6} f^{(6)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(7)}(x) - \dots$$

setzen würde, folgende Form hätte:

$$Q'' + P'' \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} (P'' - Q'' \frac{dy}{dx}) - \frac{dy^2}{dx^2} (Q'' + P'' \frac{dy}{dx}) = 0,$$

oder reducirt:

$$Q'' + 3P'' \frac{dy}{dx} - 3Q'' \frac{dy^2}{dx^2} - P'' \frac{dy^3}{dx^3} = 0.$$

Sie hat, wenn nicht $P'' = 0$ und $Q'' = 0$ ist, stets drei reelle Wurzeln, und deutet daher auf ein Durchschneiden dreier Curvenzweige hin.

Zwei sehr einfache Sätze ergeben sich aus blosser Betrachtung der Curven:

1) Wenn $u = x_1 + y_1 \sqrt{-1}$ und $u = x_2 + y_2 \sqrt{-1}$ Wurzeln einer Gleichung sind, die von einem und demselben Curvenzweig herrühren, so gibt es wenigstens einen

höchsten oder tiefsten Punkt, dessen Coordinaten zwischen $x_1 + y_1\sqrt{-1}$ und $x_2 + y_2\sqrt{-1}$ liegen *).

2) Wenn $u = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ die Coordinaten zweier tiefsten Punkte sind, so sind sie zugleich die Coordinaten zweier höchsten Punkte von andern, aus derselben Gleichung hervorgehenden Curvenzweigen.

3) Hat die Hauptcurve m tiefste Punkte über der xy Ebene, und n höchste Punkte unter der xy Ebene, so hat die vorgelegte Gleichung wenigstens $m + n$ Paare conjugirter imaginärer Wurzeln.

2. Bei Systemen von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

5.

Ich habe bei der Aufsuchung der reellen Wurzeln höherer Gleichungen mit zwei Unbekannten $\varphi(x, y) = 0, \psi(x, y) = 0$ folgenden Weg eingeschlagen: Ich setzte:

$$z = \varphi(x, y), \quad \psi(x, y) = 0,$$

gab dem x der Reihe nach verschiedene Werthe, suchte aus $\psi(x, y) = 0$ die entsprechenden Werthe von y , und bestimmte alsdann das z . Aenderte z sein Zeichen für zwei Systeme von Substitutionen, die einem und demselben Curvenzweig angehörten, so schloss ich auf dazwischen liegende Wurzelwerthe.

Bestimmen wir jetzt die höchsten und tiefsten Punkte dieses Curvensystemes. Es sind die Gleichungen der Tangente am Punkte xyz

$$\zeta - z = \frac{d\varphi}{dx}(\xi - x) + \frac{d\varphi}{dy}(\eta - y)$$

$$0 = \frac{d\psi}{dx}(\xi - x) + \frac{d\psi}{dy}(\eta - y).$$

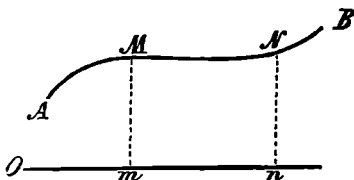
Die Tangente mache mit der Ebene xy den Winkel γ , der sich bestimmen lässt aus:

$$\cos^2 \gamma = \frac{\left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}$$

Für die höchsten und tiefsten Punkte muss

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} = 0$$

*) Ist AB die horizontale Projection eines Curvenzweiges, habe M die Coordinaten x_1, y_1 , und N die Coordinaten x_2, y_2 , so sage ich: Jeder Punkt in der Curve AB zwischen den Punkten M und N habe Coordinaten, die zwischen $x_1 + y_1\sqrt{-1}$ und $x_2 + y_2\sqrt{-1}$ liegen.



seyn. — Es kann nun der Fall eintreten, dass dieser Ausdruck identisch Null ist. Untersuchen wir, was unter diesen Umständen stattfindet. Aus der letzten Gleichung hat man:

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}} = f(x, y) ; \quad \frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}} = f(x, y).$$

Das sind partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung, die integrirt zeigen, dass sowohl $\varphi(x, y)$ als $\psi(x, y)$ bestimmte Functionen einer und derselben Function $F(x, y)$ sind, wo $F(x, y) = 0$ das Integrale des vollständigen Differentials

$$f(x, y) dx + dy = 0$$

ist. Es können daher die beiden gegebenen Gleichungen

$$z = \varphi(x, y), \quad \psi(x, y) = 0$$

unter die Form

$$z = \omega(F(x, y)), \quad \chi(F(x, y)) = 0$$

gebracht werden. Bestimmt man aus der letzten Gleichung $F(x, y)$, so findet man dafür constante Werthe, etwa $F(x, y) = a$, $F(x, y) = b$, $F(x, y) = c, \dots$ die in der ersten Gleichung substituirt

$$z = A, \quad z = B, \quad z = C, \dots$$

geben, daher ist das vorgelegte System von Gleichungen gleichbedeutend mit

$$\begin{array}{ccc} z = A & z = B & z = C \\ F(x, y) = a & F(x, y) = b & F(x, y) = c \end{array} \quad \text{u. s. f.}$$

und das sind die Gleichungen einer Reihe von Curven, die entweder in der xy Ebene, oder in, mit der xy parallelen Ebenen liegen. Im ersten Falle hat man unendlich viele Auflösungen, im zweiten gar keine; oder mit andern Worten, im ersten Falle sind die beiden Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ von einander nicht wesentlich verschieden, im zweiten aber widersprechen sie sich.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

1) Es seyen:

$$\varphi(x, y) = y^3 + y^2(6x - 7) + y(12x^2 - 28x + 5) + 3x^3 - 28x^2 + 10x + 4$$

$$\psi(x, y) = y^2 + 4y(x + 1) + 4x^2 + 8x - 5.$$

Um die höchsten oder tiefsten Punkte zu bestimmen, berechne ich:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\varphi}{dx} = 6y^2 + 4y(6x - 7) + 2(12x^2 - 28x + 5) \\ \frac{d\varphi}{dy} = 3y^2 + 2y(6x - 7) + 12x^2 - 28x + 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{d\psi}{dx} = 4y + 8(x + 1) \\ \frac{d\psi}{dy} = 2y + 4(x + 1). \end{array}$$

Man sieht auf den ersten Blick, dass $\frac{d\varphi}{dx} = 2 \cdot \frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\psi}{dx} = 2 \cdot \frac{d\psi}{dy}$ ist, daher

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

also liegen alle Punkte gleich hoch, oder auch $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ sind Functionen von $y+2x$, da das Integral von $f(x, y)dx+dy=0$, $y+2x=Const.$ ist. Ordnet man daher sowohl $\varphi(x, y)$ als $\psi(x, y)$ nach den Potenzen von $y+2x$, was man, analog dem Verfahren, das Professor SCHULZ VON STRASSNITZKI anwandte*), sehr leicht durch fortgesetztes dividiren von $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ und ihren Quotienten erzweckt, so hat man:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= (y+2x)[y^2+y(4x-7)+4x^2-14x+5]+4 \\ y^2+y(4x-7)+4x^2-14x+5 &= (y+2x)[y+2x-7]+5.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(1) \quad \varphi(x, y) = (y+2x)^2 - 7(y+2x) + 5(y+2x) + 4.$$

Ferner hat man:

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= (y+2x)[y+2x+4]-5, \text{ oder} \\ (2) \quad \psi(x, y) &= (y+2x)^2 + 4(y+2x) - 5.\end{aligned}$$

Die Gleichung $\varphi(x, y)=0$ gibt für $y+2x$ drei constante Werthe a_1, a_2, a_3 , und die Gleichung $\psi(x, y)=0$ gibt für $y+2x$ zwei constante Werthe b_1, b_2 , daher sind diese Gleichungen gleichbedeutend mit folgendem Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned}y+2x=a_1, \quad y+2x=a_2, \quad y+2x=a_3, \quad y+2x=a_1, \quad y+2x=a_2, \quad y+2x=a_3 \\ y+2x=b_1, \quad y+2x=b_1, \quad y+2x=b_1, \quad y+2x=b_2, \quad y+2x=b_2, \quad y+2x=b_2.\end{aligned}$$

2. Es seyen:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= x^6 - 2x^4y - 4x^3y^2 + x^2y^2 + 4xy^3 + 4y^4 - 5x^3 + 5xy + 10y^2 - 9 \\ \psi(x, y) &= x^6 - 2x^4y - 4x^3y^2 + x^2y^2 + 4xy^3 + 4y^4 + 9x^3 - 9xy - 18y^2 + 5.\end{aligned}$$

Bildet man $\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\psi}{dx}$, so findet man es identisch gleich Null, daher sind alle

Punkte des Curvensystemes $z = \varphi(x, y), \psi(x, y) = 0$ gleich hoch. — Bevor man die Gleichung

$$(1) \quad \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}} dx + dy = 0$$

integriert, wird man nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Masses untersuchen, ob Zähler und Nenner des Bruches einen gemeinschaftlichen Factor besitzen. — Man hat:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} &= 6x^5 - 8x^3y - 3x^2(4y^2+5) + 2xy^2 + 4y^3 + 5y \\ \frac{d\varphi}{dy} &= -2x^4 - 8x^3y + 2x^2y + x(12y^2+5) + 16y^3 + 20y \\ \frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\varphi}{dy} &= -3x + 12y + \frac{y(48y-1)(2x^3-2xy-4y^2-5)}{\frac{d\varphi}{dy}} \\ \frac{d\varphi}{dy} : (2x^3-2xy+4y^2-5) &= -x - 4y.\end{aligned}$$

Man kann daher statt der Differentialgleichung (1) schreiben:

*) Grundlehren der Analysis, zweites Kapitel.

$$\frac{3x^2 - y}{-x - 4y} dx + dy = 0.$$

Dieses vollständige Differential gibt integrirt

$$F(x, y) = x^3 - xy - 2y^2,$$

und nach diesem Ausdrucke muss sich nun $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ ordnen lassen. Man hat nämlich:

$$\varphi(x, y) = (x^3 - xy - 2y^2)^2 - 5(x^3 - xy - 2y^2) - 9$$

$$\psi(x, y) = (x^3 - xy - 2y^2)^2 + 9(x^3 - xy - 2y^2) + 5.$$

Sowohl aus $\varphi(x, y) = 0$, als auch aus $\psi(x, y) = 0$ findet man zwei Werthe für $x^3 - xy - 2y^2$, seyen sie a_1, a_2, b_1, b_2 , so lassen sich die zwei vorgelegten Gleichungen in folgende vier Systeme von Gleichungen zerlegen:

$$\begin{array}{cccc} x^3 - xy - 2y^2 = a_1 & x^3 - xy - 2y^2 = a_2 & x^3 - xy - 2y^2 = a_1 & x^3 - xy - 2y^2 = a_2 \\ x^3 - xy - 2y^2 = b_1 & x^3 - xy - 2y^2 = b_1 & x^3 - xy - 2y^2 = b_2 & x^3 - xy - 2y^2 = b_2 \end{array}$$

die daher alle sich widersprechen:

Die Untersuchung, ob ein System zweier höherer Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ zusammen bestehen kann, oder nicht, ist durch diess äusserst einfach. Man bilde sich bloss den Ausdruck

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\psi}{dx}$$

und sehe ob er identisch Null ist, oder nicht. Ist er identisch Null, so sind die beiden vorgelegten Gleichungen entweder nicht wesentlich von einander verschieden, oder sie widersprechen sich. — Ist dieser Ausdruck einer Constante gleich, so gibt es gar keinen höchsten oder tiefsten Punkt, ist er gleich einer reinen Function von x , so kann es höchstens in der Ebene xz Maxima- und Minimapunkte geben u. s. w.

6.

Ich versuchte diese Darstellung eines Systems zweier höherer Gleichungen mit zwei Unbekannten zu vervollständigen, um nicht nur die reellen, sondern auch die imaginären Wurzeln zur bildlichen Ansicht zu bringen.

Sind nämlich $\varphi(u, v) = 0$, $\psi(u, v) = 0$ die vorgelegten Gleichungen, so setze man $u = x + y\sqrt{-1}$, wo x beliebig ist, y aber noch zu unserer Disposition steht. Aus der ersten Gleichung würde hieraus $v = z + \zeta\sqrt{-1}$, aus der zweiten $z' + \xi'\sqrt{-1}$ folgern. Nun wähle man das y so, dass $\zeta' = \zeta$ werde, betrachte alsdann x als die Abscisse, y als die Ordinate, $z' - z$ als die 3te Coordinate von Punkten im Raume. Gibt man dann dem x successive andere und andere Werthe, so wird man andere und andere Punkte erhalten, die in einem Systeme von Curven liegen, die bei ihrem Durchschneiden der xy Ebene auf Wurzeln der vorgelegten Gleichungen deuten.

Die höchsten und tiefsten Punkte haben uns bis jetzt schon mehrmals zu überraschenden Resultaten geführt, wir wollen daher auch hier diesen Gegenstand in dieser Richtung verfolgen.

Ich setze $\varphi(u, v) = 0$, $\psi(u, v') = 0$, $z = v - v'$, $u = x + y\sqrt{-1}$, denn diess gibt ja genau die Punkte der oben verlangten Curven. Die Gleichung der Tangente am Punkte z, u ist:

$$Z - z = \frac{dz}{du} (U - u),$$

wo Z, U die laufenden Coordinaten bezeichnen. Nun hat man:

$$\frac{dz}{du} = \frac{dv}{du} - \frac{dv'}{du}$$

Um $\frac{dv}{du}$, $\frac{dv'}{du}$ zu erhalten, differenziren wir die beiden Gleichungen der Curven $\varphi(u, v) = 0$, $\psi(u, v') = 0$, und erhalten so:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{du} + \frac{d\varphi}{dv} \cdot \frac{dv}{du} &= 0, & \frac{d\psi}{du} + \frac{d\psi}{dv'} \cdot \frac{dv'}{du} &= 0 \\ \frac{dv}{du} - \frac{dv'}{du} &= \frac{-\frac{d\varphi}{du}}{\frac{d\varphi}{dv}} + \frac{\frac{d\psi}{du}}{\frac{d\psi}{dv'}} = \frac{\frac{d\varphi}{dv} \cdot \frac{d\psi}{du} - \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{d\psi}{dv'}}{\frac{d\varphi}{dv} \cdot \frac{d\psi}{dv'}} \end{aligned}$$

diess substituirt gibt:

$$Z - z = \frac{\frac{d\varphi}{dv} \cdot \frac{d\psi}{du} - \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{d\psi}{dv'}}{\frac{d\varphi}{dv} \cdot \frac{d\psi}{dv'}} (U - u)$$

oder

$$(Z - z) \frac{d\varphi}{dv} \cdot \frac{d\psi}{dv'} = \left(\frac{d\varphi}{dv} \cdot \frac{d\psi}{du} - \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{d\psi}{dv'} \right) (U - u).$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} u = x + y\sqrt{-1} & \quad \frac{d\varphi}{dv} = A + B\sqrt{-1} & \quad \frac{d\psi}{dv'} = C + D\sqrt{-1} \\ U = X + Y\sqrt{-1} & \quad \frac{d\varphi}{du} = A' + B'\sqrt{-1} & \quad \frac{d\psi}{du} = C' + D'\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

so ist:

$$(Z - z)(A + B\sqrt{-1})(C + D\sqrt{-1}) = [(A + B\sqrt{-1})(C' + D'\sqrt{-1}) - (A' + B'\sqrt{-1})(C + D\sqrt{-1})] [(X - x) + (Y - y)\sqrt{-1}]$$

oder

$$\begin{aligned} (Z - z)(AC - BD) &= (AC' - A'C + B'D - BD')(X - x) - (AD' + BC' - A'D - B'C)(Y - y) \\ (Z - z)(AD + BC) &= (AD' + BC' - A'D - B'C)(X - x) + (AC' - A'C + B'D - BD')(Y - y). \end{aligned}$$

Setzt man der Kürze halber:

$$\begin{aligned} P &= AC - BD & M &= AC' - A'C + B'D - BD' \\ Q &= AD + BC & N &= AD' + BC' - A'D - B'C, \end{aligned}$$

so hat man

$$\begin{aligned} P(Z - z) &= M(X - x) - N(Y - y) \\ Q(Z - z) &= N(X - x) + M(Y - y). \end{aligned}$$

Diese Tangente mache mit den drei Axen die Winkel α, β, γ , die gesucht werden aus

$$\cos^2 \alpha = \frac{(MP+NQ)^2}{(M^2+N^2)(M^2+N^2+P^2+Q^2)} ; \quad \cos^2 \beta = \frac{(MQ-NP)^2}{(M^2+N^2)(M^2+N^2+P^2+Q^2)} ;$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{M^2 + N^2}{(M^2 + N^2 + P^2 + Q^2)} .$$

Die Tangente ist horizontal, wenn $M=0$, $N=0$ ist; hiefür wird aber $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Setzt man statt $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$, $\frac{dy}{dx} = y'$, so hat man:

$$y' = \frac{MQ - NP}{MP + NQ} \quad \text{oder}$$

$$(MP + NQ)y' = MQ - NP.$$

Für $M=0$, $N=0$ folgt hieraus $0 \cdot y' = 0$, woraus man y' nicht bestimmen kann. Differenzirt man daher diese Gleichung nach x , so hat man die Gleichungen $M=0$, $N=0$ berücksichtigend:

$$y' \left[P \left(\frac{dM}{dx} \right) + Q \left(\frac{dN}{dx} \right) \right] = Q \left(\frac{dM}{dx} \right) - P \left(\frac{dN}{dx} \right),$$

diess gibt, wenn man die angezeigten Differentiationen vollzieht, eine Gleichung, die nach y' vom 2ten Grade ist, falls nicht alle ihre Coefficienten der Nulle gleich sind. — Wäre diess der Fall, so müsste man nochmals differenziren, dadurch würde man nach y' eine Gleichung dritten Grades erhalten u. s. w. — Im Allgemeinen wird also auch hier bei den höchsten und tiefsten Punkten eine Vereinigung mehrerer Curvenzweige stattfinden.

3. Bei Systemen von mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

7.

Analoge Untersuchungen lassen sich leicht auf ein System höherer Gleichungen mit beliebiger Anzahl von Unbekannten übertragen.

Es seyen die vorgelegten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) &= 0 \\ (1) \quad \varphi_3(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Ich setze eine von ihnen gleich z , nämlich

$$(2) \quad z = \varphi_1(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_2(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) &= 0 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) &= 0 \end{aligned} \right.$$

und suche nun, welche Werthe von $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ das z zu einem Grössten oder Klein-

sten machen. Nach LAGRANGE verfährt man hiebei auf folgende Weise. Man bilde sich die Gleichung

$$(4) \quad z = \varphi_1 + \lambda_1 \varphi_2 + \lambda_2 \varphi_3 + \dots + \lambda_{n-1} \varphi_n,$$

wo der Kürze wegen statt $\varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ bloss φ geschrieben ist, und wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ unbestimmte, aber constante Factoren sind. Aus (4) leite man dann durch successive Differenziren nach $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ folgende Gleichungen ab:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dx_1} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_1} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_1} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_1} &= 0 \\ \frac{d\varphi_1}{dx_2} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_2} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_2} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_2} &= 0 \\ \frac{d\varphi_1}{dx_3} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_3} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_3} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_3} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \frac{d\varphi_1}{dx_n} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_n} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_n} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_n} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen n Gleichungen die $n-1$ Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}$, so erhält man eine Gleichung in $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, die in Verbindung mit den $n-1$ Gleichungen (3) hinreichen, die n Grössen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ zu bestimmen. — Es könnte einen Fall geben, dass die Eliminationsgleichung, die aus (5) hervorgeht, identisch gleich Null wäre. Was findet dann Statt? Sind etwa wiederum die Systeme der vorgelegten Gleichungen einander widersprechend, oder sind sie nicht wesentlich von einander verschieden?

Wir wollen die Eliminationsgleichung bilden, und verfolgen hiebei eine, von Hrn. Professor PETZVAL herrührende Methode. Wir schreiben nämlich die n Gleichungen (5) in folgender Form:

$$(6) \quad \begin{aligned} \lambda_0 \frac{d\varphi_1}{dx_1} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_1} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_1} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_1} &= a_1 \\ \lambda_0 \frac{d\varphi_1}{dx_2} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_2} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_2} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_2} &= a_2 \\ \lambda_0 \frac{d\varphi_1}{dx_3} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_3} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_3} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_3} &= a_3 \\ \dots &\dots \\ \lambda_0 \frac{d\varphi_1}{dx_n} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_n} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_n} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_n} &= a_n \end{aligned}$$

wobei $\lambda_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ ist; und thun so, als ob wir λ_0 suchen würden. Sey $\lambda_0 = \frac{L}{M}$, so ist $L = 0$, weil der Zähler in jedem Gliede eine der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ hat, also muss auch der Nenner $M = 0$ seyn. Diesen Nenner $M = 0$ bildet man aus der Summe aller möglichen Permutationen der Elemente:

$$(7) \begin{array}{ccccccc} \frac{d\varphi_1}{dx_1} & , & \frac{d\varphi_2}{dx_1} & , & \frac{d\varphi_3}{dx_1} & \cdot \cdot \cdot & \frac{d\varphi_n}{dx_1} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_2} & , & \frac{d\varphi_2}{dx_2} & , & \frac{d\varphi_3}{dx_2} & \cdot \cdot \cdot & \frac{d\varphi_n}{dx_2} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_3} & , & \frac{d\varphi_2}{dx_3} & , & \frac{d\varphi_3}{dx_3} & \cdot \cdot \cdot & \frac{d\varphi_n}{dx_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\varphi_1}{dx_n} & , & \frac{d\varphi_2}{dx_n} & , & \frac{d\varphi_3}{dx_n} & \cdot \cdot \cdot & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{array}$$

wo aber in keiner Permutation 2 Glieder derselben Horizontal- oder Verticalreihe stehen dürfen, jedes Glied, genommen mit dem Zeichen plus oder minus, je nach der geraden oder ungeraden Anzahl der Compensationen, die in jedem Gliede vorkommen *). Würde die Gleichung $M = 0$ nach φ_1 geordnet,

$$(8) \quad X_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi_1}{dx_2} + X_3 \frac{d\varphi_1}{dx_3} + \dots + X_n \frac{d\varphi_1}{dx_n} = 0,$$

d. h. substituirt man statt aller der Ausdrücke $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ ihre Werthe, nur nicht statt φ_1 , so wird $M = 0$ die eben aufgeschriebene Form annehmen, und identisch wahr werden:

erstens, wenn für φ_1 sein vorgelegter Werth substituirt wird, denn diess ist ja die Voraussetzung;

zweitens, wenn durchgehends statt φ_1 gesetzt wird φ_2 oder φ_3 oder irgend ein anderes φ^*).

Es sind also $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0, \dots \varphi_n = 0$ particuläre Integrale der partiellen Differentialgleichung (8) und

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n) = 0$$

ist das allgemeine Integrale. Hieraus folgt, dass eine dieser Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ eine Function aller übrigen ist, oder anders, das System der vorgelegten Gleichungen hat entweder unendlich viele Auflösungen, oder sie widersprechen sich.

Wäre irgend einer der n Coefficienten $X_1, X_2, X_3, \dots X_n$ identisch gleich Null, etwa $X_1 = 0$, so stehen die $n-1$ Gleichungen $\varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0, \dots \varphi_n = 0$ in derselben Beziehung unter sich, wie die n vorgelegten Gleichungen, weil der Bau jeder dieser Coefficienten eben so aus $n-1$ dieser Gleichungen zusammengesetzt ist, wie $M = 0$ aus den n Gleichungen, daher ist irgend eine der $n-1$ Functionen $\varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_n$ eine Function aller übrigen u. s. w.

8.

Betrachtung specieller Fälle bei zwei Gleichungen höheren Grades.

Es sey eine der vorgelegten Gleichungen $\varphi(x, y) = 0, \psi(x, y) = 0$ ein Product zweier Factoren, von denen einer eine reine Function von x oder y ist; z. B.

*) Man sehe: Theorie des Grössten und Kleinsten, von Professor PERTZVAL im 2ten Bande der naturwissenschaftlichen Abhandlungen von HATDINGER.

$$f(x) \cdot \chi(x, y) = 0, \quad \phi(x, y) = 0;$$

hat $f(x) = 0$ die Wurzel $x = \alpha$, so wird die erste Gleichung befriedigt für $x = \alpha$, und die zweite für alle jene Werthe von y , die aus der Gleichung $\phi(\alpha, y) = 0$ hervorgehen, seyen diese y_1, y_2, y_3, \dots so hat man folgendes System von Wurzelwerthen:

$$x = \alpha, y = y_1; \quad x = \alpha, y = y_2; \quad x = \alpha, y = y_3; \dots$$

Sey $x = \beta$ eine zweite Wurzel von $f(x) = 0$, und habe $\phi(\beta, y) = 0$ die Wurzeln y'_1, y'_2, y'_3, \dots so sind

$$x = \beta, y = y'_1; \quad x = \beta, y = y'_2; \quad x = \beta, y = y'_3, \dots$$

wieder Systeme von, den vorgelegten Gleichungen Genüge leistenden Wurzelwerthen. — Wenn daher eine der beiden Gleichungen einen Factor $f(x)$ besitzt, so ist es vorthailhaft ihn aufzusuchen, da die Kenntniss desselben die Auflösung solcher Systeme von Gleichungen ungemein vereinfacht. Wäre

$$\chi(x, y) = A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + A_{m-2} y^{m-2} + \dots + A_1 y + A_0,$$

wo $A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, \dots, A_1, A_0$ entweder Functionen von x oder Constante sind, so ist:

$f(x) \cdot \chi(x, y) = A_m f(x) \cdot y^m + A_{m-1} f(x) \cdot y^{m-1} + A_{m-2} f(x) \cdot y^{m-2} + \dots + A_1 f(x) \cdot y + A_0 f(x)$, woraus man sieht, dass falls eine der vorgelegten Gleichungen den Factor $f(x)$ besitzen soll, ihn jede Potenz von y als Factor haben muss. — Man wird daher, um zu untersuchen, ob eine Gleichung $f(x)$ als Factor hat, diese Gleichung nach y ordnen, denjenigen Coefficienten, der vom niedrigsten Grade ist, in Factoren zerlegen, wären sie $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots$ dann sehen, ob $x = \alpha$ oder $x = \beta$, oder $x = \gamma, \dots$ alle übrigen Coefficienten identificirt, ist diess der Fall für $x = \alpha$, so hat sie $x - \alpha$ als Factor, ist es auch für $x = \beta$ der Fall, so ist $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ u. s. w.

Man kann also stets auf höchst einfache Weise aus $f(x) \cdot \chi(x, y)$ den Factor $f(x)$ absondern, und wird alsdann das System der beiden Gleichungen

$$f(x) \cdot \chi(x, y) = 0, \quad \phi(x, y) = 0$$

in folgende zwei Systeme

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 & \chi(x, y) &= 0 \\ \phi(x, y) &= 0 & \phi(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

zerlegen können, von denen das erste höchst einfache, leicht zu ermittelnde Auflösungen gestattet. Sehr leicht lassen sich auch analoge Untersuchungen auf mehrere Systeme von Gleichungen übertragen, etwa ob eine Gleichung mit zwei Unbekannten einen Factor $\varphi(x, y)$ besitzt.

Sey eine der vorgelegten Gleichungen

$$1) \quad (x-\alpha) A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + A_{m-2} y^{m-2} + \dots + A_2 y^2 + A_1 y + A_0 = 0,$$

wo $A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, \dots, A_2, A_1, A_0$ Constante oder Functionen von x sind, und A_m sowohl als A_{m-1} enthalten nicht den Factor $x - \alpha$. Für jeden Werth von x erhält man aus 1) m Werthe für y , also auch für $x = \alpha$, dadurch geht aber 1) über in:

$$2) \quad A'_{m-1} y^{m-1} + A'_{m-2} y^{m-2} + \dots + A'_2 y^2 + A'_1 y + A'_0 = 0$$

(die Striche ober den A zeigen an, dass in ihnen statt x , α gesetzt wurde) und diese habe die $m-1$ Wurzeln

$$y_1 y_2 y_3 \cdots y_{m-1}.$$

Setzt man nun in 1) statt x , α , statt y , y_1 , so wird sie identisch wahr, also ist für $x = \alpha$, $y = y_1$ eine Wurzel von 1); eben so sind für $x = \alpha$, $y = y_2$, $y = y_3$, \dots $y = y_{m-1}$ Wurzeln von 1), also hat man bereits $m-1$ Wurzeln von 1) für $x = \alpha$, deren Summe $= -\frac{A'_{m-2}}{A'_{m-1}}$ ist. — Die Summe aller Wurzeln von 1) ist aber $-\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)A_m}$ und für $x = \alpha$, unendlich, daher muss die m te Wurzel unendlich seyn. — Eben diess gilt auch, wenn $(x-\alpha)$ im ersten Gliede in einer höhern als der ersten Potenz erscheint. Hat also eine der vorgelegten Gleichungen die Form:

$$(x-a)^\alpha \cdot (x-b)^\beta \cdot (x-c)^\gamma \dots y^m + A_{m-1}y^{m-1} + A_{m-2}y^{m-2} + \dots + A_2y^2 + A_1y + A_0 = 0,$$

so wird für $x = a$, $x = b$, $x = c$, \dots stets eine Wurzel von y unendlich gross werden.

Hat eine der vorgelegten Gleichungen die Form:

$$1) (x-a)A_m y^m + (x-a)A_{m-1}y^{m-1} + A_{m-2}y^{m-2} + A_{m-3}y^{m-3} + \dots + A_2y^2 + A_1y + A_0 = 0.$$

Für $x = a$ hat man:

$$2) A'_{m-2}y^{m-2} + A'_{m-3}y^{m-3} + \dots + A'_2y^2 + A'_1y + A'_0 = 0,$$

die die $m-2$ Wurzeln $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{m-2}$ haben möge. — Da für $x = a$, $y = y_1$ oder für $x = a$, $y = y_2$ oder für $x = a$, $y = y_{m-2}$ auch 1) identisch wird, so hat auch 1) für $x = a$ die $m-2$ Wurzelwerthe $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{m-2}$. Die Summe aller Wurzeln von 1)

ist gleich $-\frac{A'_{m-1}}{A'_m}$, die Summe der Amben der Wurzeln $= \infty$, also sind die beiden letzten Wurzeln unendlich gross u. s. w.

II. Integration der elliptischen Functionen in geschlossener Form.

Von

Dr. Ferdinand Peche.

Mitgetheilt am 24. Jänner 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Bestimmung der Integrale

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

in geschlossenen Formen.

I.

Beweis der Lösbarkeit der Integrale $\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$ und $\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$ in geschlossenen Formen bei solcher hypothetischer Lösung irgend Eines derselben.

1. Die Lösung der Integrale $\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$ und $\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$,

worin n eine ganze Zahl vorstellt, kann auf die der Integrale $\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ zurückgeführt werden.

Zur Nachweisung dieser Behauptung wird es zunächst nöthig, das specielle Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$ durch ein allgemeineres Verfahren auf seine einfachste Gestalt $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ zu transformiren.

Setzt man nämlich $x = y + p$; so übergeht $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ in $k_0 + k_1y + k_2y^2 + k_3y^3 + k_4y^4$, wo k_0 den Ausdruck $A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 = f(p)$ und k_1, k_2, k_3, k_4 die von k_0 genommenen in ihre bezüglichlichen Coefficienten multiplicirten

Ableitungen bedeuten; so dass folgende Gleichungen bestehen: $k_0 = f(p)$, $k_1 = f_1(p)$, $k_2 = \frac{1}{2}! f_2(p)$, $k_3 = \frac{1}{3}! f_3(p)$, $k_4 = \frac{1}{4}! f_4(p)$. Die einfache Form, in der sich die Wurzelfactoren eines Ausdrucks 4ten Grades $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$ ergeben, wenn in demselben x um eine Grösse p verringert wird, die folgender Gleichung genügt:

$$[8BE^2 - 4CDE + D^3]p^3 + [16AE^2 + 2BDE + CD^2 - 4C^2E]p^2 \\ + [8ADE + BD^2 - 4BCE]p + AD^2 - B^2E = 0$$

lässt auch hier eine einfachere Darstellung des irrationalen Nenners vermuthen. Es

genüge also p dieser Bedingung, und man führe im Integral $\int \frac{dy}{\sqrt{k_0 + k_1y + k_2y^2 + k_3y^3 + k_4y^4}}$,
 $= \int \frac{dy}{y \sqrt{k_3y^2 + \frac{k_0}{y^2} + k_3y + \frac{k_1}{y} + k_2}}$ statt der einen veränderlichen x , zwei neue veränder-

liche Bögen φ und φ_1 der Art ein, dass folgende Bedingungen erfüllt seyen:

$$k_3y^2 + \frac{k_0}{y^2} = 2\sqrt{k_0k_4} \cos 2\varphi \\ k_3y + \frac{k_1}{y} = 2\sqrt{k_1k_3} \cos \varphi_1.$$

Es wären nun die Werthe von φ und φ_1 anzugeben, um die Möglichkeit obiger Bedingung zu rechtfertigen; und bei ihrer Bestimmung wird sich zugleich ergeben, dass unter der Voraussetzung: dass p der erwähnten Gleichung genügt, $\varphi = \varphi_1$ sey.

Sowohl $y = \pm \sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}} e^{\varphi\sqrt{-1}}$ als $y = \pm \sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}} e^{-\varphi\sqrt{-1}}$ sind Wurzeln der Gleichung

$k_3y^2 + \frac{k_0}{y^2} - 2\sqrt{k_0k_4} \cos 2\varphi = 0$; denn werden diese Werthe in die Gleichung substituiert, so reduciren sie dieselbe auf Null. Eben so ist $y = \sqrt[4]{\frac{k_1}{k_3}} e^{\pm\varphi_1\sqrt{-1}}$ der Ausdruck

der Wurzeln der Gleichung $k_3y + \frac{k_1}{y} = 2\sqrt{k_1k_3} \cos \varphi_1$. Aus $y = \sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}} e^{\varphi\sqrt{-1}}$ und

$y = \sqrt[4]{\frac{k_1}{k_3}} e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$ ergeben sich die Werthe $\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \lambda \left(\sqrt[4]{\frac{k_3}{k_0} y} \right)$.

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \lambda \left(\sqrt[4]{\frac{k_3}{k_1} y} \right) \text{ (wo das Symbol } \lambda \text{ den}$$

natürlichen Logarithmus bezeichnet), für welche gewiss die verlangte Eigenschaft erfüllt ist. Um überdiess zu zeigen, dass $\varphi = \varphi_1$ sey, addire man zur Gleichung

$$[8BE^2 - 4CDE + D^3]p^3 + [16AE^2 + 2BDE + CD^2 - 4C^2E]p^2 \\ + [8ADE + BD^2 - 4BCE]p + AD^2 - B^2E = 0$$

den der Nulle identischen Ausdruck

$$[9D^2E + 16CE^3 - (16CE^3 + 8D^2E + D^3E)]p^3 + [24DE^2 - (16DE^2 + 4DE^3)]p^2 \\ + [16E^3 - 16E^3]p^6 = 0$$

wodurch ein Zerfällen in Factoren möglich wird, denn es ist sodann der Ausdruck anders geschrieben:

$$\begin{aligned} & B^2E + 4BCEp + [4C^2E + 6BDE]p^2 + [8BE^2 + 12CDE]p^3 \\ & + [9D^2E + 16CE^2]p^4 + 24DE^2p^5 + 16E^3p^6 \\ & - [AD^2 + (8ADE + BD^2)p + (16AE^2 + 8BDE + CD^2)p^2 \\ & + (16BE^2 + 8CDE + D^3)p^3 + (16CE^2 + 8D^2E + D^3E)p^4 \\ & + (16DE^2 + 8DE^2)p^5 + 16E^3p^6] = 0 \end{aligned}$$

und diese Ausdrücke in Factoren zerschlagen geben

$$E(B + 2Cp + 3Dp^2 + 4Ep^3)^2 - (D + 4Ep)^2(A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4) = 0,$$

d. i. $k_4 k_3^2 = k_3^2 k_0$. Diess Ergebniss in $\varphi = \sqrt{-1} \lambda y \sqrt{\frac{k_4}{k_0}}$, $\varphi_1 = \sqrt{-1} \lambda y \sqrt{\frac{k_3}{k_1}}$ substi-

tuirt, liefert die Bedingung $\varphi = \varphi_1$. Durch diese Bestimmung $y = \sqrt{\frac{k_0}{k_3}} e^{\varphi \sqrt{-1}}$, über-

geht das Integral in $\sqrt{-1} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\sqrt{k_0 k_4} \cos 2\varphi + 2\sqrt{k_1 k_3} \cos \varphi + k_2}}$, oder wenn Kürze

halber $e^{\varphi \sqrt{-1}} = z$, $\sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_0 k_4}} = \alpha$, $\frac{k_2}{\sqrt{k_0 k_4}} = \beta$ gesetzt wird, in

$$\frac{1}{\sqrt{k_0 k_4}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \left[\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \alpha \left(z + \frac{1}{z} \right) + \beta \right]}}$$

Die Gleichung $z^2 \left[z^2 + \frac{1}{z^2} + \alpha \left(z + \frac{1}{z} \right) + \beta \right] = 0$ ergibt sodann durch ihre Auflösung

die 4 bestimmten Werthe von z. Es ist für $z + \frac{1}{z} = \rho$

$$\rho^2 - 2 + \alpha\rho + \beta = 0$$

$$\rho = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)}. \text{ Ferner folgt aus}$$

$$z^2 = z\rho - 1, \quad z = \frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - 1}$$

$$= -\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(-\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} \right)^2 - 1}$$

Somit ist $z^2 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} + \alpha \left(z + \frac{1}{z} \right) + \beta \right)$ das Product folgender Wurzelfactoren:

$$\left[z + \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} \right)^2 - 1} \right]$$

$$\left[z + \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} \right)^2 - 1} \right]$$

$$\left[z + \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} \right)^2 - 1} \right]$$

$$\left[z + \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} \right)^2 - 1} \right].$$

Das ist, wenn Kürze halber

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} = \mathfrak{A},$$

$$\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} = \mathfrak{R},$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left(-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} \right)^2 - 1} = \mathfrak{C},$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} \left(-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - (\beta - 2)} \right)^2 - 1} = \mathfrak{E} \text{ gesetzt wird,}$$

$$z^2 \left[\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \alpha \left(z + \frac{1}{z} \right) + \beta \right] = (z + \mathfrak{R} + \mathfrak{C})(z + \mathfrak{R} - \mathfrak{C})(z + \mathfrak{A} + \mathfrak{E})(z + \mathfrak{A} - \mathfrak{E}).$$

Das gegebene Integral übergeht nun in

$$\frac{1}{\sqrt{k_0 k_1}} \int \frac{dz}{\sqrt{(z + \mathfrak{R} + \mathfrak{C})(z + \mathfrak{R} - \mathfrak{C})(z + \mathfrak{A} + \mathfrak{E})(z + \mathfrak{A} - \mathfrak{E})}}$$

und für $z = \frac{\mathfrak{E}(1+u^2)}{1-u^2} - \mathfrak{A}$, in

$$\frac{2}{\sqrt{k_0 k_1}} \int \frac{du}{\sqrt{[\mathfrak{E}(1+u^2) - (\mathfrak{A} - \mathfrak{R})(1-u^2)]^2 - \mathfrak{C}^2(1-u^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{k_0 k_1}} \int \frac{du}{\sqrt{\lambda u^4 + 2pu^2 + v}}$$

worin Kürze halber $\lambda = (\mathfrak{E} + \mathfrak{A} - \mathfrak{R})^2 - \mathfrak{C}^2$

$$p = \mathfrak{E}^2 - (\mathfrak{A} - \mathfrak{R})^2 + \mathfrak{C}^2$$

$$v = (\mathfrak{E} - \mathfrak{A} + \mathfrak{R})^2 - \mathfrak{C}^2 \text{ gesetzt wurde.}$$

Die Wurzelfactoren des Nenners $\lambda u^4 + 2pu^2 + v = 0$ sind durch

$$u^2 = -\frac{p}{\lambda} \pm \sqrt{\frac{p^2}{\lambda^2} - \frac{v}{\lambda}}$$

bestimmt und werden dieselben durch ρ_1, ρ_2 vorgestellt; so ist das ursprüngliche Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

auf die gewünschte einfache Form

$$\frac{2}{\sqrt{k_0 k_1}} \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 - \rho_1)(u^2 - \rho_2)}}$$

zurückgeführt.

2. Im Verlaufe der Transformation wurde

$$x = y + p, \quad y = \sqrt{\frac{k_0}{k_1}} e^{\theta} \sqrt{-1}, \quad e^{\theta} \sqrt{-1} = z, \quad z = \frac{\mathfrak{E}(1+u^2)}{1-u^2} - \mathfrak{A}$$

gesetzt, somit ist

$$\begin{aligned} x &= p + \sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}} \left(\frac{\mathfrak{E}(1+u^2)}{1-u^2} - \mathfrak{Q} \right) \\ &= \frac{p - \sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}} (\mathfrak{Q} - \mathfrak{E}) + u^2 \left[\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}} (\mathfrak{E} + \mathfrak{Q}) - p \right]}{1-u^2} \\ &= \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}u^2}{1-u^2}, \text{ wenn Kürze halber} \end{aligned}$$

$$p - \sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}} (\mathfrak{Q} - \mathfrak{E}) = \mathfrak{A}$$

$$\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}} (\mathfrak{E} + \mathfrak{Q}) - p = \mathfrak{B} \text{ gesetzt wird.}$$

Das allgemeine Integral $\int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$

übergeht bei diesem Werthe von x in

$$\frac{2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}} \int \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}u^2)^n du}{(1-u^2)^n \sqrt{(u^2-\rho_1)(u^2-\rho_2)}}$$

und für $u^2 = 1 - x_1^2$ in

$$\begin{aligned} &\frac{-2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}} \int \frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{B}x_1^2) x_1 dx_1}{x_1^{2n} \sqrt{(1-x_1^2)(x_1^2-1+\rho_1)(x_1^2-1+\rho_2)}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}} \mathbf{S} (-1)^p \binom{n}{p} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^{n-p} \mathfrak{B}^p \int \frac{x_1^{2(n-p)} x_1 dx_1}{\sqrt{(x_1^2-1+\rho_1)(x_1^2-1+\rho_2)(1-x_1^2)}} \end{aligned}$$

wo sich das Summenzeichen \mathbf{S} auf alle Werthe von p , von $p = 0$ bis $p = n$ erstreckt.

Da n grösser als p , mithin $p - n$ negativ ist, substituirt man statt x_1 , $\frac{1}{x_2}$; wodurch das Integral in

$$\frac{2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}} \mathbf{S} (-1)^p \binom{n}{p} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^{n-p} \mathfrak{B}^p \int \frac{x_2^{2(n-p)} dx_2}{\sqrt{((\rho_1-1)x_2^2+1)((\rho_2-1)x_2^2+1)(x_2^2-1)}}$$

also auf Integrale von der Form

$$\int \frac{y^{2m} dy}{\sqrt{A+By^2+Cy^4+Dy^6}}$$

übergeht, welche, wie im Verlaufe der Untersuchung gezeigt wird, auf die Form

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$$
 zurückgeführt werden.

Es ist nämlich für $U = A + By^2 + Cy^4 + Dy^6$

$$y^n U^{\frac{1}{2}} = nA \int \frac{y^{n-1} dy}{U^{\frac{1}{2}}} + (n+1)B \int \frac{y^{n+1} dy}{U^{\frac{1}{2}}} + (n+2)C \int \frac{y^{n+3} dy}{U^{\frac{1}{2}}} + (n+3)D \int \frac{y^{n+5} dy}{U^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = -1$

$$\frac{U^{\frac{1}{2}}}{y} = -A \int \frac{dy}{y^2 U^{\frac{1}{2}}} + C \int \frac{y^2 dy}{U^{\frac{1}{2}}} + 2D \int \frac{y^4 dy}{U^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = +1$

$$U^{\frac{1}{2}} y = A \int \frac{dy}{U^{\frac{3}{2}}} + 2B \int \frac{y^2 dy}{U^{\frac{5}{2}}} + 3C \int \frac{y^4 dy}{U^{\frac{7}{2}}} + 4D \int \frac{y^6 dy}{U^{\frac{9}{2}}}.$$

Für $n = 3$

$$U^{\frac{1}{2}} y^3 = 3A \int \frac{y^2 dy}{U^{\frac{3}{2}}} + 4B \int \frac{y^4 dy}{U^{\frac{5}{2}}} + 5C \int \frac{y^6 dy}{U^{\frac{7}{2}}} + 6D \int \frac{y^8 dy}{U^{\frac{9}{2}}} \text{ u. s. f.}$$

Unter der Voraussetzung also, dass $\int \frac{dy}{y^2 U^{\frac{1}{2}}}$ und $\int \frac{y^2 dy}{U^{\frac{3}{2}}}$ auf die erwähnte Form zurückführbar seyen; werden, da $\int \frac{dy}{U^{\frac{1}{2}}}$ für $y = \sqrt{x}$ die in Nr. 1 behandelte Form annimmt, alle Integrale $\int \frac{y^{2m} dy}{U^{\frac{1}{2}}}$, die durch dieselben ausgedrückt sind, jene Eigenschaft besitzen.

3. Für negative m kommt man auf solche zurückführbare Integrale. Zu diesem Zweck sey $y = \frac{1}{\sqrt{v}}$; somit:

$$\int \frac{y^{-2m} dy}{\sqrt{A+By^2+Cy^4+Dy^6}} = -\frac{1}{2} \int \frac{v^m dv}{\sqrt{Av^3+Bv^2+Cv+D}}.$$

Um diess Integral einfacher zu stellen, setze man $v = y + q$

$$\begin{aligned} f(q) &= Aq^3 + Bq^2 + Cq + D = a \\ f_1(q) &= 3Aq^2 + 2Bq + C = b \\ \frac{1}{2} f_2(q) &= 3Aq + B = c \\ \frac{1}{3} f_3(q) &= A = d \end{aligned}$$

worin das q durch folgende Gleichung bestimmt sey:

$$\begin{aligned} AC^3 - B^3D + (6ABC^2 - 9AB^2D - B^3C)q + (9A^2C^2 + 3AB^2C - 27A^2BD - B^4)q^2 \\ + (9A^2BC - 27A^3D - 2AB^3)q^3 = 0 \end{aligned}$$

welche Gleichung sich auf die Form

$$A(C + 2Bq + 3Aq^2)^3 = (B + 3Aq)^3(D + Cq + Bq^2 + Aq^3)$$

d. i. auf $db^3 = c^3a$ bringen lässt.

Das fragliche Integral ist bisher unter der Form

$$-\frac{1}{2} \int \frac{y^m dy}{\sqrt{a+by+cy^2+dy^3}} = -\frac{1}{2} \int \frac{y^m dy}{y^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{a}{y^{\frac{3}{2}}} + dy^{\frac{3}{2}} + \frac{b}{y^{\frac{1}{2}}} + cy^{\frac{1}{2}}}}.$$

Man wähle nun weiter die Bögen φ und φ_1 der Art, dass

$$y = \sqrt[3]{\frac{a}{d}} e^{\pm \varphi \sqrt{-1}} = \frac{b}{c} e^{\pm \varphi_1 \sqrt{-1}}$$

wodurch

$$dy^{\frac{3}{2}} + \frac{a}{y^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{ad} \cos \frac{1}{2} \varphi$$

$$cy^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{y^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{bc} \cos \frac{1}{2} \varphi_1$$

gesetzt werden kann, und wo die Richtigkeit der Annahme so wie die Werthbestim-

mung von φ und φ_1 aus früheren ersichtlich ist. Zugleich ist wegen der Bedingung $db^3 = c^3a$, $\varphi = \varphi_1$.

Somit übergeht das Integral in

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int \frac{y^m dy}{y^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\sqrt{ad} \cos \frac{3}{2}\varphi + 2\sqrt{bc} \cos \frac{1}{2}\varphi}} \\
 = & -\frac{\sqrt{-1} \left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}}}{2} \int \frac{e^{(1+m)\varphi} \sqrt{-1} d\varphi}{e^{\frac{3}{2}\varphi} \sqrt{-1} \sqrt{\sqrt{ad} (e^{\frac{3}{2}\varphi} \sqrt{-1} + e^{-\frac{3}{2}\varphi} \sqrt{-1}) + \sqrt{bc} (e^{\frac{\varphi}{2} \sqrt{-1}} + e^{-\frac{\varphi}{2} \sqrt{-1})}}
 \end{aligned}$$

und für $e^{\frac{\varphi}{2} \sqrt{-1}} = z$ in

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}} \int \frac{z^{1+2m} dz}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sqrt{ad} \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \sqrt{bc} \left(z + \frac{1}{z}\right)}} \\
 = & -\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}} \int \frac{z^{2m+1} dz}{\sqrt{\sqrt{ad}(z^6+1) + \sqrt{bc}(z^3+z^2)}}
 \end{aligned}$$

Es ist zugleich $z^6 + 1 = (z^3 - z^2 + 1)(z^2 + 1)$ und $z^3 + z^2 = z^2(z^2 + 1)$, wodurch sich der obige Werth auf

$$-\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}} \int \frac{z^{2m} \cdot z dz}{\sqrt{(z^2+1)(\sqrt{ad}(z^3-z^2+1) + \sqrt{bc}z^2)}}$$

und für $z^2 = x^2 - 1$ auf

$$-\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}} \int \frac{(x^2-1)^m dx}{\sqrt{\sqrt{ad} [(x^2-1)^2 - (x^2-1) + 1] + \sqrt{bc}(x^2-1)}}$$

zurückführen lässt; auf eine Summe von Integralen, die in der Form

$$\int \frac{x^{+n} dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$$

enthalten sind.

In dieser Durchführung ist zugleich gezeigt, dass sämtliche Integrale

$$\int \frac{x^{+n} dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+Cx^2+Dx^3}}$$

auf die von der Form $\int \frac{x^{+n} dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ zurückführbar seyen.

Nach der eben entwickelten Untersuchung ist daher das Integral $\int \frac{dy}{y^2 U^{\frac{1}{2}}}$ ein auf die gewünschte Form reducirbares, und es fragt sich nun, ob dasselbe auch vom Integral $\int \frac{y^2 dy}{U^{\frac{1}{2}}}$ gelte.

4. Unter Voraussetzung der Zurückführbarkeit dieses letzt erwähnten Integrals auf die im Anfang statuirte Form, sind auch sämtliche Integrale $\int \frac{v^{-m} dv}{\sqrt{Av^3+Bv^2+Cv+D}}$ unter der gewöhnlichen Form darstellbar.

Sey $Av^3 + Bv^2 + Cv + D = V$, mithin

$$v^n V^{\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})A \int \frac{v^{n+\frac{1}{2}} dv}{V^{\frac{1}{2}}} + (n+1)B \int \frac{v^{n+\frac{1}{2}} dv}{V^{\frac{1}{2}}} + (n+\frac{1}{2})C \int \frac{v^n dv}{V^{\frac{1}{2}}} + nD \int \frac{v^{n-1} dv}{V^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = -1$ ist

$$\frac{V^{\frac{1}{2}}}{v} = \frac{1}{2}A \int \frac{v dv}{V^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}C \int \frac{dv}{v V^{\frac{1}{2}}} - D \int \frac{dv}{v^2 V^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = -2$

$$\frac{V^{\frac{1}{2}}}{v^2} = -\frac{1}{2}A \int \frac{dv}{V^{\frac{1}{2}}} - B \int \frac{dv}{v V^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}C \int \frac{dv}{v^2 V^{\frac{1}{2}}} - 2D \int \frac{dv}{v^3 V^{\frac{1}{2}}};$$

$n = -3$

$$\frac{V^{\frac{1}{2}}}{v^3} = -\frac{3}{2}A \int \frac{dv}{v V^{\frac{1}{2}}} - 2B \int \frac{dv}{v^2 V^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{2}C \int \frac{dv}{v^3 V^{\frac{1}{2}}} - 3D \int \frac{dv}{v^4 V^{\frac{1}{2}}} \text{ u. s. f.}$$

Da das Integral $\int \frac{v dv}{V^{\frac{1}{2}}}$ als ein auf die erwähnte Form zurückführbares Integral nachgewiesen wurde, so werden somit alle Integrale $\int \frac{v^{-m} dv}{V^{\frac{1}{2}}}$ die erwähnte Eigenschaft besitzen, sobald dieselbe vom Integral $\int \frac{dv}{v V^{\frac{1}{2}}}$ erwiesen ist. Allein das letzte ist mit $-2 \int \frac{y^2 dy}{U^{\frac{1}{2}}}$ identisch, sobald im ebengenannten Integral statt y , $\frac{1}{\sqrt{v}}$ gesetzt wird.

5. Unter der Voraussetzung einer nachgewiesenen Zurückführung des letztgenannten Integrals findet dieselbe auch bei allen Integralen $\int \frac{dx}{x^{2+n} \sqrt{Ax^2 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$ statt. Ein solches Integral ist gleichbedeutend mit dem Integral

$$\frac{2}{\sqrt{k_0 k_4}} \int \frac{(1-u^2)^n du}{(\mathcal{A} + \mathfrak{B}u^2)^n \sqrt{(u^2 - \rho_1)(u^2 - \rho_2)}}$$

d. i. für $\mathcal{A} + \mathfrak{B}u^2 = z^2$ mit

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\mathfrak{B} \sqrt{k_0 k_4}} \int \frac{\left(1 - \frac{z^2 - \mathcal{A}}{\mathfrak{B}}\right)^n z dz}{z^{2n} \sqrt{\left(\frac{z^2 - \mathcal{A}}{\mathfrak{B}}\right) \left(\frac{z^2 - \mathcal{A} - \rho_1 \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\right) \left(\frac{z^2 - \mathcal{A} - \rho_2 \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\right)}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{\mathfrak{B}^4}{k_0 k_4}} \mathfrak{B} (-1)^n \binom{n}{p} \left(\frac{\mathfrak{B} + \mathcal{A}}{\mathfrak{B}}\right)^{n-p} \frac{1}{\mathfrak{B}^p} \int \frac{z^{2(p-n)} z dz}{\sqrt{(z^2 - \mathcal{A})(z^2 - \mathcal{A} - \rho_1 \mathfrak{B})(z^2 - \mathcal{A} - \rho_2 \mathfrak{B})}}. \end{aligned}$$

Für $z^2 = v$ übergeht

$$\int \frac{z^{2(p-n)} z dz}{\sqrt{(z^2 - \mathcal{A})(z^2 - \mathcal{A} - \rho_1 \mathfrak{B})(z^2 - \mathcal{A} - \rho_2 \mathfrak{B})}}$$

in

$$\frac{1}{2} \int \frac{v^{p-n} dv}{\sqrt{(v - \mathcal{A})(v - \mathcal{A} - \rho_1 \mathfrak{B})(v - \mathcal{A} - \rho_2 \mathfrak{B})}}.$$

Da $p - n$ eine negative Zahl ist, so sind diese Integrale nach Nr. 4 unter der Bedingung der Zurückführbarkeit von $\int \frac{dv}{v V^2}$ auf die verlangte Form reducirbar.

6. Was endlich das Integral $\int \frac{y^2 dy}{U^2}$ betrifft; so übergeht es bei der Substitution

$y = \frac{1+u}{1+\rho u}$, wenn w_1, w_2, w_3 die 3 Wurzeln von y , des Ausdrucks U vorstellen, in

$$\frac{1-\rho}{2} \int \frac{1+u}{1+\rho u} \frac{du}{\sqrt{(1+u)(1+u-w_1(1+\rho u))(1+u-w_2(1+\rho u))(1+u-w_3(1+\rho u))}}$$

Es ist $\frac{1+u}{1+\rho u} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1+\rho u}{1+\rho u} + \frac{\rho-1}{1+\rho u} \right]$, welches ins Integral eingeführt dasselbe in zwei Theile zerfällt; in

$$\frac{1-\rho}{2\rho} \int \frac{du}{\sqrt{(1+u)(1+u-w_1(1+\rho u))(1+u-w_2(1+\rho u))(1+u-w_3(1+\rho u))}},$$

welches auf die Form $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ reducirbar ist, und in den Theil

$$-\frac{(1-\rho)^2}{2\rho} \int \frac{du}{(1+\rho u) \sqrt{(1+u)(1+u-w_1(1+\rho u))(1+u-w_2(1+\rho u))(1+u-w_3(1+\rho u))}}$$

Man setze ferner $1+\rho u = \frac{1}{\gamma+t}$, wodurch das letztere Integral in

$$\frac{1}{2} \frac{(1-\rho)^2}{\rho} \int \frac{(t+\gamma) dt}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(t+\gamma) + \frac{1}{\rho} \right] \left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(t+\gamma) - w_1 \right] \left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(t+\gamma) - w_2 \right] \left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(t+\gamma) - w_3 \right]}}$$

übergeht. Man wähle überdiess γ , so wie das früher eingeführte ρ auf die Weise, dass

$$\text{wenn } p_0 = \left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\gamma + \frac{1}{\rho} \right] \left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\gamma - w_1 \right] \left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\gamma - w_2 \right] \left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\gamma - w_3 \right],$$

$f(\gamma)$ vorstellt, $p_1 = f_1(\gamma)$ und $p_3 = \frac{1}{3} f_3(\gamma)$ beide zugleich in Null übergehen. Dadurch ist zugleich die Bedingung $p_3 p_1^2 = p_2^2 p_0$ erfüllt und es übergehen die in Nr. 1) gebrauchten

Bezeichnungen α und β in $\alpha = 0$, $\beta = \frac{p_2}{\sqrt{p_0 p_3}}$.

Der Nenner ist alsdann die Quadratwurzel aus dem Producte folgender Wurzelfactoren:

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt[4]{\frac{p_3}{p_0}} t - \sqrt[4]{2-\beta} + \sqrt[4]{-(2+\beta)} \right] \\ & \left[\sqrt[4]{\frac{p_3}{p_0}} t - \sqrt[4]{2-\beta} - \sqrt[4]{-(2+\beta)} \right] \\ & \left[\sqrt[4]{\frac{p_3}{p_0}} t + \sqrt[4]{2-\beta} + \sqrt[4]{-(2+\beta)} \right] \\ & \left[\sqrt[4]{\frac{p_3}{p_0}} t + \sqrt[4]{2-\beta} - \sqrt[4]{-(2+\beta)} \right] \\ & = \left[\sqrt[4]{\frac{p_3}{p_0}} t^2 + 1 + \sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}} \right] \left[\sqrt[4]{\frac{p_3}{p_0}} t^2 + 1 - \sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}} \right], \end{aligned}$$

und das Integral aus zwei Theilen zusammengesetzt, deren letzterer die Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \alpha)(x^2 - \beta)}}$$

besitzt, während der erstere ein bereits geschlossen integriertes Integrale ist.

7). 7. Nachdem die Reduction sämtlicher Integrale

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

auf Integrale von der Form

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{(x^2 - \alpha)(x^2 - \beta)}}$$

nachgewiesen wurde; wird zunächst folgender Satz zu erweisen seyn:

Sämtliche Integrale $\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{(x^2 - \alpha)(x^2 - \beta)}}$ sind in geschlossenen Ausdrücken integrierbar, sobald dasselbe von den Integralen $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \rho_1)(x^2 - \rho_2)}}$ und $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - \rho_1)(x^2 - \rho_2)}}$ gilt.

Diess leistet ganz einfach die schon öfters angewandte Betrachtung, ein Integral durch andere auszudrücken. Sey also

$$u = u^4 - (\rho_1 + \rho_2)u^2 + \rho_1\rho_2$$

der im Nenner vorkommende Ausdruck, alsdann gilt nach der gemachten Bemerkung die Gleichung:

$$u^n u^{\frac{1}{2}} = (n+2) \int \frac{u^{n+\frac{3}{2}} du}{u^{\frac{1}{2}}} - (\rho_1 + \rho_2)(n+1) \int \frac{u^{n+\frac{1}{2}} du}{u^{\frac{1}{2}}} + n\rho_1\rho_2 \int \frac{u^{n-\frac{1}{2}} du}{u^{\frac{1}{2}}};$$

d. i. wenn man die Integrale durch Symbole bezeichnet und

$$u_0 = \int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}, \quad u_1 = \int \frac{u du}{u^{\frac{1}{2}}}, \quad u_2 = \int \frac{u^2 du}{u^{\frac{1}{2}}} \quad \text{u. s. f.}$$

setzt, für $n=0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} u^{\frac{1}{2}} &= 2u_3 - (\rho_1 + \rho_2)u_1 \\ u u^{\frac{1}{2}} &= 3u_4 - 2(\rho_1 + \rho_2)u_2 + \rho_1\rho_2 u_0 \\ u^2 u^{\frac{1}{2}} &= 4u_5 - 3(\rho_1 + \rho_2)u_3 + 2\rho_1\rho_2 u_1 \\ u^3 u^{\frac{1}{2}} &= 5u_6 - 4(\rho_1 + \rho_2)u_4 + 3\rho_1\rho_2 u_2 \end{aligned}$$

u. s. f. Ist daher u_1 bekannt, so sind es u_3, u_5, u_7, \dots und wären u_0 und u_2 geschlossen integriert; so liessen sich die folgenden u_4, u_6, \dots durch dieselben bestimmen.

Nun ist u_1 für $u^2 = \omega$ der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - (\rho_1 + \rho_2)\omega + \rho_1\rho_2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{\sqrt{\left(\omega - \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2}\right)^2 + \rho_1\rho_2 - \frac{(\rho_1 + \rho_2)^2}{4}}},$$

welcher nach bekannten Regeln das Integral

$$= \frac{1}{2} \lambda \left[\omega - \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} + \sqrt{\omega^2 - (\rho_1 + \rho_2)\omega + \rho_1\rho_2} \right]$$

ergibt. Es ist daher unter der Voraussetzung, dass u_0, u_2 geschlossen bekannt seyen, jedes Integral u_n für ein $+n$ geschlossen bestimmbar. Ueberdiess ist

$$\begin{aligned} \frac{u^3}{u} &= u_1 - \rho_1 \rho_2 u_{-1} \\ \frac{u^4}{u^2} &= (\rho_1 + \rho_2) u_{-1} - 2\rho_1 \rho_2 u_{-3} \\ \frac{u^5}{u^3} &= -u_0 + 2(\rho_1 + \rho_2) u_{-2} - 4\rho_1 \rho_2 u_{-4} \end{aligned}$$

u. s. f. Sind somit u_{-1}, u_{-2} geschlossen integrirt; so gilt dasselbe von den weitern Integralen $u_{-3}, u_{-4} \dots$ u. s. f. Es ist

$$u_{-1} = \int \frac{du}{u\sqrt{(u^2-\rho_1)(u^2-\rho_2)}}$$

ein Ausdruck, der aus

$$-\int \frac{u du}{\sqrt{(1-u^2\rho_1)(1-u^2\rho_2)}}$$

entsteht, wenn statt $u, \frac{1}{u}$ gesetzt wird, und welches letztere Integral aus u , bestimmt werden kann, und man findet auf diese Weise

$$u_{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{\rho_1\rho_2}} \lambda \left[\frac{1}{u^2} - \frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_1\rho_2} + \sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - \frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_1\rho_2}\right)^2 + \frac{1}{\rho_1\rho_2} - \left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_1\rho_2}\right)^2} \right].$$

Analog lässt sich das Integral $\int \frac{du}{u^2\sqrt{(u^2-\rho_1)(u^2-\rho_2)}}$ durch u_2 bestimmen, wenn

statt $u, \frac{1}{u}$ gesetzt wird. Es übergeht dadurch in $-\int \frac{u^2 du}{\sqrt{(1-\rho_1 u^2)(1-\rho_2 u^2)}}$, ein der Form nach mit u , übereinstimmendes Integral. Und so wären alle Integrale $u_{\pm n}$ und mittelst ihrer die Integrale

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

geschlossen integrirbar, sobald man die erwähnte Eigenschaft von u_0 und u_2 nachzuweisen vermöchte.

8. Das Integral $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2-\rho_1)(x^2-\rho_2)}}$ lässt sich geschlossen bestimmen, sobald man

dasselbe mit dem Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\rho_1)(x^2-\rho_2)}}$ vermag. Was diese Zurückführung betrifft, so wurde bereits in Nr. 3) die Transformation des Integrals

$$\int \frac{v dv}{\sqrt{Av^3+Bv^2+Cv+D}}$$

auf die Form

$$\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \int \frac{(x^2-1) dx}{\sqrt{\sqrt{ad}[(x^2-1)^2 - (x^2-1) + 1] + \sqrt{bc}(x^2-1)}}$$

erwiesen, wo die Bedeutung der eingeführten Grössen aus frühern ersichtlich ist. Das Problem kömmt also darauf hinaus, statt des letztern Integrals das einfachere

$\int \frac{v dv}{\sqrt{Av^3+Bv^2+Cv+D}}$ zu betrachten. Dieses übergeht für $v = \frac{1+au}{b+u}$, wo a und b vorläufig noch zu bestimmende Grössen seyn mögen, in

$$(ab-1) \int \frac{(1+au) du}{(b+u) \sqrt{A(1+au)^3(b+u)+B(1+au)^2(b+u)^2+C(1+au)(u+b)^3+D(b+u)^4}}$$

oder wenn Kürze halber in der Entwicklung des Nenners

$$\mathfrak{B}_4 = Ab + Bb^2 + Cb^3 + Db^4$$

$$\mathfrak{B}_3 = (1+3ab)A + 2b(1+ab)B + b^2(3+ab)C + 4b^3D$$

$$\mathfrak{B}_2 = 3a(1+ab)A + (1+4ab+a^2b^2)B + 3b(1+ab)C + 6b^2D$$

$$\mathfrak{B}_1 = a^2(3+ab)A + 2a(1+ab)B + (1+3ab)C + 4bD$$

$$\mathfrak{B}_0 = a^3A + a^2B + aC + D$$

gesetzt wird, in

$$(ab-1) \int \frac{(1+au) du}{(b+u) \sqrt{\mathfrak{B}_0 u^4 + \mathfrak{B}_1 u^3 + \mathfrak{B}_2 u^2 + \mathfrak{B}_3 u + \mathfrak{B}_4}}$$

Ogleich es am ersten Anblick scheinen könnte, dass mehrere Annahmen für die Grössen a und b eine Reduction auf bereits bekannte Integrale oder auf die Form

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ zulassen; so wird man doch im Verlaufe der Behandlung, die zugleich eine geänderte Behandlung des Problems Nr. 6) ist, zur Einsicht gelangen; dass nur eine einzige Wahl der Bedingungsgleichungen eine solche Reduction einleite. Man statuirt zur Bestimmung von a und b die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_0} - 4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_3 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0} = b;$$

und setze $u = y+p$; wo für p vor der Hand ein Werth angenommen werde, welcher der Gleichung:

$$(\mathfrak{B}_1^2 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 + 8\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_3) p^3 + (\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_3 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^2) p^2 + (\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3) p - \mathfrak{B}_3^2\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_4 = 0$$

genügt. damit wenn

$$\mathfrak{B}_0 = D_0$$

$$4\mathfrak{B}_0 p + \mathfrak{B}_1 = D_1$$

$$6\mathfrak{B}_0 p^2 + 3\mathfrak{B}_1 p + \mathfrak{B}_2 = D_2$$

$$4\mathfrak{B}_0 p^3 + 3\mathfrak{B}_1 p^2 + 2\mathfrak{B}_2 p + \mathfrak{B}_3 = D_3$$

$$\mathfrak{B}_0 p^4 + \mathfrak{B}_1 p^3 + \mathfrak{B}_2 p^2 + \mathfrak{B}_3 p + \mathfrak{B}_4 = D_4$$

gesetzt wird; die Bedingung $\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2 = \frac{D_4}{D_0}$ erfüllt sey.

Durch obige Substitution übergeht die Gleichung

$$\mathfrak{B}_0 u^4 + \mathfrak{B}_1 u^3 + \mathfrak{B}_2 u^2 + \mathfrak{B}_3 u + \mathfrak{B}_4 = 0 \quad \text{in}$$

$$D_0 y^4 + D_1 y^3 + D_2 y^2 + D_3 y + D_4 = 0$$

und vermöge der zur Bestimmung von a und b aufgestellten Bedingung ist zugleich die Gleichung

$$8D_0^3 D_3 - 4D_0 D_1 D_2 + D_1^3 = 0$$

erfüllt, welche nach Substitution der für D angegebenen Werthe auf die Bedingung

$\frac{\mathfrak{B}_1^3}{\mathfrak{B}_0} - 4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_3 = 0$ führt. Jene Relation ist aber das Criterium, dass die

Gleichung $D_0 y^4 + D_1 y^3 + D_2 y^2 + D_3 y + D_4 = 0$ Wurzeln liefert, deren Werthe nach Absonderung eines allen gemeinsamen Theiles sich bezüglich des Zeichens unterscheiden. Es seyen nämlich $-A + \alpha$, $-A - \alpha$, $-A + \beta$, $-A - \beta$ die 4 Wurzeln der Gleichung

$$D_0 y^4 + D_1 y^3 + D_2 y^2 + D_3 y + D_4 = 0, \text{ mithin auch}$$

$$(y+A)^4 - (\alpha^2 + \beta^2)(y+A)^2 + \alpha^2\beta^2 = 0, \text{ und daher}$$

$$4A = \frac{D_1}{D_0}$$

$$6A^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{D_2}{D_0}$$

$$4A^3 - 2A(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{D_3}{D_0} = \frac{4A}{2} [2A^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{D_1}{D_0} \left[\frac{D_2}{D_0} - \frac{D_1^2}{4D_0^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{D_1}{D_0} \left[\frac{4D_0 D_2 - D_1^2}{4D_0^2} \right].$$

Mithin ist $8D_0^2 D_3 = 4D_0 D_1 D_2 - D_1^3$ als die obige Gleichung das Criterium der erwähnten Eigenschaft. Zur Bestimmung von A , α , β dienen die Gleichungen:

$$A = \frac{D_1}{4D_0}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{3D_1^2 - 8D_0 D_2}{8D_0^2}$$

$$\alpha^2 \beta^2 = \frac{16D_0^3 D_4 + 5D_1^4 - 16D_0 D_1^2 D_2}{16^2 D_0^3},$$

und folglich sind:

$$\alpha = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0 D_2 \pm \sqrt{16^2 D_0^3 D_4 + 5D_1^4 - 16D_0 D_1^2 D_2}}{2D_0^2}}$$

$$\pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0 D_2 \mp \sqrt{16^2 D_0^3 D_4 + 5D_1^4 - 16D_0 D_1^2 D_2}}{2D_0^2}}$$

$$\beta = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0 D_2 \pm \sqrt{16^2 D_0^3 D_4 + 5D_1^4 - 16D_0 D_1^2 D_2}}{2D_0^2}}$$

$$\pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0 D_2 \mp \sqrt{16^2 D_0^3 D_4 + 5D_1^4 - 16D_0 D_1^2 D_2}}{2D_0^2}}.$$

Es vereinfachen sich jedoch diese Grössen, so wie die angeführten Gleichungen, wie sich durch folgende Betrachtung der Werthe von p , die der angeführten Gleichung genügen, nachweisen lässt. Es übergeht nämlich die cubische Gleichung für p wegen

der Bedingung $\frac{\mathfrak{B}_1^3}{\mathfrak{B}_0} - 4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_3 = 0$ in eine quadratische, von der sich nachweisen lässt, dass $-\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}$ eine entsprechende Wurzel sey. Wird nämlich in derselben dieser Werth gesetzt; so übergeht sie in

$$\frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2}{16\mathfrak{B}_0^3} - \frac{\mathfrak{B}_1^3\mathfrak{B}_3}{8\mathfrak{B}_0^3} - \frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2^2}{4\mathfrak{B}_0^3} + \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{B}_0} - \mathfrak{B}_3^2 = 0,$$

und nach Substitution für $\mathfrak{B}_3 = \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_0} - \frac{\mathfrak{B}_1^3}{8\mathfrak{B}_0^2}$ ergibt der letzte Ausdruck wie erforderlich die Nulle. Man kann sich überdiess versichern, dass $p = -\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}$ eine repetirte Wurzel sey; so dass kein zweiter Werth eine Vieldeutigkeit der Grössen für D , α , β , A und mithin der Bedingungsgleichungen die a und b liefern, zulässt. Es ist nämlich der Coefficient

$$\frac{\frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{B}_0} + 8\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 - 4\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3}{\frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_0} + 2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_3 - 4\mathfrak{B}_1^3}$$

die Summe der negativen Wurzeln, deren eine $-\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}$ bestimmt ist. Somit ist die andere x durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0} - \frac{(\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_3 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3)}{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_3 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^3} \\ &= \frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 - 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 - 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2^2 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3}{4\mathfrak{B}_0[\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_3 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^3]}, \end{aligned}$$

und wenn im letzten Theil des Zählers statt \mathfrak{B}_3 sein Werth aus der aufgestellten Bedingungsgleichung gesetzt wird

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0} \cdot \frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_3 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^3}{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_3 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^3} \\ &= -\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}. \end{aligned}$$

Für diesen Werth von p ist aber sowohl D_1 als D_3 der Nulle gleich, A wird zu Null, α und β erhalten die Werthe:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \sqrt[3]{\frac{-D_2 \pm 2\sqrt{D_0 D_4}}{D_0}} \pm \sqrt[3]{\frac{-D_2 \mp 2\sqrt{D_0 D_4}}{D_0}} \\ \beta &= \pm \sqrt[3]{\frac{-D_2 + 2\sqrt{D_0 D_4}}{D_0}} \mp \sqrt[3]{\frac{-D_2 \mp 2\sqrt{D_0 D_4}}{D_0}}, \end{aligned}$$

wo entweder zugleich die obern oder untern Zeichen gelten, wodurch für α und β zusammen vier Werthe erhalten werden. Der Werth von D_2 ist für

$$p = -\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}, \quad D_2 = -\frac{3\mathfrak{B}_1^2 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2}{8\mathfrak{B}_0},$$

und eben so

$$D_4 = \frac{-3\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^2 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 - 64\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 256\mathfrak{B}_0^4\mathfrak{B}_4}{16^2\mathfrak{B}_0^3}$$

wird darin für \mathfrak{B}_3 sein Werth substituirt, so ergibt sich als Endresultat:

$$D_4 = \frac{5\mathfrak{B}_1^4 - 16\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 256\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_4}{16^2\mathfrak{B}_0^3}.$$

Der Werth von α und β lässt sich noch unter eine andere Form bringen, nämlich:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{B}_0}} \left[\sqrt{-\frac{D_2}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} + \sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-\frac{D_2}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} + \sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} \right] \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}_0}} \sqrt{-\frac{D_2}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}}, \end{aligned}$$

und analog der Werth von β ,

$$\begin{aligned} \beta &= \pm \frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{B}_0}} \left[\sqrt{-\frac{D_2}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} + \sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{-\frac{D_2}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} + \sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} \right] \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}_0}} \sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}}. \quad \text{Es ist} \end{aligned}$$

$$\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4 = \frac{4\mathfrak{B}_1^4 - 2 \cdot 16\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 64\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_3 - 256\mathfrak{B}_0^4\mathfrak{B}_4}{16^2\mathfrak{B}_0^3},$$

somit

$$\sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4} = \frac{\sqrt{(2\mathfrak{B}_1^2 - 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2)^2 - 16^2\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_4}}{16\mathfrak{B}_0},$$

und da

$$-\frac{D_2}{2} = \frac{-8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2 + 3\mathfrak{B}_1^2}{16\mathfrak{B}_0};$$

ergeben sich für α und β die Werthe

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{1}{4\mathfrak{B}_0} \sqrt{-8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2 + 3\mathfrak{B}_1^2 + \sqrt{(2\mathfrak{B}_1^2 - 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2)^2 - 16^2\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_4}} \\ \beta &= \pm \frac{1}{4\mathfrak{B}_0} \sqrt{-8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2 + 3\mathfrak{B}_1^2 - \sqrt{(2\mathfrak{B}_1^2 - 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2)^2 - 16^2\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_4}}. \end{aligned}$$

Das fragliche Integral ist somit

$$\begin{aligned} &(ab-1) \int \frac{1+au}{u+b} \frac{du}{\sqrt{[(u+b)^2 - a^2][(u+b)^2 - \beta^2]}} \\ &= a(ab-1) \int \frac{du}{\sqrt{[(u+b)^2 - a^2][(u+b)^2 - \beta^2]}} - (ab-1)^2 \int \frac{du}{(u+b) \sqrt{[(u+b)^2 - a^2][(u+b)^2 - \beta^2]}}. \end{aligned}$$

Wird im letzteren Integral statt $u+b$, $\frac{1}{z}$ gesetzt; so übergeht es in

$$(ab-1)^2 \int \frac{z dz}{\sqrt{(1-x^2 z^2)(1-\beta^2 z^2)}}$$

in ein nach bekannten Regeln bestimmbares Integral.

9. Nachdem bewiesen wurde, dass die elliptischen Integrale von der Form

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}},$$

worin n eine ganze Zahl vorstellt, geschlossen integrirbar seyn, sobald nur Eines derselben die erwähnte Eigenschaft besitzt, möge das einfachste, auf welches die andern zurückgeführt wurden, nämlich $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$ zum Gegenstand der weitern Untersuchung dienen. Es lässt sich überdiess wie aus Nr. 3) ersichtlich ist, das Integral

$$\int \frac{dv}{\sqrt{A+Bv+Cv^2+Dv^3}}, \quad \text{für welches } m=0 \text{ ist, auf die Form } \int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

bringen; welches Integral eine analoge Behandlung zulässt. Es lässt sich ferner beweisen, dass das erwähnte Integral durch die Annahme $x = \frac{a+by}{c+dy}$, wo a, b, c, d gehörig zu bestimmende Grössen vorstellen, auf kein bereits gelöstes zurückführbar sey; und es wäre zu abschweifend, dasselbe aus der Betrachtung der zur Bestimmung von a, b, c, d aufstellbaren Bedingungsgleichungen nachzuweisen, um so sehr als vorangegangene und nachfolgende Betrachtungen zur Einsicht führen werden.

Ich schreite deshalb zur Bestimmung des Integrals bei der Substitution

$$x = \rho + \frac{1 + my + ny^2}{1 + m_1 y + n_1 y^2},$$

worin ρ, m, n, m_1, n_1 unbestimmte Grössen vorstellen. Es übergeht dadurch in

$$\int \frac{[m-m_1+2(n-n_1)y+(nm_1-mn_1)y^2] dy}{\sqrt{[1+m_1y+n_1y^2][1+my+ny^2+(\rho-w_1)(1+m_1y+n_1y^2)][1+my+ny^2+(\rho-w_2)(1+m_1y+n_1y^2)][1-my+ny^2+(\rho-w_3)(1+m_1y+n_1y^2)]}}$$

wenn w_1, w_2, w_3 die drei Wurzeln der Gleichung $A+Bx+Cx^2+Dx^3=0$ vorstellen. Es müssen nun die fünf unbestimmten Grössen so gewählt werden, damit sich das Integral auf ein bekanntes zurückführen lässt. Um jedoch die verschiedenen Weisen kennen zu lernen, bei denen, falls es der Fall ist, diess erzielt werden kann; wird es zuerst nöthig seyn, Ausdrücke von 4ter Abmessung, deren zwei im Nenner vorkommen, als:

$$(1+m_1y+n_1y^2)(1+my+ny^2+(\rho-w_1)(1+m_1y+n_1y^2)) \quad \text{und} \\ (1+my+ny^2+(\rho-w_2)(1+m_1y+n_1y^2))(1+my+ny^2+(\rho-w_3)(1+m_1y+n_1y^2))$$

näher zu betrachten, um sodann zugleich die Bedingungsgleichungen zu kennen, bei denen diese Ausdrücke gewissen, die Lösung vermittelnden, Bedingungen genügen.

II.

Bestimmung der Wurzelfactoren eines Ausdrucks vierter Abmessung.

1. Der allgemeine Ausdruck einer Gleichung vierten Grades

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

kann durch Einführung zweier Hilfsbögen φ und φ_1 auf die Form

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2(\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1) y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

gebracht werden, wofern nur zwischen den Hilfsbögen und den Coefficienten die Relation

$$B_2 = -2\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi - 2\sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1 \quad ,$$

statuirt wird. In dieser Voraussetzung ist φ_1 eine willkürliche Function des Bogens φ , und dieser durch die Coefficienten bestimmt. Der Ausdruck

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2[\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1] y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

ist die Summe der beiden Theile

$$B_0 y^4 - 2\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi y^2 + B_4 \quad \text{und} \\ y [B_1 y^2 - 2\sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1 y + B_3].$$

Der erste Theil davon ergibt durch Zerfallen in seine Wurzelfactoren, wenn $\sqrt{-1}$ durch i vorgestellt wird, wie leicht zu ersehen:

$$B_0 y^4 - 2\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi y^2 + B_4 \\ = B_0 [y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{\varphi i}] [y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{-\varphi i}] [y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{\varphi i}] [y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{-\varphi i}],$$

und der zweite analog

$$y [B_1 y^2 - 2\sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1 + B_3] = B_1 y [y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_1}} e^{\varphi_1 i}] [y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_1}} e^{-\varphi_1 i}].$$

Es ist somit

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2[\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1] y^2 + B_3 y + B_4 \\ = B_0 [y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{\varphi i}] [y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{-\varphi i}] [y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{\varphi i}] [y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{-\varphi i}] \\ + B_1 y [y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_1}} e^{\varphi_1 i}] [y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_1}} e^{-\varphi_1 i}].$$

Weil φ_1 als beliebige Function von φ gewählt werden kann; so sey

$$\varphi_1 i = \varphi i + \frac{1}{4} \lambda \frac{B_3}{B_0} - \frac{1}{2} \lambda \frac{B_3}{B_0}$$

(wo das Symbol λ den natürlichen Logarithmus bezeichnet), oder für

$$\frac{1}{4} \lambda \frac{B_3}{B_0} - \frac{1}{2} \lambda \frac{B_3}{B_1} = \alpha i, \quad \varphi_1 i = \varphi i + \alpha i.$$

Durch diese Substitution übergeht der obige Ausdruck in

$$\begin{aligned} & B_0 \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{\varphi i} \right] \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{-\varphi i} \right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{\varphi i} \right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{-\varphi i} \right] \\ & + B_1 y \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_1}} e^{\varphi i + \alpha i} \right] \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_1}} e^{-(\varphi i + \alpha i)} \right]; \end{aligned}$$

und nach der Bedeutung von α in

$$\begin{aligned} & B_0 \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{\varphi i} \right] \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{-\varphi i} \right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{\varphi i} \right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} e^{-\varphi i} \right] \\ & + B_1 y \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_1}} e^{\varphi i} \right] \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_1}} e^{-\varphi i} \right]. \end{aligned}$$

Nach der frühern Voraussetzung ist

$$B_2 = -2\sqrt{B_0 B_4} \cos 2\varphi - 2\sqrt{B_1 B_3} \cos(\varphi + \alpha),$$

und für den Fall, dass $\alpha = 0$ wäre, ist $\cos \varphi$ durch eine quadratische Gleichung bestimmbar; für andere Werthe jedoch ist diese Gleichung vom vierten Grad. Man kann indessen jede Gleichung vierten Grades in eine andere transformiren, für welche $\alpha = 0$. Setzt man nämlich in der gegebenen Gleichung

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0, \quad y = p + z,$$

wodurch dieselbe, wenn Kürze halber

$$\begin{aligned} B_0 &= D_0 \\ 4B_0 p + B_1 &= D_1 \\ 6B_0 p^2 + 3B_1 p + B_2 &= D_2 \\ 4B_0 p^3 + 3B_1 p^2 + 2B_2 p + B_3 &= D_3 \\ B_0 p^4 + B_1 p^3 + B_2 p^2 + B_3 p + B_4 &= D_4 \end{aligned}$$

gesetzt wird, in $D_0 z^4 + D_1 z^3 + D_2 z^2 + D_3 z + D_4 = 0$ übergeht: so kann immer p aus einer Gleichung des dritten Grades so bestimmt werden, dass die Relation $\frac{D_4}{D_0} = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2$ erfüllt sey, wodurch zugleich die Gleichung $D_0 z^4 + D_1 z^3 + D_2 z^2 + D_3 z + D_4 = 0$ die Eigenschaft erlangt, dass in ihr $\alpha = 0$ ist. Diese Bedingung $\frac{D_4}{D_0} = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2$ gibt

$$\frac{B_0 p^4 + B_1 p^3 + B_2 p^2 + B_3 p + B_4}{B_0} = \left(\frac{4B_0 p^3 + 3B_1 p^2 + 2B_2 p + B_3}{4B_0 p + B_1} \right)^2,$$

und diesen Ausdruck entwickelnd, erhält man

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & 16B_0^2 p^6 + 8B_0 B_1 \Big] p^5 + \frac{B_1^2}{8B_1^2} \Big] p_4 + \frac{B_1^3}{B_0} \Big] p^3 \\ & + 16B_0 B_1 \Big] + 8B_1^2 \Big] + 8B_1 B_2 \Big] \\ & + 16B_0 B_2 \Big] + 16B_0 B_3 \Big] \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{B_1^2 B_2}{B_0} \Big] p^2 + \frac{B_1 B_3}{B_0} \Big] p + \frac{B_1^2 B_4}{B_0} \\ & + 8B_1 B_3 \Big] + 8B_1 B_4 \Big] \\ & + 16B_0 B_4 \Big] \\ & = 16B_0^2 p^6 + 24B_0 B_1 p^5 + 9B_1^2 \Big] p^4 + 12B_1 B_2 \Big] p^3 \\ & + 16B_0 B_2 \Big] + 8B_0 B_3 \Big] \\ & + 4B_1^2 \Big] p^2 + 4B_2 B_3 p + B_3^2, \\ & + 6B_1 B_3 \Big] \end{aligned}$$

d. i. für p folgende Gleichung 3ten Grades:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{B_1^2}{B_0} - 4B_1B_2 + 8B_0B_3 \right) p^3 + \left(\frac{B_1^2B_2}{B_0} + 2B_1B_3 + 16B_0B_4 - 4B_2^2 \right) p^2 \\ & + \left(\frac{B_1^2B_3}{B_0} + 8B_1B_4 - 4B_2B_3 \right) p + \frac{B_1^2B_4}{B_0} - B_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Da nun in der Gleichung $D_0z^4 + D_1z^3 + D_2z^2 + D_3z + D_4 = 0$ die Relation besteht

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} = \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_1}} \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{4}\lambda \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} - \frac{1}{2}\lambda \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_1}} = \alpha = 0;$$

so übergeht dieselbe in

$$\begin{aligned} & D_0 \left[z - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\varphi i} \right] \left[z - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-\varphi i} \right] \left[z + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\varphi i} \right] \left[z + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-\varphi i} \right] \\ & + D_1 z \left[z - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\varphi i} \right] \left[z - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-\varphi i} \right] = 0. \end{aligned}$$

Somit sind $z_1 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\varphi i}$ und $z_2 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-\varphi i}$ zwei Wurzeln der letzten Gleichung und es sind zugleich zwei Werthe von y bekannt, nämlich

$$\begin{aligned} y_1 &= p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\varphi i} \\ y_2 &= p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-\varphi i}. \end{aligned}$$

Die zwei andern Werthe von z ergeben sich aus der noch übrigen quadratischen Gleichung, die man erhält, wenn die Gleichung durch die bereits bestimmten Wurzelfactoren getheilt wird. Man erhält nach Weglassung dieser Factoren

$$\begin{aligned} & D_0 \left[z + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\varphi i} \right] \left[z + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-\varphi i} \right] + D_1 z = 0 \quad \text{d. i.} \\ & D_0 z^2 + (2\sqrt[4]{D_0^3 D_4} \cos \varphi + D_1) z + \sqrt[4]{D_0 D_4} = 0 \end{aligned}$$

und somit $z_3 = -\frac{1}{2} \left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi + \frac{D_1}{D_0} \right)$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi + \frac{D_1}{D_0} \right)^2 - 4\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}}$$

$$z_4 = -\frac{1}{2} \left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi + \frac{D_1}{D_0} \right)$$

$$- \frac{1}{2} \sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi + \frac{D_1}{D_0} \right)^2 - 4\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}}.$$

Es sind daher die zwei andern Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$y_3 = p - \frac{1}{2} \left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi + \frac{D_1}{D_0} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi + \frac{D_1}{D_0} \right)^2 - 4\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}}$$

$$y_4 = p - \frac{1}{2} \left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi + \frac{D_1}{D_0} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi + \frac{D_1}{D_0} \right)^2 - 4\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}}.$$

2.) Es erübrigt nur noch den Werth von φ als Function der Coefficienten zu bestimmen. Dieser Werth ergibt sich aus einer Gleichung zweiten Grades; daher gibt es zwei Werthe von φ und acht Werthe von z . Man kann sich nämlich durch wirkliche Substitution überzeugen, dass sowohl die z für den einen Werth von φ als für den andern der Gleichung $D_0 z^4 + D_1 z^3 + D_2 z^2 + D_3 z + D_4 = 0$ genügen. Der Werth von φ ist aus der Gleichung

$$2\sqrt{D_0 D_4} \cos 2\varphi + \sqrt{D_1 D_3} \cos \varphi = -D_2$$

zu bestimmen, d. i. aus

$$4\sqrt{D_0 D_4} \cos^2 \varphi + 2\sqrt{D_1 D_3} \cos \varphi + D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4} = 0$$

und ist

$$\cos \varphi = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}.$$

Seyen die Werthe von z für den ersten Werth von $\cos \varphi = \cos \varphi_1$ durch kleine und die für den zweiten Werth von $\cos \varphi = \cos \varphi_2$ durch grosse Buchstaben bezeichnet, so sind (wenn zur Abkürzung

$$\lambda = 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi_1 + \frac{D_1}{D_0}$$

$$\mu = \sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi_1 + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}} \text{ gesetzt wird),}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\varphi_1 i}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-\varphi_1 i}$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \mu$$

$z_4 = -\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \mu$ die vier erstenen Wurzeln der Gleichung, und diese Wurzeln genügen den nöthigen Bedingungen: es ist

$$\begin{aligned} -(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) &= -2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi_1 + 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cos \varphi_1 + \frac{D_1}{D_0} \\ &= \frac{D_1}{D_0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 = \\ &= \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \left(-\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \mu\right) e^{\varphi_1 i} \\ & \quad + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \left(-\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \mu\right) e^{\varphi_1 i} \\ & \quad + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \left(-\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} \mu\right) e^{-\varphi_1 i} \\ & \quad + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \left(-\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \mu\right) e^{-\varphi_1 i} + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} - 2\cos\varphi_1\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \cdot \lambda \\
 &= 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} - 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}(\cos 2\varphi_1 + 1) - 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \cdot \frac{D_1}{D_0} \cos\varphi_1 \\
 &= -2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \cos 2\varphi_1 - 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \cdot \frac{D_1}{D_0} \cos\varphi_1 \\
 &= -2\sqrt{\frac{D_0 D_4}{D_0^2}} \cos 2\varphi_1 - 2\sqrt{\frac{D_1 D_4}{D_0^2}} \cos\varphi_1 \\
 &= -\frac{1}{D_0} (2\sqrt{D_0 D_4} \cos 2\varphi_1 + 2\sqrt{D_1 D_4} \cos\varphi_1) = \frac{D_2}{D_0} \\
 &- (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4) \\
 &= - \left[\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \left(-\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu\right) \right. \\
 &\quad + \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \left(-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu\right) \\
 &\quad + \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \left(\frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{4}\mu^2\right) e^{\varphi_1 i} \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \left(\frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{4}\mu^2\right) e^{-\varphi_1 i} \right] \\
 &= - \left[-\lambda \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} + 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \left(\frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{4}\mu^2\right) \cos\varphi_1 \right] \\
 &= - \left[-\lambda \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} + 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \cos\varphi_1 \right] = \frac{D_1}{D_0} \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} = \frac{D_3}{D_0} \\
 z_1 z_2 z_3 z_4 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} (\lambda^2 - \mu^2) = \frac{D_4}{D_0}.
 \end{aligned}$$

Aber auch die Wurzeln Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 genügen der Gleichung; denn es ist, da sich die vorigen Reductionen ohne Substitution des Werthes von φ ergaben, analog

$$\begin{aligned}
 -(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) &= \frac{D_1}{D_0} \\
 Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4 &= \frac{D_2}{D_0} \\
 -(Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4) &= \frac{D_3}{D_0} \\
 Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 &= \frac{D_4}{D_0}.
 \end{aligned}$$

3.) Diess lässt vermuthen, dass die vier letzten Werthe von Z mit denen von z identisch sind, und wirklich lässt sich erweisen, dass

$$\begin{aligned}
 z_1 &= Z_3 \\
 z_2 &= Z_4 \\
 z_3 &= Z_1 \\
 z_4 &= Z_2.
 \end{aligned}$$

Es ist, für $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} = a$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = b$$

$$Z_1 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a - b + i \sqrt{1 - (a+b)^2})$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} \left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a+b) + \frac{D_1}{D_0} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a+b) + \frac{D_1}{D_0} \right)^2 - 4 \sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

Nun ist nach frühern $\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \cdot \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} = \frac{D_1}{D_0}$, mithin

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} a - \frac{1}{2} \frac{D_1}{D_0} = -\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} a \quad \text{und folglich}$$

$$(-a-b) \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} = -\frac{1}{2} \left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a+b) + \frac{D_1}{D_0} \right).$$

Durch diese Bedingung wird $Z_1 = z_3$, so wie

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} [(-a-b) - i \sqrt{1 - (a+b)^2}] &= -\frac{1}{2} \left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a+b) + \frac{D_1}{D_0} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a+b) + \frac{D_1}{D_0} \right)^2 - 4 \sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}, \end{aligned}$$

d. i. $Z_2 = z_4$.

Eben so besteht die Beziehung $-\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} a = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} a - \frac{1}{2} \frac{D_1}{D_0}$, d. h.

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a+b) = -\frac{1}{2} \left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a-b) + \frac{D_1}{D_0} \right),$$

woraus folgt: dass

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} [(-a+b) + i \sqrt{1 - (a-b)^2}] &= -\frac{1}{2} \left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a-b) + \frac{D_1}{D_0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a-b) + \frac{D_1}{D_0} \right)^2 - 4 \sqrt{\frac{D_4}{D_0}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} [(-a+b) - i \sqrt{1 - (a-b)^2}] &= -\frac{1}{2} \left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a-b) + \frac{D_1}{D_0} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\left(2 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} (-a-b) + \frac{D_1}{D_0} \right)^2 - 4 \sqrt{\frac{D_4}{D_0}}} \end{aligned}$$

d. i. $Z_3 = z_1$, $Z_4 = z_2$.

4.) Hiedurch lassen sich die vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung unter einer viel bequemern Form darstellen. Ist nämlich die gegebene Gleichung durch

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

vorge stellt, und man bestimmt p mittelst der Gleichung:

$$\left(\frac{B_1^3}{B_0} - 4B_1B_2 + 8B_0B_3\right)p^3 + \left(\frac{B_1^2B_2}{B_0} + 2B_1B_3 + 16B_0B_4 - 4B_2^2\right)p^2 + \left(\frac{B_1^2B_3}{B_0} + 8B_1B_4 - 4B_2B_3\right)p + \frac{B_1^2B_4}{B_0} - B_3^2 = 0,$$

bildet sodann folgende Grössen:

$$\begin{aligned} D_0 &= B_0 \\ D_1 &= 4B_0p + B_1 \\ D_2 &= 6B_0p^2 + 3B_1p + B_2 \\ D_3 &= 4B_0p^3 + 3B_1p^2 + 2B_2p + B_3 \\ D_4 &= B_0p^4 + B_1p^3 + B_2p^2 + B_3p + B_4, \end{aligned}$$

so sind die vier Wurzeln durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned} y_1 &= p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{i \arccos} \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}} \right] \\ y_2 &= p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-i \arccos} \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}} \right] \\ y_3 &= p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{i \arccos} \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}} \right] \\ y_4 &= p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-i \arccos} \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}} \right]. \end{aligned}$$

5.) Da der Werth von p durch eine cubische Gleichung bestimmt wird; so entsteht die Unbestimmtheit, ob nicht verschiedene Werthe von p auch verschiedene Werthe von y liefern; so dass die Wurzeln je nach den Werthen von p a) die Lösungen verschiedener, etwa in Einzelheiten differenter Gleichungen ergeben, oder b) ob der Werth von y , je nach verschiedenen Werthen von p , ein anderer wird, der Art: dass für ein bestimmtes p ein y identisch wird mit einem andern y für einen andern Werth von p , oder c) ob für sämtliche Werthe von p dasselbe y stets denselben Werth behält. Um zu erfahren, in welchem Fall letztere Eigenthümlichkeit stattfindet, wird es nöthig die Anzahl der Werthe von p zu suchen, für die y stets denselben Werth erhalten kann.

Der allgemeine Werth von y ist nach früheren

$$\begin{aligned} y &= p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - \frac{4D_2}{\sqrt{D_0D_4}}} + 8 \right] \\ &+ \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \left[\frac{1}{8} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - \frac{4D_2}{\sqrt{D_0D_4}}} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - \frac{4D_2}{\sqrt{D_0D_4}}} + 8 \right]. \end{aligned}$$

Vermöge der Bedingung $\sqrt{D_0 D_3} = \frac{D_0 D_3}{D_1}$ ist

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} &= \frac{D_1}{D_0} \sqrt{\frac{D_0}{D_4}} \\ \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - \frac{4 D_2}{\sqrt{D_0 D_4}} + 8} &= \sqrt{\frac{D_1^2}{D_0^2} \sqrt{\frac{D_0}{D_4}} - \frac{4 D_1 D_2}{D_0 D_1} \sqrt{\frac{D_0}{D_4}} + \frac{8 D_3}{D_1} \sqrt{\frac{D_0}{D_4}}} \\ &= \sqrt{\frac{D_4}{D_0} \sqrt{\frac{D_1^2 - 4 D_0 D_1 D_2 + 8 D_0^2 D_3}{D_0^2 D_1}}} \end{aligned}$$

Es ist $D_1^2 = 4 B_0^3 p^3 + 3.16 B_0^2 B_1 p^2 + 3.4 B_0 B_1^2 p + B_1^3$

$- 4 D_0 D_1 D_2 = - 6.16 B_0^3 p^3 - 8.9 B_0^2 B_1 p^2 - (3.4 B_0 B_1^2 + 16 B_0^2 B_2) p - 4 B_0 B_1 B_2$

$8 D_0^2 D_3 = 32 B_0^3 p^3 + 24 B_0^2 B_1 p^2 + 16 B_0^2 B_2 p + 8 B_0 B_3$

somit $D_1^2 - 4 D_0 D_1 D_2 + 8 D_0^2 D_3 = B_1^2 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3$

und dieser Ausdruck ist der erste Coefficient in der cubischen Gleichung für p ; der der Kürze halber durch A_3 vorgestellt sey. Dadurch übergeht

$$\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - \frac{4 D_2}{\sqrt{D_0 D_4}} + 8} \text{ in } \sqrt{\frac{D_0}{D_4}} \sqrt{\frac{A_3}{D_0^2 D_1}},$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} \cos \varphi &= -\frac{1}{4} \frac{D_1}{D_0} \pm \frac{1}{4 D_0} \sqrt{\frac{A_3}{D_1}} = \frac{1}{4 D_0} \left[\pm \sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1 \right], \\ \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \cos^2 \varphi &= \frac{1}{16 D_0^2} \left(D_1^2 \mp 2 D_1 \sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + \frac{A_3}{D_1} \right) \\ \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \sin^2 \varphi &= \frac{1}{16 D_0^2} \left(\frac{16 D_0^2 D_3}{D_1} - D_1^2 \pm 2 \sqrt{A_3 D_1} - \frac{A_3}{D_1} \right) \\ &= \frac{1}{16 D_0^2 D_1} [16 D_0^2 D_3 - D_1^2 \pm 2 \sqrt{A_3 D_1} D_1 - A_3], \\ \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \sin \varphi \sqrt{-1} &= \frac{1}{4 D_0 \sqrt{D_1}} \sqrt{D_1^2 - 16 D_0^2 D_3 \mp 2 \sqrt{A_3 D_1} D_1 + A_3} \end{aligned}$$

und es ist zugleich nach früheren

$$D_1^2 - 16 D_0^2 D_3 + A_3 = 4(3 B_0 B_1^2 - 8 B_0^2 B_2) p + 2(B_1^2 - 4 B_0^2 B_3 - 2 B_0 B_1 B_2).$$

Durch diese Werthe übergeht der allgemeine Ausdruck der Wurzeln in

$$\begin{aligned} y &= -\frac{B_1}{4 B_0} \pm \frac{1}{4 B_0} \sqrt{\frac{A_3}{D_1}} \\ &\quad \pm \frac{1}{4 B_0} \sqrt{\frac{4(3 B_0 B_1^2 - 8 B_0^2 B_2) p + 2(B_1^2 - 4 B_0^2 B_3 - 2 B_0 B_1 B_2) \mp 2 D_1 \sqrt{A_3 D_1}}{D_1}} \end{aligned}$$

Sey der Werth von y für einen zweiten Werth von p z. B. p durch g vorgestellt, und es werde Kürze halber

$\sqrt{A_3} \pm \sqrt{4(3 B_0 B_1^2 - 8 B_0^2 B_2) p + 2(B_1^2 - 4 B_0^2 B_3 - 2 B_0 B_1 B_2) \mp 2(4 B_0 p + B_1) \sqrt{A_3} (4 B_0 p + B_1)} = \eta$
gesetzt; alsdann ist

$$g = -B_1 + \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}}$$

$$4B_0(y-g) = \pm \frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{4B_0p + B_1}} + \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}}$$

$$+ \sqrt{\frac{4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)p + 2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) \pm \sqrt{A_3}(4B_0p + B_1)^2}}{4B_0p + B_1}}$$

Man nehme nun an, p sey eine Wurzel der Gleichung:

$$(B_1^3 - 4B_0B_1B_2 + 8B_0^2B_3)p^3 + (B_1^2B_2 + 2B_0B_1B_3 + 16B_0^2B_4 - 4B_0B_2^2)p^2 + (B_1^2B_3 + 8B_0B_1B_4 - 4B_0B_2B_3)p + B_1^2B_4 - B_0B_3^2 = 0,$$

mithin g eine Wurzel der Gleichung

$$B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0$$

und es sey $y = g$; alsdann liefert

$$\mathfrak{P}^2(4B_0p + B_1) = [4B_0p + B_1] [\pm \sqrt{A_3} \pm \sqrt{4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)p + 2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) \mp 2(4B_0p + B_1)^2 \sqrt{A_3}}]$$

diejenigen Werthe von p für die die Wurzeln dieselben Werthe behalten.

6.) Zuvörderst leuchtet ein, dass im Werthe von y_1 , so wie in dem von y_2, y_3, y_4 p stets ein und dasselbe bleibt; es sey ferner Kürze halber

$$4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2) = \alpha$$

$$2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) = \beta$$

$$4B_0y + B_1 = z;$$

alsdann ist bei nachfolgendem Gang der Operationen p durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt, und ändert nicht seinen Werth, wenn z seine vier verschiedenen Werthe annimmt. Es ist nämlich:

$$(z\sqrt{D_1} \mp \sqrt{A_3})^2 = \alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3D_1}$$

$$\pm 2\sqrt{A_3D_1}(D_1 - z) = \alpha p + \beta - z^2D_1 - A_3$$

$$4A_3(16B_0^3p^2 + 8B_0B_1p + B_1^2 - 8B_0zp - 2B_1z + z^2)(4B_0p + B_1)$$

$$= (\alpha p + \beta - 4z^2B_0p - z^2B_1 - A_3)^2$$

$$16^2 A_3 B_0^3 p^3 + (192 A_3 B_0^2 B_1 - 128 A_3 B_0^2 z - (\alpha - 4 B_0 z^2) p^2$$

$$+ (32 A_3 B_0 B_1 (B_1 - z) + 16 A_3 B_0 (B_1 - z)^2 - 2(\alpha - 4 B_0 z^2) \cdot$$

$$\cdot (\beta - z^2 B_1 - A_3)) p + 4 A_3 B_1 (B_1 - z)^2 - (\beta - A_3 - z^2 B_1)^2 = 0.$$

Sey p ein solcher Werth von p , für welchen y_1, y_2, y_3, y_4 Wurzeln der Gleichung

$$B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0$$

vorstellen, alsdann darf sich der Werth von p nicht ändern, wenn statt z einer der folgenden Werthe:

$$\frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}} = \frac{\pm \sqrt{A_3} + \sqrt{\alpha p + \beta - 2(4B_0p + B_1)^2 \sqrt{A_3}}}{\sqrt{4B_0p + B_1}}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_2}{\sqrt{4B_0p+B_1}} = \frac{+\sqrt{A_3} - \sqrt{\alpha p + \beta} - 2(4B_0p+B_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{A_3}}{\sqrt{4B_0p+B_1}}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_3}{\sqrt{4B_0p+B_1}} = \frac{-\sqrt{A_3} + \sqrt{\alpha p + \beta} + 2(4B_0p+B_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{A_3}}{\sqrt{4B_0p+B_1}}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_4}{\sqrt{4B_0p+B_1}} = \frac{-\sqrt{A_3} - \sqrt{\alpha p + \beta} + 2(4B_0p+B_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{A_3}}{\sqrt{4B_0p+B_1}}$$

gesetzt wird. Aber der Werth von p stellt bei dieser Substitution diejenigen Werthe vor, für welche $y - g$ zu Null wird; d. i. Werthe, für die sich der Werth der Wurzeln nicht ändert. Zugleich zeigt die Gleichung:

$$16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \left[192 A_3 B_0^2 B_1 - 128 A_3 \frac{B_0^3 \mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p+B_1}} \right. \\ \left. - \left(\alpha - \frac{4B_0 \mathfrak{P}^2}{4B_0p+B_1} \right)^2 \right] p^2 + \left[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p+B_1}} \right) \right. \\ \left. + 16 A_3 B_0 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p+B_1}} \right)^2 - 2 \left(\alpha - \frac{4B_0 \mathfrak{P}^2}{4B_0p+B_1} \right) \left(\beta - A_3 \frac{-B_1 \mathfrak{P}^2}{4B_0p+B_1} \right) \right] p \\ \left. + 4 A_3 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p+B_1}} \right)^2 - \left(\beta - A_3 \frac{-B_1 \mathfrak{P}^2}{4B_0p+B_1} \right)^2 = 0, \right.$$

dass diese Werthe bloß bezüglich der verschiedenen \mathfrak{P} variiren könnten, welche Verschiedenheit nach frühern nicht besteht; d. h. dass die drei Werthe von p für alle Wurzeln dieselben bleiben. Somit ist der Beweis geführt, dass die Wurzeln für jeden Werth von p aus der bestimmten Hilfsgleichung dieselben Werthe behalten; denn da jeder Werth der obigen Gleichung der Hilfsgleichung entsprechen muss, diese aber nur drei Werthe liefert, so muss die gefundene Gleichung mit der Hilfsgleichung identisch seyn.

7.) Man kann jedoch gegen die vorige Deduction einige Zweifel erheben, indem man bei einer andern Entwicklung leicht zu einer Gleichung sechsten Grades oder gar des zwölften gelangt. So gibt folgende Entwicklung eine Gleichung sechsten Grades:

$$z\sqrt{D_1} = \pm \sqrt{A_3} \pm \sqrt{\alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3D_1}}$$

$$z_2 D_1 = A_3 + \alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3D_1}$$

$$\pm 2\sqrt{A_3(\alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3D_1})}$$

$$(4B_0z^2 - \alpha)p + B_1z^2 - \beta - A_3 \pm 2D_1\sqrt{A_3D_1} =$$

$$\pm 2\sqrt{A_3(\alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3D_1})}$$

$$(4B_0z^2 - \alpha)^2 p^2 + 2(4B_0z^2 - \alpha)(B_1z^2 - \beta - A_3)p$$

$$+ (B_1z^2 - \beta - A_3)^2 \pm 4[(4B_0z^2 - \alpha)p + B_1z^2 - \beta + A_3][4B_0p + B_1]\sqrt{A_3D_1}$$

$$+ 4^2 B_0^3 A_3 p^3 + 3 \cdot 4^2 B_0^2 B_1 A_3 p^2 + 3 \cdot 4^2 B_0 B_1^2 A_3 p + 4B_1^3 A_3$$

$$= 4A_3(\alpha p + \beta)$$

$$\begin{aligned}
 & 4^4 B_0^3 A_3 p^3 + [3 \cdot 4^3 B_0^3 B_1 A_3 + (4 B_0 z^2 - \alpha)^2] p^2 \\
 & + [3 \cdot 4^2 B_0 B_1^2 A_3 + 2(4 B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) - 4\alpha A_3] p \\
 & + 4B_1^3 A_3 + (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 - 4A_3 \beta = \mp 4D_1 \sqrt{A_3 D_1} [(4B_0 z^2 - \alpha)p + B_1 z^2 - \beta + A_3].
 \end{aligned}$$

Das Quadrat der so angeschriebenen Theile ist:

$$\begin{aligned}
 & 4^6 B_0^5 A_3^2 p^6 + [2 \cdot 4^4 B_0^3 A_3 (3 \cdot 4^3 B_0^3 B_1 A_3 + (4 B_0 z^2 - \alpha)^2) \\
 & - 4^5 B_0^3 A_3 (4 B_0 z^2 - \alpha)^2] p^5 + [2 \cdot 4^4 B_0^3 A_3 (3 \cdot 4^2 B_0 B_1^2 A_3 \\
 & + 2(4 B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) - 4\alpha A_3) + (3 \cdot 4^3 B_0^3 B_1 A_3 + (4 B_0 z^2 - \alpha)^2)^2 \\
 & - 2 \cdot 4^5 B_0^3 A_3 (4 B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta + A_3) - 3 \cdot 4^4 B_0^3 B_1 A_3 (4 B_0 z^2 - \alpha)^2] p^4 \\
 & + [2 \cdot 4^4 B_0^3 A_3 (4 B_1^3 A_3 + (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 - 4A_3 \beta) + 2(3 \cdot 4^3 B_0^3 B_1 A_3 \\
 & + (4 B_0 z^2 - \alpha)^2)(3 \cdot 4^2 B_0 B_1^2 A_3 + 2(4 B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) - 4\alpha A_3) \\
 & - 4^5 B_0^3 A_3 (B_1 z^2 - \beta + A_3)^2 - 6 \cdot 4^4 B_0^3 B_1 A_3 (4 B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta + A_3) \\
 & - 3 \cdot 4^3 B_0 B_1^2 A_3 (4 B_0 z^2 - \alpha)^2] p^3 + [2(3 \cdot 4^2 B_0^3 B_1 A_3 + (4 B_0 z^2 - \alpha)^2) \\
 & \cdot (4 B_1^3 A_3 + (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 - 4A_3 \beta) + (3 \cdot 4^2 B_0 B_1^2 A_3 + 2(4 B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) \\
 & - 4\alpha A_3)^2 - 3 \cdot 4^4 B_0^3 B_1 A_3 (B_1 z^2 - \beta + A_3)^2 - 6 \cdot 4^3 B_0 B_1^2 A_3 (4 B_0 z^2 - \alpha) \\
 & (B_1 z^2 - \beta + A_3) - 4^2 B_1^3 A_3 (4 B_0 z^2 - \alpha)^2] p^2 + [2(3 \cdot 4^2 B_0 B_1^2 A_3 \\
 & + 2(4 B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) - 4\alpha A_3)(4 B_1^3 A_3 + (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 \\
 & - 4A_3 \beta) - 3 \cdot 4^4 B_0 B_1^2 A_3 (B_1 z^2 - \beta + A_3)^2 \\
 & - 2 \cdot 4^2 B_1^3 A_3 (4 B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta + A_3)] p + (4 B_1^3 A_3 \\
 & + (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 - 4A_3 \beta)^2 - 4^2 B_1^3 A_3 (B_1 z^2 - \beta + A_3)^2 \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

Es wäre nun da leicht möglich, dass unter den sechs Werthen von p , für welche die Wurzeln dieselben Werthe erhalten, die dreie der Hilfsgleichung vorkommen, dass aber die früher entwickelte cubische Gleichung nicht sämmtlich dieselben Werthe mit der Hilfsgleichung besitzt. Allein zerfällt man die gefundene Gleichung sechsten Grades in ihre beiden Factoren, so überzeugt man sich, dass dieselbe aus nachstehenden Ausdrücken besteht:

$$\begin{aligned}
 & \left(16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \left[192 A_3 B_0^3 B_1 - 128 \frac{A_3 B_0^2 \mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right] p^2 + \left[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 16 A_3 B_0 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - 2 \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \right] p \right. \\
 & \left. + 4 A_3 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right) \\
 & \left(16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \left[192 A_3 B_0^3 B_1 + 128 \frac{A_3 B_0^2 \mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right] p^2 + \left[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 + \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right) \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 16 A_3 B_0 \left(B_1 + \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - 2 \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right)] p \\
& + 4 A_3 B_1 \left(B_1 + \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2);
\end{aligned}$$

also aus drei paar gleichen Wurzeln, da dieselben bloss durch die Verschiedenheit von \mathfrak{P} . d. i. von \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 variiren, welche Verschiedenheit nur scheinbar ist.

Eben so könnte man leicht eine Gleichung zwölften Grades deduciren und fände analog nachstehende Factoren:

$$\begin{aligned}
& \left(16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \left[192 A_3 B_0^2 B_1 - 128 \frac{A_3 B_0^2 \mathfrak{P}_1}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}_1^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right] p^2 + \left[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 16 A_3 B_0 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - 2 \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}_1^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}_1^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \right] p \right. \\
& \quad \left. + 4 A_3 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}_1^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right) \\
& \left(16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \left[192 A_3 B_0^2 B_1 - 128 \frac{A_3 B_0^2 \mathfrak{P}_2}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}_2^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right] p^2 + \left[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_2}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 16 A_3 B_0 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_2}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - 2 \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}_2^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}_2^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \right] p \right. \\
& \quad \left. + 4 A_3 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_2}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}_2^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right) \\
& \left(16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \left[192 A_3 B_0^2 B_1 - 128 \frac{A_3 B_0^2 \mathfrak{P}_3}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}_3^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right] p^2 + \left[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_3}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 16 A_3 B_0 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_3}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2 \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}_3^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}_3^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \right] p \right. \\
& \quad \left. + 4 A_3 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_3}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}_3^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right) \\
& \left(16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \left[192 A_3 B_0^2 B_1 - 128 \frac{A_3 B_0^2 \mathfrak{P}_4}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}_4^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right] p^2 + \left[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_4}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 16 A_3 B_0 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - 2 \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}_1^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}_1^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \Big] p \\
 &+ 4 A_3 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 - \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}_1^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 = 0,
 \end{aligned}$$

also abermals vier Gruppen von drei verschiedenen Werthen, welche Gruppen einander gleich sind und wodurch viceversa der Beweis ersichtlich wäre; dass verschiedene Werthe von \mathfrak{P} den Werth von p nicht ändern, wenn man wie natürlich voraussetzt, dass jeder der verschiedenen Werthe von p auch ein möglicher Werth der Hilfsleichung sey und daher in derselben erscheinen müsse.

III.

Betrachtung repetirter Wurzelfactoren.

1. Im frühern wurden die Wurzeln der Gleichung

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

unter der allgemeinen Form

$$y = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\pm i \arccos \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} \right]}$$

bestimmt, und darin ist p durch die Gleichung

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{B_1^3}{B_0} - 4 B_1 B_2 + 8 B_0 B_3 \right) p^3 + \left(\frac{B_1^2 B_2}{B_0} + 2 B_1 B_3 + 16 B_0 B_4 - 4 B_2^2 \right) p^2 \\
 &+ \left(\frac{B_1^2 B_3}{B_0} + 8 B_1 B_4 - 4 B_2 B_3 \right) p + \frac{B_1^2 B_4}{B_0} - B_3^2 = 0
 \end{aligned}$$

und die Grössen D durch die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 D_0 &= B_0 \\
 D_1 &= 4 B_0 p + B_1 \\
 D_2 &= 6 B_0 p^2 + 3 B_1 p + B_2 \\
 D_3 &= 4 B_0 p^3 + 3 B_1 p^2 + 2 B_2 p + B_3 \\
 D_4 &= B_0 p^4 + B_1 p^3 + B_2 p^2 + B_3 p + B_4
 \end{aligned}$$

gegeben. Es erübrigt noch die Bedingungsleichungen zwischen den Coefficienten anzugeben, wenn die Wurzeln gewisse Bedingungen erfüllen sollen. Es sey zunächst die Bedingung: dass die Gleichung zwei gleiche Wurzeln enthalte.

Die gegebene Gleichung übergang für

$$B_2 = -2 (\sqrt{B_0 B_3} \cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3} \cos \varphi_1), \text{ wenn darin}$$

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2} \lambda \frac{B_3}{B_0} - \frac{1}{2} \lambda \frac{B_3}{B_1} = \varphi + x \text{ gesetzt wird in}$$

$$\begin{aligned}
 &B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2 (\sqrt{B_0 B_3} \cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3} \cos (\varphi + x)) y^2 + B_3 y + B_4 = 0 \\
 &= B_0 \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_0}} e^{i\varphi} \right] \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_0}} e^{-i\varphi} \right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_0}} e^{i\varphi} \right] \left[y + \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_0}} e^{-i\varphi} \right] \\
 &+ B_1 y \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_0}} e^{i\varphi} \right] \left[y - \sqrt[4]{\frac{B_3}{B_0}} e^{-i\varphi} \right].
 \end{aligned}$$

Sollen nun zwei Wurzeln dieser Gleichung einander gleich seyn; so findet diese statt, für

$$\text{a) } \varphi = 0$$

oder b) $\varphi = \pi$. Der Werth von φ ist durch die

Gleichung

$$\cos \varphi = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}$$

bestimmt, und man hat daher für den ersten Werth von

$$\varphi, \quad 1 = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}$$

und für den zweiten

$$-1 = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}$$

welche Gleichungen wegen der Bedingung

$$2\sqrt{D_0 D_4} \cos 2\varphi + 2\sqrt{D_1 D_3} \cos \varphi + D_2 = 0 \text{ in der Form}$$

$$2\sqrt{D_0 D_4} + 2\sqrt{D_1 D_3} + D_2 = 0 \text{ repräsentirt sind.}$$

Auf dasselbe Resultat führt die allgemeine Form der Wurzeln, die für die vier Fälle

$$\text{a) } -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

$$\text{b) } -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = -1$$

$$\text{c) } -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

$$\text{d) } -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = -1$$

zwei gleiche Wurzeln liefert. Jede dieser vier Bedingungen führt auf dieselbe Gleichung zur Bestimmung von p ; denn es ergibt sich aus

$$-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

nach gewöhnlichen Operationen

$$1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{2} \frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} = \frac{1}{2} \frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - \frac{1}{4} \frac{D_2}{\sqrt{D_0 D_4}} + \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{D_0 D_4} \pm 2\sqrt{D_1 D_3} + D_2 = 0$$

$$4 D_0 D_4 + 4 D_1 D_3 \pm 8\sqrt{D_0 D_1 D_3 D_4} = D_2^2$$

$$64 D_0 D_1 D_3 D_4 = D_2^2 + 16 D_0^2 D_4^2 + 16 D_1^2 D_3^2 - 8 D_0 D_2^2 D_4 - 8 D_1 D_2^2 D_3$$

$$+ 32 D_0 D_1 D_3 D_4$$

$$8 D_1 D_3 [4 D_0 D_4 + D_2^2 - 2 D_1 D_3] = (D_2^2 - 4 D_0 D_4)^2.$$

Es ist $4 D_0 D_4 = 4 B_0^2 p^4 + 4 B_0 B_1 p^2 + 4 B_0 B_2 p^2 + 4 B_0 B_3 p + 4 B_0 B_4$
 $D_2^2 = 36 B_0^2 p^4 + 36 B_0 B_1 p^3 + (9 B_1^2 + 12 B_0 B_2) p^2 + 6 B_1 B_2 p + B_2^2$
 $- 2 D_1 D_3 = - 32 B_0^2 p^4 - 32 B_0 B_1 p^3 - 2 (3 B_1^2 + 8 B_0 B_2) p^2$
 $- 2 (2 B_1 B_2 + 4 B_0 B_3) p - 2 B_1 B_3$
 $4 D_0 D_4 + D_2^2 - 2 D_1 D_3 = 8 B_0^2 p^4 + 8 B_0 B_1 p^3 + 3 B_1^2 p^2$
 $+ (2 B_1 B_2 - 4 B_0 B_3) p + 4 B_0 B_4 + B_2^2 - 2 B_1 B_3$.

Zugleich ist $8 D_1 D_3 = 8 \cdot 16 B_0^2 p^4 + 8 \cdot 16 B_0 B_1 p^3$
 $+ 8 (3 B_1^2 + 8 B_0 B_2) p^2 + 8 (2 B_1 B_2 + 4 B_0 B_3) p + 8 B_1 B_3$,

mithin das Product

$$8 D_1 D_3 [4 D_0 D_4 + D_2^2 - 2 D_1 D_3] =$$

$2 \cdot 8^2 B_0^2 p^4 + 4 \cdot 8^2 B_0^2 B_1 p^3 + 6 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2$	$\left. \begin{array}{l} p^4 \\ 2 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0^2 B_2^2 \\ 8^2 B_0^2 B_2 \end{array} \right\}$	p^6
$+ 4 \cdot 8^2 B_0^2 B_1 B_2$	$\left. \begin{array}{l} p^5 + 8^2 B_0^2 B_3 \\ - 8^2 B_0^2 B_3 \\ 6 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2 \\ 8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0^2 B_3 \end{array} \right\}$	$p^5 + 8^2 B_0^2 B_1 B_3$
$- 8^2 B_0^2 B_3$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0^2 B_2^2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0^2 B_1 B_3 \\ 4 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2 B_2 \\ - 8^2 B_0^2 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0^2 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0^2 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$p^4 + 8^2 B_0^2 B_1 B_3$
$6 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2^2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_3 \\ 6 \cdot 8^2 B_1^2 B_2 \\ - 3 \cdot 4 \cdot 8 B_0 B_1^2 B_3 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2^2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0^2 B_2 B_3 \\ 6 \cdot 8^2 B_1^2 B_2 \\ 3 \cdot 4 \cdot 8 B_0 B_1^2 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1^2 B_3 \end{array} \right\}$	p^3
$3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$p^2 + 8^2 B_0 B_1 B_2 B_3$
$8^2 B_0^2 B_1 B_2$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$p + 4 \cdot 8 B_0 B_1 B_3 B_3$
$2 \cdot 8^2 B_0^2 B_1 B_2$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$8 B_1 B_2^2 B_3$
$4 \cdot 8^2 B_0^2 B_3$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$- 2 \cdot 8 B_1^2 B_3^2$
$+ 3 \cdot 4 \cdot 8 B_0 B_1^2 B_3$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$p^2 + 8^2 B_0 B_1 B_2 B_3$
$3 \cdot 8 B_1^2 B_2^2$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$p + 4 \cdot 8 B_0 B_1 B_3 B_3$
$- 6 \cdot 8 B_1^2 B_3$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$8 B_1 B_2^2 B_3$
$4 \cdot 8^2 B_0^2 B_2 B_4$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$- 2 \cdot 8 B_1^2 B_3^2$
$8^2 B_0 B_2^2$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$p^2 + 8^2 B_0 B_1 B_2 B_3$
$- 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 B_3$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$p + 4 \cdot 8 B_0 B_1 B_3 B_3$
$4 \cdot 8 B_1^2 B_2^2$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$8 B_1 B_2^2 B_3$
$8^2 B_0 B_1 B_2 B_3$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$- 2 \cdot 8 B_1^2 B_3^2$
$- 8^2 B_0 B_1 B_2 B_3$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$p^2 + 8^2 B_0 B_1 B_2 B_3$
$- 2 \cdot 8^2 B_0^2 B_3$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$p + 4 \cdot 8 B_0 B_1 B_3 B_3$
$3 \cdot 8 B_1^2 B_3$	$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_2 \\ - 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 9 \cdot 8^2 B_1^2 \\ 3 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 2 \cdot 8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4 \cdot 8^2 B_0 B_1 B_3 \\ 8^2 B_0 B_1 B_3 \end{array} \right\}$	$8 B_1 B_2^2 B_3$

Ferner ist $D_2^2 - 4 D_0 D_4 = 4 \cdot 8 B_0^2 p^4 + 4 \cdot 8 B_0 B_1 p^3 +$
 $+ (9 B_1^2 + 8 B_0 B_2) p^2 + (6 B_1 B_2 - 4 B_0 B_3) p + B_2^2 - 4 B_0 B_4$

$(D^2 - 4 D_0 D_4)^2 =$

$2 \cdot 8^2 B_0^2 p^8 + 4 \cdot 8^2 B_0^2 B_1 p^7 + 2 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2$	$\left. \begin{array}{l} p^6 \\ 9 \cdot 8^2 B_0^2 B_1^2 \\ 8^2 B_0^2 B_2 \end{array} \right\}$	p^6
---	--	-------

$$\begin{array}{r}
 + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\
 - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\
 9.8^2 B_0 B_1^2 \\
 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\} p^5 + 9^2 B_1^2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} 8^2 B_0^2 B_2^2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} 2.9.8 B_0 B_1^2 B_2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} 6.8^2 B_0 B_1^2 B_2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} - 4.8^2 B_0^2 B_1 B_3 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} 8^2 B_0^2 B_2^2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} - 4.8^2 B_0^2 B_4 \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\} p^5 + 8^2 B_0 B_1 B_2^2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} - 4.8^2 B_0^2 B_1 B_3 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} 2.6.9 B_1^2 B_2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} - 9.8 B_0 B_1^2 B_3 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} 2.6.8 B_0 B_1 B_2^2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\}} - 8^2 B_1^2 B_2 B_3 \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} + 6.8^2 B_0^2 B_1 B_2 \\ - 4.8^2 B_0^2 B_3 \\ 9.8^2 B_0 B_1^2 \\ 8^1 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}} \right\} p^4 \\
 + 2.9 B_1^2 B_2^2 \\
 - 9.8 B_0 B_1^2 B_3 \\
 2.8 B_0 B_2^2 \\
 - 8^2 B_0^2 B_2 B_3 \\
 6^2 B_1^2 B_2^2 \\
 - 6.8 B_0 B_1 B_2 B_3 \\
 2.8 B_0^2 B_3 \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} + 2.9 B_1^2 B_2^2 \\ - 9.8 B_0 B_1^2 B_3 \\ 2.8 B_0 B_2^2 \\ - 8^2 B_0^2 B_2 B_3 \\ 6^2 B_1^2 B_2^2 \\ - 6.8 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 2.8 B_0^2 B_3 \end{array}} \right\} p^2 + 2.6 B_1 B_2^2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 2.9 B_1^2 B_2^2 \\ - 9.8 B_0 B_1^2 B_3 \\ 2.8 B_0 B_2^2 \\ - 8^2 B_0^2 B_2 B_3 \\ 6^2 B_1^2 B_2^2 \\ - 6.8 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 2.8 B_0^2 B_3 \end{array}} \right\}} - 6.8 B_0 B_1 B_2 B_3 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 2.9 B_1^2 B_2^2 \\ - 9.8 B_0 B_1^2 B_3 \\ 2.8 B_0 B_2^2 \\ - 8^2 B_0^2 B_2 B_3 \\ 6^2 B_1^2 B_2^2 \\ - 6.8 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 2.8 B_0^2 B_3 \end{array}} \right\}} - 8 B_0 B_2^2 B_3 \\
 4.8 B_0^2 B_1 B_3 \\
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} + 2.9 B_1^2 B_2^2 \\ - 9.8 B_0 B_1^2 B_3 \\ 2.8 B_0 B_2^2 \\ - 8^2 B_0^2 B_2 B_3 \\ 6^2 B_1^2 B_2^2 \\ - 6.8 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 2.8 B_0^2 B_3 \end{array}} \right\} p + B_2^2 \\
 \phantom{\left. \vphantom{\begin{array}{l} + 2.9 B_1^2 B_2^2 \\ - 9.8 B_0 B_1^2 B_3 \\ 2.8 B_0 B_2^2 \\ - 8^2 B_0^2 B_2 B_3 \\ 6^2 B_1^2 B_2^2 \\ - 6.8 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 2.8 B_0^2 B_3 \end{array}} \right\}} - 8 B_0 B_2^2 B_3 \\
 16 B_1^2 B_2^2
 \end{array}$$

Mithin besteht im vorliegenden Fall die Gleichung :

$$\begin{aligned}
 & (768 B_0^3 B_3 - 192 B_0^2 B_1 B_3 + 48 B_0 B_1^2 B_2 - 9 B_1^3) p^4 \\
 & + (768 B_0^2 B_1 B_3 + 96 B_0 B_1 B_2^2 - 120 B_0 B_1^2 B_3 - 12 B_1^3 B_2 - 192 B_0^2 B_2 B_3) p^3 \\
 & + (320 B_0^2 B_2 B_3 - 144 B_0^2 B_3^2 + 168 B_0 B_1^2 B_3 + 48 B_0 B_1^2 \\
 & - 80 B_0 B_1 B_2 B_3 + 2 B_1^2 B_2^2 - 24 B_1^2 B_3) p^2 + (96 B_0^2 B_3 B_4 \\
 & + 112 B_0 B_1 B_2 B_3 + 40 B_0 B_2^2 B_3) p - 16 B_0^2 B_2^2 + 32 B_0 B_1 B_3 B_4 \\
 & + 8 B_1 B_2^2 B_3 - 16 B_1^2 B_3 - B_1^3 = 0.
 \end{aligned}$$

Es sey zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
 768 B_0^3 B_3 - 192 B_0^2 B_1 B_3 + 48 B_0 B_1^2 B_2 - 9 B_1^3 &= E_4 \\
 768 B_0^2 B_1 B_3 + 96 B_0 B_1 B_2^2 - 120 B_0 B_1^2 B_3 - 12 B_1^3 B_2 \\
 - 192 B_0^2 B_2 B_3 &= E_5 \\
 320 B_0^2 B_2 B_3 - 144 B_0^2 B_3^2 + 168 B_0 B_1^2 B_3 + 48 B_0 B_1^2 \\
 - 80 B_0 B_1 B_2 B_3 + 2 B_1^2 B_2^2 - 24 B_1^2 B_3 &= E_6 \\
 96 B_0^2 B_3 B_4 + 112 B_0 B_1 B_2 B_3 + 40 B_0 B_2^2 B_3 - 96 B_0 B_1 B_3^2 \\
 + 4 B_1 B_2^2 - 16 B_1^2 B_2 B_3 &= E_7 \\
 - 16 B_0^2 B_2^2 + 32 B_0 B_1 B_3 B_4 + 8 B_0 B_2^2 B_3 + 8 B_1 B_2^2 B_3 \\
 - 16 B_1^2 B_3 - B_1^3 &= E_8
 \end{aligned}$$

und man hat somit als die gefundene Bedingungsgleichung :

$$E_4 p^4 + E_5 p^3 + E_6 p^2 + E_7 p + E_8 = 0.$$

Setzt man überdiess in der frühern Gleichung für p der Kürze halber

$$\begin{aligned}
 B_1^2 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3 &= A_1 \\
 B_1^2 B_2 + 2 B_0 B_1 B_3 + 16 B_0^2 B_3 - 4 B_0 B_2^2 &= A_2 \\
 B_1^2 B_3 + 8 B_0 B_1 B_3 - 4 B_0 B_2 B_3 &= A_3 \\
 B_1^2 B_4 - B_0 B_3^2 &= A_4
 \end{aligned}$$

somit $A_4 p^3 + A_3 p^2 + A_2 p + A_1 = 0$; so hat man bereits zwei Gleichungen für p , die mindestens durch Einen gleichen Werth erfüllt werden müssen; daher zwischen den Coefficienten eine Relation stattfinden muss.

2. Um das Endresultat der Bestimmung dieser Relation und des Werthes p , der die Eigenschaft besitzt, zugleich beiden Gleichungen zu genügen (falls nicht etwa beiden Gleichungen dieselben Wurzeln entsprechen), einfacher zu finden, wird es vortheilhaft seyn, noch eine dritte Gleichung zur Bestimmung von p aufzusuchen, mit der jedoch die frühern Bedingungen vereinbar sind. Diese liefert nämlich die Bedingung, dass im Fall eine Gleichung gleiche Wurzeln hat, auch die erste Derivirte für den Werth der gleichen Wurzel zu Null wird. Man hat somit

$$\begin{aligned} B_0 y^3 + B_1 y^2 + B_2 y + B_3 &= 0 \text{ und zugleich} \\ 4 B_0 y^2 + 3 B_1 y + B_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung mit 4, die zweite mit y multiplicirt und von der erstern subtrahirt, ergibt

$$B_1 y^3 + 2 B_2 y^2 + 3 B_3 y + 4 B_4 = 0.$$

Eben so findet man aus der Verbindung der zwei Gleichungen des dritten Grades

$$\begin{aligned} 4 B_0 B_1 y^3 + 8 B_0 B_2 y^2 + 12 B_0 B_3 y + 16 B_0 B_4 &= 0 \\ 4 B_0 B_1 y^3 + 3 B_1^2 y^2 + 2 B_1 B_2 y + B_1 B_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{mithin } (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y^2 + (12 B_0 B_3 - 2 B_1 B_2) y + 16 B_0 B_4 - B_1 B_3 = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung, nachdem sie mit $4 B_0 y$ multiplicirt wurde, mit der ersten cubischen Gleichung, die mit $8 B_0 B_2 - 3 B_1^2$ zu multipliciren ist; so ergeben analog

$$\begin{aligned} 4 B_0 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y^3 + 3 B_1 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y^2 \\ + 2 B_2 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y + B_3 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) &= 0 \text{ und} \\ 4 B_0 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y^3 + 4 B_0 (12 B_0 B_3 - 2 B_1 B_2) y^2 \\ + 4 B_0 (16 B_0 B_4 - B_1 B_3) y &= 0 \text{ die quadratische Gleichung} \\ (-48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) y^2 + (-64 B_0^2 B_4 + 4 B_0 B_1 B_3 \\ + 16 B_0 B_2^2 - 6 B_1^2 B_2) y + 8 B_0 B_2 B_3 - 3 B_1^2 B_4 &= 0. \end{aligned}$$

Eben so ergibt die Behandlung der quadratischen Gleichungen

$$\begin{aligned} (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) (-48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) y^2 \\ + (12 B_0 B_3 - 2 B_1 B_2) (-48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) y \\ + 16 B_0 B_4 - B_1 B_3 (-48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) &= 0 \text{ und} \\ (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) (-48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) y^2 \\ + (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) (-64 B_0^2 B_4 + 4 B_0 B_1 B_3 + 16 B_0 B_2^2 - 6 B_1^2 B_2) y \\ + 8 B_0 B_2 - 3 B_1^2 (8 B_0 B_2 B_3 - 3 B_1^2 B_4) &= 0. \end{aligned}$$

folgende des ersten Grades

$$\begin{aligned} [-12.48 B_0^3 B_3^2 + 4.8.14 B_0^2 B_1 B_2 B_3 - 8.12 B_0 B_1^2 B_3 \\ + 4.8 B_0 B_1^2 B_2^2 + 8.64 B_0^2 B_2 B_3 - 8.16 B_0^2 B_2^2 - 3.64 B_0^2 B_1^2 B_3] y \\ - 16.48 B_0^3 B_3 B_4 + 16.32 B_0^2 B_1 B_2 B_3 - 9.16 B_0 B_1^2 B_3 \\ + 48 B_0^2 B_1 B_3 - 8.8 B_0^2 B_2^2 B_3 + 2.8 B_0 B_1^2 B_2 B_3 &= 0. \end{aligned}$$

Somit wäre der Werth von y , der die repetirte Wurzel vorstellt, durch die letzte Gleichung bestimmt:

$$\begin{aligned} (-576 B_0^2 B_3^2 + 448 B_0^2 B_1 B_2 B_3 - 96 B_0 B_1^2 B_3 + 32 B_0 B_1^2 B_2 \\ + 512 B_0^2 B_2 B_3 - 128 B_0^2 B_2^2 - 192 B_0^2 B_1^2 B_3) y - 768 B_0^3 B_3 B_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 512 B_0^2 B_1 B_2 B_4 - 144 B_0 B_1^3 B_4 + 48 B_1^2 B_2 B_3 + 16 B_0 B_1^2 B_2 B_3 \\
& - 64 B_0^2 B_2^2 B_3 = 0 \text{ und wenn Kürze halber} \\
& - 576 B_0^2 B_3^2 + 448 B_0^2 B_1 B_2 B_3 - 96 B_0 B_1^3 B_3 + 32 B_0 B_1^2 B_2^2 \\
& + 512 B_0^2 B_2 B_4 - 128 B_0^2 B_2^2 - 192 B_0^2 B_1^2 B_3 = F_6 \\
& - 768 B_0^2 B_3 B_4 + 512 B_0^2 B_1 B_2 B_4 - 144 B_0 B_1^3 B_4 + 48 B_0^2 B_1 B_1^2 \\
& + 16 B_0 B_1^2 B_2 B_3 - 64 B_0^2 B_2^2 B_3 = F_7 \text{ gesetzt wird, durch} \\
& F_6 y + F_7 = 0.
\end{aligned}$$

3. Was die Bestimmung der gleichen Wurzel betrifft; so ist dieselbe einer der Ausdrücke unter den angeführten Wurzeln y und zwar, je nachdem eine der vier Annahmen

$$-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

besteht, immer ein anderer. Es lässt sich jedoch nachweisen, dass bezüglich dieser Wahl keine Unbestimmtheit stattfindet. In der Annahme

$$a) -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

sind die Wurzeln

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1 \right)}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1 \right)}$$

und bei der zweiten

$$b) -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = -1$$

$$y_1 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_2 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right)}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right)}$$

also Werthe, die sich nicht etwa, bloss der Ordnung nach unterscheiden. Beide Gruppen von Wurzeln genügen der Gleichung. So muss die Summe der vier Werthe $y_1 - p + y_2 - p + y_3 - p + y_4 - p$ nach der Eigenschaft der Gleichung

$$D_0 (y-p)^4 + D_1 (y-p)^3 + D_2 (y-p)^2 + D_3 (y-p) + D_4 = 0$$

den Werth $-\frac{D_1}{D_0}$ ergeben. Die Annahme, worin das obere Zeichen von ± 1 gilt, ergibt

$$2\sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} \left(1 - \sqrt[4]{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right) = -\sqrt[4]{\frac{D_4 D_1^2 D_3^2}{D_0 D_0^2 D_4^2}}$$

und in Folge der Gleichung $\frac{D_3}{D_0} = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2$ ist dieser Werth $= -\frac{D_1}{D_0}$.

In der zweiten Voraussetzung hat man für diese Summe denselben Werth

$$2\sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} \left(-1 + \sqrt[4]{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right) = -\frac{D_1}{D_0}.$$

Eben so sind

$$(y_1-p)(y_2-p) + (y_1-p)(y_3-p) + (y_1-p)(y_4-p) + (y_2-p)(y_3-p)(y_2-p)(y_3-p) + (y_3-p)(y_4-p)$$

bezüglich beider Hypothesen

$$= 2\sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} \left(1 \pm \left(-\sqrt[4]{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \mp 2\right)\right) = 2\sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} \left(-1 \mp \sqrt[4]{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}}\right)$$

und da für die erste Hypothese die Gleichung $\sqrt{D_0 D_4} + \sqrt{D_1 D_3} = -\frac{D_2}{2}$, für die zweite $\sqrt{D_0 D_4} - \sqrt{D_1 D_3} = -\frac{D_2}{2}$ besteht; so reduciren sich diese Werthe auf $\frac{D_2}{D_0}$.

Die Producte der Ternen

$$(y_1-p)(y_2-p)(y_3-p) + (y_1-p)(y_2-p)(y_4-p) + (y_1-p)(y_3-p)(y_4-p) + (y_2-p)(y_3-p)(y_4-p)$$

sind in den beiden Hypothesen

$$= \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} \left(-\sqrt[4]{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \mp 2 + 2\right) = -\sqrt[4]{\frac{D_4 D_1^2 D_3^2}{D_0 D_0^2 D_4^2}}$$

und da die Bedingung besteht $\frac{D_4}{D_0} = \left(\frac{D_4}{D_1}\right)^2$ in beiden Fällen $= -\frac{D_1}{D_0}$. Endlich ist das

Product $(y_1-p)(y_2-p)(y_3-p)(y_4-p)$ für beide Annahmen $= \frac{D_2}{D_0}$; so dass man un-
schlüssig seyn könnte, welche der beiden Hypothesen zu wählen sey.

Werden die beiden Hypothesen

$$-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}} = \pm 1$$

statuirt; so sind alsdann die Wurzeln in der ersten Hypothese für das obere Zeichen von ± 1

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} e^{i \arccos \left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right)}$$

$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} e^{-i \arccos \left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right)}$$

$$y_3 = p + \sqrt[3]{\frac{D_3}{D_0}}$$

$$y_4 = p + \sqrt[3]{\frac{D_4}{D_0}}$$

und in der zweiten Hypothese:

$$y_1 = p + \sqrt[3]{\frac{D_1}{D_0}} e^{i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right)}$$

$$y_2 = p + \sqrt[3]{\frac{D_2}{D_0}} e^{-i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right)}$$

$$y_3 = p - \sqrt[3]{\frac{D_3}{D_0}}$$

$$y_4 = p - \sqrt[3]{\frac{D_4}{D_0}}$$

also genau dieselben wie früher, daher diese Hypothesen keine besondere Rücksicht in der Bestimmung der Wurzeln erfordern. Diess folgt auch aus dem Umstand, dass im Ausdrucke von

$$\cos \varphi = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}$$

bloss das obere Zeichen zu gelten hat, indem für das untere Zeichen die Wurzeln nur bezüglich ihrer Ordnung differiren.

Dieser Umstand behebt zugleich die vorige Unbestimmtheit, indem er den Anhaltspunkt verschafft, die Wahl der Bedingung so zu treffen; damit im Fall

1) $D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$ wäre, φ stumpf; im Fall

2) $D_2 < 2\sqrt{D_0 D_4}$, φ spitz ausfällt. Der

Fall endlich $D_2 = 2\sqrt{D_0 D_4}$ würde für den ersten Werth von $\cos \varphi$, die

Null ergeben, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und es wären für diesen Fall keine zwei gleichen Wurzeln.

Es gelten also im Fall zweier gleicher Wurzeln falls

$D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$, die Werthe der Wurzeln:

$$y_1 = p - \sqrt[3]{\frac{D_1}{D_0}}$$

$$y_2 = p - \sqrt[3]{\frac{D_2}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[3]{\frac{D_3}{D_0}} e^{i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right)}$$

$$y_4 = p + \sqrt[3]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right)}$$

und im Fall $D_1 < 2\sqrt{D_0 D_4}$,

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{i \arccos \left(-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1 \right)}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-i \arccos \left(-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1 \right)}.$$

4. Die im frühern gefundene Bedingungsgleichung: $F_6 y + F_7 = 0$ ergibt durch die Einführung desjenigen Werthes von y , der die repetirte Wurzel vorstellt,

$$F_6 \left(p \pm \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} \right) + F_7 = 0$$

$$\pm F_6 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} = -F_7 - F_6 p$$

$$F_6^4 \frac{D_4}{D_0} = F_7^2 + 4 F_6 F_7^3 p + 6 F_6^2 F_7^2 p^2 + 4 F_6^3 F_7 p^3 + F_6^4 p^4,$$

und es ist

$$B_0 F_6^2 p^4 + B_1 F_6^3 p^3 + B_2 F_6^2 p^2 + B_3 F_6^3 p + B_4 F_6^4$$

$$= B_0 F_7^2 + 4 B_0 F_6 F_7^3 p + 6 B_0 F_6^2 F_7^2 p^2 + 4 B_0 F_6^3 F_7 p^3 + B_0 F_6^4 p^4$$

d. i.

$$(B_1 F_6^3 - 4 B_0 F_6^2 F_7) p^3 + (B_2 F_6^2 - 6 B_0 F_6 F_7^2) p^2$$

$$+ (B_3 F_6^3 - 4 B_0 F_6 F_7^3) p + B_4 F_6^4 - B_0 F_7^4 = 0.$$

Diess ist die dritte Gleichung für p und sie ist stets dieselbe, es mag welche immer der vier Hypothesen

$$-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = + 1$$

statuirt werden. Es bestehen daher zur Bestimmung von p , zwei Gleichungen des dritten und eine des vierten Grades, nämlich:

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

$$(B_1 F_6^3 - 4 B_0 F_6^2 F_7) p^3 + (B_2 F_6^2 - 6 B_0 F_6 F_7^2) p^2$$

$$+ (B_3 F_6^3 - 4 B_0 F_6 F_7^3) p + B_4 F_6^4 - B_0 F_7^4 = 0$$

$$E_4 p^3 + E_5 p^2 + E_6 p + E_7 = 0.$$

die alle durch ein und dasselbe p erfüllt sind. Es können jedoch einige oder alle Gleichungen mehrere oder alle Wurzeln gemein haben, welches ihre Behandlung verwickelt und die Anzahl der den Coefficienten eigenthümlichen Bedingungsgleichungen abändert.

Was zunächst die Gleichung des vierten Grades betrifft; so kann sie, abgesehen von ihrer Eigenthümlichkeit, in Folge welcher sie durch ihre erste Ableitung ersetzt werden kann; noch durch eine andere cubische Gleichung ersetzt werden.

Der Ausdruck $-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = + 1$

drückt die Bedingung $\cos \varphi = +1$ aus, welches mit $\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_0}} \sin \varphi = 0$ gleichbedeutend ist; und welcher letztere Ausdruck nach Nr. 5 II. die Form

$$\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_0}} \sin \varphi = \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)p + 2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) + 2(4B_0p + B_1)^2 \sqrt{A_3}}{4B_0p + B_1}}$$

annimmt. Setzt man darin Kürze halber

$$\begin{aligned} 4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2) &= \alpha \\ 2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) &= \beta \end{aligned}$$

und setzt man zugleich, um das Radicale der Nulle gleich zu bilden:

$$(2p + \beta)^2 = (4B_0p + B_1)^2 A_3,$$

so gelangt man nach der Entwicklung und Wiederherstellung der Werthe bloss auf eine cubische Gleichung:

$$\begin{aligned} 64A_3B_0^3p^3 + [48A_3B_0^2B_1 - 4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)^2]p^2 \\ + [12A_3B_0B_1^2 - 4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2)]p \\ + A_3B_1^3 - (B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2)^2 = 0, \end{aligned}$$

d. i. wenn Kürze halber

$$\begin{aligned} 64A_3B_0^3 &= G_3 \\ 48A_3B_0^2B_1 - 4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)^2 &= G_4 \\ 12A_3B_0B_1^2 - 4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) &= G_5 \\ A_3B_1^3 - (B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2)^2 &= G_6 \end{aligned}$$

gesetzt wird, auf die Gleichung:

$$G_3p^3 + G_4p^2 + G_5p + G_6 = 0.$$

Diese Gleichung ist jedoch keineswegs mit der biquadratischen identisch: denn sollte letztere in eine cubische übergehen, so wäre diess schon eine Specialität. Auch folgt daraus nichts mehr, als dass: statt der biquadratischen Gleichung

$$E_5p^4 + E_3p^3 + E_6p^2 + E_7p + E_8 = 0$$

auch die cubische

$$G_3p^3 + G_4p^2 + G_5p + G_6 = 0$$

statuirt werden könne, ohne dass diese beiden Gleichungen mehr als Eine gleiche Wurzel haben müssten. Es wird nämlich in der Folge erwiesen werden, dass die Gleichung $A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6 = 0$ nur Einen Werth liefere, für den die obige Bedingung $\varphi = 0$ realisirt ist, weil es nicht möglich ist, mehrere Werthe von p anzugeben, die zugleich den Bedingungen $\varphi = 0$ und $A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6 = 0$ genügen. Unter dieser Voraussetzung enthalten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} E_5p^4 + E_3p^3 + E_6p^2 + E_7p + E_8 = 0 \quad \text{und} \\ G_3p^3 + G_4p^2 + G_5p + G_6 = 0 \end{aligned}$$

denjenigen Werth der beiden Bedingungen zugleich genügt; sie enthalten überdiess noch Werthe, die für die letztere Gleichung in dem Masse verschieden seyn müssen, als in sie durch Substitution Grössen eingeführt wurden, welche Bedingungen einschliessen, denen alle Werthe von p nicht genügen müssen.

5. Um die angeführte Eigenthümlichkeit der Gleichung

$$E_4 p^3 + E_5 p^3 + E_6 p^2 + E_7 p + E_8 = 0$$

durch ihre erste Ableitung ersetzbar zu seyn, so wie noch andere zu erweisen; wird es nöthig drei Gleichungen zu deduciren. Zur ersten gelangt man auf folgende Weise:

Es sey
$$E_4 p^3 + E_5 p^3 + E_6 p^2 + E_7 p + E_8 = \Omega$$

mithin
$$E_5 p^3 + 2 E_6 p^2 + 3 E_7 p + 4 E_8 = 4 \Omega - p D_p \Omega,$$

diese Gleichung mit $4 E_4$ multiplicirt und in Verbindung mit $E_5 D_p \Omega$ ergibt bei der Subtraction eine quadratische Gleichung, nämlich es ist:

$$4 E_4 E_5 p^3 + 8 E_4 E_6 p^2 + 12 E_4 E_7 p + 16 E_4 E_8 = (4 \Omega - p D_p \Omega) 4 E_4$$

$$4 E_4 E_5 p^3 + 3 E_5^2 p^2 + 2 E_5 E_6 p + E_5 E_7 = E_5 D_p \Omega$$

$$(8 E_4 E_6 - 3 E_5^2) p^2 + (12 E_4 E_7 - 2 E_5 E_6) p + 16 E_4 E_8 - E_5 E_7 = 16 E_4 \Omega - (4 E_4 p + E_5) D_p \Omega.$$

Wird die gefundene Gleichung mit p multiplicirt und mit $D_p \Omega$ verknüpft, so ergibt sie die zweite quadratische Gleichung:

$$(32 E_4 E_5 E_6 - 9 E_5^3 - 48 E_5^2 E_7) p^2 + (16 E_4 E_6^2 - 6 E_5^2 E_6 - 64 E_4^2 E_8 + 4 E_4 E_5 E_7) p + 8 E_4 E_6 E_7 - 3 E_5^2 E_7 = -64 E_4^2 p \Omega + (8 E_4 E_6 - 3 E_5^2 + 4 E_4 E_5 p + 16 E_5^2 p^2) D_p \Omega.$$

Endlich, wird die erstere quadratische Gleichung mit $-E_5$ multiplicirt und zu ihr die andere addirt; so findet man

$$6 [4 E_4 E_5 E_6 - E_5^3 - 8 E_5^2 E_7] p^2 + 4 [-E_5^2 E_6 - 2 E_4 E_5 E_7 - 16 E_4^2 E_8 + 4 E_4 E_6^2] p + 2 [-E_5^2 E_7 - 8 E_4 E_5 E_8 + 4 E_4 E_6 E_7] = -16 E_4 (E_5 + E_4 p) \Omega + [8 E_4 E_6 - 2 E_5^2 + 8 E_4 E_5 p + 16 E_5^2 p^2] D_p \Omega.$$

Der vordere Theil ist die doppelte negative Ableitung der Hilfsgleichung $A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$ für den Fall, dass diese auf die Coefficienten der Gleichung Ω angewandt wird. Es sey somit

$$(E_5^3 - 4 E_4 E_5 E_6 + 8 E_4^2 E_7) p^3 + (E_5^2 E_6 + 2 E_4 E_5 E_7 + 16 E_4^2 E_8 - 4 E_4 E_6^2) p^2 + (E_5^2 E_7 + 8 E_4 E_5 E_8 - 4 E_4 E_6 E_7) p + E_5^2 E_8 - E_4 E_7^2 = \Psi,$$

alsdann ist die erste fragliche Gleichung

$$-8 E_4 (E_5 + E_4 p) \Omega + (4 E_4 E_6 - E_5^2 + 4 E_4 E_5 p + 8 E_4^2 p^2) D_p \Omega + D_p \Psi = 0.$$

6. Die zweite Gleichung erhält man durch folgende Betrachtung:

Es ist
$$4 E_4 p^3 + 3 E_5 p^2 + 2 E_6 p + E_7 = D_p \Omega$$

$$3 M_{15} p^3 + 2 M_{16} p^2 + M_{17} p = p D_p \Psi$$

wenn Kürze halber

$$E_5^3 - 4 E_4 E_5 E_6 + 8 E_4^2 E_7 = M_{15}$$

$$E_5^2 E_6 + 2 E_4 E_5 E_7 + 16 E_4^2 E_8 - 4 E_4 E_6^2 = M_{16}$$

$$E_5^2 E_7 + 8 E_4 E_5 E_8 - 4 E_4 E_6 E_7 = M_{17}$$

$$E_5^2 E_8 - E_4 E_7^2 = M_{18}$$

gesetzt wird; mithin

$$(8 E_4 M_{16} - 9 E_5 M_{15}) p^2 + (4 E_4 M_{17} - 6 E_6 M_{15}) p - 3 E_7 M_{15} = 4 E_4 p D_p \Psi - 3 M_{15} D_p \Omega,$$

und diess mit $D_p \Psi$ verbunden, ergibt

$$\begin{aligned} & (12 E_4 M_{15} M_{17} - 18 E_6 M_{15}^2 - 16 E_4 M_{16}^2 + 18 E_5 M_{15} M_{16}) p \\ & - 9 E_7 M_{15}^2 - 8 E_4 M_{16} M_{17} + 9 E_5 M_{15} M_{17} = 12 E_4 M_{15} p D_p \Psi \\ & - 9 M_{15}^2 D \Omega - (8 E_4 M_{16} - 9 E_4 M_{15}) D_p \Psi \\ & = (16 E_4 M_{15} p - 8 E_4 M_{16} + 9 E_5 M_{15}) D_p \Psi - 9 M_{15}^2 D_p \Omega. \end{aligned}$$

Vermöge der Eigenschaft der Coefficienten M_{15} , M_{16} , M_{17} die Gleichung

$$M_{16} E_5 - M_{15} E_6 = 2 M_{17} E_4$$

zu erfüllen, lässt sich jene Gleichung auch folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} & (24 E_5 M_{15} M_{16} - 24 E_6 M_{15}^2 - 16 E_4 M_{16}^2) p - 9 E_7 M_{15}^2 - 8 E_4 M_{16} M_{17} \\ & + 9 E_5 M_{15} M_{17} = (12 E_4 M_{15} p - 8 E_4 M_{16} + 9 E_5 M_{15}) D_p \Psi \\ & - 9 M_{15}^2 D_p \Omega. \end{aligned}$$

Ferner ist $M_{16} p^2 + 2 M_{17} p + 3 M_{15} = 3 \Psi - p D_p \Psi$

welches mit $D_p \Psi$ verbunden

$$\begin{aligned} & (2 M_{16}^2 - 6 M_{15} M_{17}) p + M_{16} M_{17} - 9 M_{15} M_{16} = M_{16} D_p \Psi \\ & - 9 M_{15} \Psi + 3 M_{15} p D_p \Psi \end{aligned}$$

ergibt. In Folge der Gleichung

$$8 E_4 M_{15} = E_5 M_{17} - E_7 M_{15} \text{ und der vorigen}$$

$$2 E_4 M_{17} = E_5 M_{16} - E_6 M_{15} \text{ ist}$$

$$2 M_{16}^2 - 6 M_{15} M_{17} = \frac{4 E_4 M_{16}^2 - 6 E_5 M_{15} M_{16} + 6 E_6 M_{15}^2}{2 E_4}$$

$$M_{16} M_{17} - 9 M_{15} M_{16} = \frac{8 E_4 M_{16} M_{17} - 9 E_5 M_{15} M_{17} + 9 E_7 M_{15}^2}{8 E_4}$$

und somit $(12 E_4 M_{15} p - 8 E_4 M_{16} + 9 E_5 M_{15}) D_p \Psi - 9 M_{15}^2 D_p \Omega$

$$= -8 E_4 M_{16} D_p \Psi + 72 E_4 M_{15} \Psi - 24 E_4 M_{15} p D_p \Psi \text{ d. i.}$$

$$(36 E_4 p + 9 E_5) D_p \Psi - 72 E_4 \Psi - 9 M_{15} D_p \Omega = 0$$

als die gesuchte zweite Gleichung.

7. Was die dritte Gleichung betrifft, so kann immer eine Wahl der unbestimmten Coefficienten A , B , C , D , F so bestimmt werden: dass die Gleichung

$$\begin{aligned} & (E_4 p^4 + E_5 p^3 + E_6 p^2 + E_7 p + E_8) A + (4 E_4 p^3 + 3 E_5 p^2 + 2 E_6 p + E_7) (B + C p) \\ & = (A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6) (D + F p) \end{aligned}$$

für jeden Werth von p erfüllt sey. Man findet zur Bestimmung dieser Grössen die Bedingungsgleichungen:

$$E_4 A + 4 E_4 C = A_3 F$$

$$E_5 A + 4 E_4 B + 3 E_5 C = A_3 D + A_4 F$$

$$E_6 A + 3 E_5 B + 2 E_6 C = A_4 D + A_5 F$$

$$E_7 A + 2 E_6 B + E_7 C = A_5 D + A_6 F$$

$$E_8 A + E_7 B = A_6 D.$$

Wird die letzte Gleichung in die erste substituirt, so kömmt man auf einen Ausdruck für B

$$E_4 A_6 D - E_4 E_7 B + 4E_4 E_3 C = A_3 E_3 F$$

und dadurch auf die Werthe von A und B

$$A = \frac{-4E_4 E_7 C + A_3 E_3 F}{E_4 E_7}$$

$$B = \frac{4E_4 E_3 C + A_6 E_4 D - A_3 E_3 F}{E_4 E_7}.$$

Durch die Substitution dieser Grössen kömmt man auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten, nämlich:

$$(16E_4^2 E_3 - E_4 E_5 E_7) C + (4A_6 E_4^2 - A_3 E_4 E_7) D + (A_6 E_5 E_7 - 4A_3 E_4 E_3 - A_4 E_4 E_7) F = 0$$

$$(12E_4 E_5 E_3 - 2E_4 E_6 E_7) C + (3A_6 E_4 E_5 - A_4 E_3 E_7) D + (A_3 E_6 E_7 - 3A_3 E_5 E_3 - A_5 E_4 E_7) F = 0$$

$$(8E_4 E_6 E_3 - 3E_4 E_7^2) C + (2A_6 E_4 E_6 - A_5 E_4 E_7) D + (A_3 E_7^2 - 2A_3 E_6 E_3 - A_6 E_4 E_7) F = 0.$$

Sey zur Abkürzung

$$16E_4^2 E_3 - E_4 E_5 E_7 = a$$

$$4A_6 E_4^2 - A_3 E_4 E_7 = b$$

$$A_3 E_5 E_7 - 4A_3 E_4 E_3 - A_4 E_4 E_7 = c$$

$$12E_4 E_5 E_3 - 2E_4 E_6 E_7 = a'$$

$$3A_6 E_4 E_5 - A_4 E_4 E_7 = b'$$

$$A_3 E_6 E_7 - 3A_3 E_5 E_3 - A_5 E_4 E_7 = c'$$

$$8E_4 E_6 E_3 - 3E_4 E_7^2 = a''$$

$$2A_6 E_4 E_6 - A_5 E_4 E_7 = b''$$

$$A_3 E_7^2 - 2A_3 E_6 E_3 - A_6 E_4 E_7 = c''$$

mithin sind die drei Gleichungen

$$a C + b D + c F = 0$$

$$a' C + b' D + c' F = 0$$

$$a'' C + b'' D + c'' F = 0.$$

Aus den beiden ersten folgt:

$$\frac{C}{b c' - b' c} = \frac{D}{c a' - c' a} = \frac{F}{a b' - a' b}$$

und wenn dieser Quotient = $E_4 E_7 U$ gesetzt wird

$$C = (b c' - b' c) E_4 E_7 U$$

$$D = (c a' - c' a) E_4 E_7 U$$

$$F = (a b' - a' b) E_4 E_7 U$$

$$A = [-4E_4 E_7 (b c' - b' c) + A_3 E_7 (a b' - a' b)] U$$

$$B = [4E_4 E_3 (b c' - b' c) + E_4 A_6 (c a' - c' a) - A_3 E_3 (a b' - a' b)] U.$$

Es übergeht die gesuchte Gleichung durch diese Werthe in den Ausdruck:

$$\begin{aligned} & [-4E_4E_7(bc'-b'c) + A_3E_7(ab'-a'b)]\Omega + [4E_4E_3(bc'-b'c) + A_6E_4(ca'-c'a) \\ & \quad - A_3E_3(ab'-a'b) + E_4E_7(bc'-b'c)p]D_p\Omega \\ & = [E_4E_7(ca'-c'a) + E_4E_7(ab'-a'b)p]\omega; \end{aligned}$$

wenn für $A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6$, ω gesetzt wird.

Eben so ergibt die Verbindung der ersten und dritten Gleichung

$$\begin{aligned} aC + bD + cF &= 0 \\ a''C + b''D + c''F &= 0 \\ A &= [-4E_4E_7(bc''-b''c) + A_3E_7(ab''-a''b)]U_1 \\ B &= [4E_4E_3(bc''-b''c) + A_6E_4(ca''-c''a) - A_3E_3(ab''-a''b)]U_1 \\ C &= E_4E_7(bc''-b''c)U_1 \\ D &= E_4E_7(ca''-c''a)U_1 \\ F &= E_4E_7(ab''-a''b)U_1 \end{aligned}$$

wodurch die gesuchte Gleichung auch noch einen zweiten Ausdruck annimmt:

$$\begin{aligned} & [-4E_4E_7(bc''-b''c) + A_3E_7(ab''-a''b)]\Omega + [4E_4E_3(bc''-b''c) \\ & \quad + A_6E_4(ca''-c''a) - A_3E_3(ab''-a''b) + E_4E_7(bc''-b''c)p]D_p\Omega \\ & = [E_4E_7(ca''-c''a) + E_4E_7(ab''-a''b)p]\omega. \end{aligned}$$

Endlich ergibt die Verbindung der zweiten und dritten Gleichung

$$\begin{aligned} a'C + b'D + c'F &= 0 \\ a''C + b''D + c''F &= 0 \\ A &= [-4E_4E_7(b'c''-b''c') + A_3E_7(a'b''-a''b')]U_2 \\ B &= [4E_4E_3(b'c''-b''c') + A_6E_4(c'a''-c''a') - A_3E_3(a'b''-a''b')]U_2 \\ C &= E_4E_7(b'c''-b''c')U_2 \\ D &= E_4E_7(c'a''-c''a')U_2 \\ F &= E_4E_7(a'b''-a''b')U_2, \end{aligned}$$

und als dritte Gleichung

$$\begin{aligned} & [-4E_4E_7(b'c''-b''c') + A_3E_7(a'b''-a''b')]\Omega + [4E_4E_3(b'c''-b''c') \\ & \quad + A_6E_4(c'a''-c''a') - A_3E_3(a'b''-a''b') + E_4E_7(b'c''-b''c')p]D_p\Omega \\ & = E_4E_7(c'a''-c''a') + E_4E_7(a'b''-a''b')p]\omega. \end{aligned}$$

8. Nimmt man irgend eine der letztgefundenen Gleichungen; so zeigt dieselbe: dass wenn für irgend einen Werth $p = \alpha$, Ω und ω zu Null werden, wie es wirklich der Fall ist, weil Ein Werth p beiden Gleichungen genügen muss, auch $D_p\Omega$ Null sey. Daraus folgt die früher erwähnte Eigenschaft von Ω durch $D_p\Omega$ ersetzbar zu seyn. Die Verbindung jener Gleichungen mit den früher in Nr. 6, 7 gefundenen

$$\begin{aligned} & -8E_4(E_5 + E_4p)\Omega + (4E_4E_6 - E_5^2 + 4E_4E_5p + 8E_4^2p^2)D_p\Omega \\ & \quad + D_p\Psi = 0 \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$(36E_4p + 9E_5)D_p\Psi - 72E_4\Psi - 9M_{13}D_p\Omega = 0$$

lehrt überdiess eine Verknüpfung zwischen den Grössen Ω , $D_p\Omega$, Ψ , $D_p\Psi$ für den Werth $p = \alpha$. Ist nämlich für einen Werth von p , Ω und $\omega = 0$ so zeigt die erste Gleichung $D_p\Omega = 0$; die obere der letzten Gleichungen ergibt dann $D_p\Psi = 0$ und die

untere $\Psi = 0$. Somit ist der Werth $p = \alpha$, der den Gleichungen $\Omega = 0$ und $\omega = 0$ genügt, eine repetirte Wurzel sowohl von Ω als auch von Ψ .

9. Die Bedingung zweier gleicher Wurzeln führt nothwendig auf eine Bedingungs-
gleichung zwischen den Coefficienten. Es wurden im frühern für diese Eigenschaft
die Giltigkeit der Gleichungen:

$$(8B_0B_2 - 3B_1^2)y^2 + (12B_0B_3 - 2B_1B_2)y + 16B_0B_4 - \varpi_1B_3 = 0$$

und $F_6y + F_7 = 0$ gefunden; wird nun letztere Gleichung mit $(8B_0B_2 - 3B_1^2)y$, erstere
mit F_6 multiplicirt und beide dann von einander subtrahirt; so ergeben sie die fernere
Gleichung

$$(8B_0B_2F_7 - 3B_1^2F_7 - 12B_0B_3F_6 + 2B_1B_2F_6)y - 16B_0B_4F_6 + B_1B_3F_6 = 0,$$

und somit ist, wenn Kürze halber

$$(8B_0B_2 - 3B_1^2)F_7 - 2(6B_0B_3 - B_1B_2)F_6 = H_9$$

$$(-12B_0B_4 + B_1B_3)F_6 = H_{10} \text{ gesetzt wird,}$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{H_{10}}{H_9}.$$

Die Entwicklung ergibt für H_9 und H_{10} :

$$\begin{aligned} H_9 = & -3 \cdot 16^3 B_0^3 B_2 B_3 B_4 + 3 \cdot 9 \cdot 16^2 B_0^2 B_3^2 \\ & + 20 \cdot 16^2 B_0^2 B_1 B_2^2 B_4 - 24 \cdot 16^2 B_0^2 B_1 B_2 B_3^2 \\ & + 4 \cdot 16^2 B_0^2 B_2^3 B_3 + 18 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_3 B_4 \\ & - 12 \cdot 16^2 B_1^2 B_1^2 B_2 B_4 + 52 \cdot 16 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3 \\ & + 7 \cdot 9 \cdot 16 B_0^2 B_1^2 B_3^2 - 16^2 B_0^2 B_1 B_2^2 \\ & + 3 \cdot 9 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_4 - 15 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2 B_3 \\ & + 4 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{10} = & 4 \cdot 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_2^2 B_4 - 2 \cdot 16^3 B_0^3 B_2 B_3^2 \\ & - 4 \cdot 9 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_3^3 - 26 \cdot 16^2 B_0^3 B_1 B_2 B_3 B_4 \\ & + 8 \cdot 16^2 B_0^2 B_2^3 B_4 + 12 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_3^2 \\ & + 4 \cdot 7 \cdot 16 B_0^2 B_1^2 B_2 B_3^2 - 8 \cdot 16 B_1^2 B_1 B_2^2 B_3 \\ & + 4 \cdot 21 \cdot 16 B_0^2 B_1^2 B_3 B_4 - 2 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_4 \\ & - 6 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_3^2 + 2 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2^2 B_3 \end{aligned}$$

und man findet bei der Entwicklung von $F_6 H_{10} - F_7 H_9 = 0$ für die Ausdrücke $F_6 H_{10}$
und $F_7 H_9$ die in folgenden zwei Reihen angesetzten Glieder

	$F_6 H_{10}$	$F_7 H_9$
$B_1^2 B_3^2 B_4$	$- 9^2 \cdot 16^4$	$- 9^2 \cdot 16^4$
$B_1^2 B_2 B_3^2 B_4^2$	$8 \cdot 9 \cdot 16^4$ $8 \cdot 9 \cdot 16^4$	$9 \cdot 16^5$
$B_1^2 B_2^2 B_3^2$	$- 4 \cdot 16^5$	
$B_0^2 B_1 B_2^2$	$9^2 \cdot 16^4$	$9^2 \cdot 16^4$

	$F_6 H_{10}$	$F_7 H_8$
$B_0^6 B_1 B_2 B_3^3 B_4$	— 8.9.16 ⁹ 4.9.26.16 ⁹ 7.9.16 ⁴	— 9.16 ³ 3.24.16 ³ 6.9.16 ³
$B_0^6 B_1 B_2^2 B_3 B_4^2$	— 2.26.16 ³ — 7.8.16 ³	— 6.16 ⁵ — 3.20.16 ³
$B_0^6 B_2^2 B_3^2 B_4$	— 2.9.16 ³ — 2.9.16 ³	3.4.16 ³ — 3.4.16 ³
$B_0^6 B_1^2 B_3^2 B_4^2$	— 3.9.16 ³ — 3.9.16 ³	— 3.18.16 ³
$B_0^6 B_2^2 B_4^2$	16 ⁵ 16 ⁵	
$B_0^6 B_1^2 B_2 B_4^2$	3.8.16 ³ 3.8.16 ³	
$B_0^6 B_2^2 B_3^2$		— 3.4.9.16 ³
$B_0^5 B_2^2 B_2 B_4^2$	— 7.9.16 ³ — 7.9.16 ³	— 3.24.16 ³ 3.9.16 ³
$B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2$	2.9.16 ³ 2.9.16 ³	6.16 ³ 3.4.16 ³
$B_0^5 B_1^2 B_3^2 B_4$	3.9.16 ³ — 9.21.16 ³ — 4.9.6.16 ³	3.18.16 ³ — 3.7.9.16 ³ — 3.9 ² .16 ³
$B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4$	7.8.16 ³ — 4.7.26.16 ³ 8.9.16 ³ 8.9.16 ³	— 3.16 ³ 3.20.16 ³ — 2.24.16 ³ — 3.52.16 ³ — 4.18.16 ³
$B_0^5 B_1 B_2^2 B_3 B_4$	13.16 ³ — 16 ³ 2.7.16 ³	— 4.20.16 ³ 8.16 ³ 3.16 ³
$B_0^5 B_1^2 B_2 B_3 B_4^2$	12.26.16 ³ 8.21.16 ³ 12.16 ³ 3.7.16 ³	3.9.16 ³ 4.9.16 ³ 2.18.16 ³

	$F_6 H_{10}$	$F_7 H_7$
$B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3^2$	$- 4 \cdot 16^4$ $- 4 \cdot 16^4$ $- 6 \cdot 16^4$ $- 6 \cdot 16^4$	$40 \cdot 16^4$
$B_0^5 B_2^2 B_4$	$- 4 \cdot 16^4$	
$B_0^5 B_1^4 B_3^2$	$- 9 \cdot 16^4$	
$B_0^5 B_2^5 B_3^2$		$- 16^4$
$B_0^4 B_1^4 B_3^4$	$4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 16^3$ $4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 16^3$	$3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16^3$
$B_0^4 B_1^3 B_2^2 B_3^3$	$- 8 \cdot 9 \cdot 16^3$ $49 \cdot 16^3$ $- 8 \cdot 9 \cdot 16^3$	$- 24 \cdot 16^3$ $3 \cdot 52 \cdot 16^3$ $- 4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16^3$
$B_0^4 B_1^2 B_2^4 B_3^2$	$- 2 \cdot 7 \cdot 16^3$ $- 2 \cdot 7 \cdot 16^3$	$- 13 \cdot 16^3$ $4 \cdot 16^3$ $- 3 \cdot 16^3$
$B_0^4 B_1^3 B_2 B_3^2 B_4$	$- 3 \cdot 7 \cdot 16^3$ $- 2 \cdot 6 \cdot 16^3$ $6 \cdot 26 \cdot 16^3$ $7 \cdot 21 \cdot 16^3$	$- 3 \cdot 12 \cdot 16^3$ $9 \cdot 24 \cdot 16^3$ $8 \cdot 16^3$ $2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16^3$ $3 \cdot 15 \cdot 16^3$
$B_0^4 B_1^3 B_2^2 B_3 B_4$	$4 \cdot 16^3$ $- 2 \cdot 26 \cdot 16^3$ $6 \cdot 16^3$ $- 2 \cdot 21 \cdot 16^3$ $- 7 \cdot 8 \cdot 16^3$ $- 3 \cdot 16^3$	$20 \cdot 16^3$ $3 \cdot 16^3$ $2 \cdot 52 \cdot 16^3$ $- 4 \cdot 9 \cdot 16^3$ $- 3 \cdot 4 \cdot 16^3$
$B_0^4 B_1 B_2^2 B_3$	$4 \cdot 16^3$	$4 \cdot 16^3$
$B_0^4 B_1^5 B_3 B_3^2$	$- 3 \cdot 21 \cdot 16^3$ $- 6 \cdot 12 \cdot 16^3$	$- 9 \cdot 18 \cdot 16^3$ $- 81 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_4$	16^4 16^4	$- 2 \cdot 16^4$
$B_0^3 B_1^4 B_2 B_3^2$	$3 \cdot 8 \cdot 16^3$ $3 \cdot 8 \cdot 16^3$	$- 9 \cdot 20 \cdot 16^3$ $- 24 \cdot 16^3$

	$F_6 H_{10}$	$F_7 H_6$
$B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^3$	$- 4.6.7.16^2$ $- 4.6.7.16^2$	$7.9.16^3$ $- 3.15.16^3$
$B_0^3 B_1^6 B_3^2 B_4$	$6.12.16^2$ $- 4.6.21.16^3$	81.16^2 $- 7.81.16^3$
$B_0^3 B_1^4 B_2^3 B_3^3$	$7.8.16^2$ 3.16^3 $7.8.16^2$ 3.16^3	52.16^2 $4.15.16^2$ $3.4.16^2$
$B_0^3 B_1^3 B_2^2 B_3$	$- 16^3$ $- 16^3$	$- 16^3$ $- 16^3$
$B_0^3 B_1^5 B_2^2 B_3 B_4$	$- 3.8.16^2$ $8.21.16^2$ $2.6.16^3$	$- 12.16^3$ $- 9.52.16^2$ $- 3.9.4.16^2$ $- 2.15.16^3$
$B_0^3 B_1^4 B_2^2 B_4$	$- 4.16^3$	9.16^3
$B_0^3 B_1^6 B_2 B_3^2$		$9.12.16^3$ $6.9.16^3$
$B_0^2 B_1^7 B_3^3$	$4.9.16^2$	
$B_0^2 B_1^6 B_2^3 B_3^3$	$- 2.6.16^2$ $- 12.16^2$	$- 15.16^2$
$B_0^2 B_1^5 B_2^2 B_3$	4.16^2	4.16^2
$B_0^2 B_1^8 B_2^2$		$- 3.81.16^2$
$B_0^2 B_1^7 B_2 B_3 B_4$		$3.9.16^2$ $9.15.16^2$
$B_0^2 B_1^6 B_2^3 B_4$		$- 4.9.16^2$

Diese Glieder zusammengezogen geben die verlangte Bedingungsgleichung, die jedoch später durch eine einfachere ersetzt wird. Jene ist:

$$\begin{aligned}
 & - 4.16^3 B_0^5 B_2^2 B_4^3 + 3.16^5 B_0^4 B_1 B_2^2 B_3 B_4^2 - 36.16^4 B_0^4 B_2^3 B_3^2 B_4 \\
 & + 2.16^3 B_0^4 B_2^2 B_4^3 + 3.16^5 B_0^4 B_1^2 B_2 B_4^3 + 9.12.16^3 B_0^4 B_2^2 B_4^3 \\
 & - 81.16^3 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^2 - 72.16^3 B_0^3 B_1 B_2^2 B_3^3 + 3.8.9.16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 \\
 & + 20.16^4 B_0^3 B_1 B_2^2 B_3 B_4 - 36.16^4 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4^2 - 60.16^4 B_0^3 B_1^2 B_3^2 B_4^2 \\
 & - 4.16^4 B_0^3 B_1^6 B_4 - 9.16^4 B_0^3 B_1^5 B_4^2 + 16^3 B_0^3 B_2^5 B_3^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 3 \cdot 81 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_3^2 + 70 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 10^3 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &- 99 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &+ 9 \cdot 12 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 4 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 4 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &- 6 \cdot 59 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 4 \cdot 21 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 6 \cdot 9 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &+ 9 \cdot 11 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 21 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 2 \cdot 81 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &+ 36 \cdot 16^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 9 \cdot 16^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 3 \cdot 81 \cdot 16^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &- 2 \cdot 81 \cdot 16^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 36 \cdot 16^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 = 0.
 \end{aligned}$$

10. Zur Auffindung dieser einfacheren Bedingungsgleichung als auch für fernere Folgerungen wird es nöthig, das Stattfinden gewisser Gleichungen für specielle Werthe zu erweisen. Setzt man

$$\begin{aligned}
 B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 &= \Pi \\
 A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 &= \omega;
 \end{aligned}$$

so folgt aus der ersten Gleichung und aus $4B_0 y^3 + 3B_1 y^2 + 2B_2 y + B_3 = D_y \Pi$,

$$4\Pi - y D_y \Pi = B_1 y^3 + 2B_2 y^2 + 3B_3 y + 4B_4;$$

wird diese Gleichung mit $D_y \Pi$ abermals verbunden, so ergibt sie

$$\begin{aligned}
 4B_0 (4\Pi - y D_y \Pi) - B_1 D_y \Pi &= (8B_0 B_2 - 3B_1^2) y^2 \\
 + (12B_0 B_3 - 2B_1 B_2) y &+ 16B_0 B_4 - B_1 B_3.
 \end{aligned}$$

Diess mit $4B_0 y$ multiplicirt und von $(8B_0 B_2 - 3B_1^2) D_y \Pi$ subtrahirt; ergibt

$$\begin{aligned}
 (8B_0 B_2 - 3B_1^2) D_y \Pi - 4B_0 y [(4\Pi - y D_y \Pi) 4B_0 - B_1 D_y \Pi] \\
 = (-48B_0^2 B_3 + 32B_0 B_1 B_2 - 9B_1^3) y^2 + (-64B_0^2 B_4 + 4B_0 B_1 B_3 \\
 + 16B_0 B_2^2 - 6B_1^2 B_2) y + 8B_0 B_2 B_3 - 3B_1^2 B_3;
 \end{aligned}$$

welches für den speciellen Werth $y = -\frac{F_7}{F_6}$ mit dem Ausdrücke $2D_p \omega$ für $p = -\frac{F_7}{F_6}$

die Nulle ergibt, so dass die Gleichung:

$$(8B_0 B_2 - 3B_1^2) D_y \Pi - 4B_0 y [4B_0 (4\Pi - y D_y \Pi) - B_1 D_y \Pi] + 2D_p \omega = 0$$

für den speciellen Werth y und p gleich $-\frac{F_7}{F_6}$ besteht.

Der erste Theil der Gleichung liefert den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 (-48B_0^2 B_3 + 32B_0 B_1 B_2 - 9B_1^3) F_7^2 - (-64B_0^2 B_4 + 4B_0 B_1 B_3 + 16B_0 B_2^2 \\
 - 6B_1^2 B_2) F_6 F_7 + (8B_0 B_2 B_3 - 3B_1^2 B_3) F_6^2
 \end{aligned}$$

und da nach frühern

$$\begin{aligned}
 F_7^2 &= 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 12 \cdot 16^3 B_0^3 B_1 B_2 B_3 B_4 \\
 &- 2 \cdot 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_1 B_2^2 B_3^2 + 4 \cdot 6 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &+ 4 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 9 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &+ 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 6 \cdot 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &+ 6 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 16^3 B_0^3 B_1 B_2^2 B_3^2 \\
 &- 3 \cdot 8 \cdot 16^2 B_0^2 B_1 B_2^2 B_3^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &+ 17 \cdot 8 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 6 \cdot 9 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
 &+ 6 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 8 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2
 \end{aligned}$$

$$+ 81 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 + 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2$$

$$- 2 \cdot 9 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2 B_3 B_4.$$

$$F_6 F_7 = 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_3 B_4 - 6 \cdot 16^4 B_0^4 B_2 B_3 B_4^2$$

$$- 3 \cdot 50 \cdot 16^3 B_0^3 B_1 B_2 B_3^2 B_4 + 16^4 B_0^4 B_2^2 B_3 B_4$$

$$+ 36 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_3 B_4^2 + 4 \cdot 16^4 B_0^4 B_1 B_2^2 B_4^2$$

$$- 9 \cdot 12 \cdot 16^2 B_0^2 B_1 B_3^2 + 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_2^2 B_3^2$$

$$+ 36 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_3^2 B_4 + 55 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$$

$$- 16^4 B_0^4 B_1 B_2^2 B_4 - 42 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2 B_4^2$$

$$+ 3 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^2 - 4 \cdot 34 \cdot 16^3 B_0^3 B_1 B_2^2 B_3^2$$

$$+ 2 \cdot 16^3 B_0^3 B_2^2 B_3 - 4 \cdot 114 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2 B_3 B_4$$

$$+ 8 \cdot 17 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_4 + 9 \cdot 12 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_3^2$$

$$- 3 \cdot 6 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_3^2 + 58 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2$$

$$- 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3 + 6 \cdot 9 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_3 B_4$$

$$- 18 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_4 - 6 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2 B_3^2$$

$$+ 2 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3.$$

$$F_6 = 81 \cdot 16^3 B_0^3 B_3^2 + 4 \cdot 16^4 B_0^4 B_2^2 B_3^2 - 9 \cdot 16^4 B_0^4 B_2 B_3^2 B_4$$

$$- 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_1 B_2 B_3^2 + 36 \cdot 16^3 B_0^3 B_2^2 B_3^2$$

$$+ 6 \cdot 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_3^2 B_4 + 7 \cdot 16^4 B_0^4 B_1 B_2^2 B_3 B_4$$

$$- 2 \cdot 16^4 B_0^4 B_2^2 B_4 - 3 \cdot 16^4 B_0^4 B_1^2 B_2 B_3^2 + 40 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2$$

$$+ 4 \cdot 16^3 B_0^3 B_2^2 + 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_4^2$$

$$+ 3 \cdot 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_3^2 - 28 \cdot 16^3 B_0^3 B_1 B_2^2 B_3$$

$$- 6 \cdot 11 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4 + 20 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3$$

$$- 21 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^2 + 13 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3$$

$$+ 9 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_3 B_4 - 2 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_4^2$$

$$- 3 \cdot 16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_4 + 36 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_3^2$$

$$+ 4 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 - 3 \cdot 8 \cdot 16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3$$

ergibt die Multiplication in die bestehenden Factoren folgende Glieder, wie sie den drei Theilen beziehungsweise entsprechen :

$B_0^2 B_3^2 B_4^2$	$- 3 \cdot 9 \cdot 16^3$	$3 \cdot 9 \cdot 16^5$	
$B_0^2 B_2 B_3 B_4^2$		$- 4 \cdot 6 \cdot 16^5$	
$B_0^2 B_1 B_2 B_3^2 B_4^2$	$4 \cdot 9 \cdot 16^5$ $2 \cdot 9 \cdot 16^5$	$- 3 \cdot 4 \cdot 50 \cdot 16^4$ $3 \cdot 8 \cdot 16^4$	
$B_0^2 B_1 B_2^2 B_4$	$6 \cdot 9 \cdot 16^4$	$- 3 \cdot 9 \cdot 16^4$ $- 3 \cdot 9 \cdot 16^4$	
$B_0^2 B_2^2 B_3 B_4$	$- 8 \cdot 9 \cdot 16^4$	$4 \cdot 9 \cdot 16^4$ $- 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16^4$	$- 8 \cdot 9 \cdot 16^4$

$B_0^2 B_2 B_3^2$			$8.81.16^2$
$B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^2$		4.16^5 6.16^5	2.16^5
$B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^2$		9.16^5	
$B_0^3 B_1 B_2^2 B_3^2$		16^6	
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2$	-12.16^5 -24.16^5	$4.55.16^3$ -16^5 $-4.9.16^3$ $-4.9.16^3$	$-3.8.16^3$ $-3.4.16^3$
$B_0^6 B_1^2 B_3^2$	$-3.9.16^2$	$3.9.16^3$	$-3.9^2.16^3$
$B_0^6 B_2^2 B_3^2$	-3.16^3	-9.16^3	8.16^3
$B_0^5 B_1^3 B_2^2 B_3^2$	$-2.81.16^3$ -81.16^3	9.16^5 -9.16^3	
$B_0^6 B_1^2 B_2 B_3^2 B_4$	$-2.9.16^3$ $-4.9.16^3$	$3.4.16^3$ $3.8.25.16^3$ $8.81.16^3$	$3.9.16^3$ $3.9.16^3$
$B_0^6 B_1 B_2^2 B_3^2 B_4$	3.16^5 3.16^5	-34.16^3 -4.16^3 $3.50.16^3$	$7.8.16^3$
$B_0^6 B_1 B_2^2 B_3^2$	$8.9.16^3$	$-4.9.16^3$ $9.12.16^3$	$-7.9.16^3$
$B_0^6 B_1 B_2^2 B_3^2$		-4.16^5 -4.16^5	
$B_0^6 B_1^2 B_2 B_3^2$		$-8.21.16^3$	
$B_0^6 B_2^2 B_3 B_4$		8.16^3 -16^5	-16^5
$B_0^6 B_1^2 B_2 B_3 B_4^2$	$3.4.9.16^3$ $3.4.9.16^3$ $3.4.9.16^3$	-114.16^3 $8.21.16^3$ $3.8.9.16^3$	$8.9.16^3$ 9.16^3
$B_0^6 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$	$-3.8.17.16^3$ $3.4.16^3$ $-3.8.9.16^3$	$8.29.16^3$ $-4.55.16^3$ $-4.9.16^3$ $-9.100.16^3$	$-3.11.16^3$ $-3.7.16^3$

$B_0^5 B_1^4 B_2^3 B_3^4$	2.81.16 ⁹ 2.81.16 ⁹	-8.9.16 ⁹ -9.16 ⁸	-2.81.16 ⁹
$B_0^5 B_1^3 B_2^4 B_3^4$	-2.9.16 ⁹ 2.9.16 ⁹	-3.4.16 ⁹ -8.81.16 ²	3.8.9.16 ⁹ 6.7.9.16 ⁹
$B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3^3$	3.8.16 ⁹ -3.16 ⁸	34.16 ³ -3.16 ⁸ 6.9.16 ⁹	20.16 ⁸ -3.36.16 ⁹
$B_0^5 B_1^3 B_2^3 B_3^2$	8.16 ⁵	2.17.16 ⁴ 42.16 ⁸ 24.16 ⁸	
$B_0^5 B_2^7 B_3$		-2.16 ⁸	2.16 ⁸
$B_0^5 B_1 B_2^5 B_3^2$	2.16 ⁸	-8.16 ⁹ 4.34.16 ⁹	-14.16 ⁸
$B_0^5 B_1^2 B_2^4 B_3 B_4$	-2.16 ⁵	-4.16 ⁸ 4.16 ⁸ -55.16 ⁸ 6.16 ⁸	10.16 ⁸ 6.16 ⁸
$B_0^5 B_1^5 B_3^3$		3.9.16 ⁸	
$B_0^5 B_1 B_2^5 B_4$		16 ⁵	
$B_0^5 B_1^5 B_3 B_3^2$	-3.81.16 ⁹ -6.81.16 ⁹	3.8.9.16 ¹ -3.9.16 ⁹	-3.9.16 ¹
$B_0^5 B_1^4 B_2^2 B_3^3$	-3.16 ⁹ 3.4.16 ⁹ 3.81.9.16 ²	-8.29.16 ² 3.6.16 ⁹ 18.16 ⁹	-8.21.16 ⁹ -3.40.16 ⁹
$B_0^5 B_1^5 B_2 B_3^3 B_4$	6.9.16 ⁹ -3.4.9.16 ⁹ -6.9.16 ⁹	-3.8.16 ⁹ 114.16 ⁹ 6.36.16 ⁹	8.9.16 ⁹ 22.9.16 ⁹
$B_0^5 B_1^3 B_2^5 B_3$		16 ⁸ 12.16 ⁹	-16 ⁸ -12.16 ⁹
$B_0^5 B_1^5 B_2^2 B_3^2$	-8.9.16 ⁸ -4.9.16 ⁸	-8.9.16 ⁹ -9.12.16 ⁹ -42.6.16 ⁹	

$B_0^4 B_1^4 B_2^4 B_3^4 B_4$	$17 \cdot 16^4$ $9 \cdot 16^4$	$8 \cdot 16^3$ $-2 \cdot 17 \cdot 16^3$ $4 \cdot 114 \cdot 16^3$ $6 \cdot 55 \cdot 16^3$	$-3 \cdot 8 \cdot 16^3$ $-60 \cdot 16^3$
$B_0^4 B_1^3 B_2^4 B_3^2$	-16^4 $-9 \cdot 16^3$	$4 \cdot 16^3$ $-58 \cdot 16^3$ $-3 \cdot 17 \cdot 16^3$	$8 \cdot 13 \cdot 16^3$ $3 \cdot 28 \cdot 16^3$
$B_0^4 B_1^5 B_2^3$	$-81 \cdot 16^2$	$8 \cdot 9 \cdot 16^2$	$-81 \cdot 16^3$
$B_0^4 B_1^3 B_2^2 B_4$		$-8 \cdot 17 \cdot 16^3$ $-6 \cdot 16^3$	
$B_0^3 B_1^7 B_2 B_3^2$	$2 \cdot 81 \cdot 16^3$ $4 \cdot 81 \cdot 16^3$	$8 \cdot 81 \cdot 16^2$	
$B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3^2$	$2 \cdot 16^3$ $8 \cdot 9 \cdot 16^2$	$-8 \cdot 16^2$ $6 \cdot 16^3$ $6 \cdot 58 \cdot 16^2$	$-12 \cdot 16^3$ $-3 \cdot 13 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^6 B_2^2 B_3 B_4$	$-4 \cdot 9 \cdot 16^3$ $-8 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 16^2$	$8 \cdot 9 \cdot 16^2$ $-6 \cdot 9 \cdot 16^3$ $-3 \cdot 57 \cdot 16^3$	$9 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^7 B_2^3 B_4$	$6 \cdot 81 \cdot 16^2$	$-3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^2$	$-3 \cdot 9 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^6 B_2 B_3^2$	$-6 \cdot 9 \cdot 16^2$	$3 \cdot 8 \cdot 16^2$ $-3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16^3$	$18 \cdot 16^3$ $7 \cdot 9 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^5 B_2^2 B_4$		$18 \cdot 16^3$ $3 \cdot 17 \cdot 16^3$	
$B_0^3 B_1^4 B_2^2 B_3$		$-2 \cdot 16^3$ $-6 \cdot 16^3$	$2 \cdot 16^3$ $6 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^8 B_2 B_3 B_4$	$2 \cdot 81 \cdot 16^2$	$4 \cdot 81 \cdot 16^2$	
$B_0^3 B_1^7 B_2^2 B_3$		$-6 \cdot 18 \cdot 16^2$	
$B_0^2 B_1^6 B_2^2 B_3$		$12 \cdot 16^2$	$-12 \cdot 16^2$
$B_0^2 B_1^8 B_2^3$			$-3 \cdot 36 \cdot 16^2$
$B_0^2 B_1^9 B_2^4$	$-9 \cdot 81 \cdot 16^2$		
$B_0^2 B_1^7 B_2^2 B_3^2$	$-9 \cdot 16^2$	$-4 \cdot 9 \cdot 16^2$	$8 \cdot 9 \cdot 16^2$

Mithin ist dieser Theil = $-4.6.16^5 B_0^2 B_2 B_3 B_4^2$
 $+ 2.9.16^5 B_0^2 B_1 B_2 B_3^2 B_4^2 - 8.27.16^5 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$
 $+ 8.81.16^5 B_0^2 B_2 B_3^2 + 12.16^5 B_0^2 B_2^2 B_3 B_4^2$
 $+ 9.16^5 B_0^2 B_1^2 B_3 B_4^2 + 16^6 B_0^2 B_1 B_2^2 B_4^2$
 $- 30.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2 - 3.81.16^5 B_0^5 B_1^2 B_3^2$
 $+ 6.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3^2 - 9.12.16^5 B_0^5 B_1^2 B_3^2 B_4^2$
 $+ 90.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2 B_3^2 B_4 + 8.33.16^5 B_0^5 B_1 B_2 B_3^2 B_4$
 $- 6.9.16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 - 8.16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2$
 $- 8.21.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2 B_3^2 - 24.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3 B_4$
 $+ 8.9.55.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2 B_3 B_4^2 - 3.8.115.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4$
 $- 6.9.16^5 B_0^5 B_1^2 B_3^2 B_4 + 3.8.361.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2 B_3^2$
 $+ 3.4.19.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3^2 B_4 + 3.4.19.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2$
 $- 4.16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 - 65.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3^2 B_4$
 $+ 3.9.16^5 B_0^5 B_1^2 B_4^2 + 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_4$
 $- 7.81.16^5 B_0^5 B_1^2 B_3 B_4^2 - 4.61.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2$
 $+ 4.9.13.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2 B_3^2 B_4 - 9.15.10^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2$
 $+ 3.4.91.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4 + 58.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2$
 $- 9.145.16^5 B_0^5 B_1^2 B_3^2 - 8.29.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_4$
 $+ 8.13.81.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2 B_3^2 - 12.23.16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2$
 $- 4.81.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3 B_4 - 2.81.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3 B_4$
 $+ 6.193.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3^2 + 3.23.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3^2 B_4$
 $- 6.18.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3 B_4 - 3.36.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3^2$
 $- 9.81.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3^2 + 3.9.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3^2 + 6.81.16^5 B_0^5 B_2^2 B_3 B_4.$

Eben so ergibt der zweite Ausdruck

$3 A_1 p^2 + 2 A_4 p + A_5 = D_p \omega$ die drei Theile $3 A_3 F_1^2 - 2 A_4 F_2 F_1 + A_5 F_2^2$
 d. i. folgende Glieder der Entwicklung:

$B_0^2 B_3^2 B_4^2$	$3.8.9.16^4$	$-3.8.9.16^4$	
$B_0^2 B_2 B_3 B_4^2$		$3.4.16^5$	
$B_0^2 B_1 B_2 B_3^2 B_4^2$	$-3.4.9.16^4$ $-3.6.16^5$	$3.8.16^4$ $6.50.16^4$	$-8.9.16^4$
$B_0^2 B_1 B_3^2 B_4$	$-3.9.16^4$	$-3.9.16^4$ $3.8.9.16^4$	$8.81.16^4$
$B_0^2 B_2^2 B_3^2 B_4$	$4.9.16^4$	$-2.9.16^4$ $6.9.16^4$	$4.9.16^4$
$B_0^2 B_2 B_3^2$			$-4.81.16^4$

$B_0^2 B_1^2 B_2 B_3$		$-2 \cdot 16^5$ $-3 \cdot 16^5$	-16^5
$B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$		$-8 \cdot 9 \cdot 16^4$	
$B_2^2 B_1 B_3^2 B_4$		$-8 \cdot 16^5$	$2 \cdot 16^5$
$B_3^2 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$	$9 \cdot 16^5$ $6 \cdot 16^5$	$12 \cdot 16^4$ -16^5 $-2 \cdot 55 \cdot 16^4$ $18 \cdot 16^4$	$4 \cdot 16^4$ $7 \cdot 8 \cdot 16^4$ $3 \cdot 4 \cdot 16^4$
$B_0^2 B_1^2 B_2^2$	$3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^2$	$3 \cdot 9 \cdot 16^3$	$81 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_2^2 B_3^2$	$3 \cdot 8 \cdot 16^3$	$8 \cdot 9 \cdot 16^3$	$-9 \cdot 16^4$
$B_0^2 B_1^2 B_3^2 B_4^2$	$3 \cdot 9 \cdot 16^4$ $81 \cdot 16^4$	$-9 \cdot 16^4$ $-8 \cdot 9 \cdot 16^4$	$3 \cdot 9 \cdot 16^4$
$B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2 B_5$	$3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^4$ $9 \cdot 16^4$	$-3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^3$ $3 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 16^3$ $-6 \cdot 16^4$	$-9 \cdot 16^4$ $-7 \cdot 9 \cdot 16^4$ $-3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^4$
$B_1^2 B_2 B_3^2 B_4^2 B_5$	$-3 \cdot 6 \cdot 16^4$ $-3 \cdot 8 \cdot 16^4$	$-4 \cdot 16^3$ $17 \cdot 16^3$ $-3 \cdot 25 \cdot 16^3$	$18 \cdot 16^4$ $-4 \cdot 7 \cdot 16^4$
$B_0^2 B_1 B_2^2 B_3^2$	$-4 \cdot 9 \cdot 16^3$	$-4 \cdot 9 \cdot 16^3$ $-6 \cdot 9 \cdot 16^3$	$7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_1 B_2^2 B_3^2$		$2 \cdot 16^5$ $2 \cdot 16^5$	-16^5
$B_0^2 B_1^2 B_2 B_3^2$		$4 \cdot 21 \cdot 16^4$	$-3 \cdot 8 \cdot 16^4$
$B_0^2 B_2^2 B_3 B_4$		$-4 \cdot 16^4$ $8 \cdot 16^4$	$8 \cdot 16^4$
$B_0^2 B_1^2 B_2 B_3 B_4^2$	$-4 \cdot 9 \cdot 16^4$ $-8 \cdot 81 \cdot 16^3$ $-6 \cdot 9 \cdot 16^4$	$-8 \cdot 9 \cdot 16^3$ $8 \cdot 21 \cdot 16^3$ $57 \cdot 16^3$	$-3 \cdot 16^4$ $-3 \cdot 11 \cdot 16^3$ $-4 \cdot 9 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4$	$8 \cdot 9 \cdot 16^3$ $-8 \cdot 9 \cdot 16^3$ $3 \cdot 4 \cdot 17 \cdot 16^3$	$6 \cdot 50 \cdot 16^3$ $-4 \cdot 55 \cdot 16^3$ $-4 \cdot 29 \cdot 16^3$ $18 \cdot 16^4$	$7 \cdot 16^4$ $20 \cdot 16^4$ $3 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 16^3$

$B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3$	$-6.9.16^3$ -81.16^3	-9.16^4 $4.9.16^3$	$6.9.16^3$ $3.8.9.16^3$
$B_0^5 B_1^3 B_2 B_3^2$	$-3.4.9.16^2$ 9.16^3	$3.8.9.16^2$ $-3.4.16^3$	$-2.7.9.16^3$ $-3.4.9.16^3$
$B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3^2$	$3.6.16^3$ $-3.4.16^3$	$-2.9.16^3$ 34.16^3 $3.8.16^3$	36.16^3 -10.16^3
$B_0^5 B_1^3 B_2^3 B_3^2$	-3.15^3	-8.16^4 -17.16^4 -21.16^4	10.16^3
$B_0^5 B_2^2 B_3$		16^4	-16^4
$B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2$	-12.16^3	-8.16^3 $-4.17.16^3$	7.16^3
$B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$	12.16^3	-2.16^4 4.16^4 2.16^4 $8.55.16^3$	-2.16^4 -14.16^4 -5.16^4
$B_0^5 B_1^2 B_3^2$		$-3.8.9.16^3$	$8.9.16^3$
$B_0^5 B_1 B_2^2 B_4$		-8.16^4	2.16^4
$B_0^5 B_1^6 B_3 B_3^2$	$3.6.9.16^3$ $3.8.81.16^2$	$-3.9.16^3$ $-3.9.4.16^3$	9.16^3 $8.9.16^3$
$B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3^2$	$-8.9.16^2$ $-8.9.16^2$ $3.8.16^2$	-6.16^3 $-8.29.16^2$ -9.16^3	40.16^3 $4.21.16^3$
$B_0^5 B_1^2 B_2 B_3^2 B_4$	$3.6.16^2$ $8.81.16^2$ $-3.9.16^3$	$-8.9.16^3$ 114.16^3 $3.4.16^3$	$-6.11.16^3$ $-21.8.16^3$ $-4.9.16^3$
$B_0^5 B_1^2 B_3^2 B_3$		-4.16^3 -8.16^3	4.16^3 8.16^3
$B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2$	$3.4.16^3$ $3.9.16^3$	$4.21.16^3$ $4.9.16^3$ $6.9.16^3$	$-3.8.16^3$

$B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$	$-3 \cdot 16^3$ $-6 \cdot 17 \cdot 16^3$	$-2 \cdot 55 \cdot 16^2$ $-2 \cdot 17 \cdot 16^3$ $-4 \cdot 16^3$ $-4 \cdot 57 \cdot 16^3$	$20 \cdot 16^3$ $8 \cdot 13 \cdot 16^3$ $3 \cdot 4 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2$	$3 \cdot 16^3$ $6 \cdot 16^3$	$17 \cdot 16^3$ $4 \cdot 16^3$ $29 \cdot 16^3$	$-28 \cdot 16^3$ $-4 \cdot 13 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_1^2 B_3^2$	$3 \cdot 9 \cdot 16^2$	$8 \cdot 9 \cdot 16^2$	$3 \cdot 9 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_1^2 B_3 B_4$		$2 \cdot 6^3$ $4 \cdot 17 \cdot 16^3$	-16^3
$B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^2$	$-3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16^3$ $-3 \cdot 4 \cdot 81 \cdot 16^2$	$-3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^2$	
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2$	$-3 \cdot 8 \cdot 16^3$ $-3 \cdot 4 \cdot 16^2$	$-29 \cdot 4 \cdot 16^2$ $-8 \cdot 16^2$ $-3 \cdot 16^3$	$13 \cdot 16^3$ $6 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$	$3 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 16^2$ $3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^2$	$57 \cdot 16^3$ $8 \cdot 9 \cdot 16^2$ $3 \cdot 9 \cdot 16^3$	$-3 \cdot 16^3$ $-3 \cdot 4 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^2 B_3^2 B_4$	$-2 \cdot 81 \cdot 16^2$	$-3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^2$	$9 \cdot 16^3$ $18 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^2$	$2 \cdot 9 \cdot 16^2$	$4 \cdot 9 \cdot 16^2$ $3 \cdot 8 \cdot 16^2$	$-21 \cdot 16^3$ $-9 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_4$		$-17 \cdot 16^3$ $-9 \cdot 16^3$	$2 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3$		$2 \cdot 16^3$ 16^3	$-2 \cdot 16^3$ -16^3
$B_0^2 B_1^2 B_2 B_3 B_4$	$-6 \cdot 9 \cdot 16^2$	$-3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16^2$	
$B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_4$		$4 \cdot 9 \cdot 16^2$	
$B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3$		$-4 \cdot 16^2$	$4 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_1^2 B_3^2$			$36 \cdot 16^2$
$B_0^2 B_1^2 B_4^2$	$3 \cdot 81 \cdot 16^2$		
$B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^2$	$3 \cdot 16^3$	$12 \cdot 16^3$	$-3 \cdot 8 \cdot 16^3$

Nach Zusammenziehung der Glieder erhält man folgendes Resultat :

$$\begin{aligned}
& 3 \cdot 4 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2 B_3 B_4^2 - 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2 B_3^2 B_4^2 \\
& + 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4 - 4 \cdot 81 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2 B_3^2 \\
& - 6 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2 B_3^2 - 8 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2 B_3^2 \\
& - 6 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 + 8 \cdot 27 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2 \\
& + 3 \cdot 8 \cdot 81 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 3 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& + 6 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 45 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 \\
& - 6 \cdot 19 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 B_4 + 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& + 3 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& + 12 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4 - 4 \cdot 9 \cdot 47 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4 \\
& + 8 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 + 3 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4 \\
& - 3 \cdot 4 \cdot 307 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 6 \cdot 13 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& - 4 \cdot 21 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 3 \cdot 8 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& + 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4 - 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& - 6 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 + 3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& + 3 \cdot 29 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 8 \cdot 9 \cdot 41 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 \\
& + 2 \cdot 9 \cdot 43 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 6 \cdot 65 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 \\
& - 31 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 9 \cdot 59 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& + 4 \cdot 21 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 9 \cdot 81 \cdot 4 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& - 6 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 3 \cdot 8 \cdot 61 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 \\
& + 6 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 6 \cdot 67 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& - 3 \cdot 8 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 2 \cdot 81 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 \\
& + 4 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 4 \cdot 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& + 3 \cdot 81 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2.
\end{aligned}$$

Somit ergibt $(8B_0 B_2 - 3B_1^2) D_y \Pi$

$$- 4B_0 y [4B_0 (4\Pi - y D_y \Pi) - B_1 D_y \Pi] + 2D_y \infty$$

nachstehenden Ausdruck :

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 - 3 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2 \\
& + 36 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 B_4 - 2 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 \\
& - 3 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2 B_3^2 - 9 \cdot 12 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 \\
& + 81 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 72 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& - 3 \cdot 8 \cdot 19 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 - 20 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4 \\
& + 36 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2 B_3 B_4^2 + 60 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& + 4 \cdot 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 + 9 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& - 16^5 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 - 3 \cdot 81 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& - 70 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& + 99 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 + 3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4 \\
& - 9 \cdot 12 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 4 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 \\
& - 4 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 + 6 \cdot 59 \cdot 16^5 B_0^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 4 \cdot 21 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3^3 - 6 \cdot 9 \cdot 16^2 B_1^3 B_2^3 B_3^3 B_4 \\
 & - 9 \cdot 11 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3 B_4 + 21 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_4 \\
 & + 2 \cdot 81 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^3 B_2 B_3^2 - 36 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^3 B_3^2 \\
 & + 9 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3^2 - 3 \cdot 81 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^3 B_3^2 \\
 & + 2 \cdot 81 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^3 B_2 B_3 B_4 - 36 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_4
 \end{aligned}$$

d. i. nach Ausscheidung des Factors $-B_1^3 B_1$, einen früher gefundenen Ausdruck, der vermöge der Bedingung der repetirten Wurzeln zu Null wird, und wodurch die Richtigkeit der Gleichung

$$(8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) D_y \Pi - 4 B_0 y [4 B_0 (4 \Pi - y D_y \Pi) - B_1 D_y \Pi] + 2 D_p \omega = 0$$

für den speciellen Werth erwiesen ist.

11) 11. Die zweite Gleichung, deren Nachweisung für die Folge wesentlich ist, erhält man durch folgende Betrachtung:

$$\begin{aligned}
 \text{Es ist} \quad & 4 B_0 p^2 + 3 B_1 p^2 + 2 B_2 p + B_3 = D_p \Pi \\
 & 3 A_3 p^2 + 2 A_4 p^2 + A_5 p = p D_p \omega \\
 \text{mithin} \quad & (8 B_0 A_4 - 9 A_3 B_1) p^2 + (4 B_0 A_5 - 6 A_3 B_2) p \\
 & - 2 A_4 B_3 = 4 B_0 p D_p \omega - 3 A_3 D_p \Pi
 \end{aligned}$$

und diess mit $D_p \omega$ verbunden, ergibt

$$\begin{aligned}
 & (12 B_0 A_3 A_5 - 18 A_3^2 B_2 - 16 B_0 A_4^2 + 18 A_3 A_4 B_1) p \\
 & - 9 A_3^2 B_3 - 8 B_0 A_4 A_5 + 9 A_3 A_5 B_1 = 12 A_3 B_0 p D_p \omega \\
 & - 9 A_3^2 D_p \Pi - (8 B_0 A_4 - 9 A_3 B_1) D_p \omega \\
 & = (12 A_3 B_0 p - 8 A_4 B_0 + 9 A_3 B_1) D_p \omega - 9 A_3^2 D_p \Pi.
 \end{aligned}$$

Um vermöge der Eigenschaft der Coefficienten A_3, A_4, A_5 die Gleichung

$$A_4 B_1 - A_3 B_2 = 2 B_0 A_5$$

zu erfüllen, lässt sich jene Gleichung auch folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned}
 & (24 A_3 A_4 B_1 - 24 A_3^2 B_2 - 16 B_0 A_4^2) p - 9 A_3^2 B_3 - 8 A_4 A_5 B_0 \\
 & + 9 A_3 A_5 B_1 = (12 A_3 B_0 p - 8 A_4 B_0 + 9 A_3 B_1) D_p \omega - 9 A_3^2 D_p \Pi.
 \end{aligned}$$

Ferner ist $A_4 p^2 + 2 A_5 p + 3 A_6 = 3 \omega - p D_p \omega$, welches mit $D_p \omega$ verbunden,

$$(2 A_4^2 - 6 A_3 A_5) p + A_4 A_5 - 9 A_3 A_6 = A_4 D_p \omega - 9 A_3 \omega + 3 A_3 p D_p \omega$$

ergibt. Vermöge den zweien zwischen den Coefficienten A_3, A_4, A_5, A_6 stattfindenden Relationen

$$2 B_0 A_5 = A_4 B_1 - A_3 B_2$$

$$8 B_0 A_6 = A_5 B_1 - A_3 B_3$$

übergeht letztere Gleichung nach der Multiplication in $-8 B_0$ in

$$-8(2 B_0 A_4^2 - 3 A_3 A_4 B_1 + 3 A_3^2 B_2) p - 9 A_3^2 B_3 + 9 A_3 A_5 B_1 - 8 B_0 A_4 A_5,$$

so dass als zweite Gleichung für jeden Werth von p die Bedingung besteht:

$$\begin{aligned}
 & (12 A_3 B_0 p - 8 B_0 A_4 + 9 A_3 B_1) D_p \omega - 9 A_3^2 D_p \Pi \\
 & = 8 \cdot 9 \cdot B_0 A_3 \omega - 8(3 B_0 A_3 p + B_0 A_4) D_p \omega, \quad \text{d. i.} \\
 & (36 B_0 p + 9 B_1) D_p \omega = 72 B_0 \omega + 9 A_3 D_p \Pi.
 \end{aligned}$$

12. Aus dem Stattfinden der in voriger Nummer bewiesenen Gleichungen

$$-64 B_0^3 p \Pi + [8 B_0 B_2 - 3 B_1^2 + 4 B_0 B_1 p + 16 B_0^3 p^2] D_p \Pi + 2 D_p \omega = 0$$

$$(36 B_0 p + 9 B_1) D_p \omega - 72 B_0 \omega - 9 A_3 D_p \Pi = 0$$

für den speciellen Werth $p = -\frac{F_7}{F_6}$ lassen sich mehrere Folgerungen ziehen :

1. Da $y = -\frac{F_7}{F_6}$ eine repetirte Wurzel der Gleichung

$$B_0 y^3 + B_1 y^2 + B_2 y + B_3 y + B_4 = 0$$

ist; so folgt, dass Π und $D_p \Pi$ für diesen Werth zu Null werden; aus der ersten Gleichung folgt sodann, dass auch $D_p \omega$ für diesen Werth zu Null wird, und aus der zweiten wegen $D_p \Pi = 0$ und $D_p \omega = 0$, $\omega = 0$; mithin ist $-\frac{F_7}{F_6}$ auch eine repetirte Wurzel von

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0.$$

2. Aus der Gleichung:

$$(2A_2^2 - 6A_3 A_4) F_7 + (9A_3 A_6 - A_4 A_5) F_6 = 9A_3 F_6 \omega + (3A_3 F_7 - A_4 F_6) D_p \omega$$

folgt ferner $(2A_2^2 - 6A_3 A_4) F_7 + (9A_3 A_6 - A_4 A_5) F_6 = 0$.

Nach der Bedeutung der darin vorkommenden Grössen ist

$$2A_2^2 - 6A_3 A_4 = 2 \cdot 16^2 B_0^3 B_2^2 - 4 \cdot 64 B_0^3 B_1 B_3 B_4 - 16 B_0^3 B_1^2 B_4$$

$$+ 6 \cdot 32 \cdot B_0^3 B_2 B_3^2 - 40 B_0^2 B_1^2 B_3^2 + 2 \cdot 16 B_0^3 B_1^2$$

$$+ 16^2 \cdot B_0^2 B_1^2 B_2 B_4 - 8 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_2^2 B_3 + 56 B_0 B_1^2 B_2 B_3$$

$$- 16 B_0 B_1^2 B_2^2 - 3 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_4 + 2 B_1^2 B_2^2$$

$$- 6 B_1^2 B_3 \quad \text{und}$$

$$9A_3 A_6 - A_4 A_5 = -8 \cdot 9 B_0^3 B_3^3 - 8 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_4^2 + 4 \cdot 16 B_0^3 B_2 B_3 B_4$$

$$+ 40 B_0^2 B_1^2 B_3 B_4 + 44 B_0 B_1 B_2 B_3^2 + 2 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_2^2 B_3$$

$$- 16 B_0^2 B_2^2 B_3 - 44 B_0 B_1^2 B_2 B_4 - 11 B_0 B_1^2 B_3^2$$

$$+ 8 B_0 B_1^2 B_2^2 B_3 + 9 B_1^2 B_4 - B_1^2 B_2 B_3$$

welche Ausdrücke in ihre bezüglichen Factoren multiplicirt folgende zwei Gruppen von Gliedern ergeben :

$B_0^2 B_3 B_4^2$	$-2 \cdot 3 \cdot 16^3$	
$B_0^2 B_1 B_3^2 B_4^2$	$3 \cdot 16^3$ $6 \cdot 16^3$	$2 \cdot 9 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_2^2 B_3 B_4^2$	$3 \cdot 16^3$ $-8 \cdot 16^3$	$8 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_2 B_3^2 B_4$	$-36 \cdot 16^3$	$-9 \cdot 16^3$ $-9 \cdot 16^3$
$B_0^2 B_1 B_2 B_3^2$	$4 \cdot 16^3$	-16^3

$B_0^6 B_3^5$		$2.81.16^2$
$B_0^5 B_1^3 B_2^3 B_3$	$3.40.16^2$ -3.16^3	-90.16^2 $6.9.16^2$
$B_0^5 B_1^2 B_2 B_3 B_4$	-6.16^3 4.16^3	-2.16^3 -2.16^3
$B_0^5 B_1 B_2 B_3 B_4^2$	-3.16^3 -2.16^3 2.16^3	-14.16^3 5.16^3 -3.16^3
$B_0^5 B_1 B_2 B_3^2 B_4$	$3.8.16^3$ $4.6.16^3$ -3.16^3 4.16^3	$-8.9.16^2$ 7.16^3 $8.11.16^2$
$B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2$	-2.16^3	4.16^3 4.16^3
$B_0^5 B_1^2 B_2^2$	$-2.9.16^3$	6.16^3
$B_0^5 B_1 B_2 B_3^2$	36.16^2	$-9.11.16^2$ $-9.14.16^2$
$B_0^5 B_2^2 B_3^2$	-3.16^3	$4.9.16^2$ $4.9.16^2$
$B_0^4 B_1^3 B_3^2$	$-3.40.16$	$4.9.11.16$ $6.8.9.16$
$B_0^4 B_1^2 B_2 B_3^2 B_4$	$-3.7.8.16^2$ $-2.40.16^2$ $-2.6.9.16^2$ 3.16^3 -16^3	$9.11.16^2$ $7.10.16^2$ $-4.6.16^2$ $-2.11.16^2$ $-3.11.16^2$
$B_0^4 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$	3.16^3 -16^3 -16^3 -4.16^3	$7.8.16^2$ 8.16^2 16^3 -20.16^2 $3.4.16^2$
$B_0^4 B_1^2 B_2 B_3^2$	9.16^3 9.16^3	$6.8.16^2$ -30.16^2
$B_0^4 B_1 B_2^2 B_4$	4.16^3	-16^3

$B_0^4 B_1^3 B_2^3 B_3^4$	2.16 ⁴ 9.16 ³	-16 ³ -8.11.16 ² -4.6.16 ²
$B_0^3 B_1^4 B_2^3 B_3^3$	6.16 ² 2.16 ³	-4.7.16 ² -22.16 ²
$B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3^3$	-3.8.16 ² 12.16 ² 10.16 ²	-9.16 ² 7.11.16 ² -2.9.16 ²
$B_0^4 B_2^6 B_3$	-8.16 ³	8.16 ²
$B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3 B_4$	-2.3.16 ² 7.16 ³ 8.9.16 ² 16 ³ 3.4.16 ²	-7.11.16 ² -3.4.16 ² 80.16 -2.16 ² -6.16 ²
$B_0^3 B_1^3 B_3^3 B_4$	3.6.16 ² 9.4.16 -9.16 ²	-4.81.16 -6.40.16 3.4.11.16
$B_0^3 B_1^3 B_3^3 B_4$	-2.16 ³ -2.9.16 ²	4.16 ² 2.11.16 ²
$B_0^3 B_1^4 B_2^3 B_3^4$	-6.16 ³ -9.16 ³	2.9.16 ² 3.11.16 ²
$B_0^3 B_1^3 B_2 B_3^3$	3.7.8.16 -40.16	4.9.16 -4.7.11.16 -6.4.11.16
$B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3^3$	-3.16 ² -8.16 ² -14.16 ²	14.16 ² 6.16 ² 88.16 88.16
$B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3$	2.16 ² 4.16 ³	-2.16 ² -4.16 ²
$B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_4$	4.16 ² 9.16 ²	-88.16 -8.9.16
$B_0^3 B_1^4 B_2 B_3 B_4$	-2.6.16 ² -7.8.9.16 -3.16 ²	4.7.9.16 6.44.16 3.4.16

$B_0^3 B_1^2 B_2^3$	$3 \cdot 9 \cdot 16^2$	$-3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16$
$B_0^3 B_1^2 B_2^3$	$6 \cdot 16$	$-4 \cdot 7 \cdot 16$
	$7 \cdot 8 \cdot 16$	$-6 \cdot 8 \cdot 16$
	$4 \cdot 6 \cdot 16$	$-22 \cdot 16$
$B_0^3 B_1^2 B_2^3$	$-3 \cdot 6 \cdot 16$	$6 \cdot 11 \cdot 16$
$B_0^3 B_1^2 B_2^3$	-16^2	16^2
	$-8 \cdot 16$	$8 \cdot 16$
$B_0 B_1^2 B_2^3 B_3$	$-18 \cdot 16$	$2 \cdot 9 \cdot 16$
$B_0 B_1^2 B_2 B_3$	$6 \cdot 9 \cdot 16$	$-6 \cdot 9 \cdot 16$
$B_0 B_1^2 B_2 B_3$	$2 \cdot 16$	$-2 \cdot 16$
$B_0 B_1^2 B_2 B_3$	$-6 \cdot 16$	$6 \cdot 16$

d. i. nach Ausscheidung des gemeinsamen Factors $16 B_0$:

$$\begin{aligned}
 & -6 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2^3 + 8 \cdot 9 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2^3 + 3 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 \\
 & -54 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 + 3 \cdot 16^2 B_0^3 B_1 B_2 B_3 + 2 \cdot 81 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 \\
 & + 4 \cdot 9 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 - 6 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 - 90 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4 \\
 & + 57 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4 - 24 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 - 12 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2^2 \\
 & - 3 \cdot 63 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 + 24 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 B_2^2 - 9 \cdot 26 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4 \\
 & - 2 \cdot 90 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4 + 9 \cdot 34 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4 + 3 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_4 \\
 & + 33 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 + 3 \cdot 4 \cdot 59 B_0^3 B_1^2 B_3 - 12 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_2 B_3 \\
 & + 3 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 + 6 \cdot 19 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4 + 8 \cdot 9 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4 \\
 & - 2 \cdot 12 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2 B_3 - 9 \cdot 21 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2 B_3 - 12 \cdot 34 \cdot B_0 B_1 B_2 B_3 \\
 & + 6 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2 B_3 - 3 \cdot 16 B_1^2 B_2 B_3 - 4 \cdot 54 B_0^2 B_2 B_3 B_4 \\
 & + 9 \cdot 36 B_1^2 B_3 - 12 B_1^2 B_2 B_3 + 3 \cdot 16 B_1^2 B_3 = 0
 \end{aligned}$$

als eine einfachere Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten für den Fall einer repetirten Wurzel.

3. Die Gleichung $(36 B_0 p + 9 B_1) D_p \omega - 72 B_0 \omega - 9 A_3 D_p \Pi = 0$ zeigt; dass wenn ω eine repetirte Wurzel besitzt und A_3 nicht etwa Null ist, vermöge der Bedingung $\frac{D_3}{D_0} = \frac{D_2}{D_1}$ entweder D_3 oder D_1 zu Null werden müssen.

Im Verlaufe wird ersichtlich: dass wenn $D_1 = 0$ nothwendig $A_3 = 0$ sey, und mithin auch $D_p \Pi$; so dass also folgendes Theorem besteht: Immer wenn ω eine repetirte Wurzel besitzt, hat $D_p \Pi$ dieselbe Wurzel; ist $A_3 = 0$, also $p = -\frac{B_1}{4B_0}$, so muss nicht nothwendig Π für diesen Werth zu Null werden; in allen andern Fällen ist $\Pi = 0$ durch dieselbe repetirte Wurzel wie $\omega = 0$ erfüllt.

4. Die Wurzel α , für welche Ω , $D_p \Omega$, Ψ , $D_p \Psi$ zu Null werden, ist somit

$$p = -\frac{A_3}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}. \text{ Die drei Gleichungen:}$$

$$\begin{aligned} & [-4E_4 E_7 (bc'' - b'c) + A_3 E_7 (ab' - a'b)] \Omega + [4E_4 E_3 (bc - b'c) \\ & + A_6 E_3 (ca' - c'a) - A_3 E_3 (ab' - a'b) + E_4 E_7 (bc'' - cb') p] D_p \Omega \\ & = [E_4 E_7 (ca' - c'a) + E_4 E_7 (ab' - a'b) p] \omega \\ & [-4E_4 E_7 (bc'' - b'c) + A_3 E_7 (ab'' - a''b)] \Omega + [4E_4 E_1 (bc'' - b''c) \\ & + A_6 E_1 (ca'' - c''a) - A_3 E_3 (ab'' - a''b) + E_4 E_7 (bc'' - cb'') p] D_p \Omega \\ & = [E_4 E_7 (ca'' - c''a) + E_4 E_7 (ab'' - a''b) p] \omega \\ & [-4E_4 E_7 (b'c'' - b''c') + A_3 E_7 (a'b'' - a''b')] \Omega + [4E_4 E_3 (b'c'' - b''c') \\ & + A_6 E_3 (c'a'' - c''a') - A_3 E_3 (a'b'' - a''b') + E_4 E_7 (b'c'' - b''c') p] D_p \Omega \\ & = [E_4 E_7 (c'a'' - a''c'') + E_4 E_7 (a'b'' - a''b')] \omega, \end{aligned}$$

die vermöge der Gleichheit der Verhältnisse

$$\begin{aligned} \frac{ca' - c'a}{bc'' - cb'} &= \frac{ca'' - c''a}{bc'' - cb''} = \frac{c'a'' - c''a'}{b'c'' - c'b''} \\ \frac{ab' - a'b}{bc'' - b'c} &= \frac{ab'' - a''b}{bc'' - b''c} = \frac{a'b'' - a''b'}{b'c'' - c'b''} \end{aligned}$$

ein und dieselbe Gleichung sind, könnten auch noch zu einer von dem frühern verschiedenen Folgerung führen. Es könnte nämlich für $\Omega = 0$ und $\omega = 0$

$$p = - \left[\frac{4E_4 E_3 (bc'' - b'c) + A_6 E_3 (ca'' - c''a) - A_3 E_3 (ab'' - a''b)}{E_4 E_7 (bc'' - b''c)} \right]$$

seyn, wodurch die frühern Folgerungen $D_p \Omega = 0$, $\Psi = 0$, $D_p \Psi = 0$ ihre Gültigkeit verlor, und die Verbindung dieses Werthes von p mit $-\frac{A_3}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$ zu einer Bedingung zwischen den Coefficienten führen würde. Allein dass diess letztere nicht stattfindet, überzeugt man sich durch die Ungültigkeit dieses Werthes von p für den speciellen Fall, dass $B_3 = 0$, $B_4 = 0$ ist; für welchen Fall $y = 0$ eine repetirte Wurzel von Π ist und ω in $(B_3 - 4B_4 B_2) [B_1 p + B_2] = 0$ oder p in $-\frac{B_2}{B_1}$ übergeht.

$$\begin{aligned} \text{Es ist dann } a'' &= (8E_6 E_3 - 3E_7^2) E_4 \\ b'' &= 0 \\ c'' &= (E_7^2 - 2E_6 E_3) A_3 \end{aligned}$$

also $p = -\frac{4E_3}{E_7} \left[1 + \frac{A_3 a''}{4E_6 c''} \right]$ und da $\frac{4E_7}{E_7}$ für diesen Fall in $-\frac{B_2}{B_1}$ übergeht; so müsste

$$\frac{A_3 a''}{4E_6 c''} = -2 \text{ seyn, d. i. } \frac{8E_6 E_3 - 3E_7^2}{4(2E_6 E_3 - E_7^2)} = 2$$

oder $8E_6 E_3 = 5E_7^2$, d. i. nach den Werthen von E_6 , E_7 , E_3 : $B_1^2 = -4B_4 B_2$ eine Bedingung zwischen den Coefficienten, die für diesen Fall nicht nothwendig erfüllt seyn muss.

13. Aus der Bedingung $D_p \Pi = 0$ für $y = \frac{-F_7}{F_6}$, so wie aus $\omega = 0$ und $D_p \omega = 0$ für denselben Werth, folgt: dass es noch eine zweite Weise gebe, für welche die Werthe zweier Wurzeln gleich werden; nämlich für $y = p = \frac{-F_7}{F_6}$. Für diesen Fall ist

$$\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_0}} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} \right] \\ \pm \sqrt{1 - \frac{1}{16} \left[-\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} \right]^2}$$

für eine bestimmte Wahl der Zeichen der Nulle gleich, oder es ist, weil dieser Werth wegen $D_3 = 0$, $D_4 = 0$ unbestimmt ist, nach der zweiten Ausdrucksweise:

$$\pm \sqrt{\frac{A_3}{D_1} - D_1} \pm \sqrt{\frac{D_1^2 - 16 D_0^2 D_3 + 2\sqrt{A_3} D_1 \cdot D_1 + A_3}{D_1}} = 0,$$

mithin
$$\frac{A_3}{D_1} + 2\sqrt{A_3} D_1 + D_1^2 = D_1^2 - \frac{16 D_0^2 D_3}{D_1} + 2\sqrt{A_3} D_1 + \frac{A_3}{D_1},$$

d. i. $D_3 = 0$, welches sonach zu keiner neuen Bedingungsgleichung führt.

Der zweite Werth von p , der der Gleichung $\omega = 0$ genügt, ist nothwendig

$$p = -\frac{A_2}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6},$$

und ist derjenige Werth, den jene Gleichung mit den Gleichungen

$$G_3 p^3 + G_4 p^2 + G_5 p + G_6 = 0 \quad \text{und}$$

$$E_4 p^3 + E_5 p^2 + E_6 p^2 + E_7 p + E_8 = 0$$

gemein hat. Im Ganzen können bezüglich der gleichen Wurzeln 6 Fälle vorkommen:

1. $y_1 = y_2$, die dem entsprechende Bedingung ist:

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = \pm 1$$

und p hat den Werth $p = -\frac{A_2}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$. Die Wurzeln sind sodann:

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}}$$

$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} e^{i \arccos \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1 \right]}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} e^{-i \arccos \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1 \right]}$$

für $D_2 < 2\sqrt{D_0 D_4}$, in welchem Fall die Bedingung

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

besteht, oder

$$y_1 = p - \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}}$$

$$y_2 = p - \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} e^{i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right)}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} e^{-i \arccos \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right)}.$$

Für den Fall $D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$, wofür

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = -1$$

die entsprechende Bedingung ist.

Man kann überdiess die Wurzeln auch noch unter folgender Form schreiben:

$$y_1 = -\frac{B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$$

$$y_2 = -\frac{B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$$

$$y_3 = -\frac{B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{4(3B_0 B_1^2 - 8B_0^2 B_2) p + 2(B_1^3 - 4B_0^2 B_3 - 2B_0 B_1 B_2) + D_1 \sqrt{A_3} D_1}{D_1}}$$

$$y_4 = -\frac{B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{4(3B_0 B_1^2 - 8B_0^2 B_2) p + 2(B_1^3 - 4B_0^2 B_3 - 2B_0 B_1 B_2) + D_1 \sqrt{A_3} D_1}{D_1}}$$

2. $y_1 = y_3$. Die dem entsprechende Bedingung ist $D_3 = 0$, $D_4 = 0$ und $p = -\frac{F_7}{F_6}$. Das Radical in

$$y = p + \frac{1}{4B_0} \left[\pm \sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1 \right] \pm \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{D_1^2 \mp 2\sqrt{A_3} D_1 \cdot D_1 + A_3}{D_1}}$$

muss mit bestimmten Zeichen und zwar für y_1, y_2 als $+D_1 - \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ und für y_3, y_4 als $+D_1 + \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ genommen werden. Die Wurzeln sind alsdann:

$$y_1 = p$$

$$y_2 = p + \frac{1}{2B_0} \left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1 \right]$$

$$y_3 = p$$

$$y_4 = p - \frac{1}{2B_0} \left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + D_1 \right].$$

3. $y_1 = y_3$. Die Bedingungen und der Werth von p sind wie im zweiten Fall; das Radical ist sodann für y_1 und y_2 , $+ D_1 - \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ und für y_3, y_4 , $- D_1 - \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$.

Die Wurzeln sind:

$$y_1 = p$$

$$y_2 = p + \frac{1}{2B_0} \left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1 \right]$$

$$y_3 = p - \frac{1}{2B_0} \left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + D_1 \right]$$

$$y_4 = p.$$

4. $y_2 = y_3$. Die Bedingungen so wie p sind dieselben wie im zweiten Fall, und das Radical $- D_1 + \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ für y_1 und y_2 , und $D_1 + \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ für y_3, y_4 . Die Wurzeln sind:

$$y_1 = p + \frac{1}{2B_0} \left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1 \right]$$

$$y_2 = p$$

$$y_3 = p$$

$$y_4 = p - \frac{1}{2B_0} \left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + D_1 \right].$$

5. $y_2 = y_4$. Die Bedingungen und p wie im zweiten Fall, das Radical für y_1, y_2 , $- D_1 + \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$; für y_3, y_4 , $- D_1 - \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$; die Wurzeln sind:

$$y_1 = p + \frac{1}{2B_0} \left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1 \right]$$

$$y_2 = p$$

$$y_3 = p - \frac{1}{2B_0} \left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + D_1 \right]$$

$$y_4 = p.$$

6. $y_3 = y_4$. Die Bedingungsgleichung ist für den Fall

$$D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}} = + 1$$

$p = -\frac{A_3}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$ und das Radical $\sqrt{\frac{D_3}{D_0}}$ ist mit dem Zeichen $-$ zu nehmen. Die Wur-

zeln sind dann:
$$y_1 = p - \sqrt{\frac{D_3}{D_0}} e^{i \arccos \left[\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1 \right]}$$

$$y_2 = p - \sqrt{\frac{D_3}{D_0}} e^{-i \arccos \left[\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1 \right]}$$

$$y_3 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_4 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

Im Fall, dass $D_2 < 2\sqrt{D_0 D_4}$ für denselben Werth von p und die Bedingungs-
 chung $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 4 \frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}} = -1$

$$y_1 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{i \arccos \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right]}$$

$$y_2 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{-i \arccos \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1 \right]}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

Der Fall 6 fällt mit dem 1 zusammen, ebenso sind die Fälle 2, 3, 4, 5 dieselben.

14. Nachdem im frühern die Identität der Gleichungen

$$\begin{aligned} & A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0 \quad \text{und} \\ & 16 A_3 B_0 p^3 + \left(192 A_3 B_0^2 B_1 - \frac{128 A_3 B_0 \mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} - \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 \right) p^2 \\ & + \left[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right) + 16 A_3 B_0 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 \right. \\ & \left. - 2 \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right) \right] p + 4 A_3 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4 B_0 p + B_1}} \right)^2 \\ & - \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4 B_0 p + B_1} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

bewiesen wurde, insofern beide gleiche Werthe von p liefern, erübrigt noch die letzte
 Gleichung

$$\begin{aligned} & (B_1 F_6^3 - 4 B_0 F_6^2 F_7) p^3 + (B_2 F_6^3 - 6 B_0 F_6^2 F_7^2) p^2 + (B_3 F_6^3 - 4 B_0 F_6 F_7^3) p \\ & + B_4 F_6^3 - B_5 F_7^3 = 0 \end{aligned}$$

zu besprechen. Auch von dieser Gleichung lässt sich mit Zuhilfenahme der zwischen
 den Coefficienten A_3, A_4, A_5, A_6 stattfindenden Bedingungen

$$A_4 B_1 - A_3 B_2 = 2 B_0 A_5 \quad \text{und}$$

$$A_5 B_1 - A_3 B_3 = 8 B_0 A_6$$

diese Identität nachweisen. Aus $D_p \omega$ für $p = -\frac{F_7}{F_6}$, welcher letztere Werth Kürze

halber durch α bezeichnet sey, folgt:

$$\begin{aligned} & 3 A_3 \alpha^2 + 2 A_4 \alpha + A_5 = 0, \quad \text{d. i. mit Rücksicht auf} \\ & 2 B_0 A_5 = A_4 B_1 - B_2 A_3 \end{aligned}$$

$$6B_0A_3\alpha^2 + 4B_0A_3\alpha + A_3B_1 - B_2A_3 = 0 \text{ und}$$

$$\frac{B_2 - 6B_0\alpha^2}{B_1 + 4B_0\alpha} = \frac{A_3}{A_3},$$

d. i. nach Herstellung des Werthes von α ,

$$\frac{B_2F_6^2 - 6B_0F_7^2F_6^2}{B_1F_6^2 - 4B_0F_6^2F_7} = \frac{A_3}{A_3}.$$

Es ist ferner $4B_0\alpha^2 + 3B_1\alpha^2 + 2B_2\alpha + B_3 = 0$,

und wie eben entwickelt wurde,

$$-6B_0A_3\alpha^2 - 4B_0A_3\alpha + B_2A_3 - B_1A_3 = 0, \text{ somit}$$

$$24B_0^2A_3\alpha^2 + 12B_0(B_2A_3 - B_1A_3)\alpha + 6B_0B_3A_3 + 3B_1(B_2A_3 - A_3B_1) = 0.$$

Vermöge der Gleichung $2B_0A_3 = A_3B_1 - B_2A_3$ ist dieser Ausdruck

$$24B_0^2A_3\alpha^2 - 24B_0^2A_3\alpha + 6B_0B_3A_3 - 6B_0B_1A_3 = 0, \text{ d. i.}$$

$$4B_0A_3\alpha^2 - 4B_0A_3\alpha + A_3B_1 - B_1A_3 = 0, \text{ mithin}$$

$$\frac{4B_0\alpha^2 + B_3}{4B_0\alpha + B_1} = \frac{A_3}{A_3},$$

und nach Herstellung des Werthes von α

$$\frac{B_3F_6^2 - 4B_0F_6F_7^2}{B_1F_6^2 - 4B_0F_7F_6^2} = \frac{A_3}{A_3}.$$

Ferner ist $B_0A_3\alpha^3 + B_1A_3\alpha^2 + B_2A_3\alpha^2 + B_3A_3\alpha + B_4A_3 = 0$

und $B_1A_3\alpha^3 + B_1A_3\alpha^2 + B_1A_3\alpha + B_1A_0 = 0$

daher $B_0A_3\alpha^3 + (A_3B_2 - A_3B_1)\alpha^2 + (A_3B_3 - A_3B_1)\alpha + A_3B_4 - A_6B_1 = 0.$

Nach den zwischen den Coefficienten erwähnten Bedingungen ist dieser Ausdruck

$$B_0A_3\alpha^3 - 2B_0A_3\alpha^2 - 8B_0A_6\alpha + A_3B_4 - A_6B_1 = 0,$$

zugleich ist nach dem eben Bewiesenen

$$4B_0A_3\alpha^3 - 4B_0A_3\alpha^2 - 8B_0A_6\alpha = 0, \text{ mithin}$$

$$B_0A_3\alpha^3 - A_1B_4 + 4B_0A_6\alpha + B_1A_0 = 0,$$

wenn die erste Gleichung mit 2 multiplicirt von der letztern subtrahirt wird; oder

$$\frac{B_0\alpha^3 - B_4}{4B_0\alpha - B_1} = \frac{A_3}{A_3} \text{ d. i. } \frac{B_3F_6^2 - B_0F_7^2}{B_1F_6^2 - 4B_0F_6^2F_7} = \frac{A_3}{A_3}.$$

Durch diese Relationen ist somit die erwähnte Identität erwiesen.

IV.

Betrachtung mehrfach oder paarweise gleicher Wurzelfactoren.

1. Die Bedingung dreier gleicher Wurzeln ist $D_7\Pi = 0$, $D_7^2\Pi = 0$ für den Werth der dreifachen Wurzel. Daraus folgt sodann die Bedingung zwischen den Coefficienten.

Es ist nämlich für den dreifachen Werth

$$B_0y^3 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0 \text{ und}$$

$$4B_0y^3 + 3B_1y^2 + 2B_2y + B_3 = 0$$

folglich hieraus

$$B_1 y^3 + 2 B_2 y^2 + 3 B_3 y + 4 B_4 = 0.$$

Ferner folgt aus diesen letzten Gleichungen

$$(3 B_1^2 - 8 B_0 B_2) y^2 + (2 B_1 B_2 - 12 B_0 B_3) y + B_1 B_3 - 16 B_0 B_4 = 0,$$

und da überdiess

$$6 B_0 y^2 + 3 B_1 y + B_2 = 0 \text{ ist;}$$

$$[3 B_1 (3 B_1^2 - 8 B_0 B_2) - 12 B_0 (B_1 B_2 - 6 B_0 B_3)] y + (3 B_1^2 - 8 B_0 B_2) B_3 - 6 B_0 (B_1 B_3 - 16 B_0 B_4) = 0,$$

oder wenn Kürze halber

$$3 B_1 (3 B_1^2 - 8 B_0 B_2) - 12 B_0 (B_1 B_2 - 6 B_0 B_3) = \mathfrak{B}$$

$$(3 B_1^2 - 8 B_0 B_2) B_3 - 6 B_0 (B_1 B_3 - 16 B_0 B_4) = \mathfrak{C}$$

gesetzt wird

$$\mathfrak{B} y + \mathfrak{C} = 0.$$

Die Verbindung dieser Gleichung $\mathfrak{B} y^2 + \mathfrak{C} y = 0$ mit der quadratischen

$$6 B_0 y^2 + 3 B_1 y + B_2 = 0$$

ergibt

$$(3 B_1 \mathfrak{B} - 6 B_0 \mathfrak{C}) y + B_2 \mathfrak{B} = 0,$$

und für y seinen Werth gesetzt

$$B_2 \mathfrak{B}^2 - 3 B_1 \mathfrak{B} \mathfrak{C} + 6 B_0 \mathfrak{C}^2 = 0,$$

wofür nach Substitution von \mathfrak{B} und \mathfrak{C} folgende Glieder resultiren :

$B_1^2 B_2$	9 - 9 ²
$B_0 B_1^2 B_2^2$	- 8 . 9 ² 4 . 9 ² 3 . 8 . 9 6 . 9
$B_0 B_1^2 B_3$	2 . 9 ²
$B_1^2 B_1^2 B_2^2$	9 ² . 16 - 6 . 9 . 16 - 2 . 9 . 16
$B_1^2 B_1^2 B_2 B_3$	9 ² . 16 - 9 ² . 8 - 9 ² . 8 - 3 . 9 . 8
$B_1^2 B_1 B_1^2 B_3$	- 9 ² . 4 . 16 3 . 4 . 9 . 16 4 . 9 . 16
$B_1^2 B_1^2 B_3^2$	9 ² . 16 3 . 9 . 8
$B_1^2 B_1^2 B_4$	- 2 . 9 ² . 16

$B_0^5 B_1^3 B_2 B_3$	9 ² . 8. 16 3. 9. 8. 16
$B_0^3 B_2^3$	3. 8. 16
$B_0^3 B_2 B_3^2$	9 ² . 4. 16
$B_0^3 B_1 B_3 B_4$	— 9 ² . 16 — 3. 9. 16
$B_0^3 B_1^2 B_4$	— 4. 9. 16 ²
$B_0^5 B_4^2$	3. 8. 9. 16 ²

und somit die Bedingungs-gleichung:

$$\begin{aligned}
 & - 6.9 B_0 B_1^3 B_2^2 + 2.81 B_0 B_1 B_3 + 9.16 B_0^2 B_1^2 B_2^2 - 9.24 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 \\
 & - 20.9.16 B_0^3 B_1 B_2^2 B_3 + 8.21.9 B_0^3 B_1^2 B_3^2 - 2.81.16 B_0^3 B_1^2 B_4 \\
 & + 6.9.16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_4 + 3.8.16 B_0^3 B_2^2 + 4.81.16 B_0^3 B_2 B_3^2 \\
 & - 3.4.9.16^2 B_0^3 B_1 B_3 B_4 - 4.9.16^2 B_0^3 B_2^2 B_4 + 3.8.9.16^2 B_0^3 B_4^2 = 0.
 \end{aligned}$$

2. Um jedoch die einfachsten Bedingungen zu erhalten, sey die dreifache Wurzel durch α und die vierte durch β vorgestellt; die Bedingungen zwischen den Coefficienten sind alsdann:

$$\begin{aligned}
 -\frac{B_1}{B_0} &= 3\alpha + \beta, \quad \beta = -\frac{B_1}{B_0} - 3\alpha \\
 \frac{B_2}{B_0} &= 3\alpha(\alpha + \beta) = -3\alpha\left(\frac{B_1}{B_0} + 2\alpha\right) \\
 -\frac{B_3}{B_0} &= \alpha^2(\alpha + 3\beta) = -\alpha^2\left(\frac{3B_1}{B_0} + 8\alpha\right) \\
 \frac{B_4}{B_0} &= \alpha^3\beta = -\frac{B_1}{B_0}\alpha^2 - 3\alpha^3. \quad \text{Hieraus folgt} \\
 B_1 &= 3B_1\alpha^2 + 8B_0\alpha^3 \\
 B_2\alpha &= -3B_1\alpha^2 - 6B_0\alpha^3 \quad \text{und daraus} \\
 3B_3 + 4B_2\alpha &= -3B_1\alpha^2, \quad \text{welches mit} \\
 B_2 + 3B_1\alpha &= -6B_0\alpha^2, \quad \text{die Gleichung:} \\
 6B_0B_3 - B_1B_2 &= (3B_1^2 - 8B_0B_2)\alpha \quad \text{ergibt.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Mithin ist } \alpha &= \frac{6B_0B_3 - B_1B_2}{3B_1^2 - 8B_0B_2} = -\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} \\
 &= \frac{-3B_1^2B_2 + 8B_0B_2^2 + 6B_0B_1B_3 - 6.16B_0^2B_4}{9B_1^2 - 36B_0B_1B_2 + 72B_0^2B_3}
 \end{aligned}$$

Somit wäre die Bedingung:

$$\begin{aligned}
 & 12 B_0 B_1^2 B_2^2 - 4.9 B_0 B_1 B_3 + 3.16^2 B_0^2 B_2 B_3 - 18.16 B_0^2 B_1 B_4 \\
 & - 6.72 B_0^2 B_3^2 - 64 B_0^2 B_2^2 + 15.16 B_0^2 B_1 B_2 B_3 = 0,
 \end{aligned}$$

die sich durch folgende Betrachtung noch vereinfachen lässt. Es lässt sich nämlich erweisen, dass folgende Gleichung

$$B_0 B_2^2 - 3 B_0 B_1 B_3 + 12 B_0^2 B_4 = 0$$

als erste Bedingung bestehe; denn setzt man statt B_1, B_2, B_3 ihre vorigen Werthe; so erfolgt der Ausdruck

$$9 B_0^2 \alpha^2 (\alpha + \beta)^2 - 3 B_0^3 (3\alpha + \beta) \alpha^2 (\alpha + 3\beta) + 3 \cdot 4 \cdot B_0^3 \alpha^3 \beta,$$

der sich auf Null reducirt. Wird dann die erste Bedingung in die obige substituirt; so enthält diese um zwei Glieder weniger und ist als zweite Bedingung:

$$9 B_1^2 B_2^2 - 27 B_1^3 B_3 - 32 B_0 B_2^2 + 4 \cdot 27 B_0 B_1 B_2 B_3 - 6 \cdot 18 B_0^2 B_3^2 = 0.$$

3. Diese Bedingungen zwischen den Coefficienten lassen eine Aenderung des Werthes α zu; denn wird die erste Gleichung zum Zähler von $\alpha = -\frac{C}{S}$ addirt; so übergeht es in

$$\alpha = \frac{-3 B_1^2 B_2 + 12 B_0 B_2^2 - 6 B_0 B_1 B_3 - 3 \cdot 16 B_0^2 B_4}{9 B_1^2 - 36 B_0 B_1 B_2 + 72 B_0^2 B_3},$$

und nach der Bedeutung von A_3, A_4 in

$$\alpha = -\frac{A_4}{3 A_3}.$$

Dadurch lässt sich erweisen, dass die Gleichung ω sämmtlich gleiche Wurzeln enthält. Denn da die Gleichung $\Pi = 0$ eine repetirte Wurzel besitzt, nämlich $-\frac{F_7}{F_6}$, so gilt nach frühern dasselbe von der Gleichung $\omega = 0$, deren dritte Wurzel $-\frac{A_4}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$ ist. Vermöge der Bedingung $\frac{A_4}{3 A_3} = \frac{F_7}{F_6}$ wird aber dieser dritte Werth zu $-\frac{F_7}{F_6}$.

4. Die erwähnte Eigenschaft der Gleichung $\omega = 0$ führt auf folgende Bedingungen

$$3\alpha = -\frac{A_4}{A_3}$$

$$3\alpha^2 = \frac{A_4}{A_3}$$

$$\alpha^3 = -\frac{A_4}{A_3} \quad \text{d. i.} \quad \frac{A_4^2}{3 A_3^2} = \frac{A_4}{A_3}, \quad \frac{A_4^3}{27 A_3^3} = \frac{A_4}{A_3},$$

$$\begin{aligned} \text{welche in } D_1^3 &= 4^3 B_0^3 p^3 + 3 \cdot 4^2 B_0^2 B_1 p^2 + 3 \cdot 4 B_0 B_1^2 p + B_1^3 \\ &= -\frac{4^3 B_0^3 A_4^3}{27 A_3^3} + \frac{3 \cdot 4^2 B_0^2 B_1 A_4^2}{9 A_3^3} - \frac{4 B_0 B_1^2 A_4}{A_3} + B_1^3 \end{aligned}$$

substituirt, auf den Werth

$$D_1^3 = \frac{-4^3 B_0^3 A_4 + 4^2 B_0^2 B_1 A_4 - 4 B_0 B_1^2 A_4 + B_1^3 A_3}{A_3}$$

führen. Aus dem Zähler erhält man, wenn die Werthe für A_1, A_2, A_3, A_4 substituirt werden:

$$\begin{aligned}
 & - 4^3 B_0^3 B_1^2 B_4 + 4^3 B_0^3 B_3^2 + 4^2 B_0^3 B_1^2 B_3 + 8 \cdot 4^2 B_0^3 B_1^2 B_4 \\
 & - 4^2 B_0^3 B_1 B_2 B_3 - 4 B_0 B_1^2 B_2 - 8 B_0^3 B_1^2 B_3 - 4 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 B_4 \\
 & + 4^2 B_0^3 B_1^2 B_2^2 + B_0^6 - 4 B_0 B_1^2 B_2 + 8 B_0^3 B_1^2 B_3 = B_0^6 \\
 & + 16 B_0^3 B_1^2 B_2^2 + 8^2 B_0^3 B_3^2 - 8 B_0 B_1^2 B_2 + 16 B_0^3 B_1^2 B_3 - 64 B_0^3 B_1 B_2 B_3 \\
 & = A_3^2 \text{ somit ist}
 \end{aligned}$$

$$D_1^3 = A_3.$$

Diese Bedingung mit $D_2 = 0$, $D_3 = 0$, $D_4 = 0$ sind die Gleichungen, die mit der Bedingung der dreifachen Wurzel verknüpft sind. Die Wurzeln selbst sind:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= p \\
 y_2 &= p \\
 y_3 &= p \\
 y_4 &= p - \frac{\sqrt[3]{A_3}}{B_0}.
 \end{aligned}$$

5. Sollten die Wurzeln paarweise gleich seyn, wobei der Ausdruck der Wurzeln im zweiten Theil des Binoms sein Zeichen wechselt; so ist die entsprechende aus

$$y = p + \sqrt[3]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\pm i \arccos \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - \frac{4(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} \right]}$$

entlehnte Bedingung:

$$D_1 D_3 - 4\sqrt{D_0 D_4} (D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4}) = 0$$

$$\text{d. i. } D_1 D_3 + 8 D_0 D_4 = 4 D_2 \sqrt{D_0 D_4} \text{ oder}$$

$$D_1^2 D_3^2 + 16 D_0 D_1 D_3 D_4 + 64 D_0^2 D_4^2 = 16 D_0 D_2^2 D_4$$

$$D_1 D_3 [D_1 D_3 + 16 D_0 D_4] = 16 D_0 D_4 [D_2^2 - 4 D_0 D_4].$$

Bei der Entwicklung dieser Theile erhält man:

$$\begin{aligned}
 D_2^2 - 4 D_0 D_4 &= 32 B_0^3 p^4 + 32 B_0 B_1 p^3 + (8 B_0 B_2 + 9 B_1^2) p^2 \\
 &+ (6 B_1 B_2 - 4 B_0 B_3) p + B_2^2 - 4 B_0 B_4
 \end{aligned}$$

diess in $16 D_0 D_4$ multiplicirt, ergibt:

$$(D_2^2 - 4 D_0 D_4) 16 D_0 D_4 =$$

$$\left. \begin{aligned}
 & 2 \cdot 16^2 B_0^3 p^6 + 2 \cdot 16^2 B_0^3 B_1 p^5 + 8 \cdot 16 B_0^3 B_2 p^4 + 6 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_1 p^3 \\
 & \quad \quad \quad \left. \begin{aligned}
 & 2 \cdot 16^2 B_0^3 B_1^2 p^2 \\
 & \quad \quad \quad \left. \begin{aligned}
 & 9 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 p \\
 & 32 \cdot 16 B_0^3 B_2^2 p \\
 & 32 \cdot 16 B_0^3 B_3^2 p
 \end{aligned} \right\} - 4 \cdot 16 B_0^3 B_3 \\
 & \quad \quad \quad \left. \begin{aligned}
 & 8 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_2 \\
 & 9 \cdot 16 B_0^3 B_1^2 B_1 \\
 & 32 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_2 \\
 & 32 \cdot 16 B_0^3 B_3
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \right\} p^2
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + 16 B_0^3 B_2^2 p^3 + 16 B_0 B_1 B_2^2 p^2 + 16 B_0 B_2^3 p \\
 & - 4 \cdot 16 B_0^3 B_4 p^4 - 4 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_3 p^3 - 4 \cdot 16 B_0^3 B_2 B_2 p^2 \\
 & \quad \quad \quad \left. \begin{aligned}
 & 6 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_1 p^2 \\
 & 6 \cdot 16 B_0 B_1 B_2^2 p \\
 & - 4 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_3 p \\
 & - 4 \cdot 16 B_0^3 B_2 B_3 p \\
 & 8 \cdot 16 B_0^3 B_2^2 p \\
 & 8 \cdot 16 B_0^3 B_2 B_3 p \\
 & 9 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2 p \\
 & 9 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_3 p \\
 & 32 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_3 p \\
 & 32 \cdot 16 B_0^3 B_4 p
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \right\} p$$

$$\left. \begin{array}{l} + 16 B_0 B_1^2 B_2 \\ - 4 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_2 \\ 6 \cdot 16 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ - 4 \cdot 16 B_0^2 B_3 B_4 \end{array} \right\} p + 16 B_0 B_1^2 B_3 \\ - 4 \cdot 16 B_0^2 B_3^2$$

Eben so ist:

$$D_1 D_3 = 16 B_0^2 p^4 + 16 B_0 B_1 p^3 + (3 B_1^2 + 8 B_0 B_2) p^2 \\ + (4 B_0 B_3 + 2 B_1 B_2) p + B_1 B_3$$

$$D_1 D_3 + 16 D_0 D_3 = 32 B_0^2 p^4 + 32 B_0 B_1 p^3 + (24 B_0 B_2 + 3 B_1^2) p^2 \\ + (20 B_0 B_3 + 2 B_1 B_2) p + 16 B_0 B_3 + B_1 B_3$$

und das Product dieser Grössen:

$$D_1 D_3 (D_1 D_3 + 16 D_0 D_3) = \\ \left. \begin{array}{l} 2 \cdot 16^2 B_0^2 p^8 + 2 \cdot 16^2 B_0^2 B_1 p^7 + 3 \cdot 32 B_0^2 B_1^2 p^6 \\ 2 \cdot 16^2 B_0^2 B_2 p^5 \\ 8 \cdot 32 B_0^2 B_2^2 p^4 \\ 2 \cdot 16^2 B_0^2 B_3^2 p^3 \\ 24 \cdot 16 B_0^2 B_3^2 p^2 \\ 3 \cdot 16 B_0^2 B_3^2 p \end{array} \right\} p^6 \\ + \left. \begin{array}{l} + 2 \cdot 32 B_0^2 B_1 B_2 p^5 + 32 B_0^2 B_1 B_3 p^4 + 32 B_0^2 B_1^2 B_3 p^3 \\ 4 \cdot 32 B_0^2 B_3 p^3 + 2 \cdot 32 B_0^2 B_1 B_2 p^2 + 2 \cdot 24 B_0^2 B_1 B_2^2 p^2 \\ 3 \cdot 32 B_0^2 B_1^2 p^2 + 4 \cdot 32 B_0^2 B_1 B_3 p^2 + 6 B_0^2 B_2^2 p^2 \\ 8 \cdot 32 B_0^2 B_1 B_2 p^2 + 3 \cdot 24 B_0^2 B_1^2 B_2 p^2 + 4 \cdot 24 B_0^2 B_2 B_3 p^2 \\ 24 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_2 p^2 + 9 B_0^2 p^2 + 12 B_0^2 B_1^2 B_3 p^2 \\ 3 \cdot 16 B_0^2 B_1^2 p^2 + 8 \cdot 24 B_0^2 B_2^2 p^2 + 3 \cdot 20 B_0^2 B_1^2 B_3 p^2 \\ 20 \cdot 16 B_0^2 B_3 p^2 + 3 \cdot 8 B_0^2 B_1 B_2 p^2 + 6 B_0^2 B_2^2 p^2 \\ 2 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_2 p^2 + 20 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_3 p^2 + 8 \cdot 20 B_0^2 B_2 B_3 p^2 \\ 2 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_2 p^2 + 16 B_0^2 B_1 B_2^2 p^2 + 16 B_0^2 B_1 B_3^2 p^2 \\ 16 B_0^2 B_3^2 p^2 + 16 B_0^2 B_1 B_3 p^2 \end{array} \right\} p^5 \\ + \left. \begin{array}{l} + 24 B_0 B_1 B_2 B_3 p^2 + 20 B_0 B_1 B_3^2 p + 16 B_0 B_1 B_3 B_4 \\ 3 B_0^2 B_3 p + 2 B_0^2 B_2 B_3 p + B_0^2 B_3^2 p \\ 2 \cdot 20 B_0 B_1 B_2 B_3 p + 2 \cdot 16 B_0 B_1 B_1 B_3 p + 16 B_0 B_1 B_3 B_4 \\ 4 B_0^2 B_2^2 p + 2 B_0^2 B_2 B_3 p \\ 4 \cdot 20 B_0^2 B_3^2 p + 4 \cdot 16 B_0^2 B_3 B_4 p \\ 8 B_0 B_1 B_2 B_3 p + 4 B_0 B_1 B_3^2 p \\ 3 \cdot 16 B_0 B_1 B_3 p + 3 B_0^2 B_3 p \\ 8 \cdot 16 B_0^2 B_2 B_3 p + 8 B_0 B_1 B_2 B_3 p \end{array} \right\} p^2$$

Man erhält nach gehöriger Reduction dieser Theile die Gleichung:

$$[12 \cdot 16 B_0^2 B_3 - 3 \cdot 16 B_0^2 B_2^2 + 3 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2 - 3 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_3 - 9 B_1^2] p^4 \\ + [3 \cdot 16 B_0 B_1 B_2^2 + 12 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_3 - 12 \cdot 16 B_0^2 B_2 B_3 + 2 \cdot 12 B_0 B_1^2 B_3 - 12 B_1^2 B_4] p^3 \\ + [16 B_0 B_2^2 - 4 \cdot 16 B_0^2 B_2 B_3 + 16 B_0 B_1 B_2 B_3 - 9 \cdot 16 B_0^2 B_3^2 + 6 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_4 \\ - 6 B_1^2 B_3 - 4 B_1^2 B_2^2] p^2 + [16 B_0 B_2^2 B_3 - 12 \cdot 16 B_0^2 B_3 B_4 \\ + 4 \cdot 16 B_0 B_1 B_2 B_3 - 24 B_0 B_1 B_3^2 - 4 B_1^2 B_2 B_3] p + 16 B_0 B_2^2 B_4 \\ - 4 \cdot 16 B_0^2 B_3^2 - 16 B_0 B_1 B_3 B_4 - B_1^2 B_3^2 = 0.$$

6. Diese Gleichung in Verbindung mit

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

dient zur Bestimmung von p. Allein folgende Betrachtung zeigt, dass beide Gleichungen unbestimmt sind; indem sämmtliche Coefficienten derselben, vermöge den zwischen den Coefficienten B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 stattfindenden Bedingungen zu Null werden.

Da die Form der Wurzeln durch $\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha - \beta$ repräsentirt wird, bestehen folgende Gleichungen:

$$\frac{-B_1}{B_0} = 4\alpha$$

$$\frac{B_2}{B_0} = (\alpha + \beta)^2 + 4(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha - \beta)^2 = 2(3\alpha^2 - \beta^2)$$

somit $\alpha = \frac{-B_1}{4B_0}, \beta^2 = \frac{3B_1^2}{16B_0^2} - \frac{B_2}{2B_0}$. Ferner ist

$$\frac{-B_3}{B_0} = 2[(\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2] = 4\alpha(\alpha^2 - \beta^2)$$

$$\frac{-B_4}{B_0} = \frac{B_1}{8B_0^2}(B_1^2 - 4B_0B_2) \text{ mithin}$$

$$B_1^2 - 4B_0B_1B_2 + 8B_0^2B_3 = 0$$

als erste Bedingungsgleichung. Weiter ist

$$\frac{B_4}{B_0} = (\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta)^2 = \left(\frac{-2B_1}{16B_0^2} + 8\frac{B_0B_2}{16B_0^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64B_0^4}(4B_0B_2 - B_1^2)^2 \text{ somit die zweite Bedingung}$$

$$B_1^2B_4 = B_0B_3^2.$$

Die erste Bedingung ist nach früherer Bezeichnung $A_3 = 0$, die letztere $A_6 = 0$. Aus den Gleichungen $8B_0A_6 = A_5B_1 - A_3B_3$ und

$$2B_0A_5 = A_4B_1 - A_3B_2,$$

denen die Werthe A_3, A_4, A_5, A_6 genügen, folgt dann weiter

$$A_3 = 0, A_4 = 0.$$

7. Da die Bedingung $\sqrt[5]{\frac{D_4}{D_0}} = \sqrt{\frac{D_1}{D_1}}$ vermöge der zweiten Bedingungsgleichung erfüllt ist; so ist zugleich ein Werth von p nämlich $p = 0$ gegeben, und da derselbe der einzige Werth ist, indem die Gleichung $A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$ keinen andern ergibt; so muss derselbe auch der in N5 gefundenen Gleichung entsprechen. Daraus folgt, dass der letzte Coefficient der Nulle gleich sey.

$$16B_0B_2^2B_4 - 4 \cdot 16B_0^2B_3^2 - 16B_0B_1B_2B_4 - B_1^2B_3^2 = 0.$$

Man ersieht es übrigens auch aus folgenden Transformationen. Es ist dieser Coef-

ficient nach Substitution von $B_3^2 = \frac{B_1^2B_4}{B_0}$,

$$\begin{aligned}
& \frac{B_3}{B_0} (16 B_0^2 B_2^2 - 4 \cdot 16 B_0^3 B_4 - 16 B_0^2 B_1 B_3 - B_1^2) \\
&= \frac{B_2}{B_0} [-4 B_0 (-4 B_0 B_2^2 + 16 B_0^3 B_4 + 2 B_0 B_1 B_3 + B_1^2 B_2) \\
&\quad - B_1 (B_1^2 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3)] \\
&= \frac{-B_4}{B_0} [4 B_0 A_3 + B_1 A_3] \text{ somit weil } A_3 \text{ und } A_4 \text{ Null sind, der Nulle}
\end{aligned}$$

gleich. Ferner ist der Coefficient von p

$$16 B_0 B_2^2 B_3 - 12 \cdot 16 B_0^2 B_3 B_4 + 4 \cdot 16 B_0 B_1 B_2 B_4 - 24 B_0 B_1 B_3^2 - 4 B_1^2 B_2 B_3$$

wenn statt B_4 sein Werth aus A_3 gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
&= 16 B_0 B_2^2 B_3 - 12 \cdot 16 \frac{B_0^2 B_3^2}{B_1^2} + 4 \cdot 16 \frac{B_0^2 B_1 B_2 B_3^2}{B_1^2} - 24 B_0 B_1 B_3^2 - 4 B_1^2 B_2 B_3 \\
&= \frac{4 B_3}{B_1^2} [4 B_0 B_2^2 B_3^2 - 3 \cdot 16 B_0^2 B_3^2 + 16 B_0^2 B_1 B_2 B_3 - 6 B_0 B_1^2 B_3 - B_1^2 B_2] \\
&= \frac{4 B_2}{B_1^2} [(4 B_0 B_1 B_2 - B_1^2 - 8 B_0^2 B_3) B_1 B_2 - 6 B_0 B_3 (8 B_0^2 B_3 - 4 B_0 B_1 B_2 + B_1^2)] \\
&= \frac{4 B_3}{B_1^2} [-B_1^2 + 4 B_0 B_1 B_2 - 8 B_0^2 B_3] [B_1 B_2 + 6 B_0 B_3] \\
&= -4 \frac{B_3 A_3}{B_1^2} (B_1 B_2 + 6 B_0 B_3) = 0.
\end{aligned}$$

Dasselbe gilt vom Coefficienten von p^2 ; derselbe ist nach gleicher Behandlung:

$$\begin{aligned}
&16 B_0 B_2^2 - 4 \cdot 16 B_0^2 B_3 B_4 + 16 B_0 B_1 B_2 B_3 - 9 \cdot 16 B_0^3 B_4^2 \\
&+ 6 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_3 - 6 B_1^2 B_3 - 4 B_1^2 B_2^2 = 16 B_0 B_2^2 - 4 \cdot 16 \frac{B_0^2 B_2 B_3^2}{B_1^2} \\
&+ 16 B_0 B_1 B_2 B_3 - 3 \cdot 16 B_0^2 B_3^2 - 6 B_1^2 B_3 - 4 B_1^2 B_2^2 \\
&= \frac{8 B_2}{B_1^2} \left[2 B_0 B_1^2 B_3^2 - 8 B_0^2 B_3^2 - \frac{B_1^2 B_2}{2} \right] - 6 B_3 [B_1^2 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3] \\
&- 8 B_0 B_1 B_2 B_3 = \frac{8 B_2}{B_1^2} \left(2 B_0 B_1^2 B_3^2 - 8 B_0^2 B_3^2 - \frac{B_1^2 B_2}{2} \right) \\
&- 6 A_3 B_3 - 8 B_0 B_1 B_2 B_3 = \frac{8 B_2}{B_1^2} \left[2 B_0 B_1^2 B_3^2 - 8 B_0^2 B_3^2 - \frac{B_1^2 B_2}{2} \right. \\
&\left. - B_0 B_1^2 B_3 \right] = \frac{8 B_2^2}{B_1^2} \left[2 B_0 B_1^2 B_2 - 4 B_0^2 B_1 B_2 - \frac{B_1^4}{2} - \frac{B_0 B_3 A_3}{B_2} \right] \\
&= \frac{4 B_2^2}{B_1^2} [-B_1^2 + 4 B_0 B_1 B_2 - 8 B_0^2 B_3] = -\frac{4 B_2^2 A_3}{B_1} = 0.
\end{aligned}$$

Eben so ist der Coefficient von p^3 die Nulle. Es übergeht durch die analoge Behandlung

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 16 B_0 B_1 B_2^2 + 12 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_3 - 12 \cdot 16 B_0^2 B_2 B_3 + 2 \cdot 12 B_0 B_1^2 B_3 \\
&- 12 B_1^2 B_2 \text{ in } 3 \cdot 16 B_0 B_1 B_2^2 + 12 \cdot 16 \frac{B_0^2 B_1 B_3^2}{B_1^2} - 12 \cdot 16 B_0^2 B_2 B_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \cdot 12 B_0 B_1^2 B_3 - 12 B_1^3 B_2 = -12 B_2 [B_1^3 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3] \\
 &+ 24 \frac{B_0 B_3}{B_1} [B_1^3 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3] = \frac{12}{B_1} (2 B_0 B_3 - B_1 B_2) A_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Endlich gilt dasselbe ebenfalls vom Coefficienten von p^4 ; denn derselbe ist

$$\begin{aligned}
 &12 \cdot 16 B_0^3 B_1 - 3 \cdot 16 B_0^2 B_2^2 + 3 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2 - 3 \cdot 16 B_1^3 B_1 B_1 - 9 B_1^4 \\
 &= 12 B_0 [16 B_0^2 B_1 - 4 B_0 B_2^2 + 2 B_0 B_1 B_2 + B_1^2 B_2] \\
 &+ 9 B_1 [4 B_0 B_1 B_2 - 8 B_0^2 B_3 + B_1^3] = 12 B_0 A_4 - 9 B_1 A_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Es ist überdiess natürlich, dass sich diese Eigenschaft für die letztbesprochenen Gleichungen ergibt; denn da die Bedingungsgleichungen der Coefficienten B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 , anderweitig resultiren, so können diese Gleichungen nur auf jene führen oder durch dieselben unbestimmt werden.

3. Die Wurzeln der Gleichung sind in diesem Fall wegen $p=0$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} \left[\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1 B_3}{B_0 B_4}} + \sqrt{\frac{1}{72} \frac{B_1 B_3}{B_0 B_4} - 1} \right] \\
 y_2 &= \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} \left[\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1 B_3}{B_0 B_4}} - \sqrt{\frac{1}{72} \frac{B_1 B_3}{B_0 B_4} - 1} \right] \\
 y_3 &= y_1 \\
 y_4 &= y_2
 \end{aligned}$$

wo das Zeichen \pm vor $\sqrt{\frac{B_1 B_3}{B_0 B_4}}$ deshalb beigesetzt ist, weil für den Fall, dass B_1 negativ wäre, das Zeichen der Wurzel $+$ genommen werden muss, indem widrigenfalls die Summe der Wurzeln nicht dem negativen ersten Coefficienten gleich seyn könnte.

Diese Auflösung gilt daher auch für eine zweite Gleichung, für

$$B_0 y^4 - B_1 y^3 + B_2 y^2 - B_3 y + B_4 = 0.$$

Man braucht überdiess bloss die Wurzeln der ersten Gleichung um $\frac{-B_1}{2B_0}$ zu vermehren, um die Wurzeln der zweiten Gleichung zu erhalten. Dabei ändert sich der Werth von

$$\sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1 B_3}{B_0 B_4}} + \sqrt{\frac{1}{72} \frac{B_1 B_3}{B_0 B_4} - 1} \right]$$

nicht, obgleich derselbe in

$$\sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \sqrt{\frac{1}{72} \frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 1} \right]$$

übergeht, denn es ist für diese Vermehrung

$$D_0 = B_0$$

$$D_1 = -B_1$$

$$D_2 = \frac{6 B_0 B_1^2 - 6 B_0 B_2^2 + 4 B_0^2 B_2}{4 B_0^2} = B_2$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= \frac{-4B_0B_1^3 + 6B_1^3B_0 - 8B_0^2B_1B_2 + 4B_0B_1B_2 - B_0B_1^3}{8B_0^3} \\
&= \frac{B_0B_1^3 - 4B_0^2B_1B_2}{8B_0^3} = \frac{A_3B_0 - 8B_0^3B_3}{8B_0^3} = -B_3 \\
D_4 &= \frac{B_0B_1^3 - 2B_0B_1^3 + 4B_0^2B_1^2B_2 - 4B_0^2B_1^2B_2 + B_0B_1^3}{16B_0^3} + B_4 = B_4;
\end{aligned}$$

somit sind die Radikale dieselben, die Gleichung ist sodann

$$B_0y^4 - B_1y^3 + B_2y^2 - B_3y + B_4 = 0 \text{ und die Wurzeln } \mathfrak{Z} = y \frac{-B_1}{2B_0}.$$

Es kömmt diess daher, weil die Bedingung $B_1^2B_4 = B_0B_3^2$ besteht, denn die Gleichung

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}} + \sqrt{\frac{1}{16}\frac{B_1B_3}{B_0B_4} - 1} - \frac{B_1}{2B_0}\sqrt[4]{\frac{B_0}{B_4}} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}} \\
+ \sqrt{\frac{1}{16}\frac{B_1B_3}{B_0B_4} - 1} &\text{ führt auf } -\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}} = \frac{B_1}{B_0}\sqrt[4]{\frac{B_0}{B_4}}
\end{aligned}$$

d. i. auf $B_0B_3^2 = B_1^2B_4$.

Es lassen sich die Wurzeln dieser und jener Gleichung auch noch folgender schreiben:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{2\frac{[B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2]}{B_1}} \\
y_2 &= \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{2\frac{[B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2]}{B_1}} \\
y_3 &= y_1 \\
y_4 &= y_2
\end{aligned}$$

wobei die Berücksichtigung des Zeichens von B_1 wegfällt und welcher Ausdruck sich auch folgender darstellt:

$$y = \frac{-B_1 \pm \sqrt{3B_1^3 - 8B_0B_2}}{4B_0}.$$

9. Im Fall alle vier Wurzeln gleich sind, entsprechen die Bedingungen

$$B_2 = \frac{6B_1^2}{16B_0}, \quad B_3 = \frac{B_1^3}{16B_0^2}, \quad B_4 = \frac{B_1^3}{16^2B_0^3};$$

die Grössen A_3, A_4, A_5, A_6 werden zu Null. Ein Werth von p ist Null, weil die

Bedingung $\frac{B_3}{B_0} = \frac{B_1^3}{B_0^2}$ erfüllt ist. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}} &= 0, \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} = 1 \text{ und somit} \\
y &= -\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} = \frac{-B_1}{4B_0}.
\end{aligned}$$

Anmerkung. Die Gleichung

$$\begin{aligned}
16^2A_3B_0p^3 + \left[192A_3B_0^2B_1 - \frac{128A_3B_0^2\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}} - \left(\alpha - \frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)^2\right]p^2 \\
+ \left[32A_3B_0B_1\left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}}\right) + 16A_3B_0\left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

$$-2\left(\alpha - \frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)\left(\beta - A_3 - \frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)p + 4A_3B_1\left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}}\right)^2 - \left(\beta - A_3 - \frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)^2 = 0$$

übergeht für $A_3 = 0$ in eine quadratische, die nur einen Werth für p liefert. Man erhält nämlich

$$\left(\alpha - \frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)^2 p^2 + 2\left(\alpha - \frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)\left(\beta - \frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)p + \left(\beta - \frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)^2 = 0 \quad \text{also} \quad \left[\left(\alpha - \frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)p + \beta - \frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right]^2 = 0.$$

Im vorliegenden Fall ist $\mathfrak{P} = 0$, weil $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und es ist somit gleichgiltig, welchen Werth man dem p beilegt, wie man aus der zweiten Schreibweise der Wurzeln noch besser ersieht.

10. Es können überdiess A_3 und A_6 zu Null werden, ohne dass die Gleichung die in diesem Capitel behandelte Eigenschaft besitzt. Diess ist im Ausnahmefall für

$$B_1 = 0 \quad \text{und} \quad B_3 = 0.$$

Es ist zwar in diesem Fall $A_3 = 0$, $A_5 = 0$, $A_6 = 0$, ohne dass jedoch nothwendig der Coefficient $A_4 = 16B_2^2B_4 - 4B_0B_2^2$ Null seyn müsste; und auch wirklich gehören sodann die Wurzeln nicht zu diesem besondern Fall; denn sie sind:

$$y_1 = \sqrt[4]{\frac{B_k}{B_0}} e^{i \arccos \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{B_0B_k} - B_2}{\sqrt{B_0B_k}}} \right]}$$

$$y_2 = \sqrt[4]{\frac{B_k}{B_0}} e^{-i \arccos \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{B_0B_k} - B_2}{\sqrt{B_0B_k}}} \right]}$$

$$y_3 = \sqrt[4]{\frac{B_k}{B_0}} e^{i \arccos \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{B_0B_k} - B_2}{\sqrt{B_0B_k}}} \right]}$$

$$y_4 = \sqrt[4]{\frac{B_k}{B_0}} e^{-i \arccos \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{B_0B_k} - B_2}{\sqrt{B_0B_k}}} \right]}.$$

V.

Betrachtung der biquadratischen Gleichung, die sich nach den Regeln einer quadratischen auflösen lässt.

1. Soll eine Gleichung vierten Grades die Eigenschaft besitzen; dass sie die Wurzeln direct oder mittelst einer Hilfsgleichung, also bis auf einen constanten Theil, durch eine Auflösung wie bei einer quadratischen ergibt; so muss entweder die Gleichung

$$D_0z^4 + D_1z^3 + D_2z^2 + D_3z + D_4 = 0 \quad \text{oder die ursprüngliche}$$

$$B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0$$

die Form $[(z+A)^2 - \alpha^2][(z+A)^2 - \beta^2] = 0$ annehmen, worin $-A$ den constanten Theil bezeichnet und für z im zweiten Fall y zu setzen wäre.

Es bestehen alsdann im zweiten Fall die Gleichungen:

$$4A = \frac{B_1}{B_0}$$

$$6A^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{B_2}{B_0}$$

$$4A^3 - 2A(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{B_3}{B_0}$$

$$(A^2 - \alpha^2)(A^2 - \beta^2) = \frac{B_4}{B_0}$$

daher ist
$$\frac{B_3}{B_0} = 2A [2A^2 - (\alpha^2 + \beta^2)] = \frac{B_1}{2B_0} \left[\frac{B_2}{B_0} - \frac{B_1^2}{4B_0^2} \right]$$

d. h. es besteht die Bedingungsgleichung:

$$B_1^3 - 4B_0B_1B_2 + 8B_0^2B_3 = 0.$$

Sollte jedoch die Hilfsgleichung

$$D_0z^4 + D_1z^3 + D_2z^2 + D_3z + D_4 = 0$$

diese Eigenschaft erfüllend, vorausgesetzt werden; so wäre analog

$$D_1^3 - 4D_0D_1D_2 + 8D_0^2D_3 = 0.$$

Nach Substitution der Werthe von D erfolgt wie natürlich wiederum

$$B_1^3 - 4B_0B_1B_2 + 8B_0^2B_3 = 0.$$

Dieser Ausdruck ist aber der Coefficient A_3 in der Gleichung

$$A_3p^3 + A_3p^2 + A_3p + A_4 = 0$$

und somit führen beide Fälle auf die Bedingung $A_3 = 0$.

2. Für den Fall, dass $D_0z^4 + D_1z^3 + D_2z^2 + D_3z + D_4 = 0$ die erwähnte Eigenschaft besitzen soll; ist

$$A = \frac{D_1}{4D_0} = p + \frac{B_1}{4B_0}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{3D_1^2 - 8D_0D_2}{8D_0^2}$$

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{16^2D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}{16^2D_0^4}$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } \alpha &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0D_2 \pm \sqrt{16^2D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^3}} \\ &+ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0D_2 \mp \sqrt{16^2D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^3}} \\ \beta &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0D_2 \pm \sqrt{16^2D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^3}} \\ &- \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0D_2 \mp \sqrt{16^2D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^3}} \end{aligned}$$

Diese Grössen vereinfachen sich jedoch. Zuerst reducirt sich die cubische Gleichung für p , vermöge der Bedingung $A_3 = 0$ auf eine quadratische, die durch die Bedingung ihrer Coefficienten

$$A_5 = \frac{A_4 B_1 - A_3 B_2}{2 B_0}$$

$$A_6 = \frac{A_5 B_1 - A_3 B_2}{8 B_0} \text{ in den Ausdruck}$$

$$A_4 p^2 + \frac{A_4 B_1}{2 B_0} p + \frac{A_4 B_1^2}{16 B_0^2} = 0 \text{ d. i. in } \left(p + \frac{B_1}{4 B_0} \right)^2 = 0$$

übergeht. Die cubische Gleichung hat somit die repetirte Wurzel $p = -\frac{B_1}{4 B_0}$ und die andere $p = 0$. Der erste Werth gibt für A die Nulle. Es werden ferner $D_1 = 0$ und der Bedingung $\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} = \frac{D_3}{D_1}$ zu Folge, $D_3 = 0$; welches auch aus der Substitution in

$$D_3 = 4 B_0 p^3 + 3 B_1 p^2 + 2 B_2 p + B_3$$

für den Werth von p erfolgt. Ferner ist

$$\frac{-D_2}{D_0} = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\sqrt{\frac{D_2}{D_0}} = \alpha \beta \text{ mithin}$$

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \frac{-D_2}{D_0} \pm 2 \sqrt{\frac{D_4}{D_0}}$$

Die Werthe von D_2 und D_4 sind

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{-6 B_1^2 + 16 B_0 B_2}{16 B_0} \\ D_4 &= \frac{-3 B_0 B_1^2 + 16 B_0^2 B_1 B_2 - 64 B_1^3 B_1 B_3 + 16^2 B_1^2 B_3}{16^2 B_0^2} \\ &= \frac{16^2 B_0^2 B_3 + B_0 B_1^2 - 4 B_0 B_1 [B_1^2 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3]}{16^2 B_0^2} \\ &= \frac{32 B_0^2 B_1 B_3}{16^2 B_0^2} = \frac{16^2 B_0^2 B_3 + B_1^2 - 32 B_0^2 B_1 B_3}{16^2 B_0^2} \end{aligned}$$

Dadurch ergeben sich die Werthe von α, β

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{8 B_0} \sqrt{-16 B_0 B_2 + 6 B_1^2 + 2 \sqrt{16^2 B_0^2 B_3 + B_1^2 - 32 B_0^2 B_1 B_3}} \\ &+ \frac{1}{8 B_0} \sqrt{-16 B_0 B_2 + 6 B_1^2 - 2 \sqrt{16^2 B_0^2 B_3 + B_1^2 - 32 B_0^2 B_1 B_3}} \\ \beta &= \frac{1}{8 B_0} \sqrt{-16 B_0 B_2 + 6 B_1^2 + 2 \sqrt{16^2 B_0^2 B_3 + B_1^2 - 32 B_0^2 B_1 B_3}} \\ &- \frac{1}{8 B_0} \sqrt{-16 B_0 B_2 + 6 B_1^2 - 2 \sqrt{16^2 B_0^2 B_3 + B_1^2 - 32 B_0^2 B_1 B_3}} \end{aligned}$$

Somit wären die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$\begin{aligned}
& B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0 \\
y_1 &= \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{8B_0} \sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32^2 B_0^2 B_1 B_3}} \\
&+ \frac{1}{8B_0} \sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32^2 B_0^2 B_1 B_3}} \\
y_2 &= \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{8B_0} \sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32^2 B_0^2 B_1 B_3}} \\
&- \frac{1}{8B_0} \sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32^2 B_0^2 B_1 B_3}} \\
y_3 &= \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{8B_0} \sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32^2 B_0^2 B_1 B_3}} \\
&+ \frac{1}{8B_0} \sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32^2 B_0^2 B_1 B_3}} \\
y_4 &= \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{8B_0} \sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32^2 B_0^2 B_1 B_3}} \\
&- \frac{1}{8B_0} \sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32^2 B_0^2 B_1 B_3}}.
\end{aligned}$$

Es lassen sich überdiess diese Ausdrücke etwas einfacher stellen, weil

$$\begin{aligned}
& \sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 \pm \sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32^2 B_0^2 B_1 B_3}} \\
&= \sqrt{\frac{-8B_0B_2 + 3B_1^2}{2} + \sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64B_0^3 B_4}} \\
&\pm \sqrt{\frac{-8B_0B_2 + 3B_1^2}{2} - \sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64B_0^3 B_4}}.
\end{aligned}$$

Dadurch übergehen die Wurzeln in die einfachern Formen :

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0} \sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 + 2\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64B_0^3 B_4}} \\
y_2 &= \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0} \sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 - 2\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64B_0^3 B_4}} \\
y_3 &= \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0} \sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 - 2\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64B_0^3 B_4}} \\
y_4 &= \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0} \sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 + 2\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64B_0^3 B_4}}.
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall des Werthes von p , nämlich $p = 0$ bleiben α , β und γ dieselben, ohne dass die Voraussetzung wegen anderer, vielleicht damit verknüpfter Bedingungen richtig seyn müsste. Diese können die Form verändern; so dass der Werth $p = 0$ einem speciellern Fall angehört.

3. Um diese Werthe aus der allgemeinen Form der Wurzeln

$$y = p + \sqrt[4]{\frac{D_3}{D_0}} e^{\pm i \arccos \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \frac{\sqrt{D_1 D_3 - 4(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}}{\sqrt{D_0 D_4}} \right]}$$

zu deduciren; so ist für den Werth $p = \frac{-B_1}{4B_0}$

$$\sqrt[4]{\frac{D_1}{D_0}} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{D_0}} \left[-\frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{D_1^2 D_2^2}{D_0 D_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_2}{\sqrt{D_0 D_4}} - 4(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})} \right]$$

und wegen $D_1 = 0$

$$\sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} \cos \varphi = \frac{1}{8B_0} \sqrt{6B_1^2 - 16B_0 B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32B_0^2 B_1 B_3}}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} i \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} \sin \varphi &= \sqrt{\frac{-64B_0 \sqrt{D_0 D_4} + 6B_1^2 - 16B_0 B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32B_0^2 B_1 B_3}}{64B_0^2}} \\ &= \frac{1}{8B_0} \sqrt{-4\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32B_0^2 B_1 B_3} - 16B_0 B_2 + 6B_1^2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32B_0^2 B_1 B_3}} \\ &= \frac{1}{8B_0} \sqrt{-16B_0 B_2 + 6B_1^2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32B_0^2 B_1 B_3}} \end{aligned}$$

und somit wären die vier Wurzeln wie frühe

$$y_1 = \frac{-B_1}{4B_0} + \alpha$$

$$y_2 = \frac{-B_1}{4B_0} + \beta$$

$$y_3 = \frac{-B_1}{4B_0} - \beta$$

$$y_4 = \frac{-B_1}{4B_0} - \alpha.$$

Für den Werth $p = 0$ ist

$$y = \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} e^{i \arccos \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{B_1 B_2}{B_0 B_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{B_1 B_2}{B_0 B_4} - \frac{4(B_2 - 2\sqrt{B_0 B_4})}{\sqrt{B_0 B_4}}} \right]}$$

$$\begin{aligned} \text{und zugleich} \quad & -\frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{B_1^2 B_2^2}{B_0^2 B_4}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{B_1 B_2}{B_0} \cdot \frac{B_1 B_2}{B_0 B_4} - \frac{4(B_2 - 2\sqrt{B_0 B_4})}{\sqrt{B_0 B_4}}} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{B_1}{B_0} + \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{B_1 B_2}{\sqrt{B_0 B_4}} - 4B_2 + 8\sqrt{B_0 B_4}} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{B_1}{B_0} + \frac{1}{4B_0} \sqrt{B_1^2 - 4B_0 B_2 + 8B_0 \sqrt{B_0 B_4}} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{B_1}{B_0} + \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{B_1^2 - 4B_0 B_1 B_2 + 8B_0^2 B_1}{B_1}} = \frac{-B_1}{4B_0}. \end{aligned}$$

$$\text{Ferner ist} \quad \sin \varphi i \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} = \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \sqrt{-1 + \frac{B_1^2}{16B_0^2} \sqrt{\frac{B_1}{B_0}}}$$

$$= \frac{1}{4B_0} \sqrt{-16B_0 \sqrt{B_0 B_4} + B_1^2} = \frac{1}{4B_0} \sqrt{\frac{B_1^2 - 16B_0^2 B_3}{B_1}} = \frac{1}{4B_0} \sqrt{3B_1^2 - 8B_0 B_2}$$

mithin

$$y_1 = y_3 = \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0} \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}$$

$$y_2 = y_4 = \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0} \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}$$

also von den frühern verschiedene Werthe.

Zugleich finden in diesem Fall noch einige Gleichungen statt, denn es wird vermöge der Bedingungsgleichungen zwischen A_3, A_4, A_5, A_6 wegen $A_3 = 0, A_6 = 0, A_4$ und A_5 zur Nullen. Auch ist

$$(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 = \left(\frac{-8B_0^2B_3}{B_1}\right)^2 \text{ und somit das Radical}$$

$$\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 8^2 B_0^2 B_3} = 8 \sqrt{B_0 \left(\frac{B_3}{B_1^2} - \frac{B_3}{B_0}\right)} = 0$$

wodurch die obige Formel die einfachere Form annimmt. Diese Deduction zeigt, dass der Werth $p = 0$ ein fremdartiger sey. Die Gleichung

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

reducirt sich daher auf eine quadratische und kann nicht durch eine cubische, deren eine Wurzel $p = 0$ ist, ersetzt werden.

4. Im Fall die Gleichung $B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$ die angeführte Form besitzend vorausgesetzt wird; besteht nach frühern die Bedingung $A_3 = 0$ und die Werthe von p sind, der doppelte Werth $p = \frac{-B_1}{4B_0}$ und $p = 0$.

Da nach früher Erwiesenem für $p = 0$ die Gleichung $A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6$ nicht mehr eine cubische verbleibt, und überhaupt der Werth $p = 0$ mit dem repetirten $p = \frac{-B_1}{4B_0}$ nicht vereinbar ist; so bleibt er auch hier ein fremdartiger.

Die Wurzeln erhalten überdiess die in früherer Nummer gefundenen Werthe.

VI.

Bestimmung der einfachsten Bedingungsgleichung für den Fall einer repetirten Wurzel.

1. Für die Auffindung der einfachsten Bedingungsgleichung im Fall zweier gleicher Wurzeln wird es nöthig die Gleichung

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

näher zu betrachten. Um zugleich diese Durchführung soweit allgemein zu führen, als nicht die Eigenthümlichkeit dieser Gleichung zu speciellen Betrachtungen nöthigt; sey

$$C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$$

die allgemeine Gleichung dritten Grades, die sich auch auf die Form

$$C_0 y^{\frac{3}{2}} + C_3 y^{-\frac{3}{2}} + C_1 y^{\frac{1}{2}} + C_2 y^{-\frac{1}{2}} = 0$$

oder wenn die Coefficienten mit $\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_0$ bezeichnet werden:

$$\mathfrak{D}_3 q^2 + \mathfrak{D}_1 q^2 + \mathfrak{D}_2 q + \mathfrak{D}_0 = 0.$$

Diese Gleichung biethet mehrere Relationen zwischen den Coefficienten $\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_0$; so bestehen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3 C_1^2 \mathfrak{D}_3 &= 2 C_0 C_1 \mathfrak{D}_2 - C_1^2 \mathfrak{D}_0 \\ 9 C_1^2 \mathfrak{D}_0 &= C_1^2 C_2 \mathfrak{D}_3 + C_1^2 C_2 \mathfrak{D}_1 - C_0 C_1 C_2 \mathfrak{D}_2 \\ \text{oder auch} \quad 27 C_0^2 \mathfrak{D}_0 &= C_0 (2 C_1^2 + 3 C_0 C_2) \mathfrak{D}_1 - C_1 (C_1^2 + 3 C_0 C_2) \mathfrak{D}_2 \\ \text{ferner} \quad 9 C_0 C_1 \mathfrak{D}_0 &= (3 C_0 C_2 + C_1^2) \mathfrak{D}_3 - C_1 C_2 \mathfrak{D}_1. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\sqrt{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_3} \cos \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2} \cos \frac{\varphi}{2} = 0$ d. i.

$$\cos \frac{\varphi}{2} [4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 3] \sqrt{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_3} + \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2} = 0$$

liefert für $\cos \frac{\varphi}{2}$ die Werthe

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi}{2} &= 0 \\ \cos \frac{\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{-\sqrt{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2} + 3 \sqrt{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_3}}{4 \sqrt{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_3}}} \\ \cos \frac{\varphi}{2} &= -\sqrt{\frac{-\sqrt{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2} + 3 \sqrt{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_3}}{4 \sqrt{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_3}}}, \end{aligned}$$

daher sind die drei Werthe von $\cos \frac{\varphi}{2}$ wegen

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2}{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_3}} = \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_2} \text{ in Folge von } \mathfrak{U}_3 = \frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{U}_1^2}$$

$$\cos \frac{1}{2} \varphi_1 = 0$$

$$\cos \frac{1}{2} \varphi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1^2}{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_2}}$$

$$\cos \frac{1}{2} \varphi_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1^2}{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_2}}$$

Wegen

$$\begin{aligned} 3 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_2 &= 9 C_0^2 q^2 + 6 C_0 C_1 q + 3 C_0 C_2 \\ -\mathfrak{U}_1^2 &= -9 C_0^2 q^2 - 6 C_0 C_1 q - C_1^2 \end{aligned}$$

übergeht der Zähler $3 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1^2$ in $3 C_0 C_2 - C_1^2$ und daher ist

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 C_0 C_2 - C_1^2}{3 C_0^2 q^2 + 2 C_0 C_1 q + C_0 C_2}}$$

und

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{(3 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1^2)}{\mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{12 C_0^2 q^2 + 8 C_0 C_1 q + C_0 C_2 + C_1^2}{3 C_0^2 q^2 + 2 C_0 C_1 q + C_0 C_2}}. \end{aligned}$$

2. Die Gleichung $\mathfrak{U}_0 z^2 + \mathfrak{U}_1 z^2 + \mathfrak{U}_2 z + \mathfrak{U}_3 = 0$ hat eine Wurzel

$$z = \sqrt[4]{\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_0}} e^{\varphi i} \text{ denn es ist}$$

$$z^4 + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} z^3 + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0} z^2 + \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i}$$

$$= z^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i} \right) z + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i}$$

und dabei bleibt der Rest k

$$k = \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0}} e^{2\varphi i} + \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} e^{3\varphi i}$$

oder $\mathfrak{A}_0 e^{-\frac{3}{2}\varphi i} k = 2\mathfrak{A}_3 \cos \frac{3}{2}\varphi + 2\mathfrak{A}_2 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}},$

ferner ist wegen der angeführten Bedingung

$$\mathfrak{A}_2 \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_3}} = \mathfrak{A}_2 \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_3}} = \sqrt[3]{\mathfrak{A}_2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_3}} = \sqrt[3]{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}$$

und daher $\frac{\mathfrak{A}_3^{\frac{3}{2}}}{\mathfrak{A}_1^{\frac{3}{2}}} k e^{-\frac{3}{2}\varphi i} = 2\sqrt[3]{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3} \cos \frac{3}{2}\varphi + 2\sqrt[3]{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} \cos \frac{\varphi}{2}.$

Wenn also φ einen der angeführten Werthe besitzt; so ist $k = 0$.

Die beiden andern Wurzeln sind

$$z_2 = -\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i}$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\frac{\mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0^2} + 2\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i} + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0}} e^{2\varphi i} - 4\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0} - 4\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i} - 4\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0}} e^{2\varphi i}}{2\mathfrak{A}_0}}$$

$$= -\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1^2 - 4\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2} - \frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i} - 3\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0}} e^{2\varphi i}}$$

$$z_1 = -\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1^2 - 4\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2} - \frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i} - 3\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0}} e^{2\varphi i}}.$$

Weil nun diese Werthe auch für den Fall $\cos \frac{\varphi}{2} = 0$ gelten, übergehen sie in

$$z_2 = -\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1^2 - 4\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2} + \frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} - 3\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0}}}$$

$$z_1 = -\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1^2 - 4\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2} + \frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} - 3\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0}}}$$

Zugleich ist $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pm i \arccos \frac{1}{2} \left[\frac{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2} \right]} =$

$$\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}} \left[-\frac{\mathfrak{A}_1^{\frac{3}{2}}}{2\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt[3]{\frac{3\mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{A}_2^2 + 2\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^3}{\mathfrak{A}_0^2 \mathfrak{A}_2^2}} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} + \frac{i}{2} \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0}} + 2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}} \cdot \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}}$$

$$= -\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} \pm \frac{i}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0^2} + \frac{2\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0^2}}$$

$$= -\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} \pm \frac{i}{2} \sqrt[3]{\frac{4\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0^2} - 2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} \cdot \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}} + 3\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0^2}}}$$

welches die obigen Werthe von z_2 und z_3 sind. Somit sind die drei Wurzeln der allgemeinen Gleichung

$$y_1 = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi i}$$

$$y_2 = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{i \arccos \frac{(\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2)}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}}$$

$$y_3 = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{-i \arccos \frac{(\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2)}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}}.$$

3. Für den Fall zweier gleicher Wurzeln findet man sowohl die Bedingungsgleichung, als die, der jedesmaligen Weise dafür entsprechenden Werthe von q durch folgende Betrachtung. Es ist

$$\mathfrak{A}_0 \left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi i} \right) \left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi(1+\frac{1}{3})i} \right) \left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi(1+\frac{2}{3})i} \right) = \mathfrak{A}_0 z^3 + \mathfrak{A}_1$$

$$\mathfrak{A}_1 z \left(z - \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} e^{\pi i} \right) = \mathfrak{A}_1 z^2 + \mathfrak{A}_2 z$$

mithin weil

$$\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}$$

$$\mathfrak{A}_0 \left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi i} \right) \left[\left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi(1+\frac{1}{3})i} \right) \left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi(1+\frac{2}{3})i} \right) - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} z \right] = 0.$$

Die erste Wurzel ist daher $z = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi i}$,

und falls die beiden andern gleich werden sollen, muss in

$$z^2 - \left[\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi i} \left(e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}} \right) - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} \right] z + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3^2}{\mathfrak{A}_0^2}} e^{4\pi i} = 0$$

die Bedingung bestehen:

$$2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{2\pi i} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi i} \left(e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}} \right) - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}$$

d. i.

$$2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}$$

und diess reducirt gibt $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_1^3 = 0$ eine Gleichung dritten Grades, die sich vermöge der Bedingung $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}$ zu der quadratischen $\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} = 0$ gestaltet.

Nach früherm ist $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 = 3C_0^2q^2 + 2C_0C_1q + C_0C_2$

$$\mathfrak{A}_1^2 = 9C_0^2q^2 + 6C_0C_1q + C_1^2$$

also $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1^2 = 12C_0^2q^2 + 8C_0C_1q + C_0C_2 + C_1^2 = 0$

als die Gleichung für q , die denjenigen Werth liefert, für welchen zwei Wurzeln der ursprünglichen Gleichung einander gleich werden. Von diesen Werthen

$$q = -\frac{1}{3} \frac{C_1}{C_0} \pm \sqrt{\frac{1}{27} \frac{C_1^2}{C_0^2} - \frac{C_1^2}{12 C_0^2} - \frac{C_2}{12 C_0}}$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{C_1}{C_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1^2 - 3 C_0 C_2}{C_0^2}}$$

erfüllt einer und zwar der eigentlich brauchbare Werth die Gleichung

$$\mathfrak{D}_3 q^3 + \mathfrak{D}_2 q^2 + \mathfrak{D}_1 q + \mathfrak{D}_0 = 0.$$

4. Es gibt noch eine zweite Weise, für welche zwei Wurzeln der allgemeinen Gleichung einander gleich werden, wenn q so gewählt wird, dass $\mathfrak{A}_2 = 0$, d. i. für

$$q = -\frac{C_1}{3 C_0} \pm \frac{1}{3 C_0} \sqrt{C_1^2 - 3 C_0 C_2},$$

wovon wiederum nur einer dieser Werthe der cubischen Gleichung für q genügt; und welcher eigentlich hier zu nehmen ist. Die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung sind alsdann:

$$y_1 = q$$

$$y_2 = q + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} e^{i \arccos \frac{-\mathfrak{A}_2}{2 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}} = q \frac{-\mathfrak{A}_1}{2 \mathfrak{A}_0} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 - 4 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1}$$

$$= q \frac{-\mathfrak{A}_1}{2 \mathfrak{A}_0} + \frac{\mathfrak{A}_1}{2 \mathfrak{A}_0} = q$$

$$y_3 = q \frac{-\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}.$$

5. Es lassen sich von der für q aufgestellten Gleichung mehrere Eigenschaften erweisen. Für jeden ihrer Werthe q sind die Ergebnisse y wirkliche Wurzeln der Gleichung $C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$ und sie enthält bloss zweierlei Werthe von q . Da es nur zwei Weisen gibt, auf welche eine Gleichheit zweier Wurzeln erreicht wird, so kann diese Gleichung nur zweierlei Wurzeln besitzen, und es fragt sich, welcher der Werthe von q der repetirten Wurzel entspricht. Wenn eine cubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln besitzt; so gelten die Gleichungen

$$C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$$

$$3 C_0 y^2 + 2 C_1 y + C_2 = 0$$

für den Werth der repetirten Wurzel; mithin auch

$$C_1 y^2 + 2 C_2 y + 3 C_3 = 0$$

für denselben Werth. Aus den quadratischen Gleichungen folgt ferner

$$(2 C_1^2 - 6 C_0 C_2) y + C_1 C_2 - 9 C_0 C_3 = 0,$$

somit wäre für diesen Fall

$$y = \frac{9 C_0 C_3 - C_1 C_2}{2 (C_1^2 - 3 C_0 C_2)}.$$

Ferner ergibt die gleiche Schlussweise aus der letzten mit $2 C_2$ multiplicirten Gleichung und der vorhergehenden mit $(2 C_1^2 - 6 C_0 C_2)$ multiplicirten, die zweite Gleichung

ersten Grades

$$[4(C_1^2 - 3C_0C_2)C_2 - C_1(C_1C_2 - 9C_0C_3)]y + 6C_3(C_1^2 - 3C_0C_2) = 0$$

und hieraus die Bedingung

$$(C_1C_2 - 9C_0C_3)(3C_1^2C_2 + 9C_0C_1C_3 - 12C_0C_2^2) = 12C_3(C_1^2 - 3C_0C_2)^2.$$

Diese Gleichung liefert nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors C_1 die Bedingungsgleichung

$$C_1^2C_2^2 + 18C_0C_1C_2C_3 - 27C_0^2C_3^2 - 4C_0C_2^2 - 4C_1^2C_3 = 0.$$

Gesetzt nun die Gleichung für q enthalte die Wurzel

$$q = \frac{9C_0C_3 - C_1C_2}{2(C_1^2 - 3C_0C_2)}$$

die dem Fall $\mathfrak{A}_2 = 0$ entspreche; so muss zugleich die Gleichung

$$(2C_0C_1^2 - 9C_0^2C_1C_2 + 27C_0^3C_3)q^3 + (C_1^2 - 3C_0C_1^2C_2 - 9C_0^2C_2^2 + 27C_0^2C_1C_3)q^2 + (9C_0C_1^2C_3 - 6C_0C_1C_2^2 + C_1^2C_2)q + C_3C_1^2 - C_0C_2^2 = 0$$

und

$$C_0y^3 + C_1y^2 + C_2y + C_3 = 0$$

für diesen Werth erfüllt sein. Die Vereinigung beider Gleichungen ergibt

$$(C_1^2 - 6C_0C_1^2C_2 + 9C_0^2C_2^2)q^2 + (C_1^2C_2 - 9C_0C_1^2C_3 - 3C_0C_1C_2^2 + 27C_0^2C_2C_3)q + C_1^2C_3 - 9C_0C_1C_2C_3 + 27C_0^2C_3^2 + C_0C_2^2 = 0$$

d. i. $(C_1^2 - 3C_0C_2)^2q^2 + (C_1^2 - 3C_0C_2)(C_1C_2 - 9C_0C_3)q + C_1^2C_3 - 9C_0C_1C_2C_3 + 27C_0^2C_3^2 + C_0C_2^2 = 0.$

Soll aber der obige Werth von q entsprechen, so muss zugleich, wenn statt q sein Werth gesetzt wird, die Gleichung

$$(C_1^2 - 3C_0C_2)^2 \left(\frac{9C_0C_3 - C_1C_2}{2(C_1^2 - 3C_0C_2)} \right)^2 + (C_1^2 - 3C_0C_2)(C_1C_2 - 9C_0C_3) \frac{(9C_0C_3 - C_1C_2)}{2(C_1^2 - 3C_0C_2)} + C_1^2C_3 - 9C_0C_1C_2C_3 + 27C_0^2C_3^2 + C_0C_2^2 = 0$$

auf die früher gefundene Bedingungsgleichung führen. Sie ergibt

$$(9C_0C_3 - C_1C_2)^2 - 2(9C_0C_3 - C_1C_2)^2 + 4(C_1^2C_3 - 9C_0C_1C_2C_3 + 27C_0^2C_3^2 + C_0C_2^2) = 0$$

d. i. $(9C_0C_3 - C_1C_2)^2 = 4(C_1^2C_3 - 9C_0C_1C_2C_3 + 27C_0^2C_3^2 + C_0C_2^2)$

und aus dieser Entwicklung folgt

$$C_1^2C_2^2 + 18C_0C_1C_2C_3 - 27C_0^2C_3^2 - 4C_1^2C_3 - 4C_0C_2^2 = 0$$

die obige Bedingung. Ist zugleich q eine repetirte Wurzel von

$$\mathfrak{D}_3q^3 + \mathfrak{D}_4q^2 + \mathfrak{D}_5q + \mathfrak{D}_6 = 0$$

so ist zugleich

$$3\mathfrak{D}_3q^2 + 2\mathfrak{D}_4q + \mathfrak{D}_5 = 0$$

oder wenn für \mathfrak{D}_3 sein Werth gesetzt wird

$$(9C_0^2q^2 - C_1^2)\mathfrak{D}_3 + 2(3C_0^2q + C_0C_1)\mathfrak{D}_4 = 0$$

$$3C_0q - C_1 = \frac{-2C_0\mathfrak{D}_4}{\mathfrak{D}_3} \quad \text{oder} \quad -3C_0q\mathfrak{D}_3 = 2C_0\mathfrak{D}_4 - C_1\mathfrak{D}_3 = \frac{3C_0^2\mathfrak{D}_5}{C_1},$$

$$-C_1q\mathfrak{D}_3 = C_0\mathfrak{D}_5. \quad \text{Wird darin der Werth } q = \frac{9C_0C_3 - C_1C_2}{2(C_1^2 - 3C_0C_2)}$$

gesetzt und der Ausdruck entwickelt, so kommt man auf die Bedingungsgleichung

zweier gleicher Wurzeln, woraus folgt, dass dieser Werth q eine repetirte Wurzel von $\mathfrak{D}_3 q^3 + \mathfrak{D}_4 q^2 + \mathfrak{D}_5 q + \mathfrak{D}_6 = 0$ sei. Die dritte Wurzel der für q aufgestellten Gleichung ist sodann

$$q = \frac{C_1 C_2 - 9 C_0 C_3}{C_1^2 - 3 C_0 C_2} - \frac{C_1^3 - 3 C_0 C_1^2 C_2 - 9 C_0^2 C_2^2 + 27 C_0 C_1 C_3}{2 C_0 C_1^3 - 9 C_0^2 C_1 C_2 + 27 C_0^3 C_3}.$$

6. Um diese Deduction auf die Gleichung

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

anzuwenden; so übergeht die obige Bedingung zweier gleicher Wurzeln für die zwischen A_3, A_4, A_5, A_6 stattfindenden Relationen

$$\begin{aligned} 2 B_0 A_5 &= A_4 B_1 - A_3 B_2 \\ 16 B_0^2 A_6 &= A_4 B_1^2 - (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3) A_3 \end{aligned}$$

in
$$\frac{A_3^2}{4 B_0^2} [A_4^2 B_1^2 - 2 A_3 A_4 B_1 B_2 + A_3^2 B_2^2]$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{18 A_3 A_4}{32 B_0^3} [A_4^2 B_1^2 - A_3 A_4 B_1 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3) - A_3 A_4 B_1^2 B_2 \\ &\quad + A_3^2 B_2 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)] \\ &- \frac{27 A_3^2}{16^2 B_0^3} [A_4^2 B_1^2 - 2 A_3 A_4 B_1^2 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3) + A_3^2 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)^2] \\ &- \frac{4 A_3}{8 B_0^3} [A_4^2 B_1^2 - 3 A_3 A_4 B_1^2 B_2 + 3 A_3^2 A_4 B_1 B_2^2 - A_3^3 B_2^3] \\ &- \frac{4 A_3^3}{16 B_0^2} [A_4 B_1^2 - A_3 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)] = 0 \end{aligned}$$

und nach gehöriger Reduction in

$$\begin{aligned} &A_3 A_4^3 [16 B_0 B_1^2 - 4 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_2 + 8 \cdot 16 B_0^3 B_3] \\ &+ A_3^2 A_4^2 [-27 B_1^3 + 6 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2 + 4 \cdot 16 B_0^2 B_2^2 - 2 \cdot 9 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_3] \\ &+ A_3^3 A_4 [2 \cdot 27 B_1^2 B_2 - 15 \cdot 16 B_0 B_1 B_2^2 + 4 \cdot 27 B_0 B_1^2 B_3 + 18 \cdot 16 B_0^2 B_2 B_3] \\ &+ A_3^4 [8 \cdot 16 B_0 B_2^2 - 27 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)^2] = 0. \end{aligned}$$

Der erste Coefficient in Klammern ist $16 B_0 A_3$ und da alsdann A_3^2 ein gemeinschaftlicher Factor ist, reducirt sich dieser Ausdruck auf einen dessen Summe der Indices bloss 12 beträgt. Zugleich zeigt die Deduction, dass man im ganzen Verlaufe auf keine einfachere Bedingungsgleichung kommen könne. Ueberdiess hat nach früheren Betrachtungen in allen den Fällen, wo

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln besitzt, die Gleichung

$$B_0 y^3 + B_1 y^2 + B_2 y + B_3 = 0$$

dieselbe Eigenschaft.

7. Um die im frühern Capitel gefundene Bedingungsgleichung der repetirten Wurzel durch eine einfachere zu ersetzen, dient noch ferner die Betrachtung, dass

auch $\frac{-F_7}{F_6}$ ein Werth von q sein müsse. Es ist somit

$$-(2A_3^2 - 6A_3A_5)F_7 + (A_4A_5 - 9A_3A_6)F_6 = 0 \text{ d. i.}$$

$$3A_3(2A_3F_7 - 3A_6F_6) + A_4(-2A_4F_7 + A_5F_6) = 0$$

und nach der Bedeutung von A_3

$$6B_0A_3(2A_3F_7 - 3A_6F_6) + A_4(A_4B_1F_6 - 4A_4B_0F_7 - A_3B_2F_6) = 0$$

oder $A_3[12B_0A_3F_7 - 18B_0A_6F_6 - A_4B_2F_6] + A_4^2(B_1F_6 - 4B_0F_7) = 0.$

Zugleich ist $B_1F_6 - 4B_0F_7 = 16B_0A_3(24B_0B_4 - 16B_1B_3 + 2B_2^2).$

Wird diess substituiert und der gemeinschaftliche Factor A_3 entfernt; so ergibt sich

$$12B_0A_3F_7 - (18B_0A_6 + B_2A_4)F_6 + 16A_4^2B_0(24B_0B_4 - 16B_1B_3 + 2B_2^2) = 0$$

als ein Ausdruck der weiter keinen gemeinschaftlichen Factor besitzt. Es ist

$$12B_0A_3 = 12B_0B_1^2B_3 + 6 \cdot 16B_0^2B_1B_4 - 3 \cdot 16B_0^2B_2B_3;$$

$$-(18B_0A_6 + B_2A_4 = -B_1^2B_2^2 + 4B_0B_2^2 - 2B_0B_1B_2B_3 - 18B_0B_1^2B_4$$

$$+ 18B_0^2B_2^2 - 16B_0^2B_2B_4;$$

$$A_4^2 = B_1^2B_2^2 + 4B_0B_1^2B_2B_3 - 8B_0B_1^2B_2^2 + 4B_0^2B_1^2B_3^2 + 16B_0^2B_2^2$$

$$+ 2 \cdot 16B_0^2B_1^2B_2B_4 - 16B_0^2B_1B_2^2B_3 + 4 \cdot 16B_0^2B_1B_3B_4$$

$$- 8 \cdot 16B_0^2B_2^2B_4 + 16^2B_0^2B_4^2.$$

Diese Theile in ihre Factoren, der erste in

$$F_7 = -3 \cdot 16^2B_0^2B_3B_4 + 2 \cdot 16^2B_0^2B_1B_2B_4 - 9 \cdot 16B_0B_1^2B_4$$

$$+ 3 \cdot 16B_0^2B_1B_3^2 + 16B_0B_1^2B_2B_3 - 64B_0^2B_2^2B_3;$$

der zweite in

$$F_6 = -4 \cdot 9 \cdot 16B_0^2B_3^2 + 4 \cdot 7 \cdot 16B_0^2B_1B_2B_3 - 6 \cdot 16B_0B_1^2B_3$$

$$+ 2 \cdot 16B_0B_1^2B_2^2 + 2 \cdot 16^2B_0^2B_2B_4 - 8 \cdot 16B_0^2B_2^2$$

$$- 12 \cdot 16B_0^2B_1B_4, \text{ der dritte in}$$

$$24 \cdot 16B_0^2B_4 - 6 \cdot 16B_0B_1B_3 + 2 \cdot 16B_0B_2^2 \text{ multiplicirt,}$$

ergeben in dieser Ordnung folgende Glieder:

$B_0^5 B_4^2$			$24 \cdot 16^3$
$B_0^5 B_2 B_3^2 B_4$	$9 \cdot 16^3$	$4 \cdot 9 \cdot 16^2$ $4 \cdot 9 \cdot 16^2$	
$B_0^5 B_1 B_3 B_2^2$	$-18 \cdot 16^3$		$6 \cdot 16^3$ $-6 \cdot 16^3$
$B_0^5 B_3^2$		$-8 \cdot 81 \cdot 16$	
$B_0^5 B_2^2 B_4^2$		$-2 \cdot 16^3$	$-12 \cdot 16^3$ $2 \cdot 16^3$
$B_0^5 B_1 B_2^2 B_3 B_4$	$-6 \cdot 16^3$ $-24 \cdot 16^2$	$-4 \cdot 7 \cdot 16^2$ $-4 \cdot 16^2$	$-24 \cdot 16^2$ $3 \cdot 16^3$ $8 \cdot 16^2$
$B_0^5 B_1 B_2 B_3^2$	$-9 \cdot 16^2$	$8 \cdot 9 \cdot 16$ $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16$	

$B_0^3 B_2^2 B_3^2$	$12 \cdot 16^2$	$-9 \cdot 16^2$ $-9 \cdot 16^2$	
$B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^2$	$12 \cdot 16^3$	$-4 \cdot 9 \cdot 16^2$ $12 \cdot 16^2$	$3 \cdot 16^3$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3$	$18 \cdot 16^2$ $-36 \cdot 16^2$	$8 \cdot 81 \cdot 16$ $-8 \cdot 27 \cdot 16$	$6 \cdot 16^2$ $-3 \cdot 8 \cdot 16^2$
$B_0^3 B_2^4 B_3$		$8 \cdot 16^2$ $8 \cdot 16^2$	$24 \cdot 16^2$ -16^3
$B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_3$	$27 \cdot 16^2$ $6 \cdot 16^2$ $24 \cdot 16^2$	$-7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 16$ $6 \cdot 16^2$ $24 \cdot 16$	$6 \cdot 16^2$ $-12 \cdot 16^2$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2$	$-3 \cdot 16^2$ $-3 \cdot 16^2$	$4 \cdot 9 \cdot 16$ $-7 \cdot 8 \cdot 16$ $4 \cdot 9 \cdot 16$	$6 \cdot 16^2$ $8 \cdot 16$
$B_0^3 B_1^4 B_3^2$	$-6 \cdot 9 \cdot 16^2$	$8 \cdot 27 \cdot 16$	
$B_0^3 B_1^3 B_2^3$	$36 \cdot 16$	$-4 \cdot 27 \cdot 16$	$-24 \cdot 16$
$B_0^3 B_1 B_2^2 B_3$		$7 \cdot 16^2$ 16^2	$-6 \cdot 16^2$ $-2 \cdot 16^2$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3$		$-2 \cdot 16^2$ $-2 \cdot 16^2$ $9 \cdot 16^2$ $-3 \cdot 16^2$	$-12 \cdot 16^2$ $4 \cdot 16^2$
$B_0^3 B_2^5$		$-2 \cdot 16^2$	$2 \cdot 16^2$
$B_0^3 B_1^5 B_3 B_3$	$-9 \cdot 12 \cdot 16$	$4 \cdot 27 \cdot 16$	
$B_0^3 B_1^4 B_2 B_3^2$	$12 \cdot 16$	$12 \cdot 16$	$-24 \cdot 16$
$B_0^3 B_1^3 B_2^2 B_3$		$-4 \cdot 7 \cdot 16$ $-24 \cdot 16$ $-4 \cdot 16$	$3 \cdot 16^2$ $8 \cdot 16$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3$		$-4 \cdot 9 \cdot 16$ $12 \cdot 16$	$24 \cdot 16$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2$		$8 \cdot 16$ $8 \cdot 16$	-16^2
$B_0 B_1^5 B_2^2 B_3$		$6 \cdot 16$	$-6 \cdot 16$
$B_0 B_1^4 B_2^2$		$-2 \cdot 16$	$2 \cdot 16$

Das Resultat, als die einfachste Bedingungsgleichung für den Fall zweier gleicher Wurzeln einer biquadratischen Gleichung ist somit:

$$\begin{aligned} & 16^2 B_0^3 B_1^3 + 9 \cdot 16 B_0^2 B_2 B_3^2 B_4 - 12 \cdot 16 B_0^3 B_1 B_2 B_4^2 - 27 B_0^2 B_3^2 \\ & - 8 \cdot 16 B_0^3 B_2^2 B_4^2 - 5 \cdot 16 B_0 B_1 B_2^2 B_3 B_4 + 18 B_0 B_1 B_2 B_3^2 \\ & - 4 B_0 B_2^2 B_3^2 + 9 \cdot 16 B_0 B_1^2 B_2 B_3^2 - 6 B_0 B_1^2 B_3^2 B_4 + 16 B_0 B_2^2 B_3 \\ & + 18 B_1^2 B_2 B_3 B_4 + B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 27 B_1^2 B_4^2 - 4 B_1^2 B_3^2 + 4 B_1^2 B_2^2 B_4 = 0. \end{aligned}$$

8. Diese Werthe vereinfachen sich noch in den besondern Fällen:

a) Falls $A_1 = 0$, dann ist

$$A_5 = \frac{-B_2}{2B_0} A_3, \quad A_6 = -\frac{(B_1 B_2 + 2B_0 B_3)}{16B_0^2} A_3.$$

Die Gleichung für p übergeht in

$$16B_0^3 p^3 - 8B_0 B_2 p - (B_1 B_2 + 2B_0 B_3) = 0.$$

Die Werthe von p sind alsdann

$$p = \frac{-3A_3 A_6}{2A_3 A_5} = -\frac{3(B_1 B_2 + 2B_0 B_3)}{16B_0 B_2}$$

als der Werth der repetirten Wurzel und

$$p = \sqrt[3]{\frac{(B_1 B_2 + 2B_0 B_3)}{B_0 B_2}}$$

als der dritte Werth. Die Bedingung der repetirten Wurzel der biquadratischen Gleichung übergeht alsdann in

$$27(B_1 B_2 + 2B_0 B_3)^2 = 128B_0 B_2^3.$$

b) Wenn $A_5 = 0$, alsdann ist $A_4 = \frac{B_2 A_3}{B_1}$, $A_6 = \frac{-B_3 A_3}{8B_0}$

mithin die Gleichung für p :

$$8B_0 B_1 p^3 + 8B_0 B_2 p^2 - B_1 B_3 = 0,$$

das der repetirten Wurzel entsprechende p ist

$$p = \sqrt[2]{\frac{A_3 A_6}{A_4^2}} = -\sqrt[2]{\frac{B_1^2 B_3}{B_0 B_2^2}}$$

und die dritte Wurzel

$$p = \frac{9B_1^2 B_3 - 8B_0 B_2^2}{8B_0 B_1 B_2^2}.$$

Die Bedingungsgleichung ergibt sich sodann aus dem letzten Coefficienten der Gleichung für p , nämlich aus

$$\frac{B_1 B_3}{8B_0 B_1} = \frac{9^2}{8 \cdot 16^2} \frac{(9B_1^2 B_3 - 8B_0 B_2^2)^2}{B_0 B_1 B_2^2} \cdot \frac{B_1^2 B_3^2}{B_1^2 B_2^2}$$

d. i. aus

$$16^2 B_0^2 B_2^2 = 9^2 (9B_1^2 B_3 - 8B_0 B_2^2)^2 B_1^2 B_3.$$

c) Zuletzt gibt der Fall $A_5 = 0$ für die weitem Coefficienten:

$$A_4 = \frac{(B_1 B_2 + 2B_0 B_3)}{B_1^2} A_3$$

$$A_5 = \frac{B_3 A_3}{B_1}$$

und für die Gleichung für p

$$B_1^2 p^2 + (2B_0 B_3 + B_1 B_2) p + B_1 B_3 p = 0$$

d. i.
$$\left(p + \frac{2B_0 B_3 + B_1 B_2}{2B_1^2} \right)^2 p = 0.$$

Die entsprechende Bedingung ist sodann

$$(2B_0 B_3 + B_1 B_2)^2 = 4B_1^2 B_3.$$

VII.

Bestimmung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}}$ in geschlossener Form.

1. Nach diesen Vorbereitungen wird es möglich die Bedingungen anzugeben, unter welchen das Integral

$$S = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)}} \text{ welches für } x = \rho + \frac{1+my+ny^2}{1+m_1y+n_1y^2}$$

in
$$S = \frac{\int \frac{[(m-m_1) + 2(n-n_1)y + (nm_1 - mn_1)y^2] dy}{\sqrt{[1+m_1y+n_1y^2][1+\rho-w_1+(m+m_1(\rho-w_1))y+(n+n_1(\rho-w_1))y^2]}}}{\sqrt{\frac{[1+\rho-w_2+(m+m_1(\rho-w_2))y+(n+n_1(\rho-w_2))y^2]}{[1+\rho-w_3+(m+m_1(\rho-w_3))y+(n+n_1(\rho-w_3))y^2]}}}$$

übergeht, auf ein bereits gelöstes zurückgeführt wird. Es sei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} 1 + \rho - w_1 &= B_4 \\ m_1 + m + 2m_1(\rho - w_1) &= B_3 \\ n_1 + n + 2n_1(\rho - w_1) + m_1(m + m_1(\rho - w_1)) &= B_2 \\ mn_1 + nm_1 + 2m_1n_1(\rho - w_1) &= B_1 \\ n_1(n + n_1(\rho - w_1)) &= B_0 \\ (1 + \rho - w_2)(1 + \rho - w_3) &= C_3 \\ (m + m_1(\rho - w_2))(1 + \rho - w_3) + (1 + \rho - w_2)(m + m_1(\rho - w_3)) &= C_3 \\ (1 + \rho - w_2)(n + n_1(\rho - w_3)) + (m + m_1(\rho - w_2))(m + m_1(\rho - w_3)) \\ + (n + n_1(\rho - w_2))(1 + \rho - w_3) &= C_2 \\ (m + m_1(\rho - w_2))(n + n_1(\rho - w_3)) + (n + n_1(\rho - w_2))(m + m_1(\rho - w_3)) &= C_1 \\ (n + n_1(\rho - w_2))(n + n_1(\rho - w_3)) &= C_0 \end{aligned}$$

und daher das Integral

$$S = \int \frac{[m-m_1+2(n-n_1)y+(nm_1-mn_1)y^2] dy}{\sqrt{[B_0y^3+B_1y^2+B_2y+B_3][C_0y^3+C_1y^2+C_2y+C_3]}}$$

Es lassen sich höchstens zwei in frühern Capiteln angeführte Vereinfachungen der biquadratischen Theile vornehmen; ohne dass entweder die Anzahl der Bedingungen zu gross ausfalle oder für die unbestimmten Grössen Werthe resultiren, die die Substitution unbrauchbar machen. Ein solcher Versuch wäre folgender.

Man setze als erste Bedingung:

$$\begin{aligned} & 16^2 B_0^3 B_1^3 + 9 \cdot 16 B_0^2 B_2 B_3^2 B_4 - 12 \cdot 16 B_0^2 B_1 B_3 B_4^2 - 27 B_0^3 B_1^3 \\ & - 8 \cdot 16 B_0^2 B_2^2 B_4^2 - 5 \cdot 16 B_0 B_1 B_2^2 B_3 B_4 + 18 B_0 B_1 B_2 B_3^2 - 4 B_0 B_2^2 B_3^2 \\ & + 9 \cdot 16 B_0 B_2 B_3^2 B_4^2 - 6 B_0 B_1^2 B_3^2 B_4 + 16 B_0 B_2^2 B_4 + 18 B_1^2 B_2 B_3 B_4 \\ & + B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 27 B_1^2 B_4^2 - 4 B_1^2 B_3^2 + 4 B_1^2 B_2^2 B_4 = 0 \end{aligned}$$

wodurch für

$$\begin{aligned} B_1^2 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3 &= A_3 \\ B_1^2 B_2 + 2 B_0 B_1 B_3 + 16 B_0^2 B_4 - 4 B_0 B_2^2 &= A_4 \end{aligned}$$

wenn zur Vereinfachung

$$\begin{aligned} F_6 &= 2[-18 B_0^2 B_3^2 + 14 B_0 B_1 B_2 B_3 - 3 B_1^2 B_3 + B_1^2 B_2^2 \\ &+ 16 B_0^2 B_2 B_4 - 4 B_0 B_3^2 - 6 B_0 B_2^2 B_4] \\ F_7 &= -48 B_0^2 B_3 B_4 + 32 B_0 B_1 B_2 B_4 - 9 B_1^2 B_4 + 3 B_0 B_1 B_2^2 \\ &+ B_1^2 B_2 B_3 - 4 B_0 B_2^2 B_3 \end{aligned}$$

und $p = \frac{-A_4}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$ gesetzt wird, ferner die Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} D_0 &= B_0 \\ D_1 &= 4 B_0 p + B_1 \\ D_2 &= 6 B_0 p^2 + 3 B_1 p + B_2 \\ D_3 &= 4 B_0 p^3 + 3 B_1 p^2 + 2 B_2 p + B_3 \\ D_4 &= B_0 p^4 + B_1 p^3 + B_2 p^2 + B_3 p + B_4 \end{aligned}$$

eingeführt werden; die Wurzeln folgende Form annehmen: a) für $D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$

$$\begin{aligned} B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 &= B_0 \left[y - p + \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} \right] \left[y - p + \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} \right] \\ & \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} e^{i \arccos \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \right)} \right] \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} e^{-i \arccos \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \right)} \right] \end{aligned}$$

und für $D_2 < 2\sqrt{D_0 D_4}$

$$\begin{aligned} B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 &= B_0 \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} \right] \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} \right] \\ & \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} e^{i \arccos \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \right)} \right] \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}} e^{-i \arccos \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Der Fall $D_2 = 2\sqrt{D_0 D_4}$ kann nicht stattfinden, da die Bedingung zweier gleicher Wurzelfactoren diesen Fall als einen unmöglichen ausschliesst. Es lassen sich jedoch diese Fälle vereinen, wenn $p = \frac{-F_7}{F_6}$ statuiert wird und die Wurzelfactoren in einer andern Weise, die diese Beachtung nicht erheischt, geschrieben werden. Nach N. 9 in III. sind alsdann diese Factoren

$$\begin{aligned} B_0 [y-p] [y-p] \left[y - p - \frac{1}{2 B_0} \left(\sqrt{\frac{A_3}{4 B_0 p + B_1}} - (4 B_0 + B_1) \right) \right] & \left[y - p - \frac{1}{2 B_0} \left(\sqrt{\frac{A_3}{4 B_0 p + B_1}} \right. \right. \\ & \left. \left. + 4 B_0 p + B_1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Analog sei ferner :

$$\begin{aligned}
 & 16^2 C_0^2 C_1^2 C_2^2 C_3^2 C_4 - 12 \cdot 16 C_0^2 C_1 C_2 C_3 C_4^2 - 27 C_0^2 C_1^2 C_2^2 C_3^2 \\
 & - 8 \cdot 16 C_0^2 C_1^2 C_2^2 C_3^2 - 5 \cdot 16 C_0 C_1 C_2^2 C_3 C_4 + 18 C_0 C_1 C_2 C_3^2 - 4 C_0 C_2^2 C_3^2 \\
 & + 9 \cdot 16 C_0 C_1^2 C_2 C_3^2 - 6 C_0 C_1^2 C_2^2 C_3 + 16 C_0 C_1^2 C_2 C_3 + 18 C_1^2 C_2 C_3 C_4 \\
 & + C_1^2 C_2^2 C_3^2 - 27 C_1^2 C_2^2 C_3^2 - 4 C_1^2 C_3^2 + 4 C_1^2 C_2^2 C_3 = 0 \\
 & A'_3 = C_1^2 - 4 C_0 C_1 C_2 + 8 C_0^2 C_3 \\
 & A'_4 = C_1^2 C_2 + 2 C_0 C_1 C_3 + 16 C_0^2 C_4 - 4 C_0 C_2^2 \\
 & G_6 = 2[-18 C_0^2 C_3^2 + 14 C_0 C_1 C_2 C_3 - 3 C_1^2 C_3 + C_1^2 C_2^2 + 16 C_0^2 C_2 C_3 \\
 & - 4 C_0 C_2^2 - 6 C_0 C_1^2 C_4] \\
 & G_7 = -48 C_0^2 C_3 C_4 + 32 C_0 C_1 C_2 C_4 - 9 C_1^2 C_4 + 3 C_0 C_1 C_3^2 + C_1^2 C_2 C_3 \\
 & - 4 C_0 C_2^2 C_3
 \end{aligned}$$

$$p' = \frac{-A'_3}{A'_3} + \frac{2 G_7}{G_6}$$

$$\begin{aligned}
 E_0 &= C_0 \\
 E_1 &= 4 C_0 p' + C_1 \\
 E_2 &= 6 C_0 p'^2 + 3 C_1 p' + C_2 \\
 E_3 &= 4 C_0 p'^3 + 3 C_1 p'^2 + 2 C_2 p' + C_3 \\
 E_4 &= C_0 p'^4 + C_1 p'^3 + C_2 p'^2 + C_3 p' + C_4
 \end{aligned}$$

alsdann ist:

$$\begin{aligned}
 C_0 y^4 + C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 &= C_0 \left[y - p' + \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}} \right] \left[y - p' + \sqrt[4]{\frac{E_2}{E_0}} \right] \\
 & \left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_2}{E_0}} e^{i \arccos \left(1 - i \sqrt{\frac{E_1 E_3}{E_0 E_4}} \right)} \right] \left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_2}{E_0}} e^{-i \arccos \left(1 - i \sqrt{\frac{E_1 E_3}{E_0 E_4}} \right)} \right]
 \end{aligned}$$

im Fall $E_2 > 2\sqrt{E_0 E_4}$ und

$$\begin{aligned}
 C_0 y^4 + C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 &= \left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_2}{E_0}} \right] \left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}} \right] \\
 & \left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}} e^{i \arccos \left(1 + i \sqrt{\frac{E_1 E_3}{E_0 E_4}} \right)} \right] \left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}} e^{-i \arccos \left(1 + i \sqrt{\frac{E_1 E_3}{E_0 E_4}} \right)} \right]
 \end{aligned}$$

für $E_2 < 2\sqrt{E_0 E_4}$. Der Fall $E_2 = 2\sqrt{E_0 E_4}$ ist wie erwähnt unmöglich. Oder auch

$$\begin{aligned}
 C_0 y^4 + C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 &= C_0 [y - p'] [y - p'] \left[y - p' - \frac{1}{2 C_0} \left(\sqrt{\frac{A'_3}{4 C_0 p' + B_1}} \right. \right. \\
 & \left. \left. - (4 C_0 p + C_1) \right) \right] \left[y - p' + \frac{1}{2 C_0} \left(\sqrt{\frac{A'_3}{4 C_0 p' + C_1}} + 4 C_0 p' + C_1 \right) \right]
 \end{aligned}$$

ohne Rücksicht ob E_2 grösser oder kleiner als $2\sqrt{E_0 E_4}$, nur dass p' in dieser Gleichung den Werth $p' = \frac{-G_7}{G_6}$ erhält. Uebrigens kann in den vorigen Gleichungen überall statt $\sqrt[4]{\frac{D_2}{D_0}}$ und $\sqrt[4]{\frac{E_2}{E_0}}$, $\sqrt[4]{\frac{D_3}{D_1}}$ und $\sqrt[4]{\frac{E_3}{E_1}}$ gesetzt werden, weil diess die Natur der Werthe p und p' sie mögen selbst, welche immer der beiden Bedeutungen annehmen, mit sich bringt.

Durch die zwei aufgestellten Bedingungsgleichungen zur Bestimmungen der unbestimmten Grössen ρ , m , m_1 , n , n_1 , erlangt das Integral bereits die einfachere Form

$$S = \frac{1}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{[m-m_1 + 2(n-n_1)y + (nm_1-mn_1)y^2] dy}{(y-p \mp \sqrt{\frac{D_3}{D_1}}) (y-p' \mp \sqrt{\frac{E_3}{E_1}}) \sqrt{[(y-p)^2 + 2(y-p) \sqrt{\frac{D_3}{D_1}} (\pm 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}}) + \frac{D_3}{D_1}] [(y-p')^2 + 2(y-p') \sqrt{\frac{E_3}{E_1}} (\pm 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_1 E_3}{E_0 E_4}}) + \frac{E_3}{E_1}]}}$$

wo die jedesmaligen Zeichen von ± 1 der früher erwähnten Bedingungen gemäss zu bestimmen sind.

Dieser lästigen Unterscheidung wegen, möge die zweite Schreibart gelten, für welche das Integral folgende Form annimmt:

$$S = \frac{1}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{[m-m_1 + 2(n-n_1)y + (nm_1-mn_1)y^2] dy}{(y-p)(y-p') \sqrt{[(y+p + \frac{B_1}{2B_0})^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{(4B_0 p + B_1)}] [(y+p' + \frac{C_1}{2C_0})^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{(4C_0 p' + C_1)}]}}$$

worin $p = \frac{-F_7}{F_6}$, $p' = \frac{-G_7}{G_6}$.

$$\frac{m-m_1 + 2(n-n_1)y + (nm_1-mn_1)y^2}{(y-p)(y-p')} \text{ zerfällt in die Theile}$$

$$= nm_1 - mn_1 + \frac{A}{y-p} + \frac{B}{y-p'} \text{ wo } A, B \text{ ihre Bedeutung}$$

durch die beiden Gleichungen:

$$2(n-n_1) = -(nm_1-mn_1)(p+p') + A + B$$

$$m-m_1 = pp'(nm_1-mn_1) - Ap' - Bp$$

erhalten, und zwar ist

$$A = \frac{2(n-n_1)p + (nm_1-mn_1)p^2 + m-m_1}{p-p'}$$

$$B = - \left[\frac{2(n-n_1)p' + (nm_1-mn_1)p'^2 + m-m_1}{p-p'} \right].$$

Das Integral ist somit in die drei Theile zerlegt

$$S = \frac{(nm_1-mn_1)}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{dy}{k^4} + \frac{A}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{dy}{(y-p)k^4} + \frac{B}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{dy}{(y-p')k^4}$$

worin k die Grösse

$$y^4 + [2(p+p') + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}] y^3 + [(p + \frac{B_1}{2B_0})^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0 p + B_1} + (p' + \frac{C_1}{2C_0})^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1} + (2p + \frac{B_1}{B_0})(2p' + \frac{C_1}{C_0})] y^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right) + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \right. \\
 & \quad \left. \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) \right] y \\
 & + \left[\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right] \left[\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right]
 \end{aligned}$$

vorstellt.

2. Man bestimme den Werth von k den es annimmt, wenn y in $\frac{1}{z_1} + p$ und in $\frac{1}{z_2} + p'$ übergeht, und bezeichne durch k_1 und k_2 die bezüglichen Werthe aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 k_1 = & 1 + \left[6p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right] z_1 + \left[6p^2 + 3p \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \right] z_1^2 + \left[4p^2 + 3p^2 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + 2p \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \right) + \left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right) + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) \right] z_1^3 + \left[p^3 + p^2 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + p^2 \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \right) + p \left(\left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right) + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) + \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) \right] z_1^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_2 = & 1 + \left[6p' + 2p + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right] z_2 + \left[6p'^2 + 3p' \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} + \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right) \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right) \right] z_2^2 + \left[4p'^2 + 3p'^2 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + 2p' \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} + \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right) \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right) \right) + \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) \right] z_2^3 + \left[p'^3 + p'^2 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + p'^2 \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} + \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right) \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right) \right) + p' \left(\left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) + \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) \right) \right] z_2^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right) z^2 + \left[4p^2 + 3p^2 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}\right)\right. \\
& + 2p' \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1}\right. \\
& + \left. \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right) + \left. \left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right) \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1}\right)\right. \\
& + \left. \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1}\right)\right] z^2 + \left[p^2\right. \\
& + p^2 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}\right) + p^2 \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1}\right. \\
& + \left. \left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)\right) \\
& + p' \left(\left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right) \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{2B_0} \frac{A_3}{4B_0p + B_1}\right) + \left(2p + \frac{B_1}{2B_0}\right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1}\right)\right) \\
& + \left. \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1}\right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1}\right)\right] z^2.
\end{aligned}$$

Ferner sei Kürze halber

$$\begin{aligned}
G_4 &= 1 \\
G_3 &= 6p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \\
G_2 &= 6p^2 + 3p \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}\right) + \left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 \\
& - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \\
& + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right) \\
G_1 &= 4p^3 + 3p^2 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}\right) \\
& + 2p \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2\right. \\
& - \left. \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)\right) \\
& + \left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right) \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1}\right) \\
& + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_0 = & p^4 + p^3 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + p^2 \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 \right. \\
 & - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \\
 & + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) + p \left(\left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right) \right. \\
 & + \left. \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) \right) \\
 & + \left. \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad k_1 = G_0 z_1^4 + G_1 z_1^3 + G_2 z_1^2 + G_3 z_1 + G_4,$$

$$H_1 = 1$$

$$H_3 = 6p' + 2p + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 = & 6p'^2 + 3p' \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + \left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 \\
 & - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \\
 & + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_1 = & 4p'^3 + 3p'^2 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + 2p' \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 \right. \\
 & - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \\
 & + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) + \left. \left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right) \right) \\
 & + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_0 = & p^4 + p^3 \left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0} \right) + p^2 \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 \right. \\
 & - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \\
 & + \left. \left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) + p' \left(\left(2p' + \frac{C_1}{C_0} \right) \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right) \right) \right) \\
 & + \left(2p + \frac{B_1}{B_0} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) \\
 & + \left. \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0} \right)^2 - \frac{1}{4B_0^2} \frac{A_3}{4B_0p + B_1} \right) \left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0} \right)^2 - \frac{1}{4C_0^2} \frac{A'_3}{4C_0p' + C_1} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$k_2 = H_0 z_1^4 + H_1 z_1^3 + H_2 z_1^2 + H_3 z_1 + H_4.$$

Da bisher erst zwei Bedingungsleichungen für die fünf unbestimmten Grössen statuiert wurden, sei ferner:

$$\begin{aligned} G_1^2 - 4G_0G_1G_2 + 8G_0^2G_3 &= 0 \quad \text{und} \\ H_1^2 - 4H_0H_1H_2 + 8H_0^2H_3 &= 0. \quad \text{Aldann ist} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 = G_0 & \left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} - \frac{1}{4G_0} \sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 + 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_3}} \right] \\ & \left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} - \frac{1}{4G_0} \sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 - 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_3}} \right] \\ & \left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} + \frac{1}{4G_0} \sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 - 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_3}} \right] \\ & \left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} + \frac{1}{4G_0} \sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 + 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_3}} \right] \\ k_2 = H_0 & \left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0} - \frac{1}{4H_0} \sqrt{-8H_0H_2 + 3H_1^2 + 2\sqrt{(H_1^2 - 4H_0H_2)^2 - 64H_0^3H_3}} \right] \\ & \left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0} - \frac{1}{4H_0} \sqrt{-8H_0H_2 + 3H_1^2 - 2\sqrt{(H_1^2 - 4H_0H_2)^2 - 64H_0^3H_3}} \right] \\ & \left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0} + \frac{1}{4H_0} \sqrt{-8H_0H_2 + 3H_1^2 - 2\sqrt{(H_1^2 - 4H_0H_2)^2 - 64H_0^3H_3}} \right] \\ & \left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0} + \frac{1}{4H_0} \sqrt{-8H_0H_2 + 3H_1^2 + 2\sqrt{(H_1^2 - 4H_0H_2)^2 - 64H_0^3H_3}} \right]. \end{aligned}$$

Das Integral ist somit auf die drei Theile

$$S = -\frac{A}{\sqrt{B_0C_0}} \int \frac{z_1 dz_1}{k_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{\sqrt{B_0C_0}} \int \frac{z_2 dz_2}{k_2^{\frac{1}{2}}} + \frac{(nm_1 - mn_1)}{\sqrt{B_0C_0}} \int \frac{dy}{k^{\frac{1}{2}}}$$

reducirt, welches wohl die Schwierigkeit nicht behebt, jedoch eine Lösung vorbereitet.

3. Man statuire als fünfte Bedingungsleichung

$$nm_1 - mn_1 - \frac{AG_1}{4G_0} - \frac{BH_1}{4H_0} = 0$$

wodurch sämmtliche fünf unbestimmte Grössen bestimmt sind; dadurch ist zugleich

$$\frac{nm_1 - mn_1}{\sqrt{B_0C_0}} \int \frac{dy}{k^{\frac{1}{2}}} = \frac{AG_1}{\sqrt{B_0C_0} \cdot 4G_0} \int \frac{dy}{k^{\frac{1}{2}}} + \frac{BH_1}{\sqrt{B_0C_0} \cdot 4H_0} \int \frac{dy}{k^{\frac{1}{2}}}$$

und weil

$$k^{\frac{1}{2}} = \frac{k_1^{\frac{1}{2}}}{z_1}, \quad y = \frac{1}{z_1} + p$$

$$k^{\frac{1}{2}} = \frac{k_2^{\frac{1}{2}}}{z_2}, \quad y = \frac{1}{z_2} + p',$$

$$\frac{nm_1 - mn_1}{\sqrt{B_0C_0}} \int \frac{dy}{k^{\frac{1}{2}}} = \frac{-AG_1}{4G_0\sqrt{B_0C_0}} \int \frac{dz_1}{k_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{BH_1}{4H_0\sqrt{B_0C_0}} \int \frac{dz_2}{k_2^{\frac{1}{2}}}.$$

Das fragliche Integral ist dadurch

$$S = \frac{-A}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{dz_1 \left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} \right]}{k_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{dz_2 \left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0} \right]}{k_1^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man zur Abkürzung im Schreiben

$$\frac{1}{4G_0} \sqrt{-8G_0 G_2 + 3G_1^2 + 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0 G_2)^2 - 64G_0^3 G_4}} = \alpha$$

$$\frac{1}{4G_0} \sqrt{-8G_0 G_2 + 3G_1^2 - 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0 G_2)^2 - 64G_0^3 G_4}} = \beta$$

und überdiess $z_1 + \frac{G_1}{4G_0} = \sqrt{u + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}$; so erhält man für das fragliche Integral

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \int \frac{dz_1 \left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} \right]}{\sqrt{\left[\left(z_1 + \frac{G_1}{4G_0} \right)^2 - \alpha^2 \right] \left[\left(z_1 + \frac{G_1}{4G_0} \right)^2 - \beta^2 \right]}} &= \frac{1}{2\sqrt{G_0}} \int \frac{2du}{\sqrt{4u^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{G_0}} \operatorname{arc} \operatorname{Sin} \frac{2u}{\alpha^2 - \beta^2}. \end{aligned}$$

Werden darin die Werthe

$$u = \left(z_1 + \frac{G_1}{4G_0} \right)^2 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2} = \frac{1}{16G_0^2} \left[\frac{(4G_0 + G_1(y-p))^2}{(y-p)^2} - (3G_1^2 - 8G_0 G_2) \right]$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{4G_0^2} \sqrt{(G_1^2 - 4G_0 G_2)^2 - 64G_0^3 G_4}$$

gesetzt; so resultirt für das Integral S, wenn der zweite Theil analog gebildet wird, der Werth

$$\begin{aligned} S &= \frac{-A}{2\sqrt{B_0 C_0 G_0}} \operatorname{arc} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \left[\frac{(4G_0 + G_1(y-p))^2 - (3G_1^2 - 8G_0 G_2)(y-p)^2}{(y-p)^2 \sqrt{(G_1^2 - 4G_0 G_2)^2 - 64G_0^3 G_4}} \right] \\ &\quad - \frac{B}{2\sqrt{B_0 C_0 H_0}} \operatorname{arc} \operatorname{Sin} \frac{1}{2} \left[\frac{(4H_0 + H_1(y-p'))^2 - (3H_1^2 - 8H_0 H_2)(y-p')^2}{(y-p')^2 \sqrt{(H_1^2 - 4H_0 H_2)^2 - 64H_0^3 H_4}} \right]. \end{aligned}$$

4. Die zweite aus vorigen Kapiteln ersichtliche und noch mögliche Lösung des Problems ist folgende. Man setze als die ersten Bedingungen:

$$B_1^2 - 4B_0 B_1 B_2 + 8B_0^2 B_3 = 0$$

$$B_1^2 B_4 - B_0 B_3^2 = 0 \quad \text{alsdann ist:}$$

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = B_0 \left[y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0 B_2}}{4B_0} \right]^2 \left[y + \frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0 B_2}}{4B_0} \right]^2$$

$$\text{und } S = \frac{1}{\sqrt{B_0}} \int \frac{m-m_1 + 2(n-n_1)y + (nm_1 - mn_1)y^2}{\left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0 B_2}}{4B_0} \right) \left(y + \frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0 B_2}}{4B_0} \right)} \cdot \frac{dy}{\sqrt{C_0 y^4 + C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4}}.$$

Die Entwicklung des ersten Factors ergibt

$$\frac{m-m_1+2(n-n_1)y+(nm_1-mn_1)y^2}{y^2+\frac{B_1}{2B_0}y+\frac{4B_0B_2-B_1^2}{8B_0}} = nm_1-mn_1$$

$$+\frac{\left[2(n-n_1)-\frac{B_1}{2B_0}(nm_1-mn_1)\right]y+m-m_1+\frac{(nm_1-mn_1)(B_1^2-4B_0B_2)}{8B_0^2}}{\left[y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right]\left[y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right]}$$

Die ganze Zahl nm_1-mn_1 und die Partialbrüche

$$\frac{A}{y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}} + \frac{B}{y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}}.$$

Die Werthe der Coefficienten A und B sind alsdann

$$8B_0^2(m-m_1)+(nm_1-mn_1)(B_1^2-4B_0B_2)-[4(n-n_1)B_0-B_1(nm_1-mn_1)]$$

$$A = \frac{(B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2})}{4B_0\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}$$

$$[8B_0^2(m-m_1)+(nm_1-mn_1)(B_1^2-4B_0B_2)-[4(n-n_1)B_0-B_1(nm_1-mn_1)]]$$

$$B = -\frac{(B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2})}{4B_0\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}$$

Das Integral ist somit in drei Theile zerlegt,

$$S = \frac{1}{\sqrt{B_0}} \int \frac{(nm_1-mn_1) dy}{k^2} + \frac{A}{\sqrt{B_0}} \int \frac{dy}{\left[y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right]k^2}$$

$$+ \frac{B}{\sqrt{B_0}} \int \frac{dy}{\left[y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right]k^2},$$

worin k die Grösse $C_0y^3+C_1y^2+C_2y+C_3$ vorstellt. Ferner sei für

$$y = \frac{1}{z_1} - \frac{(B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2})}{4B_0} \quad \text{Kürze halber}$$

$$S_4 = C_0$$

$$S_3 = -4C_0 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right) + C_1$$

$$S_2 = 6C_0 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right)^2 - 3C_1 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right) + C_2$$

$$S_1 = -4C_0 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right)^3 + 3C_1 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right)^2$$

$$- 2C_2 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right) + C_3$$

$$S_0 = C_0 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right)^4 - C_1 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right)^3$$

$$+ C_2 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right)^2 - C_3 \left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0} \right) + C_4$$

und für $y = \frac{1}{z_2} - \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)$

$K_1 = C_0$

$K_3 = -4C_0 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) + C_1$

$K_2 = 6C_0 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)^2 - 3C_1 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) + C_2$

$K_1 = -4C_0 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)^3 + 3C_1 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)^2 - 2C_2 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) + C_3$

$K_0 = C_0 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)^4 - C_1 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)^3 + C_2 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)^2 - C_3 \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) + C_4$

und somit $A \int \frac{dy}{\left(y + \frac{n_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) k^{\frac{1}{2}}}$
 $= -A \int \frac{z_1 dz_1}{\sqrt{S_0 + S_1 z_1 + S_2 z_1^2 + S_3 z_1^3 + S_0 z_1^4}}$
 $B \int \frac{dy}{\left(y + \frac{n_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) k^{\frac{1}{2}}} =$
 $-B \int \frac{z_2 dz_2}{\sqrt{K_0 + K_1 z_2 + K_2 z_2^2 + K_3 z_2^3 + K_0 z_2^4}}.$

Die zwei folgenden Bedingungen seien

$S_1^2 - 4S_0S_2 + 8S_0^2S_3 = 0$

$K_1^2 - 4K_0K_2 + 8K_0^2K_3 = 0$ mithin ist alsdann

$k_1 = S_0 z_1^4 + S_1 z_1^3 + S_2 z_1^2 + S_3 z_1 + S_0$

$= S_0 \left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} - \frac{1}{4S_0} \sqrt{3S_1^2 - 8S_0S_2 + 2\sqrt{(S_1^2 - 4S_0S_2)^2 - 64S_0^2S_3}} \right]$

$\left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} - \frac{1}{4S_0} \sqrt{3S_1^2 - 8S_0S_2 - 2\sqrt{(S_1^2 - 4S_0S_2)^2 - 64S_0^2S_3}} \right]$

$\left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} + \frac{1}{4S_0} \sqrt{3S_1^2 - 8S_0S_2 - 2\sqrt{(S_1^2 - 4S_0S_2)^2 - 64S_0^2S_3}} \right]$

$\left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} + \frac{1}{4S_0} \sqrt{3S_1^2 - 8S_0S_2 + 2\sqrt{(S_1^2 - 4S_0S_2)^2 - 64S_0^2S_3}} \right]$

$$\begin{aligned}
k_2 &= K_0 z_2^4 + K_1 z_2^3 + K_2 z_2^2 + K_3 z_2 + K_4 \\
&= k_0 \left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0} - \frac{1}{4K_0} \sqrt{3K_1^2 - 8K_0K_2 + 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_4}} \right] \\
&\quad \left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0} - \frac{1}{4K_0} \sqrt{3K_1^2 - 8K_0K_2 - 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_4}} \right] \\
&\quad \left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0} + \frac{1}{4K_0} \sqrt{3K_1^2 - 8K_0K_2 - 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_4}} \right] \\
&\quad \left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0} + \frac{1}{4K_0} \sqrt{3K_1^2 - 8K_0K_2 + 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_4}} \right]
\end{aligned}$$

und das Integral

$$S = \frac{(nm_1 - mn_1)}{\sqrt{B_0}} \int \frac{dy}{k^{\frac{1}{2}}} - \frac{A}{\sqrt{B_0}} \int \frac{z_1 dz_1}{k_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{\sqrt{B_0}} \int \frac{z_2 dz_2}{k_2^{\frac{1}{2}}}.$$

Nimmt man ferner als letzte Bedingung

$$nm_1 - mn_1 - \frac{AS}{4S_0} - \frac{BK_1}{4K_0} = 0$$

so übergeht das Integral in die beiden Theile

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{A}{\sqrt{B_0 S_0}} \int \frac{dz_1 \left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} \right]}{\sqrt{\left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0} \right)^2 - \alpha^2 \right] \left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0} \right)^2 - \beta^2 \right]}} \\
&\quad - \frac{B}{\sqrt{B_0 K_0}} \int \frac{dz_2 \left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0} \right]}{\sqrt{\left[\left(z_2 + \frac{K_1}{4K_0} \right)^2 - \gamma^2 \right] \left[\left(z_2 + \frac{K_1}{4K_0} \right)^2 - \delta^2 \right]}}
\end{aligned}$$

$$\text{wenn } \frac{1}{4S_0} \sqrt{-8S_0 S_2 + 3S_1^2 + 2\sqrt{(S_1^2 - 4S_0 S_2)^2 - 64S_0^3 S_4}} = \alpha$$

$$\frac{1}{4S_0} \sqrt{-8S_0 S_2 + 3S_1^2 - 2\sqrt{(S_1^2 - 4S_0 S_2)^2 - 64S_0^3 S_4}} = \beta$$

$$\frac{1}{4K_0} \sqrt{-8K_0 K_2 + 3K_1^2 + 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0 K_2)^2 - 64K_0^3 K_4}} = \gamma$$

$$\frac{1}{4K_0} \sqrt{-8K_0 K_2 + 3K_1^2 - 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0 K_2)^2 - 64K_0^3 K_4}} = \delta$$

gesetzt wird. Für $z_1 + \frac{S_1}{4S_0} = \sqrt{u_1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}$ ist alsdann

$$\begin{aligned}
-\frac{A}{\sqrt{B_0 S_0}} \int \frac{dz_1 \left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} \right]}{\sqrt{\left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0} \right)^2 - \alpha^2 \right] \left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0} \right)^2 - \beta^2 \right]}} &= -\frac{1}{2\sqrt{B_0 S_0}} \int \frac{2du}{\sqrt{4u^2 - (\alpha^2 - \beta^2)}} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{B_0 S_0}} \arcsin \frac{2u_1}{\alpha^2 - \beta^2} \quad \text{und wegen}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0}\right) u_1 &= \frac{1}{\tau_0} S_0^2 \left[\left(4S_0 + S_1 \left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0}\right)\right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (3S_1^2 - 8S_0S_2) \left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2 \right] \\ &= \frac{-A}{\sqrt{B_0S_0}} \int \frac{dz_1 \left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} \right]}{\sqrt{\left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0} \right)^2 - \alpha^2 \right] \left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0} \right)^2 - \beta^2 \right]}} \\ &= \frac{-A}{2\sqrt{B_0S_0}} \operatorname{arc\,Sin} \frac{1}{2} \frac{\left[\left(4S_0 + S_1 \left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) \right)^2 - (3S_1^2 - 8S_0S_2) \left(y + \frac{B_1}{4B_0} \right) \right.}{\left. - \frac{\sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right]}{\sqrt{(S_1^2 - 4S_0S_2)^2 - 64S_0^3S_2} \left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)^2}. \end{aligned}$$

Wird das zweite Theilintegrale dem ersten nachgebildet; so ist das Endresultat

$$\begin{aligned} S &= \frac{-A}{2\sqrt{B_0S_0}} \operatorname{arc\,Sin} \frac{1}{2} \frac{\left[\left(4S_0 + S_1 \left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) \right)^2 - (3S_1^2 - 8S_0S_2) \left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) \right]^2}{\left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)^2 \sqrt{(S_1^2 - 4S_0S_2)^2 - 64S_0^3S_2}} \\ &\quad - \frac{B}{2\sqrt{B_0K_0}} \operatorname{arc\,Sin} \frac{1}{2} \frac{\left[\left(4K_0 + K_1 \left(y + \frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) \right)^2 - (3K_1^2 - 8K_0K_2) \left(y + \frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right) \right]^2}{\left(y + \frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0} \right)^2 \sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_2}} \end{aligned}$$

5. Das bestimmte Integral $\int_A^B \frac{dx}{\sqrt{(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)}}$

biethet nach den Werthen von A und B reelle oder imaginäre Glieder. Seien $w_1 > w_2 > w_3$ die Wurzeln ihrer Grösse nach geordnet, und alle zuerst positiv; dann ist dasselbe für alle negativen Werthe, so wie für alle positiven unter w_3 imaginär und wird erst für $x = w_3$ bis $x = w_2$ reell. Von w_2 bis w_1 erhält es wieder einen imaginären Werth. Für w_1 bis ∞ ergibt es wieder reelle Werthe. Die Grenzen A und B sind also in diesem Fall zwischen $x = w_3$ und $x = w_2$

$$x = w_1 \text{ bis } x = \infty.$$

Sei eine der Wurzeln negativ, z. B. für w_1 negativ; so wird das Integral reell für

$$x = 0 \text{ angefangen bis } x = w_3,$$

$$x = w_3 \text{ angefangen bis } x = \infty,$$

$$x = 0 \text{ angefangen bis } x = -w_1;$$

für $-w_2$

$$\text{von } x = 0 \text{ angefangen bis } x = w_3$$

$$x = w_2 \quad \text{,,} \quad \text{bis } x = \infty$$

$$x = 0 \quad \text{,,} \quad \text{bis } x = -w_2;$$

für $-w_3$

$$\text{von } x = 0 \text{ angefangen bis } x = w_2$$

$$x = w_1 \quad \text{,,} \quad \text{bis } x = \infty$$

$$x = 0 \quad \text{,,} \quad \text{bis } x = -w_3.$$

Sind 2 Wurzeln negativ; z. B. $-w_1$ und $-w_2$ dann bleibt das Integral reell für

$$\begin{aligned} x = w_3 \quad \text{bis} \quad x = \infty \\ x = -w_2 \quad \text{bis} \quad x = -w_1; \end{aligned}$$

für $-w_1$ und $-w_3$ von

$$\begin{aligned} x = w_2 \quad \text{bis} \quad x = \infty \\ x = -w_3 \quad \text{bis} \quad x = -w_1; \end{aligned}$$

für $-w_2$ und $-w_3$ von

$$\begin{aligned} x = w_1 \quad \text{bis} \quad x = \infty \\ x = -w_3 \quad \text{bis} \quad x = -w_2. \end{aligned}$$

Sind endlich alle Wurzeln negativ, dann hat das Integral für alle positiven Werthe so wie für $x = -w_2$ bis $x = -w_1$ reelle Werthe. Da aber das Integral für mehrere dieser gefundenen Werthe seine Stetigkeit verliert, und zu einem singulären Integrale wird; so fragt es sich, ob diese Grenzen ihre Anwendung zulassen.

Sei $\frac{1}{\sqrt{(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)}} = f(x)$ alsdann ist

$$S = \int_A^B f(x) dx = \int_A^w f(x) dx + \int_w^B f(x) dx$$

worin w die Wurzel vorstellen mag, für welche das Integral die Stetigkeit verliert.

Zugleich ist $S = \lim \left[\int_A^{w-\alpha\epsilon} f(x) dx + \int_{w+\beta\epsilon}^B f(x) dx \right]$

(worin α, β beliebige, ϵ eine unendlich kleine Grösse vorstellen), das singuläre Integral und

$$S_1 = \lim \left[\int_A^{w-\epsilon} f(x) dx + \int_{w+\epsilon}^B f(x) dx \right]$$

seien Hauptwerthe, somit

$$S - S_1 = \lim \left[\int_{w-\epsilon}^{w-\alpha\epsilon} f(x) dx + \int_{w+\beta\epsilon}^{w+\epsilon} f(x) dx \right].$$

Ferner ist

$$\int_{w-\epsilon}^{w-\alpha\epsilon} f(x) \frac{dx}{x-w} = \xi f(\xi) \cdot \lambda(\alpha),$$

wo ξ zwischen den Grenzen $w-\epsilon$ und $w-\alpha\epsilon$ liegt. Sei ferner $(\xi-w) f(\xi)$ für den speciellen Werth w gleich F ; so ist

$$S - S_1 = \lim F \cdot \lambda \frac{\alpha}{\beta}.$$

Da jedoch $F = \frac{x-w}{\sqrt{(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)}}$ wenn w einen der Werthe w_1, w_2, w_3 erhält, zu Null wird; so folgt für jeden endlichen Werth von α und β

$$S - S_1 = 0.$$

Somit wäre das Integral bestimmt, und zugleich endlich, weil die Hinzugabe der Parthie in der Nähe von w das Integral nicht ändert. Man kann daher die Integration unbesorgt auf diese Werthe erstrecken.

III. Allgemeine Auflösung der Gleichungen dritten Grades

mit Vermeidung

imaginärer Formen im irreducibeln Fall.

Von

F. Peche.

Zu den bemerkenswerthen Eigenschaften einer cubischen Gleichung bei ihrer mannigfachen Transformation gehört auch die Unveränderlichkeit desjenigen Werthes, der in der **CARDAN'schen Formel** gerade da die imaginäre Form annimmt, wo die Gleichung sämmtlich reelle Wurzeln besitzt. Ist nämlich $C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$ die Gleichung und man setzt

$$\frac{3C_0 C_2 - C_1^2}{3C_0^2} = P, \quad \frac{2C_1^3 - 9C_0 C_1 C_2 + 27C_0^2 C_3}{27C_0^3} = Q \quad \text{und} \quad \sqrt{Q^2 + \frac{4}{27}P^3} = K;$$

so ist diese erwähnte Eigenschaft von **K** für sich einleuchtend, wenn y um eine Grösse vergrössert oder verringert wird, weil alsdann die Werthe von **P** und **Q** dieselben bleiben; und dasselbe gilt auch von der verhältnissmässigen cubischen Aenderung von **K**, $K' = \alpha^3 K$ bei der einfachen Aenderung von y , $y' = \alpha y$.

Es gibt jedoch noch einen anderen Fall, in welchem sich **K** und **P** zugleich im gleichen Verhältniss ändern, und die Betrachtung desselben scheint mir in der Lehre der Gleichungen genug wichtig zu seyn, um durch denselben einen Fortschritt in der Lösung sowohl numerischer als algebraischer Gleichungen zu gewinnen.

Zu einer Hilfsgleichung mit der erwähnten Eigenschaft von **P** und **K** gelangt man durch die Einführung zweier Hilfsbögen φ und φ_1 und durch die Annahme einer Hilfsgrösse q von solcher Beschaffenheit, dass wenn $y = q + z$ gesetzt wird, $\varphi_1 = \varphi$ wird; eine Methode, der ich mich schon zu einem bestimmten Zwecke bei Gelegenheit der Durchführung algebraischer Gleichungen 4ten Grades in einer im 4ten Bande, 3 Abth. eingereichten Abhandlung bediente und daselbst durchführte. Da jedoch diese Eigenschaft in der angeführten Durchführung nicht erwähnt wurde; so finde ich mich veranlasst, die Deduction zu wiederholen.

Bringt man die Gleichung $C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$ auf die Form

$$C_0 y^{\frac{2}{3}} + C_1 y^{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{C_0 C_3} \cos \frac{\varphi}{3}$$

$$C_1 y^{\frac{1}{3}} + C_2 y^{-\frac{2}{3}} = 2\sqrt{C_1 C_2} \cos \frac{\varphi_1}{2}$$

wobei wegen $y = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}} e^{\varphi i} = \frac{C_2}{C_1} e^{\varphi_1 i}$ die Gleichungen

$$\varphi i + \frac{1}{3} \lambda \frac{C_3}{C_0} = \varphi_1 i + \lambda \frac{C_2}{C_1} \quad \text{und}$$

$$\sqrt{C_0 C_3} \cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt{C_1 C_2} \cos \frac{\varphi_1}{2} = 0$$

resultiren, so kann immerhin in $y = q + z$, q so gewählt werden, dass für

$$C_0 = \mathfrak{A}_0$$

$$3C_0 q + C_1 = \mathfrak{A}_1$$

$$3C_0 q^2 + 2C_1 q + C_2 = \mathfrak{A}_2$$

$$C_0 q^3 + C_1 q^2 + C_2 q + C_3 = \mathfrak{A}_3$$

die Bedingung $\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} = \left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}\right)^3$ erfüllt sey; wodurch $\lambda \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} = \lambda \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}$ und somit $\varphi_1 = \varphi$ wird, und

zugleich die zweite Bedingungsgleichung für φ in $\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1} \cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} \cos \frac{\varphi}{2} = 0$

übergeht. Die Gleichung $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_1^3 = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2^3$ führt zu der cubischen Hilfsgleichung:

$$(2C_0 C_1^3 - 9C_0^2 C_1 C_2 + 27C_0^3 C_3) q^3 + (C_1^3 - 3C_0 C_1^2 C_2 - 9C_0^2 C_2^2 + 27C_0^3 C_1 C_3) q^2 \\ + (9C_0 C_1^2 C_3 - 6C_0 C_1 C_2^2 + C_1^3 C_2) q + C_1^3 C_3 - C_0 C_2^3 = 0,$$

oder wenn die Coefficienten mit $\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_0$ bezeichnet werden zur Gleichung

$$\mathfrak{D}_3 q^3 + \mathfrak{D}_2 q^2 + \mathfrak{D}_1 q + \mathfrak{D}_0 = 0.$$

Diese Gleichung ist es von der in der Folge die angeführte Eigenschaft erwiesen werden soll. zuvor will ich noch die Werthe der Wurzeln. so wie einige Eigenthümlichkeiten der Coefficienten \mathfrak{D} betrachten.

Die Gleichung $\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1} \cos \frac{\varphi}{3} + \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} \cos \frac{\varphi}{2} = 0$

$$\text{d. i. } \cos \frac{\varphi}{2} \left[4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 3 \right] \sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1} + \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} \cos \frac{\varphi}{2} = 0$$

liefert für $\cos \frac{\varphi}{2}$, drei Werthe:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{-\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} + 3\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1}}{4\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1}}}$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = -\sqrt{\frac{-\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} + 3\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1}}{4\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1}}}$$

d. i. vermöge der Gleichung $\frac{y_1}{y_0} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^3$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3y_0 y_2 - y_1^2}{y_0 y_2}}$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3y_0 y_2 - y_1^2}{y_0 y_2}}$$

wovon jeder Werth von φ in $z = \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\varphi i}$ gesetzt zu einer Wurzel der Gleichung

$$C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0 \text{ führt, denn es ist}$$

$$\begin{aligned} z_1 + \frac{y_1}{y_0} z^2 + \frac{y_2}{y_0} z + \frac{y_3}{y_0} &: z - \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\varphi i} \\ &= z^2 + \left(\frac{y_1}{y_0} + \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\varphi i}\right) z + \frac{y_2}{y_0} + \frac{y_1}{y_0} \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\varphi i} + \sqrt[3]{\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2} e^{2\varphi i} \end{aligned}$$

wobei der Rest

$$r = \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\varphi i} + \frac{y_1}{y_0} \sqrt[3]{\left(\frac{y_3}{y_0}\right)^2} e^{2\varphi i} + \frac{y_3}{y_0} e^{3\varphi i}$$

d. i. $y_0 e^{-\frac{2}{3}\varphi i} r = 2y_1 \cos \frac{\varphi}{2} + 2y_2 \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} \cos \frac{\varphi}{2}$

$$= \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} \left[2\sqrt{y_0 y_3} \cos \frac{\varphi}{2} + 2\sqrt{y_1 y_2} \cos \frac{\varphi}{2} \right]$$

für die angegebenen Werthe von φ wirklich zu 0 wird. Die rückbleibenden Wurzeln nach dieser Division sind somit:

$$z_2 = -\frac{y_1}{2y_0} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\varphi i} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y_1^2 - 4y_0 y_2}{y_0^2} - \frac{2y_1}{y_0} \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\varphi i} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{y_3}{y_0}\right)^2} e^{2\varphi i}}$$

$$z_3 = -\frac{y_1}{2y_0} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\varphi i} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y_1^2 - 4y_0 y_2}{y_0^2} - \frac{2y_1}{y_0} \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\varphi i} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{y_3}{y_0}\right)^2} e^{2\varphi i}}$$

Durch die Form $\sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\pm i \arccos \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 y_2 - y_1^2}{y_0 y_2}\right)}$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{4y_0 y_2 - y_1^2}{y_0^2} - \frac{2\sqrt[3]{y_3}}{\sqrt[3]{y_0}} \frac{y_1}{y_0} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{y_3}{y_0}\right)^2}}$$

und durch den obigen Werth von $\varphi_1 = \pi$ nehmen alsdann die Wurzeln das compendiosere Aussehen an und sind

$$y_1 = q + \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{\pi i}$$

$$y_2 = q + \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{i \arccos \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 y_2 - y_1^2}{y_0 y_2}\right)}$$

$$y_3 = q + \sqrt[3]{\frac{y_3}{y_0}} e^{-i \arccos \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 y_2 - y_1^2}{y_0 y_2}\right)}$$

Was die Relationen der Coefficienten \mathfrak{D} betrifft; so sind immer zwei derselben durch die anderen und die ersten drei Coefficienten der Hauptgleichung C_0, C_1, C_2 bestimmt, denn sie erfüllen folgende Gleichungen:

$$3C_0^2 \mathfrak{D}_2 = 2C_0 C_1 \mathfrak{D}_4 - C_1^2 \mathfrak{D}_3$$

$$9C_0^3 \mathfrak{D}_6 = C_0^2 C_1 \mathfrak{D}_7 + C_0^2 C_2 \mathfrak{D}_5 - C_0 C_1 C_2 \mathfrak{D}_4$$

oder auch

$$27C_0^3 \mathfrak{D}_6 = C_0 (2C_1^2 + 3C_0 C_2) \mathfrak{D}_5 - C_1 (C_1^2 + 3C_0 C_2) \mathfrak{D}_4$$

$$9C_0 C_1 \mathfrak{D}_6 = (3C_0 C_2 + C_1^2) \mathfrak{D}_5 - C_1 C_2 \mathfrak{D}_4.$$

Andere Eigenthümlichkeiten stellen sich heraus bei der Einführung folgender Hilfsgrößen

$$\alpha = C_1^2 - 3C_0 C_2$$

$$\beta = 3C_1 C_2 - C_2^2$$

$$\gamma = 9C_0 C_2 - C_1 C_2$$

welche Größen ich, des grösseren Einflusses wegen, die Bestimmungsstücke der Gleichung nennen will. Es lassen sich die Coefficienten \mathfrak{D} durch dieselben und durch C_0, C_1, C_2 folgender bestimmen

$$\mathfrak{D}_3 = 2C_0 C_1 \alpha + 3C_0^2 \gamma$$

$$\mathfrak{D}_4 = C_1^2 \alpha + 9C_0^2 \beta$$

$$\mathfrak{D}_5 = C_1 C_2 \alpha + 3C_0 C_1 \beta$$

$$3\mathfrak{D}_6 = C_2^2 \alpha + C_1^2 \beta$$

und sie selbst sind noch durch die Gleichung

$$C_1 \gamma = 3C_0 \beta - C_2 \alpha$$

untereinander verknüpft. Eine fernere Gleichung ist

$$C_1 \mathfrak{D}_3 = C_0 x^2 + C_0 (C_1^2 \alpha + 9C_0^2 \beta) = C_0 x^2 + C_0 \mathfrak{D}_4$$

woraus sich eine später vorkommende Grösse

$$\frac{\mathfrak{D}_3}{3\mathfrak{D}_4} = \frac{C_1}{3C_0} - \frac{x^2}{3\mathfrak{D}_4}$$

und daher die Bemerkung ergibt: der Werth der Verminderung der Unbekannten, für den der Coefficient bei y^2 der Hauptgleichung verschwindet, muss um das Quadrat des ersten Bestimmungsstückes getheilt durch den dreifachen ersten Coefficienten verringert werden, um dasselbe dann bei der Hilfsleichung zu leisten.

Von mindern Belang und für specielle Fälle in Anwendung treten dann die weitern Gleichungen ein:

$$\mathfrak{D}_4 + 2\mathfrak{D}_5 + 3\mathfrak{D}_6 = (C_1 + C_2)^2 x + (3C_0 + C_1)^2 \beta$$

$$C_1 \mathfrak{D}_5 - C_2 \mathfrak{D}_6 = 3C_0 x \beta.$$

Aber auch die Coefficienten der transformirten Hauptgleichung

$$\left(y + \frac{C_1}{3C_0}\right)^3 + P \left(y + \frac{C_1}{3C_0}\right) + Q = 0$$

nämlich

$$P = \frac{3C_0 C_2 - C_2^2}{3C_0^2} \quad \text{und} \quad Q = \frac{2C_1^3 - 9C_0 C_1 C_2 + 27C_0^2 C_2}{27C_0^3}$$

so wie auch $K^2 = Q^2 + \frac{4}{27} P^3$ lassen sich bequem durch die Bestimmenden ausdrücken.

Es ist $P = \frac{-\alpha}{3C_0^2}, \quad Q = \frac{2C_1\alpha + 3C_0\gamma}{27C_0^3}$

$$\begin{aligned} K^2 &= \frac{4P^3}{27} + Q^2 = \frac{1}{27^2 C_0^6} [4C_1^2\alpha^2 + 16C_0C_1\alpha\gamma + 9C_0^2\gamma^2 - 4\alpha^3] \\ &= \frac{1}{27^2 C_0^6} [4(C_1^2 - 3C_0C_2)\alpha^2 - 4\alpha^3 + 12C_0\alpha(C_1\gamma + C_2\alpha) + 9C_0^2\gamma^2] \\ &= \frac{1}{27^2 C_0^6} [3 \cdot 12C_0^2\alpha\beta + 9C_0^3\gamma^2] = \frac{1}{9^2 C_0^3} [4\alpha\beta + \gamma^2]. \end{aligned}$$

Die Bestimmenden der Hilfsgleichung lassen sich einfach durch die der Hauptgleichung finden, sie sind analog

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathfrak{D}_4^2 - 3\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_1, \\ \beta_1 &= 3\mathfrak{D}_4\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_5^2, \\ \gamma_1 &= 9\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_5\mathfrak{D}_7. \end{aligned}$$

Vermöge der Eigenschaft der Coefficienten $\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4, \mathfrak{D}_5$, die Gleichung

$$\mathfrak{D}_4^2 - 3\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_1 = \left(\frac{C_0\mathfrak{D}_4 - C_1\mathfrak{D}_3}{C_0} \right)^2$$

zu erfüllen, ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{C_0\mathfrak{D}_4 - C_1\mathfrak{D}_3}{C_0} \right)^2 = (-C_1\alpha + 9C_0^2\beta - 3C_0C_1\gamma)^2 \\ &= (-\alpha(C_1^2 - 3C_0C_2) + 3C_0(3C_0\beta - C_1\gamma) - 3C_0C_2\alpha)^2 \\ &= 3C_0\beta - C_1\gamma = C_2\alpha, \quad C_1^2 - 3C_0C_2 = \alpha \end{aligned}$$

und vermöge
wird

$$\begin{aligned} \text{Auch ist } \beta_1 &= 3\mathfrak{D}_4\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_5^2 = 9C_0^2C_2\alpha\beta + C_1^2\alpha\beta - 6C_0C_1C_2\alpha\beta \\ &= \alpha\beta [C_1^2(C_1^2 - 3C_0C_2) - 3C_0C_2(C_1^2 - 3C_0C_2)] \\ &= \alpha^3\beta \end{aligned}$$

und ferner

$$\mathfrak{D}_4\gamma_1 = 3\mathfrak{D}_3\beta_1 - \mathfrak{D}_5\alpha_1,$$

nach den gefundenen Werthen

$$\begin{aligned} &= \alpha^3 [3\mathfrak{D}_3\beta - \alpha\mathfrak{D}_5] \\ &= \alpha^3 [3C_0C_1\alpha\beta + 9C_0^2\beta\gamma - C_1C_2\alpha^2] \\ &= \alpha^3 (9C_0^2\beta\gamma + C_1^2\alpha\gamma) = \alpha^3\gamma (9C_0^2\beta + C_1^2\alpha) \end{aligned}$$

und da

$$9C_0^2\beta + C_1^2\alpha = \mathfrak{D}_4 \text{ ist,}$$

$$\gamma_1 = \alpha^3\gamma.$$

Es stehen daher die Bestimmenden der Hilfsgleichung im gleichen Verhältniss, wie die der Hauptgleichung und werden erhalten indem man die der Hauptgleichung mit dem Cubus der ersten Bestimmenden multiplicirt. Die Werthe von P_1, K_1 , für die Hilfsgleichung sind

$$P_1 = \frac{-\alpha^4}{3\mathfrak{D}_4^2}, \quad K_1 = \frac{\alpha^3}{9\mathfrak{D}_4^2} \sqrt{4\alpha\beta + \gamma^2}$$

und ändern sich wegen

$$P_1 = P \cdot \alpha^3 \left(\frac{C_0}{\mathfrak{D}_4} \right)^2, \quad K_1 = K \alpha^3 \left(\frac{C_0}{\mathfrak{D}_4} \right)^2$$

im selben Verhältniss.

Der Coefficient \mathfrak{D}_3 lässt sich bequem durch \mathbf{Q} ausdrücken und dadurch das Verhältniss der Aenderung von \mathbf{P} , \mathbf{Q} und \mathbf{K} darstellen. Es ist

$$\mathfrak{D}_3 = 27 \mathbf{C}_0^3 \mathbf{Q}, \quad \alpha^3 = -27 \mathbf{C}_0^3 \mathbf{P}^3$$

und somit das Verhältniss der Aenderung

$$\alpha^3 \left(\frac{\mathbf{C}_0}{\mathfrak{D}_3} \right)^2 = \rho = -\frac{\mathbf{P}^3}{27 \mathbf{Q}^2}.$$

Anders ist die Aenderung von \mathbf{Q} , denn dasselbe übergeht in

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^2 &= \mathbf{K}^2 - \frac{4}{27} \mathbf{P}^3 = \mathbf{K}^2 \rho^2 - \frac{4}{27} \mathbf{P}^3 \rho^3 \\ &= \rho^2 \left[\mathbf{Q}^2 + \frac{4}{27} (1 - \rho) \mathbf{P}^3 \right] \\ &= \rho^2 \left[\mathbf{Q}^2 + \frac{4}{27} \mathbf{P}^2 + \frac{4}{27^2} \frac{\mathbf{P}^3}{\mathbf{Q}^2} \right] \\ &= \rho^2 \left[\mathbf{Q} + \frac{2}{27} \frac{\mathbf{P}^3}{\mathbf{Q}} \right]^2 = \rho^2 [1 - 2\rho]^2 \mathbf{Q}^2; \end{aligned}$$

und ändert sich daher nicht bloss im Verhältniss von ρ , sondern zugleich im Verhältniss von $(1 - 2\rho)$.

Nimmt man $\frac{\mathbf{C}_1}{3\mathbf{C}_0} = \mu$, ferner \mathbf{P} und \mathbf{Q} als Bestimmungsstücke an; so lassen sich die Bestimmenden als auch die Coefficienten der Hilfsgleichung einfach durch dieselben darstellen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{C}_2}{3\mathbf{C}_0} &= \frac{\mathbf{C}_1^2}{9\mathbf{C}_0^2} - \frac{\alpha}{9\mathbf{C}_0^2} = \mu^2 - \frac{\alpha}{9\mathbf{C}_0^2} \quad \text{und} \\ \frac{\mathbf{C}_1}{3\mathbf{C}_0} \gamma &= \beta - \frac{\alpha \mathbf{C}_2}{3\mathbf{C}_0} \quad \text{d. i.} \end{aligned}$$

$$\mu \gamma = \beta - \alpha \mu^2 + \frac{\alpha^2}{9\mathbf{C}_0^2} = \beta - \alpha \mu^2 + \mathbf{C}_0^2 \mathbf{P}^2.$$

Aus den drei Gleichungen:

$$\alpha \mu^2 - \beta + \mu \gamma = \mathbf{C}_0^2 \mathbf{P}^2$$

$$2\mu \alpha + \gamma = 9\mathbf{C}_0^3 \mathbf{Q}$$

$$\alpha = -3\mathbf{C}_0^3 \mathbf{P} \quad \text{folgt}$$

$$\alpha = -3\mathbf{C}_0^3 \mathbf{P}$$

$$\beta = \mathbf{C}_0^2 (-\mathbf{P}^2 + 3\mathbf{P} \mu^2 + 9\mu \mathbf{Q})$$

$$\gamma = 3\mathbf{C}_0^2 (2\mathbf{P} \mu + 3\mathbf{Q}) \quad \text{und ferner aus}$$

$$\mathbf{C}_1 \mathfrak{D}_3 - \mathbf{C}_2 \mathfrak{D}_3 = 3\mathbf{C}_0 \alpha \beta \quad \text{und}$$

$$27\mathbf{C}_0^3 \mathfrak{D}_6 = \mathbf{C}_0 (2\mathbf{C}_1^2 + 3\mathbf{C}_0 \mathbf{C}_2) \mathfrak{D}_3 - \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_1^2 + 3\mathbf{C}_0 \mathbf{C}_2) \mathfrak{D}_3,$$

$$\mu \mathfrak{D}_3 = \left(\mu^2 + \frac{\mathbf{P}}{3} \right) \mathfrak{D}_3 + \frac{\mathbf{P}}{9} (\mathbf{P}^2 - 3\mathbf{P} \mu^2 - 9\mu \mathbf{Q})$$

$$= 3 \left(\mu - \frac{\mathbf{P}^2}{9\mathbf{Q}} \right) \left(\rho^2 + \frac{\mathbf{P}}{3} \right) + \frac{\mathbf{P}}{9\mathbf{Q}} (\mathbf{P}^2 - 3\mathbf{P} \mu^2 - 9\mu \mathbf{Q})$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}_5}{\mathcal{D}_3} &= 3\mu \left(\mu - \frac{2}{3} \frac{P^2}{Q} \right) \\ \frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{D}_1} &= \frac{1}{3} \left(3\mu^2 + \frac{P}{3} \right) \frac{\mathcal{D}_3}{\mathcal{D}_1} - \mu \left(2\mu^2 + \frac{P}{3} \right) \\ &= \left(3\mu^2 + \frac{P}{3} \right) \left(\mu - \frac{2}{9} \frac{P^2}{Q} \right) - \mu \left(2\mu^2 + \frac{P}{3} \right) \\ &= \mu^3 - \frac{P^2 \mu^2}{3Q} - \frac{P^3}{27Q} \end{aligned}$$

und die Hilfsgleichung übergeht dadurch in

$$\begin{aligned} q^3 + 3 \left(\mu - \frac{P^2}{9Q} \right) q^2 + 3\mu \left(\mu - \frac{2}{3} \frac{P^2}{Q} \right) q + \mu^3 - \frac{P^2 \mu^2}{3Q} - \frac{P^3}{27Q} &= 0 \\ \text{d. i. in } (q + \mu)^3 - \frac{P^2}{3Q} (q + \mu)^2 - \frac{P^3}{27Q} &= 0 \end{aligned}$$

eine Gleichung, aus der sich auch sehr leicht die frühern Bemerkungen über P, Q und K deduciren lassen. Wird also die ursprüngliche Gleichung auf

$$\left(y + \frac{C_1}{3C_0} \right)^3 + P \left(y + \frac{C_1}{3C_0} \right) + Q = 0$$

transformirt. so muss

$$q^3 - \frac{P^2}{3Q} q^2 - \frac{P^3}{27Q} = 0$$

die Hilfsgleichung seyn.

Diese gemachten Betrachtungen könnte man benützen, die Wurzeln der cubischen Gleichung in Form eines Kettenbruchs darzustellen und dadurch mancherlei Vortheile gewinnen, wenn derselbe nicht divergirte oder wenigstens nicht convergirte, wesshalb ich diese Untersuchung als vergeblich übergehe.

Wenn gleich auf diesem Weg keine Ausbeute zu erringen ist; so lässt sich doch ein anderer einschlagen, der zur geschlossnen reellen Form selbst im casu irreducibili führt. Sey also die ursprüngliche Gleichung:

$$C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0 \quad \text{durch} \quad y = -\frac{C_1}{3C_0} + z$$

auf die Form $z^3 + Pz + Q = 0$ gebracht, und die auf gleiche Weise reducirte Hilfsgleichung der ursprünglichen, ist mithin ebenfalls

$$\delta^3 + P\rho\delta + Q\rho(1-2\rho) = 0; \quad \rho = \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}{Q}$$

gesetzt, oder für $\delta = \sqrt{\rho} \cdot \zeta_1$

$$\zeta_1^3 + P\zeta_1 + \frac{Q\rho(1-2\rho)}{\rho\sqrt{\rho}} = 0.$$

Wird $z = n \sin \varphi$

$$\zeta_1 = n' \sin \phi \quad \text{gesetzt, wodurch wegen} \quad \sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{\sin 3\varphi}{4}$$

die Gleichung für z die Form

$$z^3 - \frac{1}{2} n^2 z + \frac{n^3}{4} \text{Sin } 3\varphi = 0$$

und die für ζ , die Form

$$\zeta^3 - \frac{3}{4} n'^2 \zeta + \frac{n'^3}{4} \text{Sin } 3\psi = 0$$

annehmen; so zeigt der weitere Vergleich wegen

$$n = \sqrt{-\frac{4P}{3}}, \quad n' = \sqrt{-\frac{4P}{3}}, \quad \text{Sin } 3\varphi = \frac{Q}{2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{Sin } 3\psi = \frac{Q(1-2\rho)}{2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho}},$$

nicht bloss die Gleichheit der Radien n , sondern auch ein bestimmtes Verhältniss von $\text{Sin } \psi$ zu $\text{Sin } \varphi$; gegeben durch das Verhältniss von $\text{Sin } 3\psi$ zu $\text{Sin } 3\varphi$. Wegen

$$\rho = \frac{1}{4 \text{Sin}^2 3\varphi} \quad \text{ist} \quad \frac{\text{Sin } 3\psi}{\text{Sin } 3\varphi} = \frac{1-2\rho}{\sqrt{\rho}} = \frac{1 - \frac{1}{2 \text{Sin}^2 3\varphi}}{\frac{1}{2 \text{Sin } 3\varphi}} = \frac{-\cos 6\varphi}{\text{Sin } 3\varphi}$$

$$\text{d. h.} \quad \text{Sin } 3\psi = \cos(\pi - 6\varphi) = \text{Sin}\left(6\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{oder}$$

$$\psi = 2\varphi - \frac{\pi}{6}.$$

Ebenso kann man ferner zwei Winkel ω , τ annehmen, von der Beschaffenheit, dass:

$$\omega = 2\psi - \frac{\pi}{6}$$

$$\tau = 2\omega - \frac{\pi}{6},$$

die überdiess durch die Gleichungen zweier weiterer Operationen erhalten werden; aber auch ohnedem annehmbar sind. So gibt die Gleichung:

$$\zeta_1^3 + P\zeta_1 + \frac{Q(1-2\rho)}{\sqrt{\rho}} = 0 \quad \text{für} \quad \zeta_1 = n \text{Sin } \psi$$

die transformirte Hilfsgleichung

$$\delta_2^3 + P\rho_1 \delta_2 + \frac{Q(1-2\rho)(1-2\rho_1)}{\sqrt{\rho}} = 0$$

und bei der weitem Transformation $\delta_2 = \sqrt{\rho_1} \zeta_2 = \sqrt{\rho_1} n \text{Sin } \omega$ die Gleichung

$$\zeta_2^3 + P\zeta_2 + \frac{Q(1-2\rho)(1-2\rho_1)}{\sqrt{\rho\rho_1}} = 0$$

und darin ist

$$\rho_1 = \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}{Q^2 (1-2\rho)^2} = \frac{\rho^2}{(1-2\rho)^2}.$$

Durch erstere Gleichung resultiren für die Sinusse der dreifachen Bögen die Werthe

$$\begin{aligned} \text{Sin } 3\varphi &= \frac{1}{2\sqrt{\rho}}, \quad \text{Sin } 3\psi = \frac{1-2\rho}{2\rho} \quad \text{aus der letzten} \\ \text{Sin } 3\psi &= \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}} = \frac{1-2\rho}{2\rho}, \\ \text{Sin } 3\omega &= \frac{1-2\rho_1}{2\rho_1} = \frac{(1-2\rho)^2 - 2\rho^2}{2\rho^2} = 2\text{Sin}^2 3\varphi - 1 = -\cos 6\varphi; \\ &\text{daher ist } \omega = 2\psi - \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Ferner ergibt

$$\zeta_3^3 + P\zeta_3 + \frac{Q(1-2\rho)(1-2\rho_1)}{\sqrt{\rho\rho_1}} = 0$$

die transformirte Hilfspgleichung

$$\delta_3^3 + P\rho_2\delta_3 + \frac{Q(1-2\rho)(1-2\rho_1)(1-2\rho_2)\rho_2}{\sqrt{\rho\rho_1}} = 0$$

und bei der weitem Transformation

$$\delta_3 = \zeta_3\sqrt{\rho_2} = n\sqrt{\rho_2} \text{Sin } \tau$$

die Werthe von

$$\rho_2 = \frac{\rho_1^2}{(1-2\rho_1)^2}, \quad \text{Sin } 3\omega = \frac{1-2\rho_1}{2\rho_1} = \frac{1}{2\sqrt{\rho_2}},$$

$$\text{Sin } 3\tau = \frac{1-2\rho_2}{2\rho_2} = -\cos 6\omega$$

$$\tau = 2\omega - \frac{\pi}{6}$$

Aus den drei Gleichungen:

$$\psi = 2\varphi - \frac{\pi}{6}$$

$$\omega = 2\psi - \frac{\pi}{6}$$

$$\tau = 2\omega - \frac{\pi}{6} \quad \text{folgt:}$$

$$\tau = 4\psi - \frac{\pi}{2} = 8\varphi - 7\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{Sin } \tau &= \text{Sin}\left(9\varphi + \frac{5}{6}\pi - \varphi\right) \\ &= \text{Sin}\left(9\varphi + \frac{5}{6}\pi\right) \cos \varphi - \cos\left(9\varphi + \frac{5}{6}\pi\right) \text{Sin } \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Sin } \omega = \text{Sin}\left(3\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cos \varphi + \cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \text{Sin } \varphi$$

$$\text{Sin } \psi = \text{Sin}\left(3\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \cos \varphi - \cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \text{Sin } \varphi$$

oder wenn

$$\text{Sin}\left(9\varphi + \frac{5}{6}\pi\right) = a, \quad -\cos\left(9\varphi + \frac{5}{6}\pi\right) = b$$

$$\text{Sin}\left(3\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = a', \quad \cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = b'$$

$$\text{Sin}\left(3\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = a'', \quad -\cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = b''$$

gesetzt werden

$$\sin \tau = a \cos \varphi + b \sin \varphi$$

$$\sin \omega = a' \cos \varphi + b' \sin \varphi$$

$$\sin \psi = a'' \cos \varphi + b'' \sin \varphi \text{ d. i.}$$

$$a' \sin \tau - a \sin \omega = (a'b - ab') \sin \varphi = A \sin \varphi$$

$$a'' \sin \omega - a' \sin \psi = (a''b' - a'b'') \sin \varphi = B \sin \varphi$$

$$a \sin \psi - a'' \sin \tau = (ab'' - a''b) \sin \varphi = C \sin \varphi.$$

Die Werthe der bezeichneten Grössen sind:

$$a = \frac{(\rho - 1)\sqrt{4\rho - 1} - \sqrt{3}(3\rho - 1)}{4\rho\sqrt{\rho}}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}(\rho - 1)\sqrt{4\rho - 1} + (3\rho - 1)}{4\rho\sqrt{\rho}}$$

$$a' = -\frac{\sqrt{4\rho - 1}}{2\sqrt{\rho}}$$

$$b' = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}$$

$$a'' = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4\rho - 1}}{4\sqrt{\rho}}$$

$$b'' = -\frac{(1 + \sqrt{3}(4\rho - 1))}{4\sqrt{\rho}}$$

$$A = \frac{(1 - 2\rho)\sqrt{4\rho - 1} - \sqrt{3}[(1 - 2\rho)^2 - 2\rho^2]}{4\rho^2}$$

$$B = \frac{\sqrt{3}(1 - 2\rho) - \sqrt{4\rho - 1}}{4\rho}$$

$$C = \frac{\sqrt{4\rho - 1}}{2\rho}.$$

Um die Verhältnisse der Sinusse aus den obigen Gleichungen bestimmen zu können, braucht man nur die darin fehlenden Glieder zu ersetzen, indem man sie mit μ multiplicirt vorstellt, welches man nach der Berechnung dann verschwinden lässt.

$$a' \sin \tau - a \sin \omega + \mu \sin \psi = A \sin \varphi$$

$$\mu \sin \tau + a'' \sin \omega - a' \sin \psi = B \sin \varphi$$

$$-a'' \sin \tau + \mu \sin \omega + a \sin \psi = C \sin \varphi$$

ergibt für den gemeinsamen Nenner der unbekanntten

$$N = \mu(a^2 + a'^2 + a''^2) + \mu^3;$$

der Zähler von $\sin \tau$ ist

$$Z_\tau = \sin \varphi [A a a'' + A a' \mu + B \mu^2 + B a^2 + C a a' - C'' \mu]$$

$$= \sin \varphi [a(A a'' + B a + C a') + \mu(A a' - C a'') + B \mu^2].$$

Nun ist

$$A a'' + B a + C a' = (a'b - ab')a'' + (a''b' - a'b'')a + (ab'' - a''b)a' = 0$$

und mithin

$$\frac{\sin \tau}{\sin \varphi} = \frac{A a' - C a'' + B \mu}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \mu^2}$$

und wenn $\mu = 0$ gesetzt wird:

$$\sin \tau = \frac{(A a' - C a'') \sin \varphi}{a^3 + a'^2 + a''^2}$$

$$\sin \omega = \frac{(B a'' - A a) \sin \varphi}{a^3 + a'^2 + a''^2}$$

$$\sin \psi = \frac{(C a - B a') \sin \varphi}{a^3 + a'^2 + a''^2}$$

$$= \left[b'' - \frac{(a b + a' b' + a'' b'') a''}{a^3 + a'^2 + a''^2} \right] \sin \varphi = k \sin \varphi.$$

Zugleich ist

$$C a - B a' = -\frac{\sqrt{4\rho-1}}{8\rho^2\sqrt{\rho}} [\sqrt{4\rho-1} - \sqrt{3(1-2\rho-2\rho^2)}]$$

$$a^3 + a'^2 + a''^2 = \frac{12\rho^3 + 8\rho^2 - 6\rho + 1 - \sqrt{3(2\rho-1)^2\sqrt{4\rho-1}}}{8\rho^3}$$

$$a b + a' b' + a'' b'' = \frac{1}{16\rho^3} [\sqrt{3(4\rho^3 - 10\rho^2 + 6\rho - 1)} - (6\rho^2 - 4\rho + 1)\sqrt{4\rho-1}]$$

und daher

$$k = \frac{\sqrt{\rho(4\rho-1)} [\sqrt{4\rho-1} - \sqrt{3(1-2\rho-2\rho^2)}]}{\sqrt{3(4\rho-1)}(2\rho-1)^2 - (12\rho^3 + 8\rho^2 - 6\rho + 1)}$$

worin mit dem Zeichen von φ , also mit dem Zeichen von Q , $\sqrt{\rho}$ sein Zeichen ändert.

Mit Hilfe des so bestimmten Werthes k lassen sich die Wurzeln des irreducibeln Falles sehr bequem in reellen Grössen darstellen.

Die Werthe von y und q sind mit einander durch den Ausdruck

$$y = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\pi i}$$

als den einfachsten verknüpft, d. i. vermöge der Bedeutung von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ und der Gleichung

$$\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} = \frac{\mathfrak{A}_7}{\mathfrak{A}_1} \quad \text{durch} \quad y = \frac{-(C_1 q + C_2)}{3 C_0 q + C_1} = \frac{-\mu q - \frac{C_2}{3 C_0}}{q + \mu}$$

oder da nach frühern $\frac{C_2}{3 C_0} = \mu^2 + \frac{P}{3}$ gefunden wurde, durch

$$y = \frac{-\mu q - \mu^2 - \frac{P}{3}}{q + \mu}.$$

Zu dieser Gleichung kömmt dann noch eine zweite wegen des bekannten Verhältnisses von $\sin \psi$ zu $\sin \varphi$. In der Gleichung $z^3 + Pz + Q = 0$ war $z = n \sin \varphi$, also $y + \mu = n \sin \varphi$ und in der Hilfgleichung

$$q = \frac{-\mathfrak{D}_4}{3\mathfrak{D}_3} + \delta_1 = \frac{-\mathfrak{D}_4}{3\mathfrak{D}_3} + \sqrt{\rho} \cdot \zeta_1 = -\mu + \frac{P^2}{9Q} + \sqrt{\rho} \cdot n \sin \psi;$$

Daher ist $q + \mu - \frac{P^2}{9Q} = \sqrt{\rho} \cdot n \sin \psi$ die zweite Gleichung, deren Verbindung mit der erstern

$$\frac{y + \mu}{q + \mu - \frac{P^2}{9Q}} = \frac{\text{Sin } \varphi}{\sqrt{\rho} \cdot \text{Sin } \psi} = \frac{1}{k\sqrt{\rho}} \quad \text{und somit}$$

$$q + \mu - \frac{P^2}{9Q} = k\sqrt{\rho}(y + \mu) \quad \text{ergibt.}$$

Eliminirt man eine der Unbekannten, z. B. $q + \mu$; so ist

$$(y + \mu)' + \frac{P^2}{9Qk\sqrt{\rho}}(y + \mu) = \frac{-\frac{P}{3}}{k\sqrt{\rho}}$$

oder wegen $Q\sqrt{\rho} = \left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$(y + \mu)' + \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}}}{k}(y + \mu) = \frac{Q}{k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{d. i.}$$

$$y + \mu = \frac{-\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + 4Qk}}{2k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

wo im Radical bloss das obere Zeichen zu gelten hat, damit $y + p$, je nach dem Zeichen von Q , mit dem auch k zugleich sein Zeichen ändert, immer gleich gross positiv oder negativ werden könne. Unter ähnlichen solchen, nur in Doppelformen erscheinen dann die zwei andern Wurzeln; in Formen, die nicht anwendbar sind, wenn k reell wird, weil dann k als imaginär eine Form wie $\frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\gamma + \delta\sqrt{-1}}$ annimmt. Dennoch verbleibt die Gestalt der Wurzeln auch in den andern Fällen, wenn gleich der Werth von k varirt.

Um diess zu zeigen, sey in dem einen Fall P positiv; die transformirte Hauptgleichung $z^3 + Pz + Q = 0$ hat dann die Hilfsleichung

$$q^3 - \frac{P^2}{3Q}q^2 - \frac{P^3}{27Q} = 0 \quad \text{oder wenn}$$

$$\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{Q^2} = \rho \quad \text{und} \quad q = \frac{P^2}{9Q} + \xi$$

gesetzt werden, die Hilfsleichung

$$\xi^3 - P\rho\xi - Q\rho(1 + 2\rho) = 0$$

und in diesen Gleichungen ist z mit q durch die Bedingung $zq = -\frac{P}{3}$ verknüpft.

Wird $Q = \frac{2}{\text{tg } \varphi} \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ gesetzt, so übergeht K , $Q + K$ und $Q - K$ in die Werthe

$$K = \frac{2}{\text{Sin } \varphi} \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad Q + K = 2\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{\text{Sin } \varphi}\right), \quad Q - K = 2\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1 - \cos \varphi}{\text{Sin } \varphi}\right)$$

und daher der Werth von z nach der Cardanischen Formel in

$$z = \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\cot \frac{\varphi}{2}} \right]$$

oder nach der Bedeutung von $\operatorname{tg} \varphi = 2\sqrt{\rho}$ in

$$z = \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left[+ \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1+4\rho}-1}{2\sqrt{\rho}}} \pm \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{\rho}}{\sqrt{1+4\rho}-1}} \right]$$

wo das Zeichen nach dem des Q bestimmt werden muss. In der transformirten Hilfs-
gleichung für ξ ist aber P negativ und da zugleich

$$4 \left(\frac{P\rho}{3}\right)^3 \frac{1}{Q^2 \rho^2 (1+2\rho)^2} = \frac{4\rho^2}{(1+2\rho)^2}$$

kleiner als 1 ist, bleibt K reell und zugleich bis auf den Factor der hinzukommen
hat, dasselbe. Wird daher in der Hilfs-
gleichung

$$\frac{2}{Q\rho(1+2\rho)} \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \operatorname{Sin} \varphi_1$$

gesetzt; so ist der vorigen Bemerkungen wegen

$$\operatorname{Sin} \varphi_1 = \frac{2\rho}{1+2\rho} \quad \text{und} \quad K_1 = 2 \left(\frac{P\rho}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cot \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\frac{P\rho}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} + \sqrt[3]{\cot \frac{\varphi_1}{2}} \right] \\ &= \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \left[\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{1+4\rho}+1+2\rho}{2\rho}} + \sqrt[3]{\frac{2\rho}{-\sqrt{1+4\rho}+1+2\rho}} \right] \end{aligned}$$

wo das Radical negativ genommen wurde, weil der Winkel φ_1 als spitz unterlegt ist.

Bezeichnet man daher das Verhältniss von $\frac{\xi}{\sqrt[3]{\rho}}$ zu z durch $-k$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{\rho}} \frac{\sqrt[3]{1+2\rho-\sqrt{1+4\rho}} + \sqrt[3]{1+2\rho+\sqrt{1+4\rho}}}{\sqrt[3]{\sqrt{1+4\rho}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{1+4\rho}-1}}$$

wodurch mit der Aenderung des Zeichens von $\sqrt[3]{\rho}$ mit Q , k mit Q sein Zeichen ändert;
so stellt sich für $y+p$ ein dem frühern ähnlicher Ausdruck dar.

Die zwei Gleichungen $q - \frac{P^2}{9Q} = \xi$ und $qz = -\frac{P}{3}$ geben

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{\rho} z^2}{-\frac{P}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{z}{Q}} &= -\frac{1}{k} \quad \text{und} \\ y+p &= \frac{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + 4Qk}}{2 \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}} k} \end{aligned}$$

Endlich ist im dritten Fall, worin P negativ aber $4 \left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2$ ist, also worin

$\rho = \left(-\frac{P}{3}\right)^3 \frac{1}{Q^2}$ kleiner als $\frac{1}{4}$ ist; wenn man für

$$\frac{2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{Q} = 2\sqrt{\rho} = \text{Sin } \varphi \text{ setzt,}$$

$$z = -\sqrt{-\frac{P}{3}} \left(\sqrt[3]{\text{tg } \frac{\varphi}{2}} + \sqrt[3]{\cot \frac{\varphi}{2}} \right)$$

$$= -\sqrt{-\frac{P}{3}} \left(\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-4\rho}}{2\sqrt{\rho}}} + \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{1-4\rho}}{2\sqrt{\rho}}} \right)$$

wo das untere Zeichen gilt, weil der Sinus stets kleiner als der Cosinus seyn muss.

Die transformirte Gleichung ist

$$\xi^3 + P\rho\xi + Q\rho(1-2\rho) = 0$$

oder für $\xi = \sqrt{\rho} \xi_1$

$$\xi_1^3 + P\xi_1 + \frac{Q(1-2\rho)}{\sqrt{\rho}} = 0. \text{ Wegen}$$

$$\rho_1 = \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^3 \rho}{Q^2(1-2\rho)^3} = \frac{\rho^2}{(1-2\rho)^2}$$

ist die Wurzel analog mit der vorigen

$$\xi_1 = -\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{\frac{1-2\rho-\sqrt{1-4\rho}}{2\rho}} + \sqrt[3]{\frac{1-2\rho+\sqrt{1-4\rho}}{2\rho}} \right).$$

$$\text{Wenn daher } k = \frac{1}{\sqrt[6]{\rho}} \frac{\sqrt[3]{1-2\rho-\sqrt{1-4\rho}} + \sqrt[3]{1-2\rho+\sqrt{1-4\rho}}}{\sqrt[3]{1-\sqrt{1-4\rho}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{1-4\rho}}}$$

gesetzt wird, und aus den Gleichungen

$$zq = -\frac{P}{3}$$

$$q - \frac{P^2}{9Q} = \sqrt{\rho} \cdot \xi_1 \text{ d. i. aus}$$

$$\frac{\sqrt{\rho} z^2}{-\frac{P}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^2 \frac{z}{Q}} = \frac{1}{k}, \text{ z bestimmt wird;}$$

so ergibt sich für z ein dem frühern analoger Ausdruck

$$y + \mu = \frac{-\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + 4Qk}}{2k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Es ist merkwürdig, dass dieser Werth von k für jeden der speciellen Fälle, wo entweder $P+$, oder $P-$ und $4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2$

oder endlich $P-$ und $4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 > Q^2$, immer anders gestaltet ist, und

dass daher das Ausziehen der cubischen Wurzel im allgemeinen Ausdruck der Cardanischen Formel mit einer Aenderung der Form der Wurzel verbunden ist; eine Bemerkung, die, wie ich glaube, bei der Auflösung höherer Gleichungen von Einfluss seyn könnte.

Bezüglich des ersten Werthes von $y + \mu$ wäre noch zu bemerken, dass er sein Zeichen ändern muss, da der Cardanischen Formel zu Folge, für ein positives Q die Wurzeln negativ ausfallen müssen, welches darauf hinausläuft, den Radius $r = 2\sqrt{\frac{-P}{3}}$ negativ zu nehmen, wodurch der ganze Werth sein Zeichen wechselt. Es entsprechen wohl diesem Fall auch positive Wurzeln, allein das sind die zwei andern der Cardanischen Auflösung, während die erste negativ ist.

Und somit ist die erste Wurzel der Cardanischen Auflösung in den drei Fällen

$$1. \quad P - , \quad 4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 > Q^2$$

$$y + \mu = \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^2 + 4Qk}}{2k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$2. \quad P - , \quad 4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2$$

$$y + \mu = \frac{-\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^2 + 4Qk}}{2k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

und 3. $P + ,$

$$y + \mu = \frac{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^2 + 4Qk}}{2k\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

worin aber k in jeder Formel einen verschiedenen Werth besitzt.

Ueber das Ausziehen der Cubikwurzel aus imaginären und irrationalen Binomen.

Das Ausziehen der Cubikwurzel aus imaginären Binomen hinderte bisher bloss die Schwierigkeit der Bestimmung von $\text{Sin } \varphi$ durch ein bekanntes $\text{Sin } 3\varphi$ mittelst der gewöhnlichen Methode, denn diese führt auf eine cubische Gleichung und zwar auf den Casus irreducibilis, also auf ein gleiches Problem. Dessenungeachtet lässt sich diese Bestimmung dennoch ausführen, wenn sie nur von einer andern, gewisse Eigenthümlichkeiten besitzenden Gleichung, abhängig gemacht wird.

Sey $\frac{A + Bi}{2}$ das Binom und $z(t + u)$ die Cubikwurzel, also

$$\sqrt[3]{\frac{A+Bi}{2}} = z(t+ui). \quad \text{Wegen}$$

$$\frac{A+Bi}{2} = z^3(t^3+3t^2ui-3tu^2-u^3i)$$

muss man

$$\frac{A}{2} = (t^3-3tu^2)z^3$$

$$\frac{B}{2} = (3t^2u-u^3)z^3$$

setzen, woraus dann

$$\frac{A^2+B^2}{4} = (t^2+u^2)^3 z^6$$

folgt. Als dritte Bedingungsgleichung kann alsdann $t^2+u^2=1$ gewählt werden und daraus folgt der Werth von z

$$z = \sqrt[6]{\frac{A^2+B^2}{4}}.$$

Da u einen Sinus vorstellen kann und $\text{Sin}^3 \varphi = \frac{3}{4} \text{Sin} \varphi - \frac{\text{Sin} 3\varphi}{4}$ auch noch durch die Gleichung

$$\frac{B}{2z^3} = 3t^2u - u^3 = 3(1-u^2)u - u^3 = 3u - 4u^3$$

bestimmbar ist; so weist das Bestehen beider Gleichungen auf den Werth von $\text{Sin} 3\varphi$ nämlich auf $\text{Sin} 3\varphi = \frac{B}{2z^3}$ hin. Betrachtet man nun die Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{2}z^2x + \frac{B}{8} = 0,$$

so enthält sie den Werth z als eine Wurzel und dabei ist z der Radius, u der Sinus von φ . Wird ferner aus der gegebenen Gleichung die Hilfgleichung

$$q^3 - \frac{3z^2}{2B}q^2 + \frac{z^6}{8B} = 0$$

gebildet, wo q und x durch die Gleichung $4xq = z^2$ verknüpft sind, und in der letzten Gleichung $q = \frac{z^2}{2B} + \delta$ gesetzt, wodurch dieselbe in

$$\delta^3 - \frac{3}{2}z^2\rho\delta + \frac{B}{8}\rho(1-2\rho) = 0$$

übergeht, wenn darin $\rho = \frac{z^6}{B^2}$ gesetzt wird, oder in

$$\zeta^3 - \frac{3}{2}z^2\zeta + \frac{B}{8} \frac{(1-2\rho)}{\sqrt{\rho}} = 0$$

wenn überdiess $\delta = \sqrt{\rho}\zeta$ angenommen wird; so haben sowohl x als ζ die Form $r\text{Sin} \alpha$, in beiden Ausdrücken ist r dasselbe und zwischen ihren Bögen φ und ψ in $x = r\text{Sin} \varphi$ und $\zeta = r\text{Sin} \psi$ besteht eine Relation, die durch den Ausdruck

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = k = \frac{\sqrt{\rho(4\rho-1)} [\sqrt{4\rho-1} - \sqrt{3(1-2\rho-2\rho^2)}]}{\sqrt{3(4\rho-1)(2\rho-1)^2 - (12\rho^3 + 8\rho^2 - 6\rho + 1)}}$$

bestimmt ist.

Nach dem Werthe von $\rho = \frac{z^6}{B^2}$ ist

$$k = \pm \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot A [8AB^3 - \sqrt{3(3B^3 - 6A^2B^2 - A^3)}]}{4\sqrt{3AB(A^2 - B^2)^2 - (3A^6 + 17A^4B^2 + A^2B^4 + 3B^6)}}$$

wo sich das Zeichen \pm nach dem Zeichen von B richtet. Da zwei Gleichungen für q bestimmt wurden, nämlich

$$q = \frac{z^4}{2B} + \frac{z^2 n \sin \psi}{B} \quad \text{und}$$

$$4nq \sin \varphi = z^2,$$

so folgt durch Elimination der Bögen

$$q^2 - \frac{z^4}{2B}q - \frac{z^2 k}{4B} = 0$$

$$q = \frac{z^4}{4B} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4Bk}{z^2}} \right) \\ = \frac{\left(\frac{A^2 + B^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8Bk}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \right)}{4B}.$$

q muss mit x zugleich positiv oder negativ seyn, d. h. mit B sein Zeichen ändern und gleich gross bleiben. Da im vorliegenden Fall x positiv ist, bestimmt diess das Zeichen des Radicals und daher ist

$$x = \frac{z^2}{4q} = \frac{B}{z^2} \frac{\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4Bk}{z^2}} \right)}{-\frac{4Bk}{z^2}} \\ = \frac{-z}{4k} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4Bk}{z^2}} \right)$$

und daher

$$u = \frac{x}{z} = \frac{1}{4k} \left(\sqrt{1 + \frac{8Bk}{\sqrt{A^2 + B^2}}} - 1 \right).$$

Die Cubikwurzel wäre somit

$$\sqrt[3]{\frac{A + Bi}{2}} = \frac{1}{4k} \sqrt[6]{\frac{A^2 + B^2}{4}} \left[\pm \left(\sqrt{1 + \frac{8Bk}{\sqrt{A^2 + B^2}}} - 1 \right) i \right. \\ \left. + \sqrt{16k^2 - \left(\sqrt{1 + \frac{8Bk}{\sqrt{A^2 + B^2}}} - 1 \right)^2} \right].$$

Man kann sie jedoch auf eine bequemere Form bringen, indem man die zweite Gleichung zwischen A und t untersucht; d. i. indem man $\frac{A}{2} = (4t^2 - 3t)z^3$ mittelst der Gleichung $y^3 - \frac{3}{2}z^2y - \frac{A}{8} = 0$ die zt als Wurzel enthält, betrachtet. Auch diese

ist mit ihrer Hilfsleichung $q_1^3 + \frac{3z^3}{2A} q_1 - \frac{z^6}{8A} = 0$ durch die Bedingung $4q_1 y = z^2$ verknüpft und gibt bei der Transformation, wobei der erste Coefficient verschwindet,

$$\delta_1^3 - \frac{3}{2} z^2 \delta_1 - \frac{A}{8} \rho_1 (1 - 2\rho_1) = 0$$

wenn ρ_1 für $\frac{z^6}{A}$ gesetzt wird. Für $\delta_1 = \sqrt{\rho_1} \xi_1$ ist

$$q_1 = -\frac{z^3}{2A} + \sqrt{\rho_1} n \sin \psi = -\frac{z^3}{2A} - \frac{z^3}{A} n \sin \psi$$

wo im zweiten Theil das negative Zeichen zu nehmen ist, da q_1 im Fall A negativ ist, lauter positive Glieder, wie aus früherm ersichtlich ist, liefern muss, daher nur bei diesem Zeichen seine numerische Grösse in beiden Fällen behalten könnte und weil

überdiess $\sqrt{\rho_1}$ der Gleichung $\sin 3\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}}$ zu Folge, des negativen A wegen, negativ

zu nehmen ist. Da nun $q_1 = -\frac{z^3}{2A} - \frac{z^3}{A} n \sin \psi$ und

$$4n \sin \varphi_1 q_1 = z^2$$

gefunden wurden, und so lange n in den Gleichungen für y und q positiv ist, φ_1 stumpf,

ψ spitz ausfällt; so ist $\frac{\sin \psi_1}{\sin \varphi_1}$ negativ, also wenn $\frac{\sin \psi_1}{\sin \varphi_1} = -k_1$ gesetzt wird

$$k_1 = \frac{B\sqrt{A^2+B^2}(8BA^3 - \sqrt{3}(3A^3 - 6A^2B^2 - B^3))}{4\sqrt{3ABA^2-B^2}^2 - (3A^6 + A^4B^2 - 17A^2B^4 + 3B^6)}$$

$$q_1^2 + \frac{z^3 q_1}{2A} - \frac{k z^6}{4A} = 0 \quad \text{d. h.}$$

$$q_1 = \frac{z^3}{4A} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4Ak_1}{z^3}} \right)$$

und da q_1 negativ ist, gilt bloss das untere Zeichen des Radicals. Somit wäre

$$y = \frac{z^2}{4q_1} = \frac{-z}{4k_1} \left(\sqrt{1 + \frac{4Ak_1}{z^3}} - 1 \right)$$

$$t = \frac{y}{z} = \frac{1}{4k} \left(\sqrt{1 + \frac{4Ak_1}{z^3}} + 1 \right) \quad \text{und daher}$$

$$\sqrt[3]{\frac{A+Bt}{2}} = \frac{1}{4} \sqrt[6]{\frac{A^2+B^2}{4}} \left[\left(-\frac{\sqrt{1 + \frac{8Ak_1}{A^2+B^2}} + 1}{k_1} \right) + i \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{8Bk}{A^2+B^2}} - 1}{k} \right) \right].$$

Das Zeichen im ersten Ausdruck scheint zu widersprechen, weil für $B=0$, $\sqrt[3]{\frac{A}{2}}$ positiv werden muss, und auch wirklich wird für $k_1=0$, $\frac{\sqrt{1+8k_1}}{4k_1}$ zu 1, die Ursache

liegt darin, dass die Gleichung $\frac{A}{2} = (t^3 - 3tu^2) z^3$ für ein negatives t, z^3 negativ ergibt, daher beim Ausziehen der Quadratwurzel das Radical noch negativ zu nehmen ist.

Es ist also der eigentliche Werth

$$\sqrt[3]{\frac{A+Bi}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt[6]{\frac{A^2+B^2}{4}} \left[\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{8Ak_1}{\sqrt{A^2+B^2}}} - 1}{k_1} \right) + i \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{8Bk}{\sqrt{A^2+B^2}}} - 1}{k} \right) \right].$$

Hiedurch ist zugleich eine Weise gegeben, Gleichungen 3ten Grades vom casu irreducibili durch geschlossene reelle Ausdrücke aufzulösen, denn die Cardanische Formel führt auf die Summe oder Differenz zweier solcher durch diese Formel bestimmbarer Werthe. Diese sind

$$\begin{aligned} z_1 &= -\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}} \\ z_2 &= -\frac{1}{2} \left[-\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}} \right] + \frac{i\sqrt{3}}{2} \left[\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}} \right] \\ z_3 &= -\frac{1}{2} \left[-\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}} \right] - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left[\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}} \right] \end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1}{2} \sqrt[6]{\frac{Q^2+K^2}{4}} \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{8Qk_1}{\sqrt{Q^2+K^2}}} - 1}{k_1} \right] \\ z_2 &= \frac{1}{2} \sqrt[6]{\frac{Q^2+K^2}{4}} \left[\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{8Qk_1}{\sqrt{Q^2+K^2}}} - 1}{k_1} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{8Kk}{\sqrt{Q^2+K^2}}} - 1}{k} \right) \right] \\ z_3 &= \frac{1}{2} \sqrt[6]{\frac{Q^2+K^2}{4}} \left[\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{8Qk_1}{\sqrt{Q^2+K^2}}} - 1}{k_1} \right) - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{8Kk}{\sqrt{Q^2+K^2}}} - 1}{k} \right) \right] \end{aligned}$$

oder nach Herstellung der Werthe

$$\begin{aligned} y + p &= -\frac{1}{2k_1} \sqrt{-\frac{P}{3}} \left[\sqrt{1 + \frac{4Qk_1}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{4}}}} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{P}{3}} \left[\frac{1}{k_1} \left(\sqrt{1 + \frac{4Qk_1}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{4}}}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\sqrt{3}}{k} \left(\sqrt{1 + 4\sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2k} - 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke gestalten sich anders beim Ausziehen der Wurzel aus irrationalen Binomen. Sei also wieder

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{2}} &= z(t+\sqrt{u}) \quad \text{also} \\ \frac{A+\sqrt{B}}{2} &= z^3(t^3+3t^2\sqrt{u}+3tu+u\sqrt{u}). \end{aligned}$$

$$\text{Für } \frac{A}{2} = z^3 (t^3 + 3tu)$$

$$\frac{\sqrt{B}}{2} = z^3 \sqrt{u} (3t^2 + u) \text{ übergeht die Differenz der Quadrate in}$$

$$\frac{A^2 - B}{4} = z^6 (t^6 - 3t^4u + 3t^2u^2 - u^3) = (t^2 - u)^3 z^6$$

und wenn als dritte Bedingung

$$t^2 - u^2 = 1 \text{ angenommen wird, so folgt}$$

$$z = \sqrt[6]{\frac{A^2 - B}{4}}. \text{ Die Gleichungen}$$

$$\frac{A}{2} = z^3 (4t^3 - 3t), \quad \frac{\sqrt{B}}{2} = \sqrt{u} z^3 (3 + 4u)$$

übergehen durch Einführung des Werthes von z in

$$t^3 - \frac{3t}{4} - \frac{A}{4\sqrt{A^2 - B}} = 0 \text{ und}$$

$$(\sqrt{u})^3 + \frac{3}{2}(\sqrt{u}) - \frac{\sqrt{B}}{4\sqrt{A^2 - B}} = 0.$$

Da in der ersten Gleichung $\frac{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}{Q^2} = \frac{A^2 - B}{A^2} < 1$ ist, mithin das Radical der

Cardanischen Formel reell wird und in der 2ten Gleichung dasselbe wegen des positiven P stattfindet, gestalten sich die Auflösungen dieser Gleichungen, wenn folgende Ausdrücke eingeführt werden:

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{A^2 - B}} \frac{\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})^2} + \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})^2}}{\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A + \sqrt{B}}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[6]{A^2 - B}} \frac{\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})^2} + \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})^2}}{\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}}$$

zu folgenden Ausdrücken

$$t = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{4Ak_1}{8z^3}}}{2k_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{4k_1} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8Ak_1}{\sqrt{A^2 - B}}} \right]$$

und

$$\sqrt{u} = \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{4Bk}{8z^3}}}{2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}k}$$

$$= \frac{1}{4k} \left[\sqrt{1 + \frac{8\sqrt{B} \cdot k}{\sqrt{A^2 - B}}} - 1 \right]$$

worin für k, k_1 negative Werthe genommen wurden, weil A und B negativ vorkommen. Somit ist

$$\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{2}} = \sqrt[6]{\frac{A^2-B}{4}} \left[\left(\sqrt{1 + \frac{8Ak_1}{\sqrt{A^2-B}}} + 1 \right) + \left(\sqrt{1 + \frac{8k\sqrt{B}}{\sqrt{A^2-B}}} - 1 \right) \right].$$

Ist jedoch $A^2 < B$, so muss als dritte Bedingung $u^2 - t^2 = 1$ genommen werden, z ist alsdann $\sqrt[6]{\frac{-A^2+B}{4}}$ und es bestehen die Gleichungen

$$\frac{A}{2} = z^3(4t^2 + 3t), \quad \frac{\sqrt{B}}{2} = \sqrt{u}z^3(4u - 3).$$

Die Lösungen der Gleichungen

$$t^3 + \frac{3}{4}t - \frac{A}{8z^3} = 0, \quad (\sqrt{u})^3 - \frac{3}{2}(\sqrt{u}) - \frac{\sqrt{B}}{8z^3} = 0$$

sind für

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{B-A^2}} \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{B-A})^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{B+A})^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{B+A}} - \sqrt[3]{\sqrt{B-A}}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[6]{B-A^2}} \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{B-A})^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{B+A})^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{B-A}} + \sqrt[3]{\sqrt{B+A}}}$$

$$t = \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{Ak_1}{z^3}}}{2k_1} = \frac{1}{4k_1} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8Ak_1}{\sqrt{B-A^2}}} \right]$$

$$\sqrt{u} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{\sqrt{B}}{z^3}k}}{2k} = \frac{1}{4k} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8\sqrt{B}k}{\sqrt{B-A^2}}} \right]$$

und somit

$$\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{2}} = \sqrt[6]{\frac{B-A^2}{4}} \left[\frac{1}{4k_1} \left(\sqrt{1 + \frac{8Ak_1}{\sqrt{B-A^2}}} - 1 \right) + \frac{1}{4k} \left(\sqrt{1 + \frac{8\sqrt{B}k}{\sqrt{B-A^2}}} + 1 \right) \right].$$

Dadurch gestalten sich die Wurzeln einer cubischen Gleichung im Fall P negativ und

$$4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2 \text{ zu}$$

$$y + \mu = -\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{P}{3}} \frac{1}{k_1} \left(\sqrt{1 + \frac{4Qk_1}{\sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}} + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{P}{3}} \left[\frac{1}{k_1} \left(\sqrt{1 + \frac{4Qk_1}{\sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}} + 1} \right) \pm \frac{\sqrt{-3}}{k} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\sqrt{K}k}{\sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}} \right) \right]$$

worin

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2} \sqrt{-\frac{P}{3}}} \frac{\sqrt[3]{(Q-\sqrt{K})^2} + \sqrt[3]{(Q+\sqrt{K})^2}}{\sqrt[3]{Q-\sqrt{K}} + \sqrt[3]{Q+\sqrt{K}}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{-\frac{P}{3}}} \frac{\sqrt[3]{(Q-\sqrt{K})^2} + \sqrt[3]{(Q+\sqrt{K})^2}}{\sqrt[3]{Q+\sqrt{K}} - \sqrt[3]{Q-\sqrt{K}}},$$

und im Falle P positiv ist

$$\begin{aligned} y + \mu &= \frac{1}{2k_1} \sqrt[3]{\frac{P}{3}} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4Qk_1}{\sqrt[3]{\left(\frac{P}{3}\right)^3}}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{3}} \left[-\frac{1}{k_1} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4Qk_1}{\sqrt[3]{\left(\frac{P}{3}\right)^3}}} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\sqrt{-3}}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sqrt{K}k}{\sqrt[3]{\left(\frac{P}{3}\right)^3}}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } k_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{P}{3}}} \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{K}-Q)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{K}+Q)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{K}+Q} - \sqrt[3]{\sqrt{K}-Q}} \\ k &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{P}{3}}} \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{K}-Q)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{K}+Q)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{K}+Q} + \sqrt[3]{\sqrt{K}-Q}}. \end{aligned}$$

Um die Aenderung der Function ersichtlich zu machen, die dann eintritt, wenn in der Cardanischen Formel die Wurzeln gezogen werden, möge hiezu folgende Zusammenstellung dienen. Für

$$k_1 = 2 \sqrt{\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right) \left(-\frac{P}{3}\right)^3} \left(8 \sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2} Q^3 - \sqrt{3} \left(3Q^3 - 6Q^2 \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right) - 4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2 \right)^2 \right)$$

$$\frac{64\sqrt[3]{3}Q - Q^3 \sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2} \left(-\frac{P}{3}\right)^6 - \left(3Q^6 + Q^3 \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right) - 17Q^2 \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right)^2 + 3 \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right)^3 \right)}{}$$

$$k_2 = 2 \left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{5}{2}} Q \left[8Q \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{3} \left(3 \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right)^2 - 6Q^2 \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right) - Q^4 \right) \right]$$

$$\frac{64\sqrt[3]{3}Q \sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2} \left(-\frac{P}{3}\right)^6 - \left(3Q^6 + 17Q^3 \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right) + Q^2 \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right)^2 + 3 \left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2\right)^3 \right)}{}$$

$$k_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{-\frac{P}{3}}} \frac{\sqrt[3]{(Q-\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3})^2} + \sqrt[3]{(Q+\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3})^2}}{\sqrt[3]{Q-\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{Q+\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}}$$

$$k_4 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{-\frac{P}{3}}} \frac{\sqrt[3]{(Q-\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3})^2} + \sqrt[3]{(Q+\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3})^2}}{\sqrt[3]{Q+\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{Q-\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}}$$

$$k_5 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{P}{2}}} \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}-Q)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3+Q})^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3+Q}} - \sqrt[3]{\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}-Q}}$$

$$k_6 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{P}{3}}} \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}-Q)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3+Q})^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3+Q}} + \sqrt[3]{\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}-Q}}$$

sind die Wurzeln einer cubischen Gleichung je nach den reellen Werthen von k im casu irreducibili:

für $-P$ und $4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 > Q^2$

$$y + \mu = -\frac{1}{2k_1}\sqrt{-\frac{P}{3}} \left(\sqrt{1 + \frac{4Qk_1}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{-\frac{P}{3}} \left[\frac{1}{k_1} \left(\sqrt{1 + \frac{4Qk_1}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} - 1 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{-3}}{k_2} \left(\sqrt{1 + 4\sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 - Q^2k_2}} - 1 \right) \right]$$

II für ein $-P$ und $4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2$

$$y + \mu = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-\frac{P}{3}}}{k_3} \left(\sqrt{1 + \frac{4Qk_3}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{-\frac{P}{3}} \left[\frac{1}{k_3} \left(\sqrt{1 + \frac{4Qk_3}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} + 1 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{-3}}{k_4} \left(1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{Q^2 - \frac{4P^3}{27}k_4}} \right) \right]$$

III für ein $+P$

$$y + \mu = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{P}{3}}}{k_5} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4Qk_5}{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} \right]$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{P}{3}} \left[\frac{1}{k_5} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4Qk_5}{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{-3}}{k_6} \left(1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{Q^2 + \frac{4P^3}{27}k_6}} \right) \right]$$

I. Beschreibung und Beobachtung der österreichischen Arten der Gattung *Chrysopa*.

Von

Friedrich Brauer.

Mitgetheilt am 19. April 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Beschreibung der Gattung.

Diese Gattung, welche von den alten Autoren mit vielen andern Gattungen unter den Namen *Hemerobius* vereinigt war, wurde zuerst von LEACH *) getrennt und erhielt von ihm den Namen *Chrysopa*, wegen den schönen goldglänzenden Augen. Auch unterschied er die Gattungen *Hemerobius*, *Drepanopteria* und *Nymphes*. LATREILLE **) stellte für diese 4 Gattungen den Namen *Hemerobini* auf, die BURMEISTER mit den *Myrmecoleontiden* unter der Familie *Megaloptera* vereinigte. Die Gattung *Chrysopa* stellt BURMEISTER zwischen *Sysira* und *Polysteochotes*. Ich kann über diese Eintheilung gar nichts sagen, weil ich *Polysteochotes* nicht kenne, und auch von *Sysira* nur eine Art um Wien gefunden habe; aber aus meinen Beobachtungen sehe ich deutlich bei dieser Gattung eine grosse Verwandtschaft einerseits durch die Larvengestalt einiger Species mit *Ascalaphus* und anderseits durch die Zellatur mit *Mantispa*, welche letztere sich besonders durch die Kopfform an *Hemerobius* und *Myrmecoleon* anschliesst. An *Osmilus* schliesst sich die Gattung *Chrysopa* darum nicht so nahe an, weil die Larve von *Osmilus* durch den Zangenbau, und durch die Lebensweise im Wasser schon als trennendes Glied zwischen ihr und *Myrmecoleon* steht. Bei BURMEISTER ist diess der Fall, weil er die Larve von *Osmilus* nicht kannte und darauf baute, dass selbe nicht amphibiotisch, sondern ein Blattlausfresser sey. (Handbuch der Entomologie 2. 3. Abth. Seite 954).

Um aber eine richtige Aufeinanderfolge der Gattungen in dieser Zunft herzustellen, ist es vor Allem nothwendig, die früheren Stände von jeder zu wissen. Da

*) *Chrysopa* Leach. *Edinb. Encycl.* 1817. $\chi\rho\upsilon\sigma\omicron\pi\alpha\iota\varsigma$, $\alpha\upsilon\rho\epsilon\upsilon\varsigma$.

**) *HEMEROBINI* Latr. *N. Dict.* d. II. n. 1803.

diess aber weder von *Panorpa* noch von *Nematoptera*, noch von *Mantispa* der Fall ist, so muss es genügen, die einzelnen Gattungen genau zu beschreiben und ihre Unterschiede und Aehnlichkeiten mit andern Gattungen herauszufinden. Von *Hemerobius* unterscheidet sich diese Gattung durch das Vorhandenseyn eines Cubitalstreifens im Flügel hauptsächlich und durch kürzere dickere Tarsen, kein zugespitztes, sondern ein abgerundetes Tasterglied und durch cylindrische nicht spindelförmige Schienen an den Beinen. Die Brustringe sind gedrunge aber kräftig, der Prothorax ist cylindrisch, der Mesothorax etwas grösser, der Metathorax ist kürzer als der Mesothorax und etwas schmaler, wodurch auch die Hinterflügel kürzer erscheinen. Die Beine bestehen aus kegelförmigen Hüften, cylindrischen Schenkeln und Schienen und 5 gliedrigen Füssen, deren hackige Krallen vor der Spitze mit einem Zahn versehen sind.

Der Hinterleib besteht aus 9 Gliedern, das erste und letzte Glied sind klein, das vorletzte grössere trägt die Genitalienöffnung. Die Mundtheile bilden einen stumpfen Kegel am untern Kopf. Die Oberkiefer, die von der halbrunden Oberlippe und den Clypeus bedeckt werden, sind von der Spitze bis vor die Mitte hornig, braun, runzlig und fast am Ende der Hornsubstanz mit einem Zahn am Innenrande bewaffnet; welcher aber sehr klein, und beim Untersuchen leicht zu übersehen ist. Ausserdem sind sie breit und flach. Der nicht hornige Theil ist weich, fleischig und grün gefärbt. Die Unterkiefer sind fleischig. Die Angel ist breit und rund, der Stiel vorne breiter. An seinem Ende seitwärts sitzen die Kiefertaster, die aus 4 Gliedern zusammengesetzt sind. Das erste Glied ist kurz und dick, das zweite lang, cylindrisch, das dritte bedeutend kürzer, das vierte wieder länger und vorne abgerundet. Von den Endlappen der Unterkiefer ist der äussere (Helm) am Grunde dick, an der Spitze schmaler und einwärts gebogen, der innere (Kaustück) etwas länger, cylindrisch, an der Spitze fadenförmig. Das Kinn ist länglich 4 eckig. Das Zungenbein ist nicht sehr lang, ebenfalls 4 eckig, und trägt am Ende die beiden Lippentaster, welche 4gliedrig sind. Das erste Glied ist kurz cylindrisch, das zweite 3 mal so lang, das dritte etwas kürzer und vorne breiter, das vierte halbkreisförmig, mit dem dritten Gliede aber so eng zusammenhängend, dass es leicht übersehen werden kann. Der Endlappen der Unterlippe steht auf einen kurzen, breiten, flachen Stiel, ist oval und an beiden Seiten etwas eingebogen. — Der Verlauf der Adern dieser Gattung in den Flügeln ist bei BURMEISTER wohl genau beschrieben, allein um jeden Irrthum zu vermeiden, will ich ihn ebenfalls näher beschreiben. In der Gestalt ist der Oberflügel etwas breiter und runder, der Unterflügel schmaler und gespitzter zulaufend. Als Hauptader unterscheide ich erstens die vordere Randader, und nenne sie nach BURMEISTER Costa, zweitens die mit ihr vorne, bald in eine Spitze, bald rund zusammentreffende hintere Randader, die Postcosta. In einiger Entfernung, jedoch dicht neben der Costa entspringend, läuft die dritte Längsader, der Radius, die vor der Spitze des Flügels in die Costa gabelig endet. Zwischen ihr und der Costa läuft die weit zartere aber zuweilen durch ihre Farbe kräftiger erscheinende vierte Längsader, die ich nach BURMEISTER Subcosta nenne. Sie mündet nicht in den

Radius, sondern vor demselben in die Costa. Die fünfte Hauptader ist die zweite vom Radius am Anfang des Flügels entspringende Längenader, der Cubitus. Er durchläuft $\frac{2}{3}$ der Flügellänge, und mündet gabelig in die Postcosta. Die dritte vom Radius auslaufende Längenader ist ein Sector, der sich Anfangs von ihm entfernt, dann aber wieder nähert, und dicht hinter demselben in die Costa mündet. Die erste aus dem Radius entspringende Längenader ist ein zweiter Sector, der Anfangs parallel hinter dem Cubitus läuft, dann aber sich nähert und hinter ihm, wie er, in eine Gabel in die Postcosta ausläuft. Von diesen geht eine Längenader aus, die vorne so gegabelt ist, dass ein Theil der Gabel in den Sector, von dem sie ausging, der andere Theil in die Postcosta mündet. Hinter ihr sind noch drei Längenadern die als drei einzelne Stämme aus der Wurzel entspringen. Die vorderste ist die längste, und mündet gabelig in die Postcosta; die zweite mündet hinter ihr ebenfalls gabelig, jedoch nur ein Theil der Gabel trifft die Postcosta, der andere mündet in die ganz kurze hinterste Längenader im Flügel, die parallel mit der Postcosta läuft, und dann in selbe mündet. Was nun die Felder zwischen den Längenadern betrifft, so ist das Feld zwischen Costa und Subcosta das Costalfeld, der Streif zwischen Subcosta und Radius der Radialstreif, das Feld zwischen Radius und Cubitus mit Inbegriff des Sectors das Discoidalfeld, und das zwischen Cubitus und der Postcosta das Cubitalfeld, der Streif aber zwischen dem Cubitus und dem hinter ihm laufenden Sector der Cubitalstreif. Was die Queradern betrifft, so sind bei dreissig einfache zwischen Costa und Subcosta. Zwischen Subcosta und Radius sind nur wenige am Ende des Flügels. Zwischen dem Radius und seinem Sector zählte ich 12—21 Zellen, zuweilen im Unterflügel eine mehr. Von diesem Sector laufen zahlreiche schiefe Queradern, die Anfangs in den Cubitus später in parallelen geschwungenen Linien in die Postcosta gabelig münden. Diese Adern werden durch zwei Reihen treppenartig gereihter, zur Costa senkrecht stehender kurzer Queradern verbunden, und bilden so zwei Reihen länglicher Zellen. Zwischen dem Cubitus und seinem Sector, d. h. im Cubitalstreifen, sind grössere Parallelogrammzellen, so wie zwischen dem Radius und seinem Sector. Zwischen dem Sector und der Postcosta sind noch im ersten Fünftel des Flügels die oben erwähnten vier Längenadern, dann ist der Sector mit der Postcosta durch einfache Queradern verbunden. — An der Stelle, wo das Flügelmahl der Libellulinen sich befindet, ist die Haut bei einigen Species derber und bräunlich gefärbt. Ausserdem sind alle Adern mit längeren aber weniger und anders gefärbten Haaren besetzt, als die Randadern, deren Haare sehr dicht und kurz sind. Um die Flügelwurzel ist die Haut undurchsichtiger und bräunlich.

Beschreibung der Larven im Allgemeinen *).

Die Larven sehen den Ameisenlöwenlarven ähnlich, allein ihr Bau ist gestreckter und ihre Lebensweise eine andere. Die Zangen am Kopfe sind ebenfalls Sauginstrumente, aber ungezähnt und unbehaart. Sie bestehen aus einem obern Theil, dem Oberkiefer und einem gleich grossen untern Theil, dem Unterkiefer. Neben den Kiefern stehen die Fühler, aus einem dicken Grundglied und vielen Endgliedern bestehend. Hinter diesen stehen die vier kleinen Augen auf einem schwarzen Fleck. Die drei Brustringe und sieben der Hinterleibsegmente tragen an der Seite eine Fleischwarze, die bald grösser und dann gestielt, bald kleiner und dann ungestielt ist. Auch ist sie je nachdem bald mit längeren, bald mit kürzeren Haaren bewachsen. Die zwei letzten Segmente dienen als Nachschieber. Die Beine bestehen aus kegelförmigen Hüften, cylindrischen Schenkeln und Schienen und eingliedrigen Füßen mit zwei Krallen, zwischen welchen eine langgestielte Sohle hervorragt. Die bekannten Larven leben insgesamt auf Bäumen und Sträuchern von Blattläusen. Vollgefressen sitzen sie in den Falten der Blätter. Nur mit Mühe brachte ich eine Larve dahin, eine Stubenfliege anzugreifen und auszusaugen; nachdem sie aber eine ausgesogen hatte, griff sie jede andere willig an, und ich brachte sie so bis zur Verpuppung. An dem nach drei Wochen ausgekrochenen Imago war keine Aenderung durch das Futter der Larve zu merken.

Zur Verpuppung fertigen sich diese Larven ein kleines kugelförmiges Gespinnst mittelst einer Spindel am After. Die Nymphe ist dem vollkommenen Insecte ähnlich, nur hat sie statt der Flügel die Flügelscheiden und einen dickeren und kürzeren Hinterleib. Sie ruht gewöhnlich 14 Tage, kriecht dann heraus auf ein Blatt und häutet sich da zum Imago ab.

Die gestielten Eier sind bekannt und oft beschrieben worden. Ich werde sie bei den einzelnen Species näher beschreiben.

Beschreibung der Arten.

Die Arten dieser Gattung zeichnen sich durch ihre goldglänzenden Augen und ihre grüne **) oder rothe Farbe aus. Die Adern der Flügel sind roth oder grün, bei den meisten Arten schwarz gefleckt. Die Flügelhaut der einheimischen Arten ist nie gefleckt, ich kenne jedoch eine Art aus Brasilien, die eine gefleckte Flügelhaut besitzt. — Um die Farbe der Adern zu sehen, ist es nöthig, die Flügel über dunklen Grund zu halten. Manche Arten verbreiten einen üblen Geruch. —

*) REAUMUR T. III. mém. 2. pl. 33. — DE GEER Mém. II. 2. 11. — GÜTZE Abhandl. zur Insektologie III. 555. — BURMEISTER Handbuch der Entomologie 2. 3. Abtheilung. Seite 977. — WESTWOOD: An Introduction to the modern classification of Insects. II. 46. Fig. 64, 8.

**) Die Farbe der vertrockneten Species ist meist gelbgrün.

I. SECTION. Flügeladern alle grün oder roth. Einige Queradern um die Wurzel schwarz.

α. Zwischen den Fühlern kein schwarzer Punkt. Adern grün oder roth.

1. *Chrysopa perla* LINN. Grasgrün, über die 3 Brustringe und den Hinterleib oben in der Mitte eine weissgelbe Linie. Prothorax am Seitenrande dunkelroth braun und ebenso behaart. Fühler lichtbraun. Von den Beinen sind die Tarsen braun, das Uebrige grün. Flügeladern grasgrün, schwarz behaart. Mundtheile und Clypeus röthlich. Länge mit gelegten Flügeln 6—7 Linien. Fühler um $\frac{1}{2}$ kürzer als die Flügeln. Vom Mai — August auf allen Blattläuse nährenden Sträuchern und Bäumen gemein. — Tab. I. Fig. 1 u. 1 a.

var. α. *Chrysopa primavera* BRAUER. Röthlich, über die 3 Brustringe und den Hinterleib eine gelblichgrüne Linie. Am Hinterleib 2 rothe Punkte auf jedem Segmente neben derselben. Flügeladern lichtgelb.

In den ersten schönen Tagen des Frühjahrs gemein.

var. β. *Chrysopa incarnata* KOLLAR. Lichter oder dunkler roth. Ueber die 3 Brustringe und den Hinterleib in der Mitte eine lichtere, rothe Linie. Flügeladern roth.

Im Frühjahr Monat März und Herbst Monat November im Freien. Im Winter in Zimmern und auf Böden, zwischen Fenstern u. s. w. anzutreffen.

var. γ. *Chrysopa rubropunctata* BRAUER. Grasgrün, ebenfalls jene weissgelbe Linie über die Brustringe und den Hinterleib wie *Chr. perla*. Jedes Hinterleibssegment hat am Rande dieser Linie 2 rothe Punkte. Flügeladern grün.

Vom Monat September — November gemein.

β. Zwischen den Fühlern ein schwarzer Punkt. Einige Queradern um die Wurzel schwarz.

2. *Chrysopa tenella* BRAUER. Spangrün, erstes Fühlerglied grün, am Grunde schwarz; zweites wie die übrigen braun am Grunde aber schwarz. Vor jedem Auge ein schwarzer Punkt, am Scheitel und Clypeus 2 schwarze Punkte. Oberlippe lichtbraun, Mundtheile röthlich, Beine grün, Tarsen röthlich. Prothorax am vordern Seitenrande schwarz. Flügeladern spangrün. Länge mit gelegten Flügeln 5; — 6 Linien. Fühler etwas kürzer als die Flügel.

Im Prater bei Wien im Monath Juni, selten. Mitgetheilt von Hrn. G. v. Gözsy. Tab. II. Fig. 5.

II. SECTION. Flügeladern grösstentheils schwarz gefleckt.

α. Zwischen den Fühlern kein schwarzer Punkt.

3. *Chrysopa flavifrons* BRAUER. Licht blaugrün, Scheitel, Mittelhaupt und Mundtheile gelb; letztere röthlich gezeichnet. Pronotum und Mesonotum in der Mitte gelb, ersteres mit 2 „S“ förmigen rothen Flecken. Fühler gelb, Tarsen braun, das Uebrige der Beine grün. Flügeladern blaugrün. Die Adern zwischen der Costa und Subcosta, dem Radius und dem ihm zunächst gelegenen Sector, dem Cubitus und seinem parallel laufenden Sector haben an der Mündung in die Hauptadern einen schwarzen Punkt. Auf beiden Enden schwarz sind die kurzen Verbindungsadern im Discoidalfeld. Länge mit gelegten Flügeln 7—8; Linien. ♀ 6 Linien. ♂. Länge der Fühler mit der Flügellänge gleich.

In Mödling auf Schwarzkiefern (*Pinus laricio*) und andern Pflanzen im August. — Tab. I. Fig. 2 u. 2a.

4. *Chrysopa microcephala* BRAUER. Blass gelbgrün, oder licht blaugrün, Mundtheile röthlich, Beine grün, die braunen Krallen ausgenommen. Hinterleib in der Mitte lichter. Die übrigen Körpertheile ohne Auszeichnung. Flügeladern gelbgrün oder licht blaugrün. Die Queradern zwischen der Costa und Subcosta und zwischen dem Radius und seinem Sector sind an ihren Endpunkten schwarz. Ganz schwarz sind die Queradern in den grössern Zellen um die Flügelwurzel. Kopf kleiner als bei den andern Arten. Länge mit gelegten Flügeln 6 Linien. Fühler $\frac{1}{2}$ kürzer als die Flügel.

Im Prater bei Wien vom Mai — Juli auf Erlen, selten.

5. *Chrysopa alba* LINN. Schön gelbgrün, Pro-, Meso- und Metanotum in der Mitte gelb, Fühler gelb. Oberlippe röthlich, das Uebrige gelbgrün, Tarsen lichtbraun, Krallen dunkler. Flügeladern lichtgrün, fast weiss. Die Queradern im Costalstreifen, zwischen dem Radius und seinem Sector und im Cubitalstreifen sind an ihren Enden schwarz. Ganz schwarz sind die Queradern um die Flügelwurzel. Auch sind die Adern enger aneinander gereiht, und zwischen dem Radius und seinem Sector bilden sie 20—21 Zellen. Länge mit gelegten Flügeln 11 Linien. Länge der Fühler 5 Linien.

Im Prater bei Wien im Juni und Juli auf *Acer campestre*.

6. *Chrysopa nigricostata* BRAUER. Dunkel grasgrün, über Pro-, Meso- und Metanotum in der Mitte eine gelbe Linie. Hinterleib ganz grün. Der ganze Körper schwarz behaart. Fühler rothbraun. Mundtheile röthlich. Vor den Augen hintereinander 2 schwarze Punkte (2 auf

jeder Seite). Beine grün, Tarsen rothbraun behaart. Von den Flügeladern sind alle Längsadern grün. Im Oberflügel sind die langen Queradern im Discoidalfeld am Grunde, und die übrigen Queradern ganz schwarz. Im Unterflügel sind nur die Queradern im Costalstreifen und zwischen dem Radius und seinem Sector schwarz. Länge mit gelegten Flügeln 7—8 Linien. Fühler so lang als die Flügel. Im Stadtgraben um Wien, selten. Juni — August. Tab. I. Fig. 3 u. 3a.

β. Zwischen den Fühlern ein schwarzer Punkt.

7. *Chrysopa coerulea* BRAUER. Licht blaugrün, Mundtheile braun, schwarz gefleckt, zuweilen am ersten Fühlerglied ein schwarzer Punkt. Am Prothorax oben, bald 4 bald 2 schwarze oder braune Punkte, auch zuweilen 2 braune Längslinien. Metanotum ganz grün, am Mesonotum bei einigen Individuen 2 schwarze Punkte. Beine grün, Tarsen gelb, letztes Glied unten und die Krallen braun. Fühler lichtbraun. Flügeladern lichtblaugrün. Die Queradern haben an beiden Enden einen schwarzen Punkt, die im Discoidalfeld und Cubitalstreifen sind oft ganz grün. Länge mit gelegten Flügeln 7—8 Linien. Fühler etwas kürzer als die Flügel.

Vom Monat Juni — September in Mödling gemein. Im Prater auch, aber selten. Anfangs unterschied ich vier Species, allein die Larvenkenntniß zeigte bald, dass es nur Varietäten waren. — Tab. II. Fig. 1 u. 1a.

8. *Chrysopa abdomine punctata* BRAUER. Lichtblaugrün. Am Pronotum der Länge nach 2 rothbraune Linien mit einem dunklen Punkt in der Mitte. Am Mesonotum 2 rothbraune Punkte, eben so oben auf jedem Hinterleibssegment. Die ersten Tasterglieder schwarz gefleckt, die letzten ganz schwarz. Von den Beinen die Tarsen braun, das Uebrige grün. Flügeladern blaugrün. Die Queradern im Costalstreifen und zwischen dem Radius und seinem Sector, so wie die kurzen Verbindungsadern im Discoidalfelde ganz schwarz, die übrigen Queradern haben am Anfange einen schwarzen Punkt. Länge mit gelegten Flügeln 8—9 Linien. Fühler so lang als die Flügel. In Mödling auf *Acer campestre* im Juli und August, selten. Tab. II. Fig. 7.

9. *Chrysopa nobilis* BRAUER. Licht blaugrün. Pro-, Meso- und Metanotum in der Mitte lichter. Prothorax am vorderen Seitenrande schwarz. An jeder Seite des Clypeus vor den Augen und den Fühlern ein schwarzer Punkt. Mundtheile röthlich. Tarsen röthlich. Flügeladern blaugrün. Die Queradern zwischen Costa und Subcosta, um die Flügelwurzel und die kurzen Verbindungsadern im Discoidalfeld

schwarz. Im Unterflügel auch die Queradern zwischen dem Radius und seinem Sector, die im Discoidalfeld aber grün. Länge mit gelegten Flügeln 9—10 Linien. Fühler 6 Linien. (Tab. I. Fig. 4 u. 4a.)

Im Juli und August in Mödling auf verschiedenen Gewächsen, nicht sehr häufig. Auch im Prater.

10. *Chrysopa formosa* BRAUER. Spangrün. Vor den Fühlern so wie auf dem Scheitel 2 schwarze Punkte. Am Prothorax 2 schwarze Flecken am Vorderrande, dergleichen 2 am Meso- und Metathorax. Mundtheile röthlich, die Taster schwarz. Beine grün, Tarsen braun, Fühler braun. Flügeladern spangrün. Die Queradern im Costalstreifen und um die Flügelwurzel ganz schwarz, zwischen dem Radius und seinem Sector nur an den Endpunkten schwarz. Zweites Fühlerglied am Ende schwarz. Länge mit gelegten Flügeln 7—8 Linien. Fühler eben so lang. Am Ufer der Wien, auf niedern Gewächsen im Juni und Juli, selten. Tab. II. Fig. 3.
11. *Chrysopa pusilla* BRAUER. Spangrün, vor jedem Fühler ein schwarzer Punkt. Zweites Fühlerglied schwarz, die übrigen braun. Am Clypeus, auf dem Scheitel und am Hinterhaupt zwei schwarze Punkte. Prothorax an der Seite stark schwarz behaart. Beine grün, Tarsen braun. Flügeladern spangrün. Die Queradern im Costalstreifen und zwischen dem Radius und seinem Sector sind am Grunde schwarz, ganz schwarz sind die Queradern um die Flügelwurzel. Länge mit gelegten Flügeln 5!—6 Lin. Fühler kürzer als die Flügel. Um Reichenau bei Gloggnitz. Mitgetheilt von Hr. G. v. Gözsy. Unterscheidet sich noch hauptsächlich durch die breiten Flügel, die ausser dieser Art, nur bei *Chr. reticulata* sich wieder finden. Im August, selten. Tab. II. Fig. 4.
12. *Chrysopa reticulata* LEACH. Blaugrün, am Kopfe lichter. Am Scheitel und um das erste Fühlerglied herum eine schwarze Kreislinie. Hinterhaupt schwarz. Am Clypeus zwei schwarze Flecken, Taster schwarz. Pro- Meso- und Metathorax mit grösseren und kleineren schwarzen Punkten gezeichnet. Hinterleib oben und unten schwarz, an der Seite grün. Erstes Fühlerglied am Grunde, zweites ganz schwarz, die übrigen braun. Im Oberflügel sind alle Längsadern, und die langen Queradern im Discoidalfeld in der Mitte, grün, die übrigen alle schwarz. Im Unterflügel sind alle Längsadern grün, die Queradern im Costalstreifen, zwischen dem Radius und seinem Sector und die kurzen Verbindungsadern im Discoidalfeld ganz

schwarz, die übrigen nur am Grunde, sonst aber grün. Länge mit gelegten Flügeln 7—8½ Linien. Fühler kürzer als die Flügel.

Vom Mai bis Oktober, gemein. Tab. II. Fig. 6.

13. *Chrysopa pini* BRAUER. Schwarzbraun, Clypeus schwarz, Oberlippe roth, die übrige Zeichnung am gelben Kopf wie bei *Chr. reticulata*. Erstes Fühlerglied schwarz, die übrigen braun. Pro- Meso- und Metanotum in der Mitte spangrün oder blaugrün. Hinterleib wie bei *Chr. reticulata*. Von den Beinen sind Hüften und Schienen grün, das Uebrige braunschwarz. Flügeladern wie bei *Chr. reticulata*, nur die Subcosta ist hier schwarz. Auch sind die Flügel schmaler als bei *Chr. reticulata*. Länge mit gelegten Flügeln 7—8 Linien. Fühler länger als die Flügel.

Auf *Pinus laricio* in Mödling gemein im Juli und August. Vielleicht BURMEISTER's *Chr. dorsalis*, allein die Angabe „grösser und kräftiger als *Chr. reticulata*“ trifft bei meinen Individuen nicht zu. — Tab. II. Fig. 2 u. 2 a.

Beschreibung der von mir beobachteten Verwandlungsgeschichten.

1. Verwandlungsgeschichte der *Chrysopa perla*.

Eier. Die Eier sind Anfangs grün, später bräunlich. Sie stehen auf 2 Linien langen Stielen.

Larven. Die Larven dieser Species kriechen am 10. Tage nach dem Legen aus dem Eie, und sind in den ersten drei Häutungen gelbbraun, in der letzten haben sie erst regelmässige Zeichnungen. Die Zangen sind an der Spitze dunkelviolet, gegen den Kopf zu bräunlichgelb. Fühler braun, Kopf gelb. Von dem Grunde der Zangen laufen zwei einwärts schief liegende, dunkelbraune Linien, die am Hinterhaupte dicht neben einander endigen. Die Brustringe sind oben in der Mitte mit je zwei gleichen unregelmässigen viereckigen Flecken von gelber Farbe gezeichnet, welche auf dunkelvioletem Grunde stehen. Der Rand und die Fleischwarzen sind gelb. Die fünf ersten Hinterleibssegmente sind dunkelviolet; in der Mitte hat jedes Segment oben drei Paar gelbe Parallelogramme als Flecken, von denen je zwei gegenüberliegende gleich sind. Zwischen diesen und dem gelben Rande befinden sich zwei schief hintereinander liegende runde, gelbe Flecken. Die andern Segmente haben unregelmässige gelbe und dunkelviolet Zeichnungen. Die Beine sind gelb, an den Gliedern schwarzbraun. Die Länge der ausgewachsenen Larven beläuft sich auf 4 Linien. Sie bedecken sich nicht mit den Bälgen der ausgesogenen Blattläuse. Die Verpuppung wie bei allen Arten, daher ich auf die allgemeine Beschreibung hinweise. — Tab. II. Fig. 8.

2. Verwandlungsgeschichte der *Chrysopa nigricostata*.

Eier. Die Eier sind wie bei *Chr. perla*. Meistens in zahlreichen Büscheln beisammen. Sie stehen auf etwas längeren Stielen.

Larven. Die Larven, welche aus den Eiern in 10 Tagen auskriechen, sehen Anfangs ganz wie die Larven der *Chr. perla* aus, erst die 4te Häutung zeigt den Unterschied. Am Kopfe haben sie ausser den zwei Linien der Larven der *Chr. perla* noch zwei andere auch von violetter Farbe zwischen diesen, welche eine „x“ förmige Figur bilden. Die Brustringe haben dieselben Farben und Zeichnungen wie bei *Chr. perla*, nur ist die gelbe Farbe vorherrschend. Die Hinterleibssegmente haben ebenfalls dieselben Farben, die Zeichnung aber ist verschieden; es vereinigen sich die drei Paare Parallelogrammen ähnlicher Flecken der letzteren mit den runden Flecken, bilden daher drei gelbe Querbinden über jedes Segment, und enden seitwärts in dem gelbgefärbten Rande. Die andern Segmente sind nicht unregelmässig gezeichnet, sondern haben auch jene Querbinden. — Grösse der Larve vor dem Einspinnen 4 Linien. Tab. II. Fig. 9.

3. Verwandlungsgeschichte der *Chrysopa coerulea*.

Eier. Die Eier legt diese Species in Büscheln zu 10—40 an 2—3 Linien langen Stielen. Ihre Farbe ist blaugrün.

Larve. Der gelbgefärbte Kopf der Larve hat in der Mitte des Vorderrandes einen grossen dreieckigen braunen Fleck und neben diesem (an jeder Seite) einen mit den Spitzen auswärts gebogenen sichelförmigen Strich von derselben Farbe. Zwischen den rothbraunen Kiefern stehen die gelben Lippentaster. Die Fühler sind länger als die Kiefer. Der Prothorax ist hinten breiter als vorne, in der Mitte oben hat er zwei viereckige gelbe Flecken und neben diesen einen eingedrückten dunklen Punkt. Der Rand ist gelb. Meso- und Metathorax haben oben auch jene eingedrückten Punkte, die aber gelb eingefasst sind. Zwischen diesen Punkten haben sie vier gelbe viereckige Flecken. Am Rande sind sie lichtbraun. Die Fleischwarzen der Brustringe sind dünn gestielt, klein, aber lang behaart. Von den Hinterleibssegmenten trägt das 2te bis zum 6ten eine ungestielte Fleischwarze auf jeder Seite, die aber dessen ungeachtet lang behaart ist. Auch scheint das Ungestieltheit der Warzen daher zu kommen, weil die Larve sehr angefressen war, so dass der Hinterleib nicht mehr lanzettförmig, sondern oval war. Die einzelnen Segmente werden bis zum vierten Segmente breiter, und gehen von da in die Form eines Kegels über. Die Zeichnung ist auf allen Segmenten gleich, und besteht oben in der Mitte aus zwei schief gegeneinander gestellten Vierecken von gelber Farbe. Der dreieckige Raum ist dunkler violett als die übrigen Theile der Segmente, die ausserdem neben den gelben Flecken noch undeutliche verwaschene Zeichnungen haben. Im Ganzen ist die Farbe des Hinterleibes sehr

licht und fast weiss. Die Beine der Larve sind stärker als bei der *Chr. perla* und *nigricostata*. Von dieser Larve gilt vorzüglich das Unkenntlichmachen durch die Bälge der ausgesogenen Blattläuse. Die Grösse vor dem Einspinnen ist bei 5 Linien, die Dicke aber bedeutender als bei *Chr. perla* und *nigricostata*. — Tab. II. Fig. 10.

4. Verwandlungsgeschichte der *Chrysopa reticulata*.

Eier. Die Eier stehen auf 3 Linien langen Stielen und sind anfangs blaugrün, kurz vor dem Auskriechen bräunlich, in der Mitte dunkler.

Larve. Beiläufig 12 Tage nach dem Legen der Eier, kriechen aus ihnen die Blattlauslöwen, welche in der ersten Häutung lichtroth, in der zweiten Häutung bläulichroth mit schwarzen Zeichnungen sind. In der dritten Häutung sind Kopf und Kiefer gelb, letztere an der Spitze röthlich; ersterer hat in der Mitte einen, und am Hinterrande mehrere schwarze Flecke. Die Fleischwarzen am Leibe sind gross und tragen lange Haare. Der Prothorax ist vorne breiter, wie bei *Chr. coerulea*. Das Pronotum ist vorne gelb, hinten dunkel violett mit leierförmigen Zeichnungen. Die Verbindungshaut mit dem folgenden Brustringe ist an der Seite gespitzt und dunkelviolett mit zwei gelben Flecken. Meso- und Metanotum sind ebenfalls dunkel violett, in der Mitte mit vier oder mehr gelben Flecken gezeichnet. Die Farbe der fünf ersten Hinterleibssegmente ist oben an den Seiten dunkelviolett, sie sind ausgezeichnet durch einen runden gelben Fleck auf jeder Seite, der am dritten Segment am grössten ist. In der Mitte trägt jedes dieser fünf Segmente einen schwarzen dreieckigen Fleck, neben welchem wieder zwei runde gelbe Flecke sich befinden. Zwischen diesen und den oben beschriebenen runden Flecken sind die Segmente etwas lichter violett. — Das sechste Segment ist dunkel, vorne zwei lichtere Punkte tragend. An den Seiten sind verwischene Zeichnungen. Die drei folgenden Segmente sind gelb und unregelmässig gezeichnet. Die Fleischwarzen auf allen Segmenten sind gelb. Die Stiele aber dunkelviolett. Die Beine sind dünn, gelb, die Krallen schwarz. Die vierte Häutung zeigt in der Farbe keinen Unterschied. Die Länge ist 4—5 Linien. — Tab. II. Fig. 11.

5. Verwandlungsgeschichte der *Chrysopa pini*.

Eier. Die Eier stehen auf kürzeren Stielen als die der *Chr. reticulata*.

Larve. Die Larven, welche am 13ten Tage auskriechen, sind röthlichgelb mit dunkleren Zeichnungen. Ich beobachtete sie nur bis zur dritten Häutung, wo ich merkliche Unterschiede fand. Die Zeichnung am Kopfe bestand aus zwei vorne gabelig auslaufenden braunen Flecken auf gelbem Grunde. Die Brustringe und der Hinterleib waren röthlichbraun, erstere mit viereckigen, letzterer mit runden gelben Flecken oben ge-

zeichnet. Die Gestalt war aber wie bei der *Chr. reticulata*, nur etwas gestreckter. Die Füße waren etwas kürzer aber kräftiger. Länge in der zweiten Häutung 2 Linien. Tab. II. Fig. 12.

5. Verwandlungsgeschichte der *Chrysopa nobilis*.

Eier. Die Eier werden von dieser Species auf 5 Linien langen Stielen gelegt und sind blaugrün.

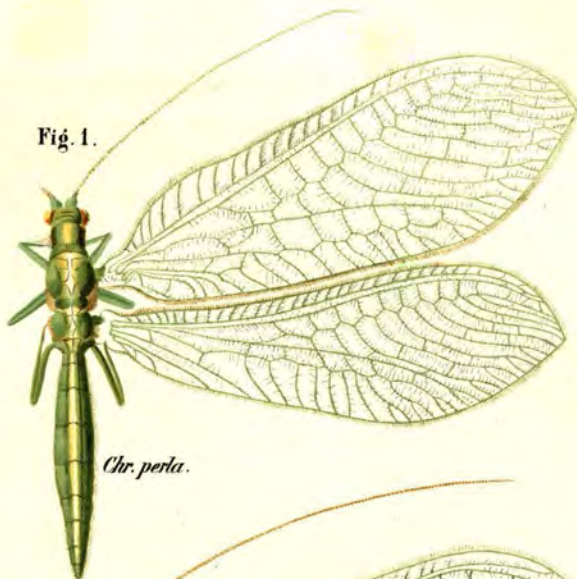
Larven. Die Larven unterscheiden sich erst in der dritten Häutung wesentlich von den Larven der *Chr. reticulata*. Der Kopf ist im Verhältniss zum Leibe klein und gelb. In der Mitte ist er mit einem herzförmigen Fleck, am Hinterhaupt mit zwei breiten schwarzen Flecken gezeichnet. Am Prothorax vier, am Meso- Metathorax und ersten Bauchsegment sechs rosenrothe viereckige Flecke, auf braunem Grunde. Die übrigen Segmente sind oben in der Mitte mit 6 viereckigen an der Seite mit drei runden gelben Flecken auf braunem Grunde gezeichnet. Die Stiele der Fleischwarzen am Meso- und Metathorax gelb, an den übrigen Segmenten braun, die Warzen aber rosenroth mit langen Haaren. Zangen und Fühler gelb. Beine lichtbraun. Die Länge in der 4ten Häutung ist $5\frac{1}{2}$ — 6 Linien. Tab. II. Fig. 13.

Fig. 1. a.



Chr. perla.

Fig. 1.



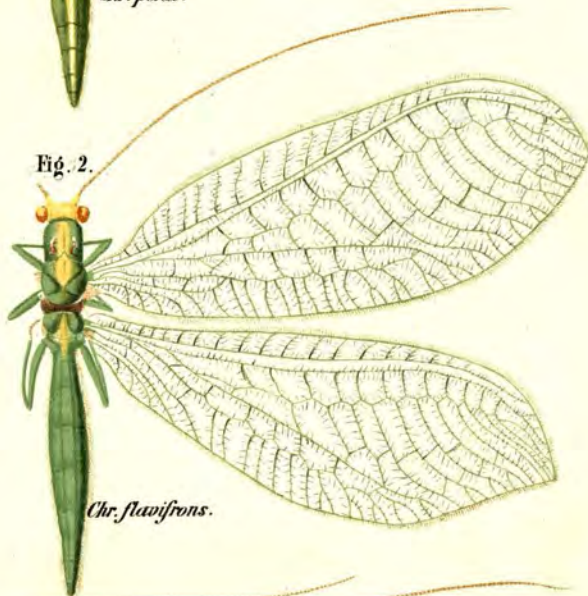
Chr. perla.

Fig. 2. a.



Chr. flavifrons.

Fig. 2.



Chr. flavifrons.

Fig. 4.



Chr. nobilis.

Fig. 4. a.



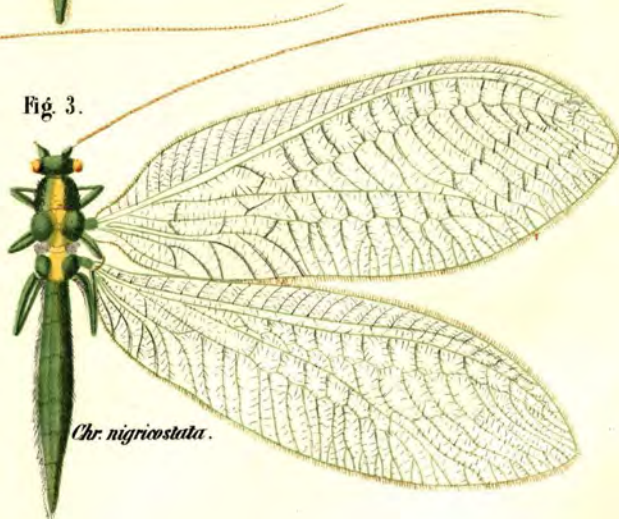
Chr. nobilis.

Fig. 3. a.

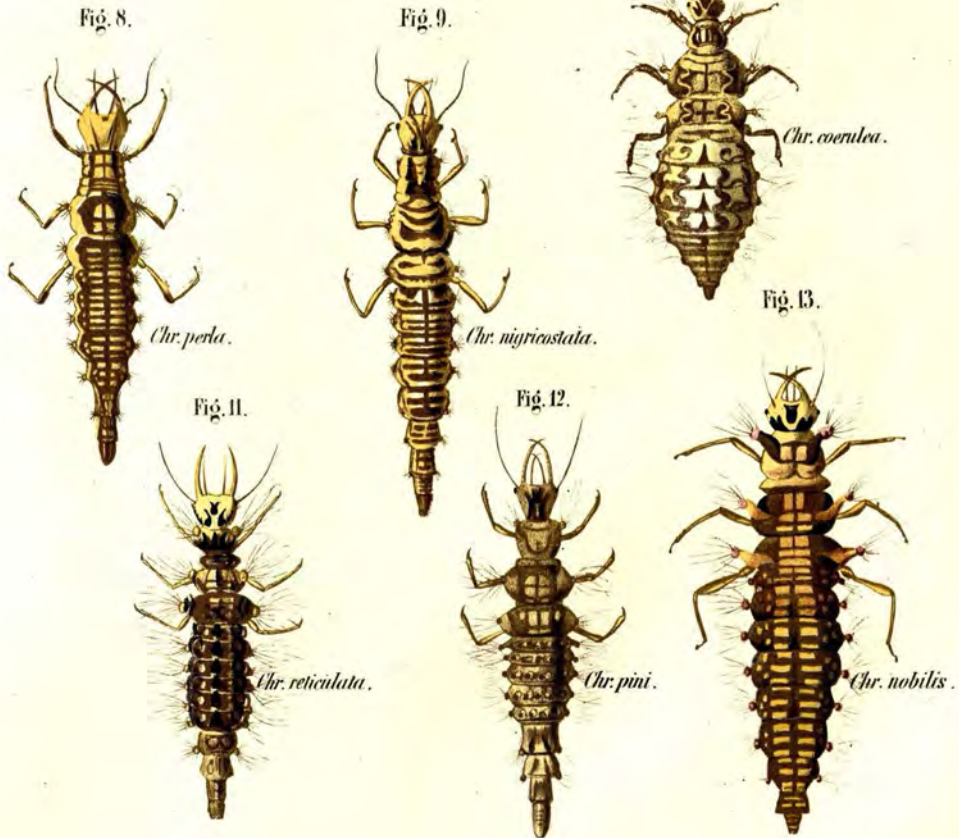
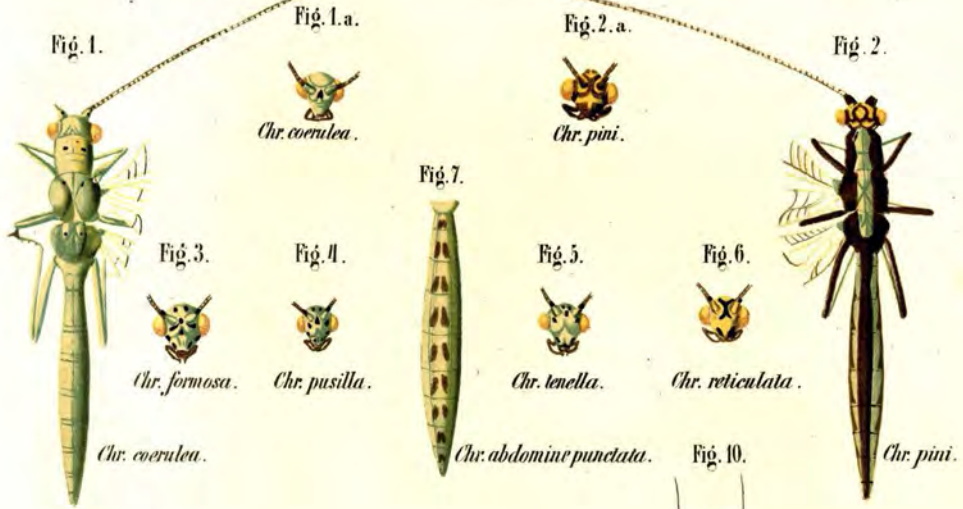


Chr. nigricostata.

Fig. 3.



Chr. nigricostata.



II. Punkt, Linie und Ebene im Raume, mit Zugrundelegung eines gleichwinklig-schiefwinkligen Coordinaten-Systemes.

Analytisch dargestellt von

Gustav Schmidt.

Mitgetheilt und mit einem Vorworte versehen von

Joh. v. Peřtko.

Mitgetheilt am 7. Juni 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Vorwort.

Die vorliegende Bearbeitung eines neuen Zweiges der analytischen Geometrie im Raume wurde durch das Bedürfniss der Krystallographie, und namentlich dadurch hervorgerufen, dass ich die für alle Krystalssysteme behauptete gleiche Neigung dreier Axen gegeneinander, an welcher ich der vorhandenen zahlreichen Analogien zufolge nicht im mindesten zweifeln konnte, auch mathematisch beweisen wollte.

Es stehen nämlich die drei pyramidalen Axen des Würfels, und die drei denselben entsprechenden Axen des pyramidalen und orthotypen Systemes auf einander senkrecht, und haben somit eine gleiche Neigung gegen einander. Eben so ist die gleiche Neigung jener drei Axenlinien des Rhomboeders, welche durch die Mittelpunkte der Flächen der Kanten parallel gehen, folglich den pyramidalen Axen des Würfels entsprechen, vollkommen klar. — Es blieb aber noch zu beweisen übrig, dass auch das augitische und anorthische Krystalssystem unter demselben Gesetze der gleichen Neigung dreier Axen gegeneinander stehen, so dass die Rechtwinklichkeit derselben nur als ein specieller Fall des allgemeinen Gesetzes zu betrachten wäre.

Auf dieses Gesetz habe ich bereits im Jahre 1846 *) hingedeutet, und gezeigt, dass man aus dem Rhomboeder durch Verkürzung oder Verlängerung einer Flächenaxe ein schiefes rhombisches Prisma erhält, welches bei gleicher Neigung der drei Flä-

*) Berichte über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften in Wien 1847. I. Band, Seite 135.

chenaxen gegeneinander alle Charaktere eines augitischen Prismas, namentlich der Combination $0.\infty A$ an sich trägt, und dieser bei genauer Angabe des Neigungswinkels und des Längenverhältnisses dieser Axen als die Grundgestalt einer augitischen Krystallreihe betrachtet werden kann; und dass man auf dieselbe Art durch gleichzeitige ungleiche Veränderung zweier Axen des Rhomboeders ein anorthisches Prisma (die Combination: $0.\infty\bar{H}.\infty\bar{H}$) erhält, bei welchem die Flächenaxen ebenfalls eine gleiche Neigung gegen einander behalten, und welches durch genaue Angabe dieser Neigung und des Längenverhältnisses der drei Axen seinen Abmessungen nach vollkommen bestimmt und fähig wird, als Grundgestalt einer anorthischen Krystallreihe zu dienen.

Es kam nun noch darauf an, mathematisch zu beweisen, dass sich für die natürlichen Krystalle des augitischen und anorthischen Systemes auch wirklich eine solche Grundgestalt auffinden lasse, welche den obigen Bedingungen entspricht.

Ich forderte deshalb einen meiner ausgezeichnetsten Zuhörer, Herrn GUSTAV SCHMIDT *) auf, den obengenannten Zweig der analytischen Geometrie, der mir die nothwendigen Rechnungen allein zu ermöglichen oder wenigstens bedeutend zu erleichtern schien, dem Bedürfnisse entsprechend zu bearbeiten. — Derselbe hat seine Aufgabe vollkommen gelöst, und als wir nach den gewonnenen analytischen Formeln den hemiprismatischen Augitpath und den orthotomen Feldspath gemeinschaftlich berechneten, wurden wir in der That zu dem erwünschten Resultate geführt.

Herr G. SCHMIDT hatte seine Arbeit nicht für den Druck, sondern bloß für meinen Privatgebrauch bestimmt, und im erstern Falle würde er vielleicht Manches anders gegeben haben. Da ich jedoch in Kurzem eine Reihe krystallographischer Mittheilungen zu eröffnen denke, bei welchen ich mich in Bezug auf das rhomboedrische, augitische und anorthische Krystallsystem der so eben besprochenen analytischen Formeln bedienen werde, so hielt ich es für zweckmässig, vorerst diese Formeln nebst ihrer Entwicklung der Oeffentlichkeit zu übergeben, und beehrte mich, die Erlaubniss dazu von dem Hrn. Verfasser einzuholen.

Ich glaube nun zur gehörigen Würdigung der vorliegenden Arbeit mit einigen Worten auf die wesentlichen Fortschritte hindeuten zu sollen, welche die Krystallographie mit ihrer Hilfe demnächst zu machen verspricht, und auf den Einfluss, welchen die Umgestaltung der letztern auf die Fortschritte anderer Wissenschaften ausüben dürfte.

1. Zur Berechnung der Grundgestalt einer augitischen Krystallreihe wird man mit zwei Messungen ausreichen, indem man aus einer Messung den Neigungswinkel der Axen, aus der andern das Verhältniss der ungleichen Axe gegen die beiden gleichen finden kann. Eben so wird die Berechnung einer anorthischen Krystallreihe nur

*) Gegenwärtig Assistent an der k. k. montanistischen Lehranstalt zu Leoben.

drei Messungen erfordern, obwohl die Rechnungsschwierigkeiten bei diesem System ausserordentlich gross werden, und, bis jetzt wenigstens, noch nicht überwunden sind. — Auf diese Art werden sich die beiden genannten Krystallreihen um Vieles schärfer bestimmen lassen, weil die Fehler der dritten Messung bei dem augitischen, dann der vierten und fünften Messung bei dem anorthischen Systeme vermieden werden. Zur Vergleichung möge hier als Beispiel die Krystallreihe des Orthoklases dienen. Die Grundgestalt, ein schiefes rhombisches Prisma (das augitische Hexaeder) nach zwei Messungen berechnet, wird charakterisirt:

1. Durch den Neigungswinkel der Flächenaxen = $85^{\circ}3'$,
2. Durch das Verhältniss der beiden gleichen Axen gegen die dritte ungleiche = $1 : 0,89023$.

Nun gibt NAUMANN für sein Grund-Augitoid das Verhältniss

$$a : b : c = 0,8439 : 1 : 1,5185;$$

berechnet man aber die Länge derselben Linien aus der erstern Grundgestalt, so bekommt man das

Verhältniss	$0,85087 : 1 : 1,51899$
	$0,007 - 0,0005$

welche jedenfalls von dem Fehler der dritten Messung herrühren muss, da zur Grundlage der Berechnung zwei von denselben drei Messungen angenommen wurden, deren sich NAUMANN bediente. Beim Amphibol steigt die Differenz noch höher, und ist bei der Axe $a = 0,0105$, bei $c = 0,0006$.

2. So wie das Hexaeder des Tesseral-Systemes durch die parallelepipedschen Grundgestalten in den übrigen Systemen repräsentirt wird, so findet man in den letzteren auch Repräsentanten der übrigen vollflächigen tesseralen Formen. Es werden daher alle Krystallsysteme mit dem tesseralen vergleichbar, und man wird z. B. die Adamantoidflächen in einem jeden Krystallsysteme als solche wieder erkennen, und auch die Varietät des Adamantoides mit ihrem krystallographischen Zeichen genau zu bestimmen im Stande sein. Mit andern Worten: alle Krystallgestalten in den übrigen Krystallsystemen werden als Theilgestalten von nur 7 vollflächigen Formen (den tesseralen entsprechend) betrachtet, und darnach bezeichnet werden können. Es ist nun sehr wahrscheinlich, dass diese Vergleichung, wenn sie einmal durchgeführt ist, wichtige Mittel an die Hand geben wird, um die Gesetze der Krystallisation genauer zu erforschen.

3. Aus dem Gesetze der gleichen Neigung dreier Axen der Krystalle gegeneinander, und der Grösse dieser Neigung bei verschiedenen Mineralspecies wird die Lehre von den Atomen, insbesondere von deren Form, von der Art ihrer gegenseitigen Anziehung, ihrem elektrisch-magnetischen Zustande u. s. w. wahrscheinlich Folgerungen ziehen, deren Wichtigkeit und Umfang sich mehr ahnen, als im Voraus bestimmen lässt.

4. Nicht minder dürfte auch die Optik der Krystalle von demselben Gesetze wesentliche Aufklärungen anzuhoffen haben.

Zum Schlusse habe ich noch über den Gang der Entwicklung vorliegender analytischer Formeln zu bemerken, dass so wie dieselbe zum Nutzen der Krystallographie statt gefunden hat, sie sich auch auf eine krystallographische Gestalt, nämlich auf das Rhomboeder gründet. Die Flächen des Rhomboeders, in den Mittelpunkt der Gestalt versetzt, sind nichts anderes als die schiefwinkligen Coordinat-Ebenen, und ihre Durchschnitte nichts anders als die den Axenkanten des Rhomboeders parallel gehenden schiefwinkligen Coordinaten-Axen.

Es wurden demnach zuerst die Gleichungen dieser Coordinat-Ebenen und Axen in Bezug auf ein schicklich gewähltes orthogonales Coordinaten-System aufgestellt, aus diesen die Transformations-Gleichungen abgeleitet, und sodann die analytischen Formeln des schiefwinkligen Systemes auf die gewöhnliche Weise durch Substitutionen ermittelt.

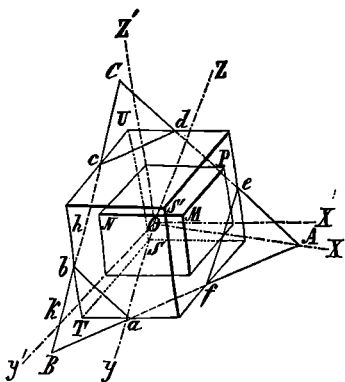
Schemnitz am 30. April 1850.

Joh. v. Pettko.

I. Gleichungen der gleichwinklig-schiefwinkligen Coordinat-Ebenen und Axen in Bezug auf ein orthogonales Coordinaten-System.

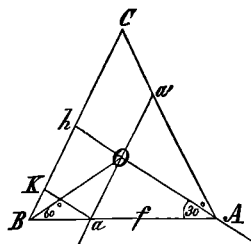
Sei (Fig. 1) $STUVS'$ das Grundrhomboeder, $SS'Z$ die Hauptaxe, und $abcdef$ die durch den Mittelpunkt O darauf senkrecht geführte Ebene, welche sich mit den Ebenen

Fig. 1.



TV, UV und TU in AB, AC und BC schneidet. Nehmen wir nun OAB als die Ebene XY, also OS'Z als die Axe der z eines orthogonalen Systemes, und OA als die Axe der x desselben an, so ist $Of = 60^\circ$ und $fg = 30^\circ$ ist.

Fig. 2.



Die schiefwinkligen Axen OX' , OY' , OZ' gehen parallel zu den Rhomboederkanten, und es handelt sich zu nächst um die Gleichungen der schiefwinkligen Coordinat-Ebenen und Axen in Bezug auf das angenommene orthogonale System.

Zu diesem Behufe suchen wir zuerst die Gleichungen der Parallelebenen SAB , SAC , SBC , welche durch die Linien AB , AC , BC und den Punkt S gehen, dessen

orthogonale Coordinaten $x=0, y=0, z=-c$ sind, wenn die halbe Axe OS' des Grundrhomboeders $= c$ gesetzt wird.

Die Gleichung von AB (Fig. 1 und 2) ist: $\frac{x}{AO} + \frac{y}{aO} = 1$, und setzt man

$AO = BO = CO = a$, also $aO = AO \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$, so hat man $\frac{x}{a} + \frac{y\sqrt{3}}{a} = 1$, oder

$$\overline{AB} \dots x + y\sqrt{3} = a, \text{ und analog die Gleichung von}$$

$$\overline{AC} \dots x - y\sqrt{3} = a, \text{ und die Gleichung von}$$

$$\overline{BC} \parallel Oy \dots x = -\overline{Oh}; \text{ aber } \overline{Oh} = \overline{ak}, \text{ und}$$

$$\overline{ak} : \overline{AO} = \overline{Ba} : a\overline{A} = 1 : 2; \text{ also}$$

$$\overline{Oh} = \overline{ak} = \frac{1}{2}AO = \frac{a}{2}, \text{ folglich die Gleichung von}$$

$$BC \dots x = -\frac{a}{2}.$$

Die zu suchende Gleichung der Ebene SAB sei $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z+c}{C} = 0$. Sie schneidet sich mit $z=0$ in der Linie $\overline{AB} \dots x + y\sqrt{3} = a$, welche Gleichung daher identisch sein muss mit $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{c}{C} = 0$; also ist $A = 1, B = \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{c}{C} = -a$ oder $C = -\frac{c}{a}$, daher $SAB) \dots x + y\sqrt{3} - \frac{a(z+c)}{c} = 0$, oder

$$\left\{ \begin{array}{l} SAB) \dots \frac{x}{a} + \frac{y\sqrt{3}}{a} - \frac{z+c}{c} = 0. \text{ In gleicher Weise findet man die Gleichung von} \\ SAC) \dots \frac{x}{a} - \frac{y\sqrt{3}}{a} - \frac{z+c}{a} = 0, \text{ und von SBC, wegen } A=1, B=\infty, \frac{c}{C} = \frac{a}{2} \\ SBC) \dots \frac{x}{a} + \frac{z+c}{2c} = 0. \end{array} \right.$$

Daher sind die Gleichungen der Parallelebenen durch den Anfangspunkt:

$$\left. \begin{array}{l} X'Y' \dots \frac{x}{a} + \frac{y\sqrt{3}}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ X'Z' \dots \frac{x}{a} - \frac{y\sqrt{3}}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ Y'Z' \dots \frac{x}{a} + \frac{z}{2c} = 0 \end{array} \right\} \dots (1)$$

Je zwei dieser Gleichungen mit einander verbunden geben die Gleichungen der schiefwinkligen Coordinaten-Axen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{O X}' \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \\ \text{O Y}' \dots \left\{ \begin{array}{l} x\sqrt{3} + y = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{2c} = 0 \end{array} \right. \\ \text{O Z}' \dots \left\{ \begin{array}{l} -x\sqrt{3} + y = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{2c} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

II. Transformations - Gleichungen.

Wir wollen nun durch einen Punkt M (Fig. 1), dessen orthogonale Coordinaten $\xi\eta\zeta$ seien, die Linien MN, MP, MQ parallel zu den schiefwinkligen Axen ziehen und dieselben mit den schiefwinkligen Coordinat-Ebenen zum Durchschnitte bringen, und dann die Länge der so begränzten schiefen Coordinaten durch $\xi\eta\zeta$ ausdrücken.

$$\left. \begin{array}{l} \text{MN} \parallel \text{OX}' \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-\xi}{a} - \frac{z-\zeta}{c} = 0 \\ y-\eta = 0 \end{array} \right\} \text{ kommt zum Durchschnitte mit} \\ \text{Y}'\text{Z}' \dots \dots \dots \frac{x}{a} + \frac{z}{2c} = 0. \end{array} \right\}$$

Hat man aus diesen drei Gleichungen das x, y, z des Punktes N, so ist

$$\text{MN} = x' = \pm \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} = \pm (x-\xi) \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}} = \pm \frac{x-\xi}{a} \sqrt{a^2 + c^2} \dots (3)$$

Es ist aber $\frac{x-\xi}{a} = \frac{z-\zeta}{c}$ und $\frac{z}{c} = -\frac{2x}{a}$, also

$$\frac{x-\xi}{a} = -\frac{2x}{a} - \frac{\zeta}{c} = -\frac{2(x-\xi)}{a} - \frac{2\xi}{a} - \frac{\zeta}{c}, \text{ folglich}$$

$$\frac{3(x-\xi)}{a} = -\frac{2c\xi + a\zeta}{ac}, \text{ diess substituirt in (3)}$$

$$x' = \mp \frac{2c\xi + a\zeta}{3ac} \sqrt{a^2 + c^2}, \text{ und setzt man der Kürze halber}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{3ac} = k \dots \dots \dots (4)$$

$$x' = \mp k (2c\xi + a\zeta).$$

Ist ξ und ζ positiv, so ist es auch x' , und es gilt das untere Zeichen, also

$$x' = k (2c\xi + a\zeta).$$

Eben so kommt $\text{MP} \parallel \text{OY}' \dots (x-\xi)\sqrt{3} + (y-\eta) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-\xi}{a} + \frac{z-\zeta}{2c} = 0 \end{array} \right\} \text{ zum Durchschnitte mit}$$

$$\text{X}'\text{Z}' \dots \dots \dots \frac{x}{a} - \frac{y\sqrt{3}}{a} - \frac{z}{c} = 0.$$

Nach der ersten Gleichung ist $y - \eta = - (x - \xi) \sqrt{3}$

und nach der zweiten $z - \zeta = - \frac{2c}{a} (x - \xi)$, folglich

$$\overline{MP} = y' = \pm (x - \xi) \sqrt{1 + 3 + \frac{4c^2}{a^2}} = \pm \frac{2(x - \xi)}{a} \sqrt{a^2 + c^2} \dots (5)$$

Die Gleichung von $X'Z'$ kann auch folgenderweise geschrieben werden:

$$\frac{x - \xi}{a} - \frac{(y - \eta) \sqrt{3}}{a} - \frac{z - \zeta}{c} + \frac{\xi}{a} - \frac{\eta \sqrt{3}}{a} - \frac{\zeta}{c} = 0, \text{ also für den Punkt P:}$$

$$\frac{x - \xi}{a} + \frac{3(x - \xi)}{a} + \frac{2(x - \xi)}{a} + \frac{c(\xi - \eta \sqrt{3}) - a\zeta}{ac} = 0$$

$$6(x - \xi) + \frac{c(\xi - \eta \sqrt{3}) - a\zeta}{c} = 0, \text{ also } (x - \xi) = - \frac{c(\xi - \eta \sqrt{3}) - a\zeta}{6c}.$$

Diesen Werth in (5) gesetzt: $y' = \pm \frac{2\sqrt{a^2 + c^2}}{a} \cdot \frac{c(\xi - \eta \sqrt{3}) - a\zeta}{6c}$, und mit Rücksicht

auf (4) $y' = \mp k [c(\xi - \eta \sqrt{3}) - a\zeta].$

Nimmt man an, dass y' positiv sein soll für $\xi = \eta = \zeta =$ einer sehr kleinen Grösse ϵ , so muss $\mp k \epsilon [c(1 - \sqrt{3}) - a] > 0$, und da der eingeklammerte Theil negativ ist, so muss auch vorn das obere Zeichen gelten, also ist

$$y' = -k [c\xi - c\eta \sqrt{3} - a\zeta] = k(-c\xi + c\eta \sqrt{3} + a\zeta)$$

und durch Veränderung von $\sqrt{3}$ in $-\sqrt{3}$

$$z' = k(-c\xi - c\eta \sqrt{3} + a\zeta).$$

Um also statt der orthogonalen Coordinaten $\xi \eta \zeta$ eines Punktes die schiefwinkligen $x y z$ einzuführen, dienen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= k(2c\xi + a\zeta) \\ y &= k(-c\xi + c\eta \sqrt{3} + a\zeta) \\ z &= k(-c\xi - c\eta \sqrt{3} + a\zeta) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Um erforderlichenfalls statt den nicht gegebenen Grössen a, c, k den unmittelbar gegebenen Flächenwinkel φ des Grundrhomboeders in den Formeln erscheinen zu lassen, wollen wir φ und auch die Seite s des Rhomboeders durch diese Grössen ausdrücken.

$\text{Cos } \varphi$ werden wir aus dem Dreiecke ABS (Fig. 1) berechnen. Die orthogonalen Coordinaten von S sind: $x = 0, y = 0, z = -c$;

die von A : $x = a, y = 0, z = 0$

und die von B aus Fig. 2:
$$\begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ y = Bh = BO \text{Cos } 30^\circ = \frac{a}{2} \sqrt{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Also ist $AS = \sqrt{a^2 + c^2}$

$$\text{und } AB = \sqrt{\left(a + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{9+3}{4}} = a\sqrt{3}.$$

Es ist aber auch $\overline{AB^2} = \overline{AS^2} + \overline{BS^2} - 2\overline{AS} \cdot \overline{BS} \cdot \text{Cos } \varphi = \overline{AS^2} (2 - 2 \text{Cos } \varphi)$, also

$$\begin{aligned} 3a^2 &= 2(a^2 + c^2)(1 - \text{Cos } \varphi) \\ 2(a^2 + c^2) \text{Cos } \varphi &= 2a^2 + 2c^2 - 3a^2 = 2c^2 - a^2, \text{ folglich} \\ \text{Cos } \varphi &= \frac{2c^2 - a^2}{2(a^2 + c^2)} \dots \dots (7) \end{aligned}$$

Ferner ist (Fig. 1) $AV : AS = Af : AB = 1 : 3$, folglich

$$\begin{aligned} AV &= \frac{1}{3} AS \text{ und } SV = \frac{2}{3} AS \text{ oder} \\ s &= \frac{2}{3} \sqrt{a^2 + c^2} \dots \dots (8) \end{aligned}$$

also aus (4) $\dots \dots k = \frac{s}{2ac} \dots \dots (9)$

Aus (7) folgt $a^2(1 + 2 \text{Cos } \varphi) = 2c^2(1 - \text{Cos } \varphi)$, also

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \sqrt{\frac{2(1 - \text{Cos } \varphi)}{1 + 2 \text{Cos } \varphi}}, \text{ und wegen } \text{Cos } \varphi = 1 - 2 \text{Sin}^2 \frac{1}{2} \varphi = 2 \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi - 1 \\ \frac{a}{c} &= \sqrt{\frac{4 \text{sin}^2 \frac{1}{2} \varphi}{4 \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi - 1}} = \frac{2 \text{sin } \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{4 \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi - 1}} \dots \dots (10) \end{aligned}$$

Ferner ist aus (8), $9s^2 = 4a^2 + 4c^2$, also $4c^2 = 9s^2 - 4a^2$, und diess in (7)

$\text{Cos } \varphi = \frac{4c^2 - 2a^2}{4(a^2 + c^2)}$ gesetzt :

$$\text{Cos } \varphi = \frac{9s^2 - 6a^2}{9s^2} = \frac{3s^2 - 2a^2}{3s^2} \dots \dots (11)$$

Daraus ist $2a^2 = 3s^2(1 - \text{Cos } \varphi) = 3s^2 \cdot 2 \text{sin}^2 \frac{1}{2} \varphi$, also

$$\frac{a}{s} = \sqrt{3} \text{sin } \frac{1}{2} \varphi \dots \dots (12)$$

Die Gleichungen (6) können mit Rücksicht auf (9) auch so geschrieben werden :

$$\begin{aligned} x &= \frac{s}{2a} \left(2\xi + \frac{a}{c} \zeta \right) \\ y &= \frac{s}{2a} \left(-\xi + \eta\sqrt{3} + \frac{a}{c} \zeta \right) \\ z &= \frac{s}{2a} \left(-\xi - \eta\sqrt{3} + \frac{a}{c} \zeta \right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Setzt man also nach (12) } \frac{2a}{s} &= 2\sqrt{3} \text{sin } \frac{1}{2} \varphi = \chi \\ \text{und nach (10) } \frac{a}{c} &= \frac{2 \text{sin } \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{4 \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi - 1}} = \lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

so erhält man als Transformations-Gleichungen :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\chi} (2\xi + \lambda\zeta) \\ y &= \frac{1}{\chi} (-\xi + \eta\sqrt{3} + \lambda\zeta) \\ z &= \frac{1}{\chi} (-\xi - \eta\sqrt{3} + \lambda\zeta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Diese Gleichungen nach ξ, η, ζ aufgelöst, erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\chi}{6} (2x - y - z) \\ \eta &= \frac{\chi\sqrt{3}}{6} (y - z) \\ \zeta &= \frac{\chi}{3\lambda} (x + y + z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Um nun irgend eine Aufgabe im schiefwinkligen Systeme zu lösen, geht man mittelst der Gleichungen (14) von diesem in das orthogonale System über, löst mit den Coordinaten $\xi\eta\zeta$ die Aufgabe nach den bekannten Formeln, und führt im Resultat wieder die schiefwinkligen Coordinaten xyz mittelst der Gleichungen (15) ein.

Die in den Transformations-Gleichungen vorkommenden Constanten χ und λ sind in Folge der Gleichungen (13) bloss von φ abhängig. Hiebei bemerkt man, dass der Nenner von λ , nämlich $\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi - 1}$, weil er reell sein muss, dem Winkel φ eine Gränze setzt, denn es muss $(4\cos^2\frac{1}{2}\varphi - 1)$ positiv, also $4\cos^2\frac{1}{2}\varphi > 1$ sein, also auch $2\cos\frac{1}{2}\varphi > 1$, folglich $\cos\frac{1}{2}\varphi > \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$, daher $\frac{1}{2}\varphi < 60^\circ$ und $\varphi < 120^\circ$. Und wirklich existirt kein Rhomboeder mit grösserem Flächenwinkel als 120° , weil die Axe schon verschwindend klein werden muss, damit der Flächenwinkel 120° erreiche.

III. Distanz zweier Punkte.

Die schiefwinkligen Coordinaten dieser Punkte seien xyz und $x_1y_1z_1$, und die respectiven Differenzen dieser Coordinaten mögen $\delta x, \delta y, \delta z$ heissen. Demzufolge ist nach (15)

$$\begin{aligned} \xi' - \xi &= \frac{\chi}{6} (2\delta x - \delta y - \delta z) \\ \eta' - \eta &= \frac{\chi\sqrt{3}}{6} (\delta y - \delta z) \\ \zeta' - \zeta &= \frac{\chi}{3\lambda} (\delta x + \delta y + \delta z) \end{aligned}$$

woraus nun die Distanz

$$R = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}$$

leicht gefunden wird, nämlich:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{x}{6} \sqrt{(2\delta x - \delta y - \delta z)^2 + 3(\delta y - \delta z)^2 + \frac{4}{\lambda^2}(\delta x + \delta y + \delta z)^2} \\
 &= \frac{x}{6} \sqrt{\frac{4\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - 4\delta x \delta y - 4\delta x \delta z + 2\delta y \delta z + \frac{4}{\lambda^2}(\delta x + \delta y + \delta z)^2}{+3\delta y^2 + 3\delta z^2 - 6\delta y \delta z}} \\
 &= \frac{x}{3\lambda} \sqrt{\lambda^2(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - \delta x \delta y - \delta x \delta z - \delta y \delta z) + \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 + 2\delta x \delta y + 2\delta x \delta z + 2\delta y \delta z} \\
 &= \frac{x}{3\lambda} \sqrt{(1 + \lambda^2)(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) + (2 - \lambda^2)(\delta x \delta y + \delta x \delta z + \delta y \delta z)}
 \end{aligned}$$

Nun ist nach (13) $\frac{x}{3\lambda} = \frac{2\sqrt{3} \sin \frac{1}{2} \varphi}{2 \cdot 3 \sin \frac{1}{2} \varphi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1} = \sqrt{\frac{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1}{3}}$

$$1 + \lambda^2 = \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1 + 4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1} = \frac{3}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1} = \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 \dots \dots \dots \alpha$$

$$\begin{aligned}
 2 - \lambda^2 &= \frac{8 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 2 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1} = \frac{8 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 2(\sin^2 \frac{1}{2} \varphi + \cos^2 \frac{1}{2} \varphi) - 4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1} \\
 &= \frac{6(\cos^2 \frac{1}{2} \varphi - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi)}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1} = \frac{6 \cos \varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1} = 2 \cos \varphi \cdot \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 \dots \dots \dots \beta
 \end{aligned}$$

also $R = \frac{x}{3\lambda} \sqrt{\left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 (\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) + 2 \cos \varphi \cdot \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 (\delta x \delta y + \delta x \delta z + \delta y \delta z)}$, oder

$$R = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 + 2 \cos \varphi (\delta x \delta y + \delta x \delta z + \delta y \delta z)} \dots \dots \dots (16)$$

Daraus folgt die Centraldistanz eines Punktes, dessen schiefwinklige Coordinaten $x y z$ sind:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cos \varphi (xy + xz + yz)} \dots \dots \dots (17)$$

IV. Gleichung der Normale.

Sei $Ax + By + Cz = D$ die Gleichung einer Ebene im schiefwinkligen Systeme. Gehen wir mittelst der Gleichungen (14) ins orthogonale System über, so erhalten wir als Gleichung dieser Ebene:

$$\begin{aligned}
 A(2\xi + \lambda\zeta) + B(-\xi + n\sqrt{3} + \lambda\zeta) + C(-\xi - n\sqrt{3} + \lambda\zeta) &= D_x, \text{ oder} \\
 (2A - B - C)\xi + (B - C)n\sqrt{3} + (A + B + C)\lambda\zeta &= D_x, \text{ oder kurz} \\
 A'\xi + B'n + C'\zeta &= D', \text{ wobei}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 A' &= 2A - B - C \\
 B' &= (B - C)\sqrt{3} \\
 C' &= (A + B + C)\lambda \\
 D' &= D_x
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Die Gleichungen der Normale auf diese Ebene sind:

$$\frac{\xi}{A'} = \frac{n}{B'} = \frac{\zeta}{C'}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= 4A^2 + B^2 + C^2 - 4AB - 4AC + 2BC \\ B^2 &= 3B^2 + 3C^2 - 6BC \\ \hline A^2 + B^2 &= 4(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC), \text{ also} \end{aligned}$$

$$N = \frac{x D}{\sqrt{4(A^2 + B^2 + C^2) - 4(AB + AC + BC) + \lambda^2(A + B + C)^2}} \dots (21)$$

welchem Ausdruck man auch eine andere Form ertheilen kann. Es ist nämlich die Grösse unter dem Wurzelzeichen

$$G = (4 + \lambda^2)(A^2 + B^2 + C^2) - 2(2 - \lambda^2)(AB + AC + BC).$$

Wir fanden aber schon früher (Gleichung β) $2 - \lambda^2 = 2 \left(\frac{x}{3\lambda}\right)^2 \cos \varphi$, und wegen (13) ist

$$4 + \lambda^2 = \frac{4(4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1) + 4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1} = \frac{4(4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1 + 1 - \cos^2 \frac{1}{2} \varphi)}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1}, \text{ also}$$

$$4 + \lambda^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1} = 4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 \dots (y)$$

$$\begin{aligned} \text{demnach } G &= 4 \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot (A^2 + B^2 + C^2) - 4 \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 \cos \varphi (AB + AC + BC) \\ &= \left[2 \left(\frac{3\lambda}{x}\right) \cos \frac{1}{2} \varphi\right]^2 \left[(A^2 + B^2 + C^2) - \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi} (AB + AC + BC)\right]. \end{aligned}$$

Diess und die Werthe von x und λ aus (13) in die Gleichung (21) gesetzt, gibt

$$N = \frac{2\sqrt{3} \sin \frac{1}{2} \varphi \cdot D}{2\sqrt{\frac{3}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1}} \cos \frac{1}{2} \varphi \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi} (AB + AC + BC)}}$$

$$N = \frac{D \tan \frac{1}{2} \varphi \sqrt{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - (1 - \tan^2 \frac{1}{2} \varphi) (AB + AC + BC)}} \dots (22)$$

Für $\varphi = 90^\circ$, also $\tan \frac{1}{2} \varphi = 1$ und $\cos^2 \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2}$ folgt

$$N = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

VI. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Normale mit der Ebene.

Diese bestimmen wir aus der Gleichung der Ebene

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D, \text{ und aus zwei Gleichungen, die der Normale angehören:} \\ (B - C)x + (C - A)y + (A - B)z = 0, \text{ und} \\ [x[\lambda^2(A + B + C) + 2(2B - A - C)] - y[\lambda^2(A + B + C) + 2(2A - B - C)]] = 0 \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen z eliminirt, erhält man

$$x(A^2 + C^2 - AB - BC) + y(AB + AC - B^2 - C^2) = D(A - B).$$

Diese Gleichung hat die Form: $ax + by = c$
die obige dritte Gleichung dagegen die Form: $a'x - b'y = 0$.

Diese zwei Gleichungen nach x aufgelöst geben

$$x = \frac{b'c}{ab' + a'b}$$

In unserem Falle ist $a = A^2 + C^2 - AB - BC$

$$b = -B^2 - C^2 + AB + AC$$

$$c = D(A - B)$$

$$a' = \lambda^2(A + B + C) + (4B - 2A - 2C)$$

$$b' = \lambda^2(A + B + C) + (4A - 2B - 2C).$$

Construiren wir zuerst den Nenner $ab' + a'b$. Dieser enthält Glieder mit und ohne λ^2 . Jene reduciren sich auf

$$\lambda^2(A + B + C)(A^2 - B^2 + AC - BC) = \lambda^2(A + B + C)[(A + B)(A - B) + C(A - B)] \\ = \lambda^2(A - B)(A + B + C)^2.$$

Die Glieder ohne λ^2 sind:

$4A^3 - 2$	$A^2B - 2$	$A^2C + 4$	$AC^2 - 2$	$BC^2 - 2$	$C^3 + 2$	$AB^2 + 2$	$ABC + 2$	B^2C	
-4	-2	$+2$	$+2$	$+2$	$+2$	-4	$+2$	$-4B^3$	
-2		-2	-4		$+4$	-2	$+4$		
$4A^3 - 8A^2B - 4A^2C + 4AC^2 - 4BC^2$					$+ 8AB^2$		$+ 4B^2C - 4B^3$		

$$= 4(A^3 - 2A^2B + 2AB^2 - B^3 + B^2C - BC^2 + AC^2 - A^2C)$$

$$= 4[(A - B)^3 + A^2B - AB^2 + C(B^2 - A^2) + C^2(A - B)], \text{ also ist}$$

$$ab' + a'b = \lambda^2(A - B)(A + B + C)^2 + 4[(A - B)^3 + AB(A - B) + C(A - B)(C - A - B)]$$

$$= \lambda^2(A - B)(A + B + C)^2 + 4(A - B)(A^2 + B^2 - AB + C^2 - AC - BC)$$

$$\text{und } x = \frac{D[\lambda^2(A + B + C) + 4A - 2B - 2C]}{\lambda^2(A + B + C)^2 + 4(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC)} \dots (23)$$

Lässt man A, B, C in BCA übergehen, so erhält man den Ausdruck für y, und durch abermalige Vertauschung erhält man z.

Vergleicht man die Gleichungen (23) und (21), so sieht man, dass der Nenner von x ist $(\frac{xD}{N})^2$, also

$$x = \frac{DN^2[\lambda^2(A + B + C) + 2(2A - B - C)]}{x^2D^2} \\ = N^2 \cdot \frac{[\lambda^2(A + B + C) + 2(2A - B - C)]}{x^2D}$$

Setzt man statt x^2 und λ^2 ihre Werthe aus (13), so folgt

$$x = \frac{N^2}{D} \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi (A + B + C) + 2(4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1)(2A - B - C)}{(4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1) \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \\ = \frac{N^2}{D} \frac{2(1 - \cos^2 \frac{1}{2} \varphi)(A + B + C) + (4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1)(2A - B - C)}{2 \cdot 3 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \varphi (4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - 1)}$$

$$\text{Der Zähler ist } = \frac{2A + 2B + 2C + 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi (-A - B - C)}{-2A + B + C + 4A - 2B - 2C} \\ = \frac{3B + 3C + 2 \cdot 3 \cdot \cos^2 \frac{1}{2} \varphi (A - B - C)}{}$$

$$\begin{aligned} \text{Demnach } x &= \frac{N^2}{D} \frac{B+C+2(A-B-C)\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi(4\cos^2\frac{1}{2}\varphi-1)} \\ &= \frac{N^2}{D} \frac{(B+C-A)+A+2(A-B-C)\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi(4\cos^2\frac{1}{2}\varphi-1)} \\ &= \frac{N^2}{D} \cdot \frac{A+(A-B-C)\cos\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi(4\cos^2\frac{1}{2}\varphi-1)} \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

Setzt man $\varphi = 90^\circ$, also $\sin^2\frac{1}{2}\varphi = \cos^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$, so folgt

$$x = \frac{N^2}{D} \cdot \frac{A}{2 \cdot \frac{1}{2}(2-1)} = \frac{N^2 A}{D}, \text{ wie bekannt.}$$

VII. Neigungswinkel W zweier Ebenen.

Seien die Gleichungen dieser Ebenen im schiefwinkligen Systeme:

$$E \dots Ax + By + Cz = D$$

$$E' \dots A'x + B'y + C'z = D'$$

und die entsprechenden Gleichungen im orthogonalen Systeme seien

$$E \dots ax + by + cz = d$$

$$E' \dots a'x + b'y + c'z = d'$$

$$\text{so ist nach (18) } \begin{array}{l} a = 2A - B - C \\ b = (B - C)\sqrt{3} \\ c = (A + B + C)\lambda \end{array} \left| \begin{array}{l} a' = 2A' - B' - C' \\ b' = (B' - C')\sqrt{3} \\ c' = (A' + B' + C')\lambda \end{array} \right.$$

$$\text{und wie bekannt } \cos W = \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\text{Nun ist } \begin{array}{l} aa' = 4AA' - 2AB' - 2AC' - 2A'B + BB' + BC' - 2A'C + B'C + CC' \\ bb' = 3BB' - 3BC' \\ aa' + bb' = 4(AA' + BB' + CC') - 2(AB' + A'B + AC' + A'C + BC' + B'C) \\ cc' = \lambda^2(AA' + BB' + CC') + \lambda^2(AB' + A'B + AC' + A'C + BC' + B'C) \end{array}$$

$$aa' + bb' + cc' = (4 + \lambda^2)(AA' + BB' + CC') - (2 - \lambda^2)(AB' + A'B + AC' + A'C + BC' + B'C)$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (β) und (γ)

$$\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 4\cos^2\frac{1}{2}\varphi \cdot \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 (AA' + BB' + CC') - 2\cos\varphi \cdot \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 (AB' + A'B \\ & + AC' + A'C + BC' + B'C). \end{aligned}$$

Ferner haben wir bei Bestimmung von N (Gleichung 21) schon gefunden

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \lambda^2 (A + B + C)^2 + 4(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \\ &= (A^2 + B^2 + C^2)(\lambda^2 + 4) + 2(AB + AC + BC)(\lambda^2 - 2) \\ &= 4\cos^2\frac{1}{2}\varphi \cdot \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 (A^2 + B^2 + C^2) - 4\cos\varphi \cdot \left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 (AB + AC + BC) \\ &= 4\left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2 [(A^2 + B^2 + C^2)\cos^2\frac{1}{2}\varphi - (AB + AC + BC)\cos\varphi], \text{ also} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos W &= \pm \frac{4 \left(\frac{\beta\lambda}{x}\right)^2 [(AA'+BB'+CC') \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} (AB'+A'B+AC'+A'C+BC'+B'C) \cos \varphi]}{4 \left(\frac{\beta\lambda}{x}\right)^2 \sqrt{(A^2+B^2+C^2)} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi - (AB+AC+BC) \cos \varphi \sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi} \\ &\quad - (AB'+A'C'+B'C') \cos \varphi \\ &= \pm \frac{(AA'+BB'+CC') (1 + \cos \varphi) - (AB'+A'B+AC'+A'C+BC'+B'C) \cos \varphi}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} (1 + \cos \varphi) - 2 (AB+AC+BC) \cos \varphi \sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)} (1 + \cos \varphi)} \\ &\quad - 2 (A'B'+A'C'+B'C') \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\cos W = \pm \frac{AA'+BB'+CC'+[A(A'-B'-C')+B(B'-C'-A')+C(C'-A'-B')] \cos \varphi}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} + (A^2+B^2+C^2 - 2AB - 2AC - 2BC) \cos \varphi \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} \dots (25)$$

Führt man statt des Flächenwinkels φ den Kantenwinkel ω ein, mittelst Formel (34)

$$\cos \varphi = \frac{\cos \omega}{1 - \cos \omega}, \text{ so erhält man:}$$

$$\cos W = \pm \frac{AA'+BB'+CC' - [AB'+A'B+AC'+A'C+BC'+B'C] \cos \omega}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} - 2 (AB+AC+BC) \cos \omega \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2} - 2 (A'B'+A'C'+B'C') \cos \omega} \dots (25')$$

VIII. Neigungswinkel V zweier Linien.

Die Gleichungen der beiden Linien seien:

$$L \dots \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{z}{c} + \frac{x}{d} = 1 \\ \frac{y}{e} + \frac{z}{f} = 1 \end{cases} \quad L' \dots \begin{cases} \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1 \\ \frac{z}{c'} + \frac{x}{d'} = 1 \\ \frac{y}{e'} + \frac{z}{f'} = 1 \end{cases}$$

so werden die parallelen Linien durch den Ursprung die Gleichungen haben :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{b}{a} x = p x & y &= -\frac{b'}{a'} x = p' x \\ z &= -\frac{c}{d} x = q x & z &= -\frac{c'}{d'} x = q' x. \end{aligned}$$

Wir schneiden nun auf den beiden Linien (Fig. 3) zwei beliebige Stücke r und r' ab, und verbinden die erhaltenen Endpunkte, deren Coordinaten ξ , $p\xi$ und $q\xi$ in der einen, und ξ_1 , $p_1\xi_1$, $q_1\xi_1$ in der andern Linie seien. Um die Distanz R dieser Punkte zu berechnen, dient die Gleichung (16)

$$R = \sqrt{\delta^2 \xi^2 + \delta \eta^2 + \delta \zeta^2 + 2 \cos \varphi (\delta \xi \delta \eta + \delta \xi \delta \zeta + \delta \eta \delta \zeta)}$$

In unserem Falle ist

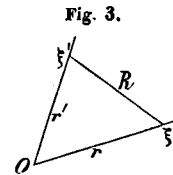


Fig. 3.

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \xi_1 - \xi \\ \delta\eta &= p_1\xi_1 - p\xi \\ \delta\zeta &= q_1\xi_1 - q\xi, \text{ daher} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2 &= \xi_1^2(1+p_1^2+q_1^2) - 2\xi\xi_1(1+2pp_1+2qq_1) + \xi^2(1+p^2+q^2) \\ \delta\xi\delta\eta + \delta\xi\delta\zeta + \delta\eta\delta\zeta &= \xi_1^2(p_1+q_1+p_1q_1) - \xi\xi_1(p+p_1+q+q_1+p_1q+pq_1) + \xi^2(p+q+pq). \end{aligned}$$

Diese Werthe in die Gleichung:

$$R^2 = \delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2 + 2 \text{Cos } \varphi (\delta\xi\delta\eta + \delta\xi\delta\zeta + \delta\eta\delta\zeta)$$

hinein gesetzt erhält man mit Berücksichtigung, dass

$$\begin{aligned} r^2 &= \xi^2 [1+p^2+q^2+2 \text{Cos } \varphi (p+q+pq)] \text{ und} \\ r_1^2 &= \xi_1^2 [1+p_1^2+q_1^2+2 \text{Cos } \varphi (p_1+q_1+p_1q_1)] \text{ ist,} \end{aligned}$$

$$R^2 = r^2 + r_1^2 - 2\xi\xi_1 [1+pp_1+qq_1+ \text{Cos } \varphi (p+p_1+q+q_1+p_1q+pq_1)].$$

Es ist aber auch $R^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \text{Cos } V$, also

$$\begin{aligned} rr_1 \text{Cos } V &= \xi\xi_1 [1+pp_1+qq_1+ \text{Cos } \varphi (p+p_1+q+q_1+p_1q+pq_1)], \text{ und quadriert} \\ [1+p^2+q^2+2 \text{Cos } \varphi (p+q+pq)] [1+p_1^2+q_1^2+2 \text{Cos } \varphi (p_1+q_1+p_1q_1)] \text{Cos}^2 V &= \\ &= [1+pp_1+qq_1+ \text{Cos } \varphi (p+p_1+q+q_1+p_1q+pq_1)]^2 \\ \text{Cos } V &= \pm \frac{1+pp_1+qq_1+ \text{Cos } \varphi (p+p_1+q+q_1+p_1q+pq_1)}{\sqrt{1+p^2+q^2+2(p+q+pq)} \text{Cos } \varphi \sqrt{1+p_1^2+q_1^2+2(p_1+q_1+p_1q_1)} \text{Cos } \varphi} \dots (26) \end{aligned}$$

Stellt man statt ppq_1q_1 wieder ihre Werthe her, so erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Cos } V &= \pm \frac{1 + \frac{bb'}{aa'} + \frac{cc'}{dd'} + \text{Cos } \varphi \left(-\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} - \frac{c}{d} - \frac{c'}{d'} + \frac{bc'}{ad'} + \frac{b'c}{a'd} \right)}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{d^2} + 2 \left(-\frac{b}{a} - \frac{c}{d} + \frac{bc}{ad} \right) \text{Cos } \varphi} \sqrt{1 + \frac{b'^2}{a'^2} + \frac{c'^2}{d'^2} + 2 \left(-\frac{b'}{a'} - \frac{c'}{d'} + \frac{b'c'}{a'd'} \right) \text{Cos } \varphi} \\ \text{Cos } V &= \pm \frac{aa_1 dd_1 + bb_1 dd_1 + aa_1 cc_1 + \text{Cos } \varphi [a_1 bc_1 d + ab_1 cd_1 - dd_1 (a_1 b + ab_1) - aa_1 (cd_1 + c_1 d)]}{\sqrt{a^2 d^2 + b^2 d^2 + a^2 c^2 + 2ad (bc - ac - bd)} \text{Cos } \varphi \sqrt{a_1^2 d_1^2 + b_1^2 d_1^2 + a_1^2 c_1^2 + 2a_1 d_1 (b_1 c_1 - a_1 c_1 - b_1 d_1)} \text{Cos } \varphi} \\ \text{Cos } V &= \pm \frac{aa_1 cc_1 + aa_1 dd_1 + bb_1 dd_1 + \text{Cos } \varphi [acd_1 (b_1 - a_1) - ad (a_1 c_1 + b_1 d_1) + bda_1 (c_1 - d_1)]}{\sqrt{a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 d^2 - 2ad (ac - bc + bd)} \text{Cos } \varphi \sqrt{a_1^2 c_1^2 + a_1^2 d_1^2 + b_1^2 d_1^2 - 2a_1 d_1 (a_1 c_1 - b_1 c_1 + b_1 d_1)} \text{Cos } \varphi} \dots (27) \end{aligned}$$

Man erhält $\text{Cos } V$ durch die andern Parameter der Linien ausgedrückt, wenn man die Buchstaben $a \ b \ c \ d \ e \ f \ a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1 \ e_1 \ f_1$ übergehen lässt in

$$\begin{aligned} c \ d \ e \ f \ a \ b \ c_1 \ d_1 \ e_1 \ f_1 \ a_1 \ b_1 \\ e \ f \ a \ b \ c \ d \ e_1 \ f_1 \ a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1 \end{aligned}$$

$$\text{Cos } V = \pm \frac{cc_1 ee_1 + cc_1 ff_1 + dd_1 ff_1 + \text{Cos } \varphi [cef_1 (d_1 - c_1) - cf (c_1 e_1 + d_1 f_1) + dfc_1 (e_1 - f_1)]}{\sqrt{c^2 e^2 + c^2 f^2 + d^2 f^2 - 2cf (ce - de + df)} \text{Cos } \varphi \sqrt{c_1^2 e_1^2 + c_1^2 f_1^2 + d_1^2 f_1^2 - 2c_1 f_1 (c_1 e_1 - d_1 e_1 + d_1 f_1)} \text{Cos } \varphi} \dots (28)$$

$$\text{Cos } V = \pm \frac{aa_1 ee_1 + bb_1 ee_1 + bb_1 ff_1 + \text{Cos } \varphi [aeb_1 (f_1 - e_1) - be (a_1 e_1 + b_1 f_1) + bfe_1 (a_1 - b_1)]}{\sqrt{a^2 e^2 + b^2 e^2 + b^2 f^2 - 2be (ae - af + bf)} \text{Cos } \varphi \sqrt{a_1^2 e_1^2 + b_1^2 e_1^2 + b_1^2 f_1^2 - 2b_1 e_1 (a_1 e_1 - a_1 f_1 + b_1 f_1)} \text{Cos } \varphi} \dots (29)$$

IX. Neigungswinkel Ψ der Axe der z gegen die Ebene XY.

Dieser ist gleich dem Winkel, welchen die Axe der z ($y = 0, x = 0$), mit der Linie $x = y, z = 0$ macht. Die Gleichungen dieser Linien können auch so geschrieben werden:

$$L \dots \begin{cases} \frac{x}{\infty} + \frac{y}{1} = 0 \\ \frac{z}{\infty} + \frac{x}{1} = 0 \end{cases} \quad L' \dots \begin{cases} \frac{x}{1} - \frac{y}{1} = 0 \\ \frac{z}{1} + \frac{x}{\infty} = 0 \end{cases}$$

folglich ist in diesem Falle: $a = \infty \quad a_1 = 1$
 $b = 1 \quad b_1 = -1$
 $c = \infty \quad c_1 = 1$
 $d = 1 \quad d_1 = \infty.$

Es werden also in dem Ausdrucke (27) im Zähler alle Glieder gegen jene verschwinden, welche den Factor acd_1 haben, also ist

$$\begin{aligned} \text{Cos } \psi &= \pm \frac{acd_1(b' - a') \text{Cos } \varphi}{\sqrt{a^2c^2 \vee d_1^2(a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \text{Cos } \varphi)}} = \pm \frac{(a_1 - b_1) \text{Cos } \varphi}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \text{Cos } \varphi}} = \\ &= \pm \frac{2 \text{Cos } \varphi}{\sqrt{2 + 2 \text{Cos } \varphi}} = \pm \frac{2 \text{Cos } \varphi}{\sqrt{2 + 2(2 \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi - 1)}} = \pm \frac{2 \text{Cos } \varphi}{\sqrt{4 \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi}} = \pm \frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos } \frac{1}{2} \varphi}. \end{aligned}$$

Ist $\varphi < 90^\circ$, so ist auch ψ kleiner als 90° , also $\text{Cos } \psi$ positiv, daher gilt

$$\text{Cos } \psi = \frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos } \frac{1}{2} \varphi} \dots \dots \dots (30)$$

Für $\varphi = 90^\circ$ folgt $\text{Cos } \psi = 0, \psi = 90^\circ$

Für $\varphi = 120^\circ: \text{Cos } \psi = \text{Cos } (90 + 30) = -\sin 30^\circ$
 $\text{Cos } \frac{1}{2} \varphi = \text{Cos } 60^\circ = +\sin 30^\circ$ } folglich $\text{Cos } \psi = -1$ und $\psi = 180^\circ.$

Um φ aus ψ zu berechnen hat man aus (30)

$\text{Cos } \psi \cdot \text{Cos } \frac{1}{2} \varphi = 2 \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi - 1$, also

$$\text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \text{Cos } \psi \text{Cos } \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2}$$

$\text{Cos } \frac{1}{2} \varphi = +\frac{1}{2} \text{Cos } \psi \pm \sqrt{\frac{1}{4} \text{Cos}^2 \psi + \frac{1}{2}}$, und da für $\psi < 90^\circ$ das obere Zeichen gelten muss

$$\text{Cos } \frac{1}{2} \varphi = \frac{\text{Cos } \psi}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{\text{Cos}^2 \psi + 9 - 1} = \frac{\text{Cos } \psi}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{9 - \text{sin}^2 \psi} = \frac{1}{4} [\text{Cos } \psi + 3 \sqrt{1 - \frac{1}{9} \text{sin}^2 \psi}].$$

Setzt man nun $\sin \Theta = \frac{1}{3} \sin \psi \dots \dots \dots (31)$

so ist $\text{Cos } \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{4} [\text{Cos } \psi + 3 \sqrt{1 - \text{sin}^2 \Theta}]$, oder

$$\text{Cos } \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{4} (\text{Cos } \psi + 3 \text{Cos } \Theta) \dots \dots \dots (32)$$

X. Neigungswinkel ω der Coordinat-Ebenen XZ und YZ.

Diesen können wir nach (25) berechnen.

Die Gleichung von YZ ist $\dots \dots \dots x = 0$

von XZ „ $\dots \dots \dots y = 0$

folglich ist hier $A = 1$, $B' = 1$, und alle übrigen Coefficienten $= 0$, daher

$$\text{Cos } \omega = \pm \frac{-\text{Cos } \varphi}{\sqrt{1+\text{Cos } \varphi} \sqrt{1+\text{Cos } \varphi}} = \frac{\text{Cos } \varphi}{1+\text{Cos } \varphi} \quad \dots \quad (33)$$

Um φ durch ω auszudrücken, hat man aus der letzten Gleichung

$$\text{Cos } \varphi = \frac{\text{Cos } \omega}{1-\text{Cos } \omega} = \frac{\text{Cos } \omega}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega} \quad \dots \quad (34)$$

$$2 \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi = 1 + \frac{\text{Cos } \omega}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega + 2 \text{Cos}^2 \frac{1}{2} \omega - 1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega} = \frac{2-1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega}, \text{ also}$$

$$\text{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2} \omega} \quad \text{und} \quad \text{Cos} \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \omega} \quad \dots \quad (35)$$

Um endlich ψ durch ω auszudrücken, substituirt man (34) und (35) in (30) und erhält

$$\text{Cos } \psi = \frac{\text{Cos } \omega}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \omega} \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \omega = \frac{\text{Cos } \omega}{\sin \frac{1}{2} \omega} \quad \dots \quad (36)$$

III. Osteologia degli Orsi fossili del Veronese

con un Saggio sopra le principali Caverne del Distretto

di Tregnago.

Lavoro del

Dottore Abramo Massalongo,

Veronese.

Presentato li 7. Gennajo 1851 nella seduta dell' I. R. Istituto Geologico.

Parte Prima.

Fra le moltissime vallate che solcano la parte settentrionale della Provincia Veronese, niuna per certo toccò a più alto grado di rinomanza, per copia di naturali ricchezze, dei contorni della Valle di Tregnago, capoluogo del Distretto di questo nome, situato a 15 miglia al Nord-Est della città di Verona e basterà solo il nome di Bolca senza dire delle magnifiche colline basaltiche delle Vestene, della valle dei Stanghellini per provare la mia asserzione.

Componesi detto Distretto di sette Comuni amministrative e 29 censuarie; ed ha una superficie di 185,349 pertiche censuarie con 12688 abitanti, due quinti dei quali appartengono alle popolazioni alemanne.

Confina all' Est per mezzo di S. Giovanni Illarione col Vicentino, a settentrione col Tirolo Italiano, al Sud' ovest col resto della Provincia Veronese. E' attraversato nel mezzo da un ruinoso torrente detto Progno d' Illasi (1) che costituisce una di quelle valli formate dalle minori diramazioni delle alpi Retiche, al grande sollevamento delle quali deve la sua origine e forma, modificata poscia in mille guise dalle correnti dell' acque.

La costituzione geologica di questa parte del Veronese, non è così facile a potersi determinare, come a prima giunta potrebbe apparire, e tale e tanto è lo sconvolgimento ed alterazione prodotta dalle eruzioni basaltiche, nelle varie rocce calcaree che ne costituiscono la principale ossatura, da riuscire del tutto malagevole, e spesso impossibile il potere assegnare a ciascun membro di queste formazioni il posto normale che dovrebbe occupare.

Giovandomi però di molte e ripetute osservazioni sulle località meno sconvolte, e sugli attigui e più normali terreni del Veronese; colla scorta di quanto venne pubblicato sulla geologia della alpi Venete dagli illustri geologi CATULLO, PASINI, ZIGNO, MARASCHINI, FORTIS, BREISLACK, POLLINI etc., farò precedere alcune nozioni sulla geognosia di questi luoghi, dei quali impredo a descrivere le più interessanti caverne.

CAPO I.

Colpo d'occhio geognostico (2).

I depositi più bassi del Distretto in discorso, sono costituiti da grossi e potentissimi banchi calcarei di varia natura, più o meno compatti ed arenacei, che si alternano talora con vene di marne argillose, od argille calcarifere, come nella valle Tanara a Badia Calavena, ed alle radici dei monti contornanti i paesi di Giazza e Selva di Progno, oltre che in altri luoghi del Veronese come nella valle Pantena, e quella dell' Anguilla presso Chiesanuova. — Rarissimi sono gli avanzi fossili in questi depositi e vane riuscirono fino ad ora tutte le mie ricerche, se ne eccettuiamo pochi frammenti dei gusci indeterminabili di alcune bivalvi, e qualche logoro esemplare del *Belemnites sulcatus?* che trovai erratici alle radici del botro detto *Minerthal* alle falde occidentali del Monte Zevola poco lungi dal paese di Giazza. — Queste scarse reliquie unitamente alla natura dei depositi che si possono esaminare in appresso, sembrerebbero accennare ai membri più antichi della formazione giurese, e per avventura al periodo liasico.

Succedono a questi banchi, testate ancora di maggiore potenza di calcarei marno-argilliferi per lo più rossastri, o bianco-giallastri, ripieni di frammenti spatichi e particelle cristalline che fanno assumere agli interi depositi una frattura granulosa ineguale, ed un aspetto particolare saccaroide.

Sopportano essi alcuni strati di un calcare biancastro molto compatto, al quale succedono calcari sabbiosi di vario colore e potenza, che si alternano con una specie di calcare corrotto rossastro sul quale poggiano banchi di un calcare compatto a frattura concoidea di colore cinereo, che ha grande analogia col vero marmo litografico, il quale secondo le mie osservazioni si estenderebbe per buona parte del Veronese, trovandolo sparso in forma di ciottoli sui letti di quasi tutti i maggiori torrenti di questa Provincia.

Dopo una tal formazione seguono alcuni grossi strati di calcari marnosi giallastri, talora brecciati da rilegature spatiche, sui quali riposano banchi potentissimi di un bianchissimo calcare oolitico a piccoli grani, dei cui frammenti è coperto tutto il letto del torrente Progno.

Questi depositi che io ho avuto l'agio di esaminare in molti luoghi del Veronese, si possono vedere verso la sommità del Monte Alba in Campofontana, nel Monte Zevola,

e verso la cima del Monte Raut sopra i Capeletti, tra Velo e la Giazza, a Rovere di Velo sino a S. Francesco e sotto a Camposilvano, Malera, Revolto, Pertega etc. e in molti altri luoghi come nella valle dell' Adige sopra Brentino, ascendendo per andare a nostra Donna della Corona, il cui Santuario sta attaccato precisamente alla calcarea oolitica; di più ancora in varie località del Monte Baldo come ad Ime, Groletta, Colonelo e discendendo sopra al Lago di Garda all' est del paese di questo nome: i cui ammassi contornanti questa porzione della riviera Veronese sono tutti costituiti da una bellissima oolite; per cui credo, sarà fuor di dubbio l'epoca geologica alla quale si debbano riferire le rocce costituenti il baccino del Benaco, incontrastabilmente giuresi.

Molto più frequenti sono gli organici avanzi in questi depositi, specialmente alcune specie di Echinodermi come la *Cidaris coronata* comune nella calcarea di S. Francesco, di Rovere di Velo (Barco), alcune *Ananchites*, e massime alcune specie di Polipai e Terebratule che si possono raccogliere in copia nel luogo sopra detto, e a Campofontana (M. Porto), a Velo (M. Raut), alla Giazza (Campostrino, M. Zevola). Più di tutto però vi abbondano le pentacriniti, le quali colle loro reliquie segnarono cinque ovvero sei stratterelli, in tutto dello spessore forse di un metro, i quali costantemente accompagnano le ooliti per tutto il Veronese (3), come si può riscontrare oltrechè nelle località sopra indicate, eziandio nella valle dell' Anguilla, a Chiesanuova (Corbane), in Monte Baldo alla metà della via che dai Spiazzi conduce alla Corona, ad Ime, Groletta, Colonelo, Ortigara di fronte alle montagne dette Bocche di Naole, e sopra il Lago di Garda lungo la strada che da S. Vigilio conduce a Torri.

Sopra ai banchi propriamente detti oolitici seguono altri calcari marnosi, per lo più della stessa natura e colore dei nominati, privi però di ooliti, con varii polipai riferibili ai generi *Meandrina* ed *Astrea* etc., alternanti con depositi di argille bleu (Vajo del Paradiso a Grezzana) (4) od altri colori, nelle quali non sono rari gli avanzi riferibili ai generi *Isocardia* e *Trigonia* (5), che talora passano anche nelle superiori calcaree testate (6). — Finalmente altri banchi di puro calcare compatto saccarino di diversi colori, coperto dal vero marmo bianco o rosso ammonitico, pone fine alla serie dei depositi giuresi in tutta la Provincia, formandone la cima delle sue maggiori eminenze (7).

Questi ultimi strati costituiti da grandi lastre della potenza di quattro o cinque pollici, di un calcare brecciato, bianco o rosso mattono in alternanza, diviso da sottilissime vene di argille verdognole, bleuastre o rossastre, sono ripieni di un immensa quantità di ammoniti (8), che si possono raccogliere sulle vette del Monte Castello in Campofontana, sul Monte Raut sopra la Giazza, a S. Bortolamio, a Tregnago, sul fianco orientale del Monte Belocca, in molti luoghi del paese di Velo (Lastrare, Corradi, Valli, Bettola, Gozze etc.), a Saline (Nalzari), al Cero, a Chiesanuova, in moltissimi luoghi della valle Pantena, e per quasi tutte le vette de' monti Lessini, e M. Baldo (sopra la chiesa della Madonna della Corona e ai Spiazzi) e lunghesso tutta la costa Veronese del

Lago di Garda, le cui rive sono costituite da questo stesso calcare in strati fortemente inclinati (70 grad.) e talora quasi verticali (Pai) (9).

I più antichi depositi cretacei della valle in discorso, se non erro, sono formati da banchi di calcari marnosi di varia potenza, più o meno compatti e talora corrotti, interseccati da focacce di argille screziate che si possono osservare sui fianchi di molte delle nostre minori colline; sopportano essi un calcare di colore bianco latteo disposto in strati più o meno potenti che talora vedonsi ad immediato contatto delle ultime formazioni juresi.

Questa roccia chiamata col nome di **Biancone** o marmo majolica (10) e che ha proprie alcune specie di *Ammoniti*, di *Crioceras*, *Aptychus*, *Terebratula*, *Inoceramus*, *Ananchites*, è molto sviluppata per tutto il Veronese di cui forma ordinariamente le minori eminenze. — A Tregnago costituisce per la massima parte le sommità dei monti Precastio e Viacara che lo conterminano, ed estendesi fino a Campofontana, passando per Castelvero (Agujare), Bolca, S. Bortolomio da un lato, Centro, Saline, Piegara, S. Vitale in Arco, Velo dall' altro etc., e vedesi pure in molte situazioni della valle Pantena (Montursi, e Romagnano) della val Policella e di Monte Baldo lungo la strada che conduce alla Ferrara, Meneghei, Gambon, Bocca di Serbiol, Frascalunga sino al Piano della Cenere sopra Avio, e sul Lago di Garda vicino a Torri lungo la strada maestra.

Sopra il **Biancone** propriamente detto vengono altri depositi calcarei, diversi secondo le località: in generale succedono in strati molto sottili bianchi, rosei, grigiastri e talora bituminosi sparsi di piriti, arnioni di selce e frequentissimi alcioni (11), i quali sopportano una roccia di analoga natura, ma scagliosa a frattura inegualissima, quasi sempre del colore rosso di mattone chiamata propriamente col nome di **Scaglia**, la quale unitamente a questo precedente deposito costituirebbe secondo le attuali opinioni dei nostri geologi la vera creta superiore. — Tal roccia si può riscontrare nel paese di Tregnago (Ferrara), a Bolca di fronte al Monte Spilecco sulla strada detta Campo sotto al Monte dei Vinchi, sul Monte Baldo sopra i Spiazzi (Stanga, Pontara), e sulle rive del Garda prima di arrivare a Torri, dove vedesi ad immediato contatto colla vera calcarea neocomiana.

Sui terreni terziarj di questo Distretto ho tenuto parola nel più volte citato mio opuscolo sulla valle del Prognò (pag. 8—12) e numerandone eziandio i fossili più comuni (pag. 17—20) per cui non farò qui che riassumere quanto in quello fu' detto.

Constano essi di due membri principali, cioè del calcare nummolitico in genere superiormente, e di un calcare marno-argilloso giallastro (Preapura) inferiormente. — Le rocce nummolitiche si estendono da Caldiero e Colognola sino al Monte Bolca, passando interrottamente per Tregnago (M. Gardon, Prealta, Curto, Soejo, Belloca) e le Vestene: si veggono molto sviluppate per quasi tutta la parte Nord-Est

del Veronese, nelle Valli Pantena e Policella non escluso il Monte Baldo (Novesa, Novesina, Campione, Acque negre), in quest'ultimo luogo, come pure nei paesi di Velo (M. Purga), Roverè di Velo (Prochsthal, S. Vitale in Arco) formano delle isole molto elevate (12) in mezzo ai depositi juresi (13).

Riposano esse ordinariamente sul calcare marno-argilloso soprannominato privo di organici avanzi, e in qualche località come a Bolca sopra un calcare sabbioso rosastro pieno della *Terebratula polymorpha*, di denti di Squalidi (M. Spilecco, Val Cherpa, M. Troghe), d'articolazioni d'apiocriniti, di granelli di silicato di ferro, e si alternano con altri calcari lamellosi pieni di fossili avanzi (Bolca) e talora eziandio con depositi avventizi di ligniti e di rocce pirosseniche (Bolca, Vestene, Tregnago, M. Baldo, Stanga, Ardefort) (14) come basalti e peperiti (15). — Non essendo mio scopo di dare qui l'intera geognosia del Veronese, ma solo intendendo di dare un'occhiata geologica sopra le principali formazioni di questi monti, dei quali più sotto esamineremo le principali caverne: spero mi vorrà essere il lettore indulgente, se unicamente mi sono tenuto al puro esame della successione e natura delle rocce, siccome quella che più interessava la natura dell'argomento che andiamo a trattare.

CAPO II.

Osservazioni sopra l'origine delle caverne.

Le principali e più numerose caverne di queste valli sono scavate nei depositi juresi o in quelli più antichi della creta inferiore, per lo più sul fianco settentrionale dei monti; e si può dire che se ne incontri una ogni due passi, tanta ne è la frequenza, che io, in solo questo piccolo tratto da me esaminato, ho numerato più di 120 cavità, la minor delle quali contava 20 piedi in lunghezza.

Meno frequenti sono nel terreno della creta, di forma più irregolare forse dovuta alla minore potenza e consistenza degli strati, meno vaste, di più difficile ingresso, quantunque meno prolungate e meno ricche presso noi di fossili avanzi.

Quelle che si riscontrano invece nei terreni di sedimento superiore sono poco vaste, ma molto più lunghe e tortuose, ripiene di ciottoli più arrotondati, e spesso di diversa natura della roccia in cui sono racchiusi: angolose e molto ramificate, e più copiose di incrostazioni calcaree e piene di fangosità e poltiglie.

Molte furono le opinioni dai Geologi emesse per ispiegare l'origine delle caverne, e per avventura molte ancora se ne emetteranno prima che si arrivi a miglior spiegazione.

Esse si trovano attraverso tutte le età geologiche, tanto nelle rocce di trabocco che di sedimento, e variano moltissimo nel numero, nella forma, nella collocazione, e nella vastità. Ciò non ostante sembrano accennare, dicono i Geologi, ad una costanza e probabilmente ad una unità di causa e di origine.

Senza entrare in lunghe discussioni, noterò che coloro, che vogliono il fenomeno delle caverne attribuito ad una causa unica e costante, è come se volessero sostenere con eguali ragioni la formazione degli infiniti botri e frane che si veggono nelle catene dei monti, e l'origine delle valli. — Come queste in fatti devono la loro esistenza a molteplici e svariate cagioni, cioè di sollevamento e avallamento di eruzioni, di terremoti e di scoscendimento etc., così per mio avviso deve essere succeduto rispetto alle caverne, le quali in altro dalle valli non sembrano differire, che nelle dimensioni e nell' avere queste un tetto che manca a quest' ultime. Ne sembrerà strano questo mio paragone, se si voglia riflettere nulla influire nel regno della natura intorno al modo di agire, la diversa scala delle sue operazioni.

Prima di spiegarmi in dettaglio, esaminiamo alla sfugita le principali opinioni dei Geologi su questo proposito, e vediamo quanto plausibilmente si prestino alla soluzione del nostro problema.

Celebre fra le altre è l'opinione del BREISLACK (16), il quale pretese che i gas imprigionati nella terra non avendosi potuto far strada attraverso tutte le rocce, dessero origine a quelle cavità che si dicon caverne; ed osserva che come si formarono tante piccole bolle nelle lave od in altre rocce fuse pella sola azione dei gas, così sopra una scala molto maggiore, si sarebbero formati tutti i vuoti sotterranei.

Ognuno vede che il celebre Geologo corifeo della soluzione ignea del nostro pianeta, non potea a meno di vedere in questa incandescente poltiglia, svilupparsi gran quantità di gas, e quindi gli tornava facile e giusta una tale spiegazione. Ed infatti alcuno non vorrà contrastare che molte caverne esistenti nelle rocce di fusione, non si sieno per simil guisa formate; ma per ammettere un' eguale origine anche delle caverne dei terreni di sedimento, converrebbe supporre le rocce allo stato pastoso, solo stadio nel quale i gas potrebbero avere quella azione che viene loro dal BREISLACK attribuita; per cui altresì tutte queste cavità dovrebbero essere a volte regolari e rotonde. — Pella spiegazione adunque delle caverne a volte acute, o ad altre forme dalla curva in fuori, non si presta l'ipotesi in discorso.

DE LUC dopo avere (Let. a BLUMENBACH N. 3) stabilita l'esistenza dell' elemento acqueo nella parte superficiale della massa terrestre, ammette la precipitazione delle materie che teneva disciolte, e l'infiltrazione del fluido attraverso i depositi; e che quindi ne derivassero le caverne. Questa opinione combattuta anche dal BREISLACK (17), quantunque sotto altro punto di vista, ammette già fatto e prodotto quello che vogliamo spiegare. Supponendo ammassi d'acqua con materie disciolte nella massa terrestre, si ammettono esistenti cavità che danno ricetto a poltiglie. Ma è appunto come si sieno esse formate, che noi cerchiamo indagare, e non come scomparissero le acque, che potranno benissimo essersi separate infiltrando.

Non altrimenti non ragionarono quelli che ammettevano grandi ammassi di sale dalle acque disciolti, poco importando che la materia fosse sale o poltiglia. Altri in fine ammisero grandi correnti acide di acqua, la cui azione erosiva, distruggendo la

roccia calcarea, formassero queste cavità. — Ma questa ipotesi accarrezzata da molti non mostra, come osserva MARCEL DE SERRES (18), proporzionato alla causa l'effetto. Dipiù le correnti cariche di acido carbonico anzichè formare o aggrandire le cavità sotterranee, dovrebbero di molto avere contribuito alla loro ostruzione od impiccolimento.

Più giudiziose e ragionevoli furono le opinioni del BOUÉ (19), del DE VIRLET (20), di BEUDANT (21), COLLEGNO (22), MARCEL DE SERRES (23), del CURIONI (24) etc. i quali ammisero che molte fossero le cause che presciedettero alla produzione di questo fenomeno, cioè i sollevamenti e avallamenti, la diversità di durezza nelle rocce, i slogamenti, piegature, sfaldamenti, terremoti, eruzioni vulcaniche, correnti erosive, e via discorrendo. — Dovrà però il Geologo, osservatore sulle località stesse delle caverne studiando e facendo astrazione da particolari e accidentali circostanze, esaminare se più a questa che a quella cagione o a più insieme si debba attribuire una speciale caverna. — Così io ho creduto di fare nella descrizione delle caverne del Veronese. Dopo un' accurato e minuzioso esame di ogni parte di una determinata spelonca, della natura della roccia che la costituisce, della sua posizione e relazione, attribuendo ora all' una, ora ad un' altra ragione il fenomeno che volea spiegare, ed eliminando quelli che non mi presentavano effetti corrispondenti alla causa supposta, parvemi di arrivare con questo metodo analitico meno discosto dal vero. — Ed è perciò che dopo la descrizione di ciascuna caverna mi riservo d'indagare la causa che possa averla prodotta.

CAPO III.

Caverne della Comune di Velo.

C o v o l i d i C a m p o s i l v a n o. Tav. VI.

L'antichissimo paese di Velo capoluogo una volta dei Tredici Comuni ha nei suoi monti escavate parecchie interessanti caverne, sia pella loro costituzione geologica, che pegli avanzi fossili che in gran copia racchiudono. Io mi limiterò alla sola descrizione delle principali, per non allungarmi di troppo col presente lavoro.

Nell' amenissima, Camposilvano frazione del suddetto Comune poco sopra da esso, dopo estesissimi pascoli interotti da ammassi stratificati di un calcare bianco conchigliifero (Tarochi), che a guisa di grandi gradinate emerge nudo dal suolo, qui e colà sparsi da rustici casolari e da mandre, si entra in una vasta prateria circondata da verdeggianti pini e foltissimi faggi, alla metà della quale giace la caverna che ora andiamo a descrivere. Mette in essa una specie di atrio formato da due grandi pilastri isolati di calcare ammonitico, con alcune piante di pino sui lati, che quasi ad arte sembrano ivi regolarmente cresciute a renderne più maestoso l'ingresso. Appena entrati per esso non vi ha chi non rimanga attonito dal vedersi stendere a cerchio dinanzi agli occhi a guisa di anfiteatro per bene 741 piedi un grosso muro di strati calcarei dell' altezza di 113 piedi.

Il parterre ingombro da grossi ammassi parallelepipedi che forse ne costituivano la volta, è fatto a guisa di conca del diametro di 120 piedi. E esso è inclinato leggermente al Nord-Est, e sempre più abbassandosi mette nel vero ingresso della caverna che è formato da un arco di 170 piedi di corda sopra 25 circa di saetta (25). Si entra nella caverna per un grande declivio fatto a guisa di cono, formato da frammenti angolosi calcarei di varie forme, e di maggiore o minore volume, il quale dal piano superiore dell'anfiteatro al parterre della caverna misura 207 piedi in altezza.

L'interno è costituito da un semicerchio che per la lunghezza di bene 600 (26) piedi si protende ed inoltra dalla parte orientale, formato da grandi e grossi strati calcarei juresi più regolari verso il tetto ed il fondo della caverna che nel mezzo. Essa è alta più di 100 piedi, ed ha la volta fermata da grossi e grandi quadroni a guisa di tegole, quasi privi affatto di incrostazioni stalattitiche. Il fondo è tutto coperto da non minori ammassi per un evidente successione caduti, i quali rendono impossibile di esaminare il sottoposto materiale onde scoprirne i fossili avanzi in esso forse racchiusi.

Tale caverna è aperta nei depositi più bassi juresi, probabilmente nel gruppo oolitico. Evidentemente queste due cavità ora divise, e disgiunte in due piani, cioè quello dell'anfiteatro superiore, e quello della caverna propriamente detta, inferiore, altro non erano in origine che una sola caverna prodotta da un' unica e medesima causa, e che in seguito per cause posteriori, come sarebbe una violenta succussione, forse quella che erigeva la montagna, crollarono le volte della prima più deboli e superficiali, e si sconnessero quelle della seconda, le quali più solide potevano ancora rimanere al posto primiero.

In molti altri luoghi di questo Distretto si osservano grandi depressioni fatte a guisa di conca o bacino, costituite da strati calcarei, piegati in giro e convergenti ad un punto, e tale sarebbe per esempio la Valsquerza in questo stesso paese, la quale altro non è che un bacino formato dallo innalzamento in giro, di un lato degli strati che formano le eminenze dette Zehnthal, Corradi, Campene, Teze, dei Norderi e Lastrare. — Così pure quella conca non meno vasta, che si protende in mezzo alle montagne dette le Gozze. Nel paese poi di Roverè di Velo un tale fenomeno è ancora più frequente, e basterà visitare i monti Malera, Bagorno, Pigarol, Grola, Porcarina etc. per rimanere convinti; ma più ancora singolare si è che alcune di queste conche, hanno nel mezzo scavato a guisa di pozzi, delle grau fosse, spesso di una profondità ragguardevole, come quella che si osserva in Malera chiamata dai villici Valon, che è profonda più di 140 piedi e larga 40 (27). Similmente anche nel paese di Campofontana nel monte detto Alba, alla cima gli strati sono curvati in giro, e formano quel bacino che è detto dai villici Bocchetta; così alla Giazza sul Monte Zevola, dove una simile depressione costituisce quasi una regolare valletta. — Anche il cono vulcanico del Monte Purga di Bolca è costituito da strati che tutti alle radici convergono; ed insieme con loro sono pure piegati a bacino i depositi delle Ligniti, per cui quelli che le vogliono estrarre, devono praticare molto obliquamente le lor gallerie.

Riesce quindi facile l'immaginare, come le rocce basaltiche sorgendo qui e colà, curvassero i depositi calcarei e in certi luoghi eziandio formassero delle caverne le cui volte pei violenti sollevamenti dei monti in molti luoghi crollarono. — Dette eruzioni dovettero essere anteriori di molto al sollevamento dei monti, che quivi dovette avvenire quando la roccia basaltica era già non solo raffreddata, ma cristallizzata nella forma attuale, e dopo che per lungo tempo dovevano avere dominato le acque sopra queste rocce ancora pastose, senza le quali non si sarebbero formate le brecciole caratterizzate da una fauna speciale (28).

Essendo poi la base dei monti Purga di Bolca, il cono sopra cui giace Vestena Vecchia, il Monte Belocca e Soejo a Tregnago, costituiti da testate calcaree, mentre il cocuzzolo è tutto basaltico, è segno evidente che comparsa la eruzione vulcanica attraverso la roccia calcarea già consolidata, e adagiata sulla sua superficie, ne riempiva talora i vuoti e fenditure dalla sua azione prodotte; quando all' epoca del grande sollevamento alpico spinti gli strati calcarei all' attuale elevazione, seco trasportarono il materiale sovrapposto, il quale scompaginato e sconvolto dal grande conquasso, cadeva qui e colà sui versanti allora prodotti, e solo restava nella primiera normale posizione, quello la cui forza risultante di gravità cadeva nel centro della forza impellente. Ecco quindi come si sieno formati quegli immensi depositi di slogati basalti sotto alla Purga di Bolca del lato settentrionale, del Monte Belocca, da quello occidentale; ecco perchè le colonne basaltiche si trovino così svariatamente inclinate a Bolca, nelle Vestene, a Tregnago, a Roverè di Velo, a S. Giovanni Illarione, appunto a norma della diversa direzione della forza impellente, combinata colla gravità delle rocce incombenti.

Ritornando quindi a ciò che fa più al nostro scopo, risulta, che le rocce vulcaniche furono la principale cagione della formazione di quelle conche e caverne, gran parte delle quali vennero scompagnate e scrollate dalle violenti successioni avvenute all' epoca del sollevamento di queste montagne.

Covoli di Velo. Tav. VI.

In un botro del Comune di Velo che mette nel cuore della valle di Badia Calavena sopra a Selva di Progno, giacciono le rinomate caverne ossifere di questo Comune, scavate dal lato settentrionale dei monti, nei depositi del giura *). Sono esse le più interessanti della Provincia Veronese, e quelle che sin qui, più di ogni altra hanno meritata l'attenzione degli studiosi. La prima scoperta di queste caverne asserisse il POLLINI (29) doversi al FESTARI, quantunque come osserva il Professore CATULLO (30) negli scritti editi ed inediti di questo autore da lui posseduti, non si trovi cenno veruno di tale caverna.

*) Il Chiar. Prof. CATULLO le pone nella Calcarea Neocomiana.

Gli illustratori della Provincia Veronese non mancarono di farne menzione, come ALESSANDRO CARLI (T. 7. pag. 222), SCIPIONE MAFFEI (Veron. illust. Vol. 4. c. g. VII. pag. 407.) (31), SERAFINO VOLTA (Itt. Ver. par. I. Cap. 3. pag. 46. §. 48.) (32), CIRO POLLINI (Viaggio al lago di Garda pag. 57.) (33).

Quelli però che più d'ogni altro la illustrarono furono l'Abate FORTIS (34) e frat-tutti il Profess. CATULLO, al quale ne dobbiamo la più completa illustrazione anche dal lato paleontologico nella dottissima sua memoria sulle caverne delle Provincie Venete (35). Ma come pella descrizione si riporta a quanto gli venne scritto dal Protomedico AVONI, il quale esaminò superficialmente questi luoghi, così credo non riescirà discaro se io rettificando quanto fu detto, aggiungerò una più minuta descrizione, onde poter così con più facilità condurre il naturalista alla scoperta degli avanzi fossili in esse rinchiusi.

Sei sono i fori d'ingresso, che mettono in questa caverna A. B. C. D. E. F (36). Il primo a sinistra A è largo 18 piedi ed alto $6\frac{1}{2}$ ed è l'ingresso di una speciale caverna isolata, che non comunica colle altre. Essa è la più interessante di tutte, trovandosi in essa la maggior copia di avanzi fossili. Dall' ingresso si procede per un canale della stessa grandezza ed altezza per 36 piedi, sino che si arriva ad una specie di arco alto 4 piedi e largo 9, passato il quale diviene esso sempre più ampio (15 piedi largo e 12 alto) e segue leggermente abbassandosi per bene 120 piedi. Il piano di questo tratto è tutto seminato di ciottoli angolosi, della stessa natura delle rocce costituenti i monti vicini; spoglie sono le volte di incrostazioni e regolarmente e orizzontalmente stratificate le pareti. Dopo questo tratto, il fondo della caverna comincia ad elevarsi un poco e crescendo in tutte le dimensioni tira avanti per 78 piedi, dopo i quali diviene impraticabile pella gran copia di compatto terriccio che quivi vedesi depositato, e pare abbia fine. Egli è in questo terriccio della potenza ora di un metro, che si rinvencono gli avanzi fossili dell' orso delle spelonche, che però l'indagatore troverà più copiosi a mano sinistra, in una specie di promontorio formato da terriccio egualmente, e da un gran numero di grosse scaglie e ciottoli calcarei. Quivi io ho rinvenuto il maggior numero di quelle ossa delle quali più sotto darò la descrizione. Queste particolarità di trovarsi le ossa solo nel limo misto a rocce frammentarie, mentre quasi ne sono privi i terricci più puri, è un fatto assai rimarchevole e notato da molti Geologi (MARCEL DE SERRES: „Essai sur les Cavernes“ p. 8.), e a tale costante, da servire d'indizio sicuro nella scoperta dei fossili avanzi.

Il fondo della caverna è come dissi, curvo nel mezzo a guisa di barca, e vedendosi al presente solo la estremità superiore piena di terriccio conviene dire, che tutta la caverna ne fosse ripiena ad eguale livello, altrimenti non avrebbe potuto depositarsi nelle parti più alte ed oblique. Ed appunto era così, ma venne esso estratto da alcuni lavoratori di Nitri (37) per cavare questo sale di cui è eminentemente fornito. Il suo colore è rosso scuro che diviene nero coll' azione del fuoco esposto all' aria, lasciando sfuggire

dei vapori ammoniacali. Sottoposto all' azione prolungata dell' acqua destillata bollente, abbandona una discreta quantità di materie organiche azzotate insolubili nell' Alcool. Esso dovette essere allo stato di una fluidità ed omogeneità accessiva, perchè si trova penetrato fra le più piccole fessure degli strati della caverna, anzi riempì perfino le più piccole cavità, i più piccoli fori delle ossa che ravvolge; il che oltresi fa vedere, che le ossa all' epoca che furono trascinate da queste correnti fangose, erano già smidollate e secche, e che quindi gli animali erano da molto tempo prima periti. Oltre di che trovandosi delle ossa come si è detto più sopra, miste a rocce frammentarie assai pesanti, ne viene, che non dovessero esse venire da lungi, e che probabilmente vivessero gli animali poco discosti dalle località dove si trovano sepoliti.

Si rinvennero esse quivi alla rinfusa sparpagliate e sconnesse, più o meno logore pell' attrito subito; però non è raro di trovare qualche esemplare molto ben conservato, il che fece supporre al Professore CATULLO (38) che queste dovessero appartenere ad animali quivi rifuggitisi, mentre le logore sarebbero dalle superiori caverne derivate.

Il secondo ingresso B a sinistra è più elevato del primo: esso è largo 18 piedi ed alto 8; il terzo C è largo 9 piedi ed alto 5; il quarto D è alto 5 piedi e largo 3 di forma ellittica e mette nella terza apertura; il quinto E è più basso di tutti ed è alto 3 piedi e 9 oncie, e largo 1 piede e 9 oncie, e prolungasi per soli sei piedi, dopo i quali finisce all' aperto sull' atrio del sesto ingresso F che è largo 7 piedi $\frac{1}{2}$ e alto 2 e 5 oncie, per cui la porzione di roccia intermediaria all' ingresso E.F rassomiglia ad un grande pilastro.

Entrando pel secondo foro B, a destra dell' osservatore, un pò dal lato posteriore, si vedono due cavità che finiscono tosto; fatti 42 piedi si procede per una grande apertura a volta (larga 12 piedi ed alta 13) che va alzandosi a guisa di sala, e si divide in altri due canali; il primo dei quali a destra finisce dopo 10 piedi, il secondo a sinistra dopo 36, mantenendosi alto 5 piedi e largo 4. Partendo dal principio di questi due nominati canali, cioè al punto dove si sono numerati i 42 piedi, a destra vedesi una sala a volta, nella quale mettono foce i due ingressi C.D, i quali pure appena passati entrano a costituire l'ampiezza di questa cavità, che sembra formata da tre grandi irregolari arcate, portati da un oblungo pilastro. Essa procede così allargandosi e restringendosi per 54 piedi, dopo i quali la cavità sembra divisa da una colonna, ed assume l'aspetto di un arco (alto $6\frac{1}{2}$ e largo 6) per il quale si procede per altri 24 piedi, ed alla fine sembra il canale dividersi in due altri; il primo a destra finisce tosto ed è molto angusto, quello a sinistra (alto 7 piedi e largo 6) segue restringendosi per 30 piedi, dove diviene della larghezza di 5 ed altezza di 4 senza finire, anzi prolungandosi ancora per altri 48 piedi, dopo i quali diviene più angusto (alto $3\frac{1}{2}$), e piegandosi per il tratto di 6 piedi a destra in un canale dell' altezza di 4 piedi, va oltre per bene altri 30.

Quivi giunti la caverna dividesi in due canali. Il primo a destra (alto 5 piedi) inoltrasi per 30, ed innalzasi, e alla fine si divide in due altri canali (a, b): il

destro (a) gira innalzandosi per bene 77 piedi, dove finisce allargandosi. Il sinistro (b) alto e largo 6 piedi si inoltra divenendo più ampio per 24 piedi, dove si divide in tre fori, dei quali il sinistro mette nel primo maestro. Il secondo a sinistra si divide in quattro canali. Di questi il destro è quello descritto, il secondo da questo stesso lato, finisce tosto, il terzo allargasi e s' inoltra per 33 piedi.

Questa cavità prende il nome *d'Incudine* perchè è fama quivi abitassero falsi monetarj, anzi nel sasso di mezzo vedesi scalpellato un foro quadrato dove era infisso questo stromento, e le pareti della caverna sono ancora affumicate pel fuoco che quivi alimentavasi. Questo canale si divide in due altri che ascendono, il destro per 30 piedi, il sinistro per 24. Procedendo per il quarto a sinistra dei quattro fori superiori per circa 72 piedi, questo canale si divide in due novellamente, dei quali il sinistro, detto *Buso del Gatto*, è alto 14 oncie e largo 4 piedi e mezzo, nulla ostante sia stato ampliato per farvi entrare un illustre personaggio. Il destro (alto 4 piedi e largo 5) s' inoltra per 12 piedi, e piegandosi a sinistra corre per altri 30, sempre più restringendosi, e finalmente diriggendosi a destra per 33 piedi di lunghezza finisce mantenendosi alto due piedi e mezzo e largo 4.

Il *Buso del Gatto*, pel quale si deve passare strisciando, è lungo 18 piedi. Mette in una sala lunga 66 piedi, alta 10 la quale sembra non avere ulteriore avanzamento; però a livello del suolo a mano destra una fenditura orizzontale larga 7 piedi ed alta 3, annunzia un'altra caverna, la quale è alta 27 piedi, larga 9 e lunga 18. Quivi è perenne lo stillicidio, e sono ornate le volte ed il fondo così in questa come nell' antecedente cavità, da bellissime stalaliti e stalagmiti. — Quivi è la fine di questa tortuosa caverna che misurata in linea seguente pel canale maestro conterrebbe 414 piedi di lunghezza. Il suolo di tutti questi canali è sparso di un polveroso terriccio, meno copioso che nella caverna A, e più uniformemente sparso di ciottoli parte stranieri alla caverna e parte caduti dalle volte, che arcuate e rotonde, e tutte sgrettolate, senza tracce di incrostazioni. Chi praticasse quivi qualche scavo troverebbe molti avanzi dell' Orso delle Spelonche, ma non mai tanto copiosi come nella prima caverna (A).

Io visitava l'ultima volta questo luogo al 7 Settembre 1849 in compagnia del mio carissimo amico Matteo CONSOLATI, che si compiacque di meco visitare tutte le caverne quivi descritte, ed alla gentilezza del quale devo il disegno di tutte le ossa qui figurate, riferibili alle due specie di Orso delle Spelonche, cioè quello a fronte convessa, e quelle a fronte piatta (*Ursus Spelueus*, e *Arctoideus*) che io non ho trovato mai nelle molte ricerche che feci, misto ad avanzi di altri animali, quantunque il Prof. CARULLO dichiarò di avere quivi rinvenuto resti di carnivori a molari cuspidati (Sulle caverne delle Provincie Venete pag. 54).

Covolo di sotto.

Poco sotto alle descritte caverne un nuovo spacco orizzontale, la cui maggiore altezza è di 4 piedi e larghezza di 23, mostra l'ingresso di un'altra spelonca, la quale è

lunga soli 40 piedi, della forma di un triangolo, colla base all'ingresso, e divisa nel mezzo da una colonna. Questa Grotta è detta *Covolo di sotto*.

Tana delle sponde.

Molte altre cavità per lo più angolari si veggono in questo stesso monte o superiori o inferiori alle descritte, ma non ne farò menzione pel poco interesse che presentano. Solo non posso a meno di ricordare una caverna, che sta di fronte alle descritte, e che forse era a queste riunita, sull'altra riva del botro nominato, e ciò per un fenomeno particolare che presenta. — È essa scavata in un calcare di eguale formazione delle antecedenti sul fianco meridionale del monte, e chiamasi *Buso della Croce*, e *Tana delle Sponde*. — Ha un ingresso della larghezza di 14 piedi e altezza di 4 e mezzo. La sua forma è quella della cifra arabica 7 colla branca orizzontale rivolta a destra. La cavità che costituisce la branca verticale è lunga 60 piedi, e in certi luoghi alta 20 ed ingombrata da grossi quadroni caduti — quella della branca orizzontale è lunga 80 piedi ed ha la volta fatta a cupola. Nel suo mezzo sorge un cono regolare dell'altezza di 70 piedi, formato da scoglie, ciottoli, e terra, legati insieme dall'incrostazione stalagmitica, e pare, che perfettamente corrisponda al vuoto conico della volta, la quale quantunque maggiore, ha le medesime forme.

A prima giunta sembrerebbe che un tal cono fosse formato pel rilascio delle volte della caverna, ma oltre che allora dovrebbe essere costituito da sole rocce frammentarie senza terra, non si saprebbe come spiegare la forma conica del materiale che è sul fondo della caverna; per cui io penso, che un foro ora ostrutto dalle incrostazioni, nella parte più elevata della cupola, versonne nella caverna tutto quel materiale, il che è molto più ragionevole.

Con mio grave rincrescimento non praticai scavo veruno in quest'ammasso, perchè gli strumenti che meco portava non erano sufficienti a un tale lavoro, che d'altronde sarebbe riuscito oltremodo fecondo, nella scoperta sicura di una grande quantità di ossa fossili.

Ora abbracciando tutte queste cavità insieme, per esaminarne la causa che possa averle prodotte, e trovandole tutte più o meno angolose, è probabile: che queste caverne debbano la loro origine, a violenti successioni e fenditure, attraverso delle quali fattasi strada qualche corrente d'acqua le modificasse nel modo attuale, senza però avere contribuito menomamente al loro riempimento, fenomeno che si vede ripetere da altre cavigioni che esamineremo più sotto.

Così pure io credo che tutte queste cavità tanto sull'uno che sull'altro fianco del botro, fossero tutte prima riunite, e che originatasi questa valletta tutt'altro che per erosione, ne fossero quindi separate e disgiunte. — La curva che si vede nel fianco del monte (nella quale è necessario di penetrare per giungere al vestibolo delle grotte A. B.

C.D.E.F e che sta dirimpetto alla *Tanu delle Sponde*) forse sarà stata parte delle caverne stesse, le quali dopo questa sala si dividevano in tutti quelli cunicoli, che formano gli ingressi attuali.

CAPO IV.

Caverne della Comune di Selva di Progno.

Caverna dei Prusten nel Comune di Giazza.

Giace questa caverna sul fianco verticale di una montagna detta *Schwalbenbant* che impende sopra il paese di Giazza. Senza una guida sarebbe difficile di poter scoprirne l'ingresso, celato da arbusti, e cespugli, e situato dalla parte occidentale del monte, in un sito dei più malagevoli a potervi arrivare.

Essa è scavata nella roccia jurese, ed ha l'ingresso largo 16 piedi ed alto 3½. Appena entrati, si offre un' ampia sala lunga 30 piedi e alta 10 — a dritta essa presenta una specie di porta larga 4 piedi e lunga 10, passata la quale, si entra in un'altra stanza più grande della prima, la quale nella parte inferiore presenta un secondo ingresso che procede più innanzi. Essa è lunga 60 piedi, e alta in certi punti 13, in altri 15 piedi, ed è divisa nel mezzo, in due, da un ammasso caduto che però lascia sopravvedere la continuazione. Segue indi una terza sala lunga 24 piedi, che va sempre innalzandosi e ingrandendo, poscia si restringe e forma un canale lungo 28 piedi, alto 2 e largo 12, che a guisa di fenditura s'innoltra nel monte, e si innalza irregolarmente e tocca perfino all' altezza di bene 80 piedi. Quivi alle radici di questo canale, vi sono tre fori, uno a dritta, che girando dopo breve spazio mette nel mediano, il quale si allarga ed allunga per 40 piedi e finisce; l'altro foro dopo pochi passi è pure al suo termine, che è anche quello della caverna contraddistinto da un grande ammasso di purissima argilla, tenuta molle ed in continuo accrescimento, dallo stillare delle volte superiori tutte screpolate, e che quindi ne lasciano penetrare le acque cariche del materiale del terriccio dei monti superiori. (Lunghezza totale piedi 560.)

Il fondo di questa caverna è tutto limaccioso; e si veggono varj rigagnoli qui e colà manifestarsi nel suo interno e sparire. In qualche angolo pure nelle parti più profonde si veggono dei depositi dovuti ad antiche alluvioni, fra i quali scopersi alcune vertebre, dei molari, ed alcune altre ossa dell' orso delle spelonche. Questo terriccio è coperto altresì da depositi recenti nei quali raccolti ossa umatili di volpi, di pecore e gallinacci, e moltissimi avanzi di una specie di *Sciurus*, probabilmente il *Glis* che in questi monti vive ancora copioso.

La forma che presenta questa spelonca di una gran fenditura, non lascia gran fatto pensare per scoprire la sua origine, e basterà il dire che a due miglia di distanza si veggono le rocce di trabocco.

CAPO V.

Caverne della Comune di Badia Calavena.

Spigola dei Damati.

Questa orribile e più pericolosa caverna che io mai vedessi, giace a Badia Calavena nella valle dei Damati sul fianco settentrionale, ed è aperta nei depositi più superiori del jura, ed entra eziandio in quelli della creta inferiore. Il suo ingresso appena largo 3 piedi e 4 oncie, ed alto un piede e 10 once, è difficilissimo a scoprirsi per cui converrà giovarsi di una qualche guida del luogo. Senza il soccorso di funi, od altri mezzi atti ad assicurare la persona, non si potrà toccare la fine di questa spelonca; e sarà bene altresì di munirsi di un lungo filo onde tracciare la via, perchè altrimenti sarà molto difficile il poterne sortire.

Per entrare conviene gittarsi bocconi e discendere strisciandosi per un canale lungo 18 piedi ed alto $1\frac{1}{2}$ che mette in una piccola stanza (alta 4 piedi e larga 12 e lunga 9) la quale si unisce ad un canale la cui bocca è alta 4 piedi e larga 9. — Quivi si deve discendere per altri 9 piedi per un cunicolo piuttosto stretto (alto due piedi e largo 9) il quale dopo 12 piedi va divenendo sempre più grande (alto 4) e più largo (13 piedi) e indi dopo una restrizione (5 largo 3 alto) si allunga novellamente pel tratto di 21 piede e procede per altri 36 mantenendosi largo 12 piedi $\frac{1}{2}$ e alto 5 per cui si può camminare dritti. — Quivi giunti, detto canale si abbassa e restringe (4 largo e alto 2 $\frac{1}{2}$) e si divide in due fori che tosto si riuniscono dopo 3 piedi. A questo punto vedesi sul suolo un fonte nascente di buonissime acque, le quali scorrendo per buon tratto nella caverna, ne rendono malagevolissimo l'avanzamento, dovendo spesso col ventre strisciare nell'acqua e nella poltiglia chi voglia più innanzi procedere. A un certo tratto, il canale si restringe sifattamente, che difficilmente permette ad un' uomo il penetrarvi, continuando così angusto per 18 piedi, con nel mezzo un ruscelletto d'acqua. Con grande sforzo, ed assottigliandomi della persona, passai anche questo bagno, e mi trovai allora in un canale un poco più vasto, che sempre allargandosi procedeva per 66 piedi. — Alla sinistra di questa cavità divisa in varie celle dalle pendenti stalatiti, vedonsi due fenditure, una sul fondo della caverna, ed un'altra verticale nelle pareti, che si innalza nel monte restringendosi, a perdita di vista.

Questo è il primo passo difficile e pericoloso, e quivi giunti conviene piegarsi a destra dove il foro sul suolo della caverna formando una specie di arco alto 6 piedi e largo 3, permette di procedere per 18 piedi dove si va allargando in una specie di sala lunga pure 18 piedi e alta 12 e larga altrettanto. — Dividesi questa in tre fori, il mediano dei quali è impraticabile, il maggiore diriggesi in senso verticale innalzandosi, il minore discende, ed è largo 13 piedi ed alto 9 e va sempre più sprofondandosi e restringendosi in un cunicolo impraticabile dove finisce. — Per procedere adunque più

oltre conviene ritornare, ed ascendere pel foro verticale superiore, montando per un limaccioso sasso verticale alto 13 piedi.

Superato questo ostacolo, che è più difficile che io non esprimo, si procede piano per 18 piedi in canale affatto irregolare, che dividesi in molti fori, uno dei quali strettissimo discende verticalmente nel centro del monte per 30 piedi. — Questo è il secondo passo difficile, e che non si può superare senza grave pericolo, e senza il soccorso di funi. — Uno dei miei compagni, che imprudentemente vi saltò dentro, credette di più non uscirne. Superato anche questo passo si procede ancora per otto o dieci piedi, dopo di che sotto i piedi dell' osservatore, si apre a guisa di voraggine una vasta caverna, nella quale parrebbe molto difficile, anzi impossibile penetrare senza farsi calare pella profondità di 43 piedi. — Vinto questo tratto che è il più difficile di tutti e penetrati in questo vasto sepolcro, lungo 54 piedi e altissimo, si vedono due grandi cavità una delle quali conica a destra si innalza a guisa di torre nel monte per più di 150 piedi (39) e pella quale è impossibile il potersi sicuramente arrampicare, a cagione della limaciosità di cui sono coperte le pareti. L'altra si abbassa e sprofonda divenendo alta 5 piedi e larga $3\frac{1}{2}$; conviene discendere per questa, che divenendo sempre più bassa si allunga per 54 piedi, dopo i quali finisce.

Il fondo di questa cavità è coperto da una grande e regolare stalagmite, che molto rimbombando sotto i nostri passi, ci fece supporre un' altra sottoposta caverna: alla fine di questa stanza vedesi emergere isolata dal suolo una piccola colonna tronca, cilindrica fatta dallo stilicidio che ora manca quasi del tutto, del diametro di un piede, ed altezza di 3, e pare ad arte formata. — Sopra essa dalla parte di mezzo con mia grande sorpresa vidi incise alcune lettere majuscule latine, e sotto l'anno 1500 (40) ed una croce che parevano appena scolpite.

Tre secoli prima adunque erano penetrati degli altri viventi, ed io perdetti il vanto d'esservi venuto il primiero. — Credei questo segno il non plus ultra, ma esaminando bene le pareti, a destra a livello del suolo scopersi un foro largo 5 piedi ed alto $2\frac{1}{2}$, pel quale tosto penetrarai onde vincere la prova del mio trisecolare predecessore; — procedetti per altri 60 piedi dopo i quali la caverna finisce — anche quivi alcune iniziali e una croce mi resero avvertito che io non era il primo vivente, che venisse a sturbare questi tranquilli recessi.

La sua lunghezza totale misurata per il canale maestro in linea continua è di 532 piedi. — Niun avanzo fossile rinvenni in questa località, forse sotto la grande stalagmite sopra ricordata, giaceranno preziose reliquie, ma il timore di qualche nuovo pericolo nel fenderla, mi consigliò di omettere ogni indagine, lieto solo di potere dopo 5 ore di volontaria sepoltura, vedere novellamente la luce.

Non vi ha chi dopo avere letta la descrizione di questa spelonca, non possa a primo colpo, indovinare, a quale causa debbasi la sua origine riferire. — La forma di una spaccatura, presentata da questa caverna, anzi un aggregato di fenditure, che tutto rendono il seno del monte più o men cavernoso, devono necessariamente condurre a

ravvisare la sconnessione e rottura dei varii strati costituenti l'apertura del monte, quale unica causa dell'origine di questa caverna, ed anche qui potrò additare all'osservatore, a poca distanza le rocce di trabocco alla superficie del suolo.

CAPO VI.

Caverne della Comune delle Vestene.

Grotta della Viera, nella Frazione di Castelvero.

Castelvero, frazione del Comune di Vestena è una Parrocchia di forse 600 anime a quattro miglia da Bolca. — Tutto sconvolto e penetrato dalle rocce pirosseniche non presenta nel seno dei suoi monti che cavità, ed è ovunque più o men cavernoso.

La roccia più antica anche quivi è la calcaria ammonitica e la più recente la calcaria eocena che passa per Bolca. — Però quivi come anche a Bolca sono affatto fuori di luogo, e non è raro vedere per qualche tratto, questa a quella sovrapposta per un violento successivo rovescio. Andrei troppo lungi dal mio proposito, se volessi ad una ad una nominare e descrivere queste caverne, tutte prodotte dalla dislocazione e frattura e spostazione dei varii depositi. — Basterà che faccia cenno della più vasta e grandiosa caverna di questo paese, detta „Grotta della Viera“ meritandolo anche gli avanzi fossili che si possono in essa scoprire.

È situata nella valle dei Ronchi, unica valle che permetta al geologo di potere istituire le sue osservazioni sopra le rocce, che quivi più che altrove, sono ancora nello stato loro normale e naturale. — Quasi alla cima di detta valle negli ultimi strati della calcaria jurese, e nei più antichi della creta inferiore, giace questa caverna, il cui ingresso quantunque lungo 18 piedi ed alto 7, non si rende visibile che allora soltanto che si sia arrivati sull'atrio.

Si apre l'interno di questa caverna a guisa di spaccato teatrale in parecchie arcate che si celano a vicenda, la prima delle quali è larga 60 piedi, la seconda 29 e così decrescendo sempre più si abbassa per un declivio tutto rottami, che ne costituisce il suolo. — Alla fine il suo tetto è costituito da una specie di vasta cupola obblunga ornata di stalatiti, formata dalla caduta di alcuni strati che si veggono ora in frantumi sul suolo. — Poco sotto di questa volta il cielo della caverna molto s'innalza ed ha termine la sua lunghezza, che in tutto misura 117 piedi.

La forma della cavità di questa caverna presa nel suo complesso, astrazione fatta da piccole accidentalità, è quella di un cuneo molto dilatato alla base, il cui apice sarebbe la bocca della spelonca, il piano superiore verrebbe formato dal cielo, l'inferiore dal fondo, i due piani laterali dalle pareti, per cui non si andrebbe troppo discosti dal vero, chi credesse formata questa cavità dal rilascio di alcuni strati, che si sproffondarono maggiormente da un lato.

Nel fondo alcuni scavi praticati, mi offrirono due vertebre dell' *Ursus Speleus*, un canino, ed il terzo molare della mascella inferiore, e molte piccole ossa, probabilmente riferibili alle sessamoidee di questo animale, ed alcune costole, che col confronto che ne feci con quelle trovate a Velo, devono appartenere ad un giovane individuo dell' orso delle spelonche.

In qualche angolo però di detta caverna, non mancano depositi del periodo attuale, pieni di ossa umatili degli animali che anche al presente bazzicano in questi contorni, e vivono forse in questa stessa caverna, come Volpi, Tassi, Mustele, i cui avanzi sono frammisti a conchiglie ancora viventi, riferibili ai generi *Helix*, *Cyclostoma*, *Clausilia*, *Pupa*, *Bulimus* etc. comunissimi in questi contorni (41).

Caverne di Bolca.

Grotta delle donne selvadeghe.

È situata questa caverna poco lungi dal Monte Purga di Bolca, vicino a un bacino di acque della circonferenza forse di 200 metri detto *Lago dei Cracchi* (42). Con molta fatica e difficoltà si arriva ad arrampicarsi insino alla soglia. — In compagnia del perito GIACOMO RIGONI mio amico, e due suoi uomini che ci recavano il necessario, cioè un torcio e due lanterne, col fido mio cane, entrava nel luglio del 1847 in questa caverna. — All' affacciarsi al suo ingresso principale, ornato dalla scolopendra, da adjanti, ed asplenii che ne rendono più romantica la vista, si sente una forte corrente di aria che spegnerebbe i lumi, ove non fossero guardati dal benefico cristallo; ciò mi fece arguire una qualche comunicazione all' esterno da qualche altro lato. — È alto 12 piedi, e largo 7; dopo uno stretto passaggio in cui si deve strisciare e discendere, si entra in un canale diritto lungo 90 piedi, e ripieno di ciottoli e scaglie di varia natura, molto rotondate, e lisce, segno evidente di un canale formato pell' azione dell' acqua.

All' estremità si divide in due passaggi, uno dei quali a sinistra pare si interni, ingrandisca ed affondi, l'altro è formato da un crepaccio orizzontale, che direttamente ascende sopra uno scoglio limacciato ed obliqua, senza lasciare vedere il suo fine. — Credendo impossibile il poter quivi inoltrarsi ci dirigemmo a sinistra. — Per buona sorte quello che precedeva inciampò in un sasso che rotolato nella vicina bassura, ci fece sentire con gran tonfo l'esistenza di un pozzo di acqua; così fummo avvertiti del vicino pericolo; sopraggiunti gli altri compagni col torcio, vedemmo che il canale non procedeva più oltre, ma sprofondavasi in questo pozzo, del diametro di 11 piedi, e ripieno di una limpidissima acqua la cui altezza misurata con un sasso appeso ad una funicella era di 77 piedi.

Spiacenti che ci fosse impedito così d'inoltrarsi, tentammo allora l'ingresso nello spacco orizzontale, ma per accertarsi della sua comunicazione con altri canali, spin-

gemmo in su il cane, il quale dopo reiterate prove dovette pigolare al basso, a cagione della limacciosità che rende il sasso oltre ogni credere sdruciolevole.

Però noi volemmo vincer la prova, e tenendoci l'un l'altro colle mani, i piedi, ci spingemmo in su fra la melma per più di 13 piedi, lunghezza del bugigattolo dove metteva in due cavità, una di fronte formata da una fenditura triangolare verticale, la cui base è larga 12 piedi e va ascendendo sempre più restringendosi. Il fondo di essa è ripieno di moltissimi ciottoletti calcarei e basaltici della grossezza di una nocciola; gli strati che la costituiscono sono compattissimi, e orizzontali. — L'altra di fianco si dirige a sinistra tortuosamente. — Procedendo per questo canale che permette di stare diritti della persona, dopo fatto un piccolo tratto, si vede dividersi esso e suddividersi in cento canaletti e stanzucce tutte della medesima altezza, la cui base è costituita da moltissime grandi scaglie cadute dalle volte, le quali sono tutte lamellose e sfasciantesi ad ogni legger tocco. Quivi osservammo svolazzare parecchi insetti dell'ordine dei *Neoropteri* per cui sempre più mi persuadeva, di un qualche altro esito, forse vicino, pel quale fossero tali esseri penetrati.

Sperando di vedere qualche cosa di più interessante procedemmo tra diritti e carponi per più di 150 piedi sempre col timore che la caduta di una qualche scaglia ci precludesse la ritirata. Quando in fatti la caduta di una estinse la torcia di quello che precedeva, e poco mancò non gli frantumasse le braccia. A tale fragore senza altro osservare demmo ipsofatto la volta, senza nemmeno interrogarci dell' avvenuto, e sortimmo angosciosi all' aperto disapprovando il nostro imprudente coraggio.

Tal grotta adunque di origine abbastanza evidente non presenta nulla di rimarchevole agli occhi del geologo e del Naturalista, ed è unicamente una serie di fenditure e canali pei quali scorrendo le acque trapelate pel monte si fanno strada per due vie: o raccogliendosi nel passo descritto, o quando questo è ripieno e trabocca, riversandosi pella bocca della caverna sopra il Lago dei Cracchi.

CAPO VII.

Caverne della Comune di Tregnago.

Molte sono le caverne ricettate nei monti di questo antichissimo ed ameno paese, e quantunque meno vaste delle descritte, sono però più regolari, belle a vedersi pei graziosi stilicidii e smalti stalagmitici che ne ornano il fondo, le pareti e le volte, e pegli avanzi fossili non men ragguardevoli. — Non ricorderò però alla sfuggita che quelle di qualche interesse.

Covoli della Barbara.

Nel monte così detto della Barbara in una contrada del nominato paese detta Calavera, è situata questa caverna dell' ampiezza di una vasta sala, con un ingresso alto appena tre piedi e largo 5. Il suolo di essa massime nelle parti più basse è co-

perto da ciottoli, e in qualche luogo da grosse stalagmiti. Essa è escavata nel calcare della creta inferiore ed è lunga forse 50 piedi ed alta, dove 5 e dove sino 15 piedi. — Verun avanzo fossile si è offerto alle mie indagini, tranne che un scheletro umatile di Volpe tutto incrostato da un carbonato calcareo cristallizzato, e molte ossa di gallinacci nostrali.

Grotta delle Fade.

È scavata nella calcaria jurése, e giace questa bellissima ed interessante caverna alle radici del monte basaltico Belloccà nel paesuccio chiamato Finetti, frazione di Tregnago, all' origine della Valletta detta Tromegnola.

Essa ha l'ingresso fatto a guisa di portuccia dell' altezza di piedi 5 circa, e larghezza 2½. Dopo una lieve discesa per 13 piedi si è già nell' interno della caverna, che è ampia e larga circa 24 piedi, e alta nel maggior luogo altrettanto. — Il fondo è formato da una grossa stalagmite che percossa rimbomba, e fa supporre nuove caverne supposte. — Il cielo è formato da un' ampia stalatite che a guisa di padiglione copre l'intera caverna. — Le pareti sono ornate da particolari stalatiti della forma di un fungo stipitato, di varia grandezza, che sembrano un trasudamento della roccia. — Qualche fenditura sui fianchi, ripiena di un rosso terriccio argilloso fa supporre l'esistenza di avanzi fossili, come in fatti alcuni ne rinvenni, ma allo stato di perfetto carbonato calcareo, che quindi saranno stati strappati da rocce molto anteriori alla formazione della caverna. — Spezzata la stalagmite che copriva tutto il fondo, la trovai della grossezza di 5 pollici, e distaccata dal suolo sottoposto per un piede. — Essa aveva attaccata nella parte inferiore una straordinaria quantità di ciottoletti di varia grandezza, molto lisci, e lucentissimi; segno evidente che prima della deposizione della stalagmite, correnti di acqua avevano dominato nella caverna, e vi avevano quelle ghiaje importate, e che dopo la continua sovrapposizione delle materie calcaree incrostanti, resasi finalmente difficile ogni comunicazione dell' umidità col fondo della caverna, si potè esso asciugare, e quindi abbassarsi lasciando attaccati alla superficie inferiore della stalagmite i corpi che vi avevano aderito.

Raccolsi ivi varie ossa fossili di mammiferi, due pezzi degli arti di un cavallo ed un molare, molti denti di volpe con due mascelle quasi intere, due canini del *Canis lupus*, 3 molari del *Meles taxus* (?), l'osso dell' astragalo, due del calcagno, un frammento dell' omero, il capo superiore di un femore, e due vertebre dell' *Ursus spelaeus*, ed alcuni cranii del genere *Sorex mus* (?).

Questa caverna, esaminandone le adjacenze esterne, si vede che dovette essere in altro tempo più ampia, e che forse quel piccolo seno del monte attorno all' ingresso, doveva costituire la parte anteriore, il vestibolo della caverna, la quale sfasciata all' epoca del sollevamento del monte lasciò il cunicolo che le univa a costituire l'ingresso della residua caverna.

Spigola di Gazzà.

È situata nel monte Gazzà di Tregnago dalla parte settentrionale che guarda sopra il paese di Cogolo. — Essa è verticale dell' ampiezza e circonferenza di un pozzo comune ed apresi in un calcare sabbioso della creta inferiore. Questa spelonca è una delle più temute dai villici del luogo, e di essa si noverano fatti spaventevoli e fantasticherie. colle quali d'ordinario dagli idioti si spargono d'errore questi tranquilli recessi.

Tali e tante millanterie mi avevano invogliato di visitar questo luogo, scandagliarlo con delle funi più fiate, o gettandovi entro dei sassi. i quali mi resero accorto della poca profondità che doveva avere, dal momento che tosto gittati si udivano fermare; ma fosse questa una vera fermata dovuta alla fine della caverna, o un trabocchetto, dopo il quale entrassero in un interimmabile abisso, ecco ciò che non si poteva sapere senza penetrare nell' interno.

Vinto finalmente dal desiderio di venirme in chiaro, e dalla speranza di rinvenire veramente un luogo sotterraneo che offrisse pascolo alle mie osservazioni, nulla ostante un poco di naturale ribrezzo, il 13. Novembre del 1849 feci rizzare sulla bocca della caverna, tre grosse travi, e per mezzo di una carrucola appesovi una corba di vimini che mi potesse capire, collocatomivi entro, da tre robusti uomini mi feci calare nella voragine misteriosa, munito di torci ed altri oggetti che si possono prevedere occorrenti in cotali ricerche. — Fatalmente nel discendere non so di nulla avere veduto, pella combinazione che messasi la fune, alla quale era sospeso, a girare in vortice, dopo pochi giri perduti i sensi, non seppi più nulla della mia esistenza, e quando ritornai in me stesso. mi vidi rovesciato fuori della corba boccone sul suolo, in una misera stanzuccia senza altri ingressi da proceder più oltre.

Essa era profonda solo 50 piedi, e fatta a guisa di cono coll' apice verso la bocca della caverna, e colla base in declivio lunga 30 piedi e larga 18, tutta sparsa di rocce frammentarie di scaglie e colle pareti incrostate di un uniforme stalatite. Gli oggetti unici che quivi scopersi furono alcuni frammenti di legno putridi sui quali lussureggiava copioso il *Byssus* candida, un *Merulius* e la *Sphaeria digitata*. Malcontento dell' esito della mia esplorazione, in un amaro disinganno, mi feci cavare da questa miserabile cavità, fra le meraviglie di quelli che mi assistevano, i quali del tutto mi credevan perduto, col solo piacere di avere distrutto un' errore ed uno degli infiniti pregiudizi del volgo.

Non sono rade in questo paese cotal fatta di verticali caverne, e potrei citare quella che vedesi nella contrada Verdella pure in Tregnago, quella di Cogolo ora coperta, e detta Spigola di Sillano *) ed altre, le quali forse all' epoca dell' eruzioni

*) Nel linguaggio del luogo si chiamano Covoli quelle caverne, che hanno l'ingresso orizzontale, e Spigole quelle che l'hanno verticale.

vulcaniche, avranno servito di sfogo ai gas o ad altre esalazioni aeriformi. — Così tante altre caverne ad ingresso laterale si potrebbero visitare dagli studiosi come quella detta dei Carbonari a Cogolo, a Ciutro, a Saline etc. ma senza speranza di profitto scientifico veruno.

Conchiudendo, le caverne tutte del Distretto di Tregnago devono la loro origine a fenditure, spostamenti, frane, scoscendimenti etc. indotti nelle rocce, parte dalle eruzioni basaltiche, e parte dalle successioni cui andarono soggette all'epoca del sollevamento delle montagne, il quale e contribuì alla formazione di nuove caverne, e all'impiccolimento, o ingrandimento, o in una parola alla modificazione delle esistenti.

CAPO VIII.

Cause che possono avere contribuito al riempimento delle caverne, e al deperimento dei generi, e delle specie, e al maggiore sviluppo cui attinsero alcuni mammiferi delle ultime epoche geologiche, i cui generi vivono ancora nel periodo attuale.

Prendendo le mosse da quanto ho fatto nelle descritte caverne osservare, dagli avanzi fossili in esse rinchiusi, essendo il terriccio che involge le ossa diverso in ogni spelonca, e presso a poco della stessa natura di quello dei monti circonvicini, i ciottoli pure frammenti delle rocce intorno esistenti, è gioco forza conchiudere: che affatto locali furono le cause che produssero questo fenomeno, quantunque di una forza molto maggiore a quelle che agiscono a nostri giorni.

Gli animali eziandio dovettero vivere in queste stesse località ove si trovano inumate le loro reliquie, appartenendo a generi che vivono ancora attualmente in questi stessi contorni e vicinanze. Lo stato però di tali ossa, contenenti sopra 100 parti, 30 di carbonato calcareo (43) mentre quelle fossili di Luneville non ne contenevano sopra mille che 105, quelle dei Pirenei orientali 20 sopra 100 (44), oltre ad accennare ad un'epoca antichissima di inumazione alla loro fossilizzazione favorevole (45) col loro logoramento mostrano, che correnti prolungate e violente strappandole dal loro sepolcro le strascinarono nei luoghi ove ora si scoprono.

Questi correnti sorte all'aurora del grande periodo diluviano: allora quando cioè al tramonto dell'età pleistocena per cause straordinariamente violenti, tutti i grandi fiumi e baccini di acque, riversati sui nuovi continenti, frantumando e rompendo ogni sorta di rocce che incontravano sul loro passaggio, e seco strascinando gli avanzi di quelli enormi mammiferi, vissuti nel principio di quest'epoca, e nelle anteriori, depositavano le antiche alluvioni, contraddistinte dagli avanzi di tutti quei strani animali, i cui avanzi scarseggiano, e quasi mancano nei depositi delle caverne: mentre contemporaneamente, correnti più locali e men forti, ma forse dalle stesse cause prodotte, conducevano in esse gli avanzi di tanti carnivori estinti.

Dopo di che comparsa sulla terra l'opera più perfetta della creazione, per nuove e successive ma non minori catastrofi, si andarono depositando i terreni alluviali moderni, segnati dagli avanzi umatili degli animali della nostra epoca, e fra esse il diluvio noetico, colla sua prolungata stazione sulla terra, e con un'azione più grande di quanto le viene dai geologi attribuita. sconvolse se non altro, ed in parte confuse i nuovi cogli antichi depositi, e mescolò gli avanzi di un epoca e dell'altra, aggiungendovi quelli della nostra industria. Ecco come in molte fenditure e caverne di Europa e America, si trovino ossa di generi e specie deperite, miste a quelle dell'uomo, per cui il concludere la contemporaneità dell'uomo a quegli strani animali, il riempimento delle caverne posteriori di molto dalla sua comparsa, ripugna alla storia non solo, ma allo stesso buon senso e criterio (46).

Nelle epoche geologiche gli esseri che hanno caratterizzato colla loro comparsa qualche periodo devono avere vissuto necessariamente nel periodo anteriore, e da esso i loro avanzi passare a distinguere l'epoca successiva.

Così nell'ordine della creazione si devono essere succeduti esseri a norma che uno dovea all'altro servir di alimento; quindi i vegetabili avranno preceduto la comparsa degli animali erbivori, e questi di quelli carnivori; gli insetti saranno prima comparsi degli animali insettivori, e fra gli uccelli prima la specie frugivora delle rapaci etc. (47): e non solo questo. ma ciascun ordine altresì, dovea avere ricevuto uno sviluppo considerevole. dovea essersi di molto moltiplicato onde reggere alla guerra della creazione successiva. altrimenti collo sterminio della prima, ne sarebbe necessariamente seguita la morte della seconda.

Si distingueva altresì ogni epoca geologica per una costante ed elevata temperatura, dovuta allora più che ad altro alle sole forze telluriche, che dovevano rendere insensibili, od almeno neutre le forze astronomiche. — In esse gli esseri non tiranneggiati dallo alternare delle stagioni, poterono attingere ad un immenso sviluppo non contrastato dal variare dei mezzi ambienti, e dalla deficienza dei principii necessarj alla vita, la quale in tale stato di cose non dovette mai sentire l'ingiuria delle infermità, ma solo passare placidamente o violentemente dallo stato di vita a quello di morte.

In tal guisa sorsero quei giganteschi vegetabili, proprii dei periodi di transizione, i quali toccarono ad uno straordinario sviluppo, nulla ostante vivessero in un suolo senza terriccio, il quale nè dovea, nè poteva formarsi, non spogliandosi i vegetabili del mondo primitivo, delle copiose lor fronde. come per l'ingiurioso alternare di caldo e di freddo, tributano al suolo quelli del mondo attuale.

Così pure gli animali delle epoche successive, non soggetti alle mute dei tegumenti, alle continue perdite. cui vanno soggetti gli animali d'oggi. potevano avere un' eguale e progressivo sviluppo: ed ecco come sorgessero quegli immuni mammiferi al cui cospetto sembrano pigmei i nostri più grandi quadrupedi. — Ciascuna epoca geologica eziandio oltre all'essere segnata di un' uniforme calore, era distinta necessariamente da una atmosfera particolare, formata in ciascun periodo. da speciali principii. ed a

norma della lor proporzione sorgeva una fauna ed una flora speciale che armonizzava con essa. — A mano che la crosta terrestre si andava consolidando, e in un col calorico perdendo parte degli atmosferici principii, che forse passavano nella formazione dei varj terreni, nuovi esseri si sostituivano agli antichi; alcuni però dei più forti, poterono sopravvivere alle novelle circostanze, e quantunque illanguiditi. passare colle loro spoglie a segnare ulteriori periodi.

Finalmente un nuovo ordine di fenomeni svariati e violenti, segnarono l'aurora del suolo che veniva dato alle nostre disputazioni. — Eruzioni vulcaniche in tutti i sensi e in tutti i luoghi, sollevamenti ed avvallamenti in ogni parte del globo, rotto l'equilibrio primiero, inclinosi l'asse del nostro pianeta, si riversarono le acque nelle parti più basse che occupano anche oggidì. — Sorsero allora le stagioni, e alle cause teluriche cominciarono a prevalere quelle astronomiche.

Cominciata la fauna e la flora del periodo attuale, e non essendo del tutto ancora irradiato e perduto il calorico, che le rocce conservavano delle epoche anteriori, in parte conservato dalle successive e prolungate ejezioni vulcaniche, poterono in quello spazio, le nostre specie toccare ad un maggior sviluppo, ad una maggiore grandezza. — Crebbero così quegli enormi elefanti, rinoceronti, ippopotami, bovi, cavalli, orsi, tigri, jene e leoni, ai quali più favorevoli circostanze ed un vergine ed energico mondo, permisero un più uniforme e maggiore sviluppo, senza differenziarli forse dalle specie tuttora viventi. — Quando a mano a mano che andavasi stabilendo l'ordine attuale di cose, e la differenza di temperatura ora ormai troppo sensibile, cominciò la natura ad illanguidire e segnare le forme attuali degli animali. — Le ultime catastrofi finirono col determinare le varie specie, prima uniformemente disperse, a zone particolari e determinate, nelle quali rimarranno sino a che un novello ordine di cose, già dai sacri libri predetto, produca un cielo nuovo, ed una terra novella.

Si vede quindi che i generi e le specie appariscono o dispariscono inopinatamente, e come nota Agassiz (48) senza rapporti diretti coi lor precursori, e che tutti, oltre all'aver un epoca fissata alla loro apparizione e scomparsa, hanno la loro esistenza limitata come la vita dell'individuo ad un tempo determinato (49), il quale manca in modo graduato e successivo, in seguito di cause regolari e costanti (50).

Parte II.

Descrizione delle ossa fossili degli orsi del Veronese.

Non avendo potuto nulla ostante le molte mie ricerche; procurarmi uno scheletro di orso vivente (del quale sono pur privi i gabinetti di storia naturale del Regno Lombardo Veneto), onde meglio instituire i miei studii, mi sono pei confronti giovato delle descrizioni e misure, che vennero fatte di essi da tutti quelli che sin qui, secondo le mie cognizioni, hanno trattato di orsi fossili (51) non omettendo di citare le loro osservazioni, tavole e descrizioni, quando le circostanze lo richieggano.

CAPO I.

Denti delle mascelle superiori e inferiori.

Ultimo grande molare della mascella superiore.

Tav. III. fig. 1. 2.

È questo molare qui figurato, il più ben conservato, che io abbia mai rinvenuto. La sua forma è irregolarmente ellittica, un poco contorta, e più allargata nel lato anteriore. È ornato sull' orlo, dal lato antero-posteriore da tre grandi eminenze piramidali, a base triangolare; la prima che è la maggiore è alta 0,014 partendo dall' apice dell' eminenza, e venendo sino dove finisce lo smalto alla base della radice. Il lato esterno di questa eminenza, è formato da una linea tutta striata, e curva, mentre i lati interni sono segnati da solchi e da una serie di minori taglienti piramidi, che vanno decrescendo sino a confondersi coi bernoccoli della corona. — Corrisponde essa alla prima radice del lato più esterno, la quale è conica, un poco schiacciata e piegata all' indentro, e di forma curvo-piramidale a base prismatica, lunga 0,028. — La seconda eminenza è alta 0,013, la terza 0,012, in serie decrescente colla differenza in meno di un millimetro. e sono della stessa forma della prima. Corrispondono queste due ultime alla radice mediana esteriore che è lunga 0,025, e larga il doppio della prima.

Partendo dalla più piccola delle tre eminenze nominate, continua lo smalto del dente in una serie di eguali piramidi che costituiscono l'orlo della superficie superiore del dente, il cui smalto mantenendosi nella parte esterna inferiore dell' altezza di 0,008, va un poco innalzandosi, e dopo il tratto di 0,02, arriva a toccare l'altezza di 0,010 dove termina in una piramide corrispondente ad una scanellatura che esiste sempre nella radice mediana interiore. — Quivi l'orlo del dente si abbassa pella metà della sua altezza, e si divide in due orli; il più basso ed esterno è lungo 0,015, ed alto 0,006, l'interno è più elevato e costituisce un' eminenza tutta striata opposta alla prima delle tre grandi piramidi descritte, alta 0,007 partendo dall' orlo inferiore.

La superficie superiore del dente è tutta sparsa irregolarmente da parecchi tubercoli che poco variano dal numero 50 e 60. — In quello fig. 1 sono 48 di numero. —

Tutto il dente è lungo 0,045 e largo nella parte anteriore 0,022, nella posteriore 0,015. — I più grandi descritti dal CUVIER sono lunghi 0,048, i più piccoli 0,043 (ossi fossili Tom. VII pag. 248). Quelli di MARCEL DE SERRES 0,044 (Recherches sur les Oss. humat. pag. 64). I più grandi orsi viventi li hanno lunghi 0,036. — Gli orsi neri d'Europa 0,032, quelli di America 0,027, quelli delle Alpi 0,028. — Il diametro maggiore trasversale come dissi più sopra è 0,022 mentre nei più grandi orsi viventi varia dal 0,015 al 0,018 (MARCEL DE SERRES Recherch. sur les oss. hum. p. 65). La maggiore altezza di questo dente partendo dall' estremità di una radice mediana alla sommità della seconda grande eminenza è di 0,040, minore 0,038.

Il dente in discorso ha quattro radici, la più lunga e grande delle quali, è l'ultima posteriore, a base triangolare, e che coll' angolo più interno si protende in mezzo alle altre radici sino alla metà della totale lunghezza del dente. — Però il numero di quattro radici non è costante, e ne ho veduto parecchi in cui le due radici posteriori erano insieme saldate, e altri che ne avevano 5 come quello fig. 2 il quale è di maggior dimensione del descritto, e il più grande della mia collezione, essendo lungo 0,050, e largo 0,023. Queste note caratteristiche, e varie misure io le ho verificate sopra più di 40 molari cavati tutti dalle caverne di Velo.

Penultimo molare della mascella superiore.

Tav. III. fig. 3.

Conservatissimo è pure questo dente che ora mi faccio a descrivere. — È costituita la sua corona da 5 grandi eminenze, di cui le due maggiori sono le esterne, di figura piramidale e base triangolare; la più alta si eleva dall' origine dello smalto per 0,013, la seconda 0,012, sino in mezzo a due altri piccolissimi rilievi, i quali talvolta sono insieme riuniti da una specie di costa che passa da una parte all' altra del dente, dividendolo da questo lato in quattro parti. Nel lato interno sorgono le tre minori eminenze tutte striate e presso poco di eguale altezza, ma la mediana è sempre la meno larga. — Anche in questo dente non altrimenti che nell' ultimo molare, da questo lato, lo smalto dividesi in due orli, il più basso dei quali partendo circa dalla metà della radice interna del dente, si allunga dell' altezza di 0,004, per 0,014 millimetri. — Tutto il dente è lungo 0,033, e largo 0,031. — Quelli più grandi esaminati dal CUVIER (oss. foss. Tomo VII. pag. 248) erano lunghi 0,031, i più piccoli 0,028; laddove i più grandi orsi viventi non hanno maggiore il dente in discorso di 0,024.

Questo molare ha ordinariamente 3 radici, due esterne corrispondenti alle due più grandi eminenze della corona, e lunghe poco più di 0,02, ed una interna molto più larga delle antecedenti, e della stessa lunghezza, e corrispondente alle 3 eminenze interne minori. — Non sono però rare in questo molare 4 radici, e nel dente infisso nella porzione della mascella figurata alla Tav. V fig. 1 vedesi in fatti il rudimento di una quarta radice.

Antipenultimo molare della mascella superiore.

Tav. III. fig. 4.

È formato anche questo dente da tre grandi eminenze coniche, la maggiore delle quali, posta nella parte anteriore è alta 0,012 sempre partendo dall' orlo dove comincia lo smalto sopra le radici — delle minori, poste nella parte posteriore del dente, quella situata sulla parte esteriore del dente è alta 0,010, l'interna che è la più piccola, 0,007. — L' orlo della corona al principio della radice è elevato e faciente un angolo dal lato esterno, alla metà delle due più elevate eminenze, e corrisponde alla divisione delle radici che sono due, una anteriore rotonda e lunga 0,020, l'altra posteriore rozza-mente quadrilatera 0,027. La lunghezza maggiore della corona è di 0,021. I più grandi descritti dal CUVIER erano lunghi pure 0,021, i più piccoli 0,020, quelli invece dei più grandi orsi viventi, non sono lunghi che 0,017.

In tutti gli avanzi da me rinvenuti, non mi è mai accaduto di vedere il quarto molare superiore, del quale probabilmente saranno stati privi quasi tutti gli orsi fossili del Veronese. Il cranio però, descritto e figurato dal Prof. CATULLO (Sulle cav. delle Prov. Veron. pag. 42. Tav. V. fig. 1), trovato in queste stesse caverne, mostra l'alveolo di questo piccolo molare, nulla ostante, che appartenesse questo teschio ad un vecchio individuo.

Come è già noto, il CUVIER non ne rinvenne mai traccia nei molti cranii fossili da lui esaminati e descritti (Tom. VII pag. 250) come non lo trovarono nè l'HAYA, nè l'HUNTER, nè l'ESPER, nè il FISCHER, nè il BENZENBERG etc. mentre fù trovato nei piccoli cranii esaminati e descritti dal CAMPER e GOLDFUSS. — È probabile quindi che l'esistenza di questo piccolo dente nei cranii degli orsi fossili, non sia che un mero accidente, del quale non mancano esempj anche in molti altri animali viventi; e che la mancanza di questo molare sia uno dei caratteri che distinguono gli orsi fossili dai viventi, i quali non ne sono mai sproveduti.

Ultimo molare della mascella inferiore.

Tav. III. fig. 5.

Costituisce questo dente, unitamente alle radici, quasi un' unica piramide a base ellittica, alta 0,35; ha una sola radice compressa e solcata nel mezzo, per cui manifestamente vedesi risultare dal saldamento di due radici; anzi non è rado trovare questo dente con due radici come è quello fig. 5. La sua maggiore lunghezza, partendo dall' origine dello smalto, è di 0,027.

La corona di questo molare è affatto irregolare, tutta bernocoluta, con diverse eminenze, che formano il contorno del dente. Essa è larga 0,018, in quelli esaminati da MARCEL DE SERRES 0,016, mentre gli orsi viventi d'Europa l'hanno larga 0,015, quelli dell' America 0,010. (MARC. DE SERRES Rech. sur les os. hum. pag. 66.) La lunghezza mag-

giore è di 0,30, mentre in quelli più grandi descritti da CUVIER non l'avevano lunga che 0,026, i più piccoli 0,022 — quelli di MARCEL DE SERRES 0,023. I più grandi orsi viventi non l'hanno lunga che 0,020, quelli d'Europa 0,018, quelli d'America 0,015, quelli dell' Alpi 0,016 (MARC. DE SERRES Rech. sur les oss. hum. loc. cit.).

Penultimo molare della mascella inferiore.

Tav. III. fig. 6.

Questo molare è il più grande della mascella inferiore, quantunque non sia il più lungo, e rappresenta due grandi coni insieme congiunti nella base, formata dalla bernocoluta corona, e staccati e disgiunti all' apice formato dalle radici, che sono due, quella anteriore conica, è lunga, arrivando sino al principio dello smalto, 0,027, quella posteriore rozzamente quadrilatera e piramidale, 0,030.

La corona è per lo più distinta da 5 grandi eminenze, divise in tre posteriori, ed in due anteriori, da una depressione e scanellatura corrispondente alla divaricazione delle radici. — La eminenza più elevata è alta 0,010 e si continua colle tubercolosità costituendo un rilievo unico trasversale decrescente; questo rilievo è costante anche negli orsi viventi come fu notato dall' immortale CUVIER (Tom. VII pag. 210).

La larghezza maggiore della corona è di 0,017, negli orsi fossili di Lunevill descritti da MARCEL DE SERRES 0,018; quelli viventi bruni dell' alpi l'hanno larga 0,013, quelli neri 0,015, quelli d'America 0,010. La lunghezza totale è di 0,032, mentre nei più grandi orsi fossili esaminati dal CUVIER, non era lunga che altrettanto, e nei più piccoli 0,027; in quelli di MARCEL DE SERRES (oper. cit.) 0,028 nei fossili; i più grandi orsi viventi non l'hanno maggiore di 0,027, gli orsi neri 0,022, quelli dell' America 0,017; quelli bruni dell' Alpi 0,021.

Antipenultimo molare della mascella inferiore.

Tav. III. fig. 7.

Questo molare è un poco più lungo del precedente, ma molto più stretto. — La forma della sua corona è quella di un triangolo isoscele, in cui i lati più lunghi ed uguali sarebbero lunghi 0,030, il più corto 0,013. È divisa in tre porzioni da due solchi, il primo corrispondente alla metà circa della radice anteriore, il secondo all' intervallo, o punto di divisione delle due radici, delle quali il primo è lungo 0,027, il secondo che è il più grosso 0,028. — La porzione anteriore della corona è costituita da un piccolo tubercoletto che si eleva poco più di 0,008, partendo dalla base dello smalto. — La seconda è formata sempre da tre eminenze, delle quali la più esterna è la maggiore, e si eleva dalla base della radice per 0,013. — La terza porzione è costituita negli orsi fossili da quattro tubercolosità quasi della medesima altezza, e formanti un rozzo parallelogrammo. — CUVIER (Tom. VII pag. 211) parlando di questa porzione dice che negli orsi viventi è in vece di forma triangolare, per cui anche questo

è un nuovo carattere di distinzione che potrà a prima vista far conoscere se un tal dente appartenga agli orsi fossili o ai viventi.

La maggiore larghezza della corona è di 0,013, lunghezza 0,032. Quelli studiati dal CUVIER l'hanno lunga 0,033, mentre nei più grandi orsi viventi è solo di 0,025. (CUVIER oss. foss. Tom. VII pag. 248.)

Primo molare anteriore della mascella inferiore.

Tav. III, fig. 8.

Questo piccolo molare, affatto singolare pella sua forma caratteristica, ha la base della corona di forma quadrangolare lunga 0,017, e larga 0,010. Presenta sulla sua superficie una forte ed alta eminenza conica dell' altezza di 0,011, partendo dalla base della radice, e corrispondente a due altre eminenze eguali e minori, ad essa opposte, ed alte 0,007. — Partendo dal vertice della più alta eminenza, si estende una cresta tagliente, che abbassandosi va a terminare sulla estremità opposta della corona, mentre dai lati di questa cresta, obliquamente partendo, si congiungono due piani inclinati, la cui minore costituisce appunto la cresta in discorso che è lunga 0,015. Ha due radici, quella posteriore maggiore, è lunga 0,22, l'anteriore 0,020. Tutto il dente partendo dal vertice della più alta eminenza, sino all' estremità di una radice, è lungo 0,033. — Nulla posso dire sulle dimensioni di questo dente negli orsi viventi, non facendone cenno veruno gli autori, e nemmeno lo stesso CUVIER.

Quadro comparativo

delle dimensioni dei denti molari degli orsi fossili del Veronese confrontati con quelli degli altri autori, e dei viventi.

Mascelle superiori.

Ultimo molare			Penultimo molare			Antipenultimo molare		
Orsi più grandi delle caverne	Orsi del Veronese	Orsi viventi	Orsi più grandi delle caverne	Orsi del Veronese	Orsi viventi	Orsi più grandi delle caverne	Orsi del Veronese	Orsi viventi
0,048	0,045	0,036	0,031	0,033	0,024	0,021	0,021	0,017

Mascelle inferiori.

Ultimo molare			Penultimo molare			Antipenultimo molare			Molare anteriore		
Orsi più grandi delle caverne	Orsi del Veronese	Orsi viventi	Orsi più grandi delle caverne	Orsi del Veronese	Orsi viventi	Orsi più grandi delle caverne	Orsi del Veronese	Orsi viventi	Orsi più grandi delle caverne	Orsi del Veronese	Orsi viventi
0,026	0,030	0,020	0,032	0,032	0,027	0,033	0,032	0,025	—	0,017	—

Incisivi laterali e mediani delle mascelle inferiori e superiori.

Gli autori nulla dicono intorno alle misure ed al numero di questi denti negli orsi fossili delle caverne; ma è probabile che come non differiscono gli altri denti nè nel numero, nè nelle forme degli orsi viventi, così non sieno anche questi gran fatto dissimili.

Negli orsi fossili, se poco o nulla differiscono fra loro gli incisivi mediani delle mascelle superiori e inferiori, così non è degli incisivi laterali di queste mascelle che sono nelle une e nelle altre distinti, oltre che nelle dimensioni, per la forma delle rispettive corone e radici.

Incisivo laterale inferiore.

Tav. III. fig. 9.

L'incisivo laterale delle mascelle inferiori è costituito da una radice piramidale di forma triangolare, comunemente della lunghezza di 0,04 e 4 millimetri, e grossezza di 0,01 e 2 millimetri; la corona nel lato interno dovrebbe essere anche in questo dente, come in tutti gli altri incisivi, tagliata obliquamente a doccia, e distinta da due solchi che vanno convergendo sull'orlo della radice all'estremità dello smalto, e divergendo verso la parte superiore della corona, dove vanno a formare due tubercoli di eguali dimensioni; in questo incisivo però uno dei detti tubercoli si distacca interamente dal resto della corona, e della grossezza di quasi la metà di essa si protende dal lato interno per 0,005, formando una divaricazione coll'apice più alto del resto della corona, costituita da un solco della dimensione di 0,007. — L'altro tubercolo laterale è appena pronunciato e rimane sempre delle ordinarie dimensioni che negli altri incisivi. La corona di questo dente, misurata dal lato antero-posteriore è lunga 0,015, minore larghezza 0,009, maggiore 0,015, lunghezza totale, compresa la radice, 0,045.

Incisivi mediani.

Tav. III. fig. 11.

Gli incisivi mediani hanno le medesime forme tanto nelle mascelle inferiori che superiori, se eccettuar vogliamo le dimensioni un poco più pronunciate nelle superiori. — La radice è sempre di forma triangolo-piramidale, obliqua dal lato antero-interiore. — La corona come ho detto più sopra è tagliata internamente a doccia, con due scanellature che la dividono in tre porzioni, delle quali le laterali sono poco differenti e minori, mentre la mediana è molto più grossa ed elevata. — La faccia interna formerebbe una specie di quadrilatero irregolare, in cui i due lati più lunghi ed inferiori misurerebbero 0,015, i più piccoli e superiori 0,006. La parte poi antero-esteriore della corona è convessa, e formata pure da un'irregolare quadrilatero corrispondente al primo. — Lunghezza totale del dente compresa la radice, 0,043, della corona dal lato interno 0,015, dal lato antero-esteriore 0,067.

Incisivo laterale superiore.

Tav. III. fig. 10. a. b.

L'incisivo laterale superiore è quello che più differisce da tutti gli altri denti di questa categoria; primieramente per una radice conica e rotonda, e non più triangolare come negli altri incisivi, e marcata sempre nella parte antero-estriore da un solco abbastanza pronunciato (fig. 10. b.) che passa a segnare anche la corona del dente traversandola ed inflettendosi sovra essa nel lato interno e formando una specie di rilievo per più della metà della corona stessa, la quale presenterebbe la forma di una rozza piramide conica e contorta all' apice sul proprio asse. — In secondo luogo pelle maggiori dimensioni e docciature della faccia interna del dente che in questo incisivo si trovano trasformate, quella dal lato più interno, in un rilievo che orlerebbe tutta la base della corona, ed andrebbe poi ad unirsi col solco nominato della radice; quella più esterna in un orlo tagliente che va a confondersi coll' apice del dente stesso.

La lunghezza totale del dente compresa la radice è di 0,055, esclusa la corona del dente dal 0,050 al 0,045. Maggiore grossezza 0,018, minore, che è l'estremità della radice, 0,008. Lunghezza della corona dal lato interno 0,020, dal lato antero-estriore altrettanto.

Canini delle mascelle superiori ed inferiori.

Tav. III. fig. 12, 13, 14.

Differiscono negli orsi delle spelonche i canini delle mascelle superiori da quelli delle inferiori, per varie note: primieramente pella forma delle radici che nei superiori (fig. 14) è più grossa nello stesso individuo e rotondeggiante e finiente in punta acuta, mentre negli inferiori (fig. 12 e 13) è schiacciata e finisce ottusa. — In secondo luogo per una specie di torzione sul proprio asse che presentasi nella corona dei canini inferiori, per cui pare obliqua, a differenza dei superiori che l'hanno diritta e conica perfetta. — In terzo luogo per due creste taglienti che presenta il canino inferiore; una superiore in direzione dei molari, e l'altra obliqua che forma linea cogli incisivi; mentre i superiori non hanno che una sola di queste creste ben pronunciata. — In quarto luogo pella forma della corona, che negli inferiori protende lo smalto molto più obliquamente dal lato interno, che nei superiori. — In quinto luogo per tutte le dimensioni.

In fatti i canini inferiori da me esaminati, mi offrirono le seguenti dimensioni. Lunghezza totale dalla punta della corona all'estremità della radice 0,110, e maggiore grossezza 0,035; ed altri 0,090, — 0,025 = 0,095, — 0,020, = 0,105, — 0,027, = 0,090, — 0,025, = 0,110, — 0,030, = 0,095, — 0,025, mentre quelli delle mascelle superiori sono lunghi 0,120, e grossi 0,035, altri 0,103 — 0,025, = 0,120, — 0,040, = 0,110, — 0,030, = 0,119, — 0,035, = 0,118, — 0,030, = 0,104, — 0,030. Quindi i più grossi e più lunghi canini superiori delle caverne del Veronese misurano 0,120, in lun-

ghezza, e 0,035 in grossezza, quelli inferiori 0,105 in lunghezza 0,27 in larghezza; mentre quelli descritti da MARCEL DE SERRES (Recher. sur les oss. humat. pag. 65) sono lunghi 0,095, e grossi 0,027. Gli orsi viventi d'Europa non li hanno lunghi più di 0,080, e grossi 0,024; quelli d'America 0,022, quelli dell' Alpi 0,018.

Queste misure io le ho prese e verificate sopra parecchie dozzine di tal fatta di denti, e sopra i più ben conservati, non essendo varii quelli che presentano più o meno rotte le radici, e la corona, come ne ho trovato di quelli che avevano l'estremità di essa obliquamente tagliata, e orizzontalmente da sembrare molata; il che fa vedere che molto dovette essere uniforme e continuato l'attrito che questi denti subirono; e che quindi il maggiore e minore logoramento delle corone nelle varie sorta di denti, non è indizio sicuro che le specie a cui appartenevano fossero più o meno carnivore, e si nutrissero a preferenza di sostanze vegetabili, derivando la massima parte di questi logoramenti da cause che hanno agito all'epoca della loro inumazione.

Il logoramento prodotto nei denti pella masticazione è così regolare, che si può a colpo d'occhio distinguere, se sia dovuto o no a questa cagione, od a cause affatto estranee da questa funzione. In fatti se è pella masticazione degli alimenti prodotto, il logoramento presentasi sotto forma di piccole areole fatte a doccia, e contornate, se profonde, da un orlo tagliente, mentre se ciò dipende da vero attrito di oggetti esterni, esso manifestasi sotto la forma di areole orizzontali, non contornate da orlo veruno, nè cave.

CAPO II.

Ossa del cranio.

Cranio dell' orso delle spelonche.

(CATULLO sulle caverne delle Alpi Venete. Tav. V. fig. 1. pag. 42.)

Nelle mie ricerche nelle spelonche del Veronese non ebbi mai la sorte di rinvenire cranio intero veruno: e se le mascelle inferiori sono sempre slogate, attesa la loro forma di articolazione colle altre ossa del capo, così non dovrebbe essere delle mascelle superiori le quali insieme saldate, dovrebbero sempre rinvenirsi congiunte. — Ma nemmeno queste mi fu dato di rinvenire in stato normale, e solo potei raccogliere frammenti più o men grossi di queste ossa. — Delle parti poi costituenti la cavità del cervello, non si rinvengono nelle caverne del Veronese che frammenti, e solo una volta potei raccogliere intero un' osso frontale appartenente all' orso a fronte piatta.

Il più bel pezzo che nelle caverne di Velo si sia mai rinvenuto, è la porzione del cranio che si custodisce nel museo Canossa di Verona, e del quale esiste un modello in gesso nell' I. R. gabinetto di storia naturale di Padova e descritto e figurato dal Prof. CATULLO nella memoria sulle caverne delle Alpi Venete inserita negli atti dell' Istituto Veneto.

Questo magnifico avanzo manca di tutte le ossa costituenti le volte del cranio, e fu riferito le prime volte dai vecchi naturalisti, ad un teschio di foca, come ricorda anche lo storico Veronese Alessandro CARLI nel Tomo VII all' epoca XI^{ma} pag. 221, dove fa di esso speciale menzione. Conserva ancora i tre grandi molari, e l'alveolo del quarto anteriore, e i canini quantunque molto logori e smussati. (Vedi dove parlo dell' antipenultimo molare della mascella superiore.)

Porzione della mascella superiore.

Tav. III fig. 15.

È questo il frammento più grande che io abbia rinvenuto, ed appartiene alla mascella destra superiore. — Conserva ancora l'ultimo molare, e il penultimo con quattro radici come dissi parlando di questo dente, e porzione della branca dell' osso che si articolava col zigoma, e parte dell' osso che costituiva le volte palatine. — Il Prof. CATULLO ne descrisse una porzione maggiore di quest' osso, ed è quello figurato alla Tav. VI fig. 5 pag. 44.

Porzione del cranio dell' orso delle caverne.

Tav. III fig. 16 A. B.

Questo interessante frammento, colle grandi dimensioni di ogni sua parte, fa vedere il grande individuo cui apparteneva. — Dal lato esteriore mostra una lunga rottura (b) da dove sorgeva la porzione posteriore dell' arcata zigomatica, la quale fra le ossa occipitali e parietali, che sorgevano (g), lasciava lo spazio interposto segnato colla lettera (a).

L'apofisi mammillare (d) è conservatissima, ed è tutta striata e sparsa di punti profondi e bernoccolature che fanno presumere la forza della inserzione dei legamenti in questa località. Similmente il meato uditivo esterno è molto ben conservato (c) e si allunga un poco meno che negli orsi viventi. Nella parte interna questo osso (B) fa vedere allo scoperto parte dell' interno apparato uditivo (e) e molte cavità e seni (f) che cominciavano col cervello.

Arcate zigomatiche.

Tav. III fig. 17. 18.

Questo osso io lo rinvenni in due pezzi come è figurato, diviso dalla sutura mediana. — La figura 17. rappresenta la porzione che si attaccava alle ossa occipito-parietali, e che anteriormente veniva ad unirsi coll' altra porzione dell' osso zigomatico che partiva dalle ossa mascellari superiori. La seconda porzione mostra ancora la porzione che entrava a costituire l' orlo più esterno della cavità orbitale dell' occhio, la quale dovea avere quindi almeno 0,60 di ampiezza. — Anteriormente è manifesta la sutura

che articolava questo osso con quello della mascella superiore. — La porzione rappresentata a fig. 18 è lunga 0,145, per cui unita all' altra porzione (fig. 17) l'arco zigomatico in discorso doveva avere almeno 290 millimetri di lunghezza, ed essere perciò molto maggiore di quelli descritti dal CUVIER a pag. 268 delle sue ossa fossili Tom. VII.; che misuravano solo 0,275 e di quello del cranio ricordato dallo stesso CUVIER e litografato a Monaco che toccava a 280 millimetri di lunghezza, mentre gli orsi viventi hanno quest' osso della lunghezza media di 0,180. Gli orsi polari l'hanno lungo 0,169, quelli polari di Brema 0,178, quelli d'America 0,112, quelli neri giovani pure d'America 0,15, i vecchi 0,180, quelli neri d'Europa dal 0,221 al 0,262, quello di DAUBENTON 0,216, quello di Polonia 0,193, quelli delle Alpi 0,184, quelli dei Pirenei 0,162, di Java 0,157 etc. (Vedi CUVIER pag. 22), per cui l'orso al quale apparteneva l'osso zigomatico in discorso doveva essere di un enorme grandezza.

Mascelle inferiori dell' Ursus Arctoideus.

Tav. III. fig. 19.

Frequentissime sono queste ossa nelle caverne di Velo, ma per lo più prive di denti, e specialmente dei canini. Fra le molte che io quivi rinvenni, quella fig. 19 è la più ben conservata della mia collezione presentando ancora tutti i suoi denti, meno il primo molare anteriore. Appartiene quest' osso all' Ursus Arctoideus a fronte piatta, pelle ragioni che più sotto vedremo.

Essa è lunga 30 centimetri, misurata dalla estremità del canino sino a quella del condilo, il quale è lungo 0,05, nulla ostante che abbia il lato esterno un poco smussato; egualmente misurano quelle trovate in questa stessa località dal Prof. CATULLO, quantunque erroneamente da lui riferite all' Ursus spaeus, nulla ostante il disaccordo notato fra questa e il cranio di questa specie dallo stesso figurato e descritto.

L'apofisi coronoide di questa mascella si eleva dalla base del condilo centimetri $6\frac{1}{2}$ ed è larga alla base, partendo dall' ultimo molare sino all' origine del condilo 8 centimetri e mezzo. — La sua maggiore altezza misurata dal vertice dell' apofisi coronoide, sino alla base della mascella è di 15 centimetri e mezzo, o poco più della metà della lunghezza. — Dal margine superiore dell' arco alveolare anteriore alla base del mento si misurano 0,064, cioè un terzo della totale lunghezza della mascella.

Nel lato interno vedonsi ancora i segni della sutura del mento che la univa mediante la sinfisi all' altra mascella, essa è lunga 9 centimetri e larga 4. — La fossa massetoxica della espansione ossea dell' apofisi coronoide, è profonda in qualche luogo 0,024.

Nel lato interno vedesi pure il foro mascellare posteriore la cui apertura è del diametro di 0,009 e pel quale passano, oltre il ramo inferiore noto del 3 ramo del 5 pajo dei nervi, l'arteria e la vena mascellare. — Nella parte esterna si veggono i fori mascellari anteriori. Dalla radice del dente canino al primo molare avvi lo spazio di 6 cen-

timetri mentre, in altre mascelle che possiedo, come quella fig. 15, questo intervallo non è che di quattro centimetri.

L'immortale CUVIER, già ci aveva fatto notare, che le due specie degli orsi, che si trovano nelle spelonche, differivano uno dall'altro, anche per questo carattere della lontananza fra il canino ed il primo molare (Tom. VII pag. 260, 261) e che quelli in cui questo intervallo era maggiore, appartenevano all'orso a fronte piatta (*Ursus Arctioideus*) e in quelli nei quali era minore, all'orso a fronte convessa (*Ursus Spelaeus*). Oltre di ciò differiscono pure una specie dall'altra per le dimensioni del canino il quale come ci fece notare lo stesso CUVIER, in quelli a fronte piatta è sensibilmente più piccolo. — Per convincersi di ciò basterà osservare le figure 12 e 13 delle quali la prima rappresenta il canino estratto dalla mascella fig. 14, la seconda quello della mascella fig. 15. Il primo misura 0,110 in lunghezza, e 0,025 in grossezza, il secondo 0,115 e 0,035.

Differiscono ancora queste due specie pella totale lunghezza della mascella che è maggiore nella prima specie, e minore nella seconda, mentre le rispettive altezze, nell'orso a fronte piatta sono di 0,064, in quelle a fronte convessa 0,067.

Inoltre l'elevazione dell'apofisi coronoidea, e l'ampiezza della sutura della sinfisi del mento ha una notevole differenza, essendo quest'ultima dell'ampiezza di 0,040, ed altezza di 0,090 nella prima specie; di 0,048 e 0,100 nella seconda.

Di più ancora le dimensioni del condilo nella prima sono lunghe 0,05, nella seconda arriva persino alla lunghezza di 0,09 quale è quello figurato e descritto dal Prof. CATULLO alla Tav. VII fig. 2 per cui anche questo frammento si dovrà riferire agli orsi di fronte convessa.

Mascella destra inferiore.

Dell'*Ursus Spelaeus*. Tav. III fig. 20.

Delle mascelle di questa specie non ho mai rinvenuto che porzioni, la più cospicua delle quali è quella a fig. 20. Essa è rotta inferiormente alla radice del secondo molare anteriore; conserva ancora i due molari anteriori, ed il canino, il quale si può estrarre dall'alveolo a suo piacere e rimetterlo, ed è quello a fig. 13 come si è detto.

La sinfisi del mento è lunga 10 centimetri, e larga 0,048. Dalla base del canino sino al primo molare corre l'intervallo di 0,040. — L'altezza di questa mascella è di 0,067 partendo dall'orlo alveolare degli incisivi sino alla base.

La mascella descritta dal CUVIER pag. 269. Tom. VII. Tav. 185. fig. 8, è lunga 0,350, quelle di KARSTEN 0,365, quelle del Veronese giudicando dai grossi frammenti di alcune, almeno 360, misura media senza distinzione di specie. — Molti altri frammenti di mascelle inferiori ho io rinvenuto nelle caverne del Veronese, ma non farò che nominarne le principali.

- 1.) Metà della mascella destra inferiore dell' orso a fronte convessa simile alla fig. 20.
- 2.) Un frammento di questa medesima specie, ma mancante di ogni molare, e col solo canino.
- 3.) Porzione della mascella sinistra inferiore coi denti canini smussati, sino alla metà della corona, e coll' alveolo del primo mascellare inferiore.
- 4.) Frammenti della sinistra mascella inferiore, senza canino, e cogli alveoli del primo molare.
- 5.) Frammento della mascella sinistra inferiore, rotto posteriormente alle radici dell' apofisi coronoidea e condiloidea, con tutti i molari.
- 6.) Frammento della mascella destra inferiore, rotta posteriormente alle radici dell' ultimo molare, e lateralmente sopra il foro mascellare posteriore, coll' ultimo molare e porzione dell' apofisi condiloidea; oltre a molte altre porzioni, delle quali, unitamente ad altre ossa ho fatto un presente all' Imp. R. Gabinetto di Storia Naturale di Padova.

CAPO III.

Ossa del tronco.

Prima vertebra cervicale.

Tav. III. fig. 21. A. B.

La maggiore vertebra cervicale che io abbia rinvenuto è quella fig. 21. Misura essa da un' estremità all' altra delle apofisi laterali, 0,195, compresa la porzione che manca di un' ala. — Le più piccole da me esaminate misuravano 0,170, mentre quella descritta e figurata dal Prof. CATULLO (Tav. VII fig. 1) non misura che 0,120. — Nulla posso dire delle misure di questo osso in confronto degli analoghi descritti dal CUVIER, e dagli autori, perchè alcuno non parla di misure. — Conviene però l' esemplare che ho tra le mani interamente colle figure 6, 7, 18 della Tav. 188 del CUVIER (pag. 302) con quelli di ROSENMÜLLER Tav. IV fig. 2, di KARSTEN, CAMPER ed ESPER Tav. III fig. 1.

Questa vertebra si distingue tosto dalle analoghe degli altri carnivori, come delle jene, tigri e leoni, pella piccola e quasi irremarcabile infossatura nel davanti di ciascuna apofisi laterale, che all' invece è molto profonda nei nominati animali (Tom. VII, pag. 303. CUVIER oss. foss.).

Nella faccia superiore si vedono due fori uniti mediante una fossatura, o canale aperto; quello interno parte dal canale medullare, quell' esterno sorte obliquamente dalla faccia inferiore dell' ala laterale, dove più sotto sullo stesso lato, un altro foro che pare la continuazione dello stesso superiore, passa la base dell' ala direttamente per di dietro. — Questi caratteri sono costanti in tutti gli orsi viventi e fossili.

Nella parte superiore presenta due faccette articolari sulle quali si articolavano le corrispondenti apofisi dell'occipite. — Sono esse lunghe 0,035, e larghe al punto maggiore 0,037, di forma ellittica, tronca nel lato interno del foro medullare che è largo 0,047. La minor altezza dell'osso che circonda il foro medullare è di 0,030. — Sotto le apofisi articolari si veggono due forti fossette irregolari, con una piccola protuberanza; in esse inserrivasi il legamento trasverso dell'atlante.

Seconda vertebra cervicale.

Axis od Epistrofeo.

Tav. III fig. 22.

Questa (fig. 22) è la più ben conservata di quelle da me rinvenute, manca però delle appendici, delle faccette articolari posteriori, ed ha rotta l'apofisi spinosa. Il foro escavato sotto le faccette articolari anteriori, è ancora visibile, e misurano esse 0,045 in lunghezza. L'apofisi odontoidea è conservatissima e colle forti impressioni che ancora presenta, fa presumere i robusti legamenti a cui dovette dare inserzione. Essa è alta 0,023 partendo dalle faccette articolari. Corrisponde interamente alla figura 19 Tav. 188 di CUVIER, ed a quella della Tav. XIII fig. 2 di ESPER, ed alle figure 3 e 4 Tav. IV di ROSENMÜLLER.

Questa vertebra nell'orso differisce da quelle analoghe degli altri carnivori, per avere, come osserva CUVIER (Tom. VII p. 304) l'apofisi spinosa più alta all'indietro che nel davanti, per aver le parti laterali del canal midollare, meno lunghe nel davanti, che nel di dietro, e perchè il canale laterale anteriore è meno basso che nel leone.

Vertebre cervicali successive.

Tav. III fig. 23.

Di queste vertebre nè parlano nè danno figure gli autori. Sono affatto diverse dalle altre della colonna vertebrale, per la forma del foro midollare, per l'obliquità del lor corpo, e per alcuni processi ossosi laterali contornanti un gran foro che esiste nel loro mezzo.

È costituita questa vertebra (fig. 23) da un grosso corpo tagliato obliquamente in modo convesso e con una depressione nel mezzo dal lato anteriore, e concava posteriormente — dell'altezza di 0,040 e larghezza di 0,055. Esso ha quattro faccette articolari; due anteriori contorte ed oblique, lunghe 0,030, e due posteriori che sono più grandi e divergenti delle anteriori. — L'apofisi spinosa è posta a queste quattro faccette nel mezzo ed è lunga 0,055. — Oltre a questi quattro processi, due altri ve ne sono nel lato inferiore, che all'estremità si dividono in due grandi e grossi tubercoli. — Verso il corpo della vertebra hanno un foro nel mezzo, che sembrerebbe formato dal lato discendente di una della faccette articolari e della grande apofisi trasversa. — Questi due processi misurano 0,06 in lunghezza.

Vertebre dorsali.

Tav. III. fig. 24.

Queste vertebre sono le più frequenti nelle caverne, e tranne all' avere le apofisi più o meno smussate, sono appunto quelle che si rinvencono in stato migliore.

Quella figurata a fig. 24 è la più grande della mia collezione, e la più perfetta, non mancando di parte veruna. — Componesi di un corpo semicircolare un poco allargato ai lati, e di alcuni processi laterali e trasversi.

Il corpo della vertebra è alto 0,025 e largo 0,058. Il foro midollare è ampio 0,027. L'apofisi spinosa quantunque un pò rotta all' estremità è lunga 0,090. Partendo dal foro midollare, le apofisi laterali invece sono lunghe 0,040. Quest' osso perfettamente si uniforma a quelli rappresentati nelle figure 21 e 22 Tav. 188 di CUVIER. Delle molte vertebre che ho rinvenute non darò quivi che le misure delle più perfette.

1) Corpo alto 0,024, largo 0,057, apofisi trasverse lunghe 0,030, apofisi spinosa 0,090. 2) Manca l'apofisi spinosa; corpo alto 0,040, largo 0,060, apofisi trasverse lunghe 0,040. 3) Manca pure l'apofisi spinosa; corpo alto 0,035, largo 0,070, apofisi trasverse lunghe 0,045. 4) Corpo alto 0,025, largo 0,065; apofisi spinosa lunga 0,080, mancano quelle trasverse. 5) Corpo alto 0,030, largo 0,055; apofisi spinosa lunga 0,080, trasverse 0,030 etc.

Vertebre lombari.

Tav. III. fig. 25.

Il corpo in queste vertebre è un terzo più grande delle dorsali, di figura reniforme con una depressione nel mezzo e protuberanza nel contorno, che poi di nuovo si abbassa. — La faccia anteriore del corpo è scannellata a guisa di fuscello, con grande rilievo nel mezzo. — Il corpo di questa vertebra è alto 0,055, e largo 0,070, l'apofisi spinosa è lunga 0,060; il foro midollare è largo 0,027. Le apofisi laterali sono rotte e le faccette articolari molto sformate. — Alcune altre vertebre lombari aveano le seguenti dimensioni: corpo alto 0,040, largo 0,050; di altre alto 0,045, largo 0,060; di alcune alto 0,040 e largo pure 0,060. La vertebra qui figurata corrisponde perfettamente alla fig. 20 Tav. 188 di CUVIER e credo che sia la più grande che sia stata mai rinvenuta.

Ossa del bacino.

Delle ossa costituenti questa cavità io non rinvenni che pezzi slogati, e molto logore, per cui riesce molto difficile lo stabilire sulle loro dimensioni e rapporti di grandezza criterio veruno. — I frammenti più ben conservati da me raccolti sono l'osso sacro, e varii pezzi dell' osso iliaco.

Porzione dell' osso sacro.

Tav. IV fig. 26 A. B e 27.

La porzione di quest' osso, costituisce la parte postero-superiore del bacino, o la vera ultima vertebra lombare un pò trasformata, che si dovrebbe articolare colle ossa cocigee. — Non differisce in fatti dalle vertebre che per la mananza, o meglio per la trasformazione dei processi trasversi, che in quest' osso sono espansi, e formanti una lamina unica. Superiormente il suo corpo, perfettamente analogo a quelle delle vertebre lombari, è largo 0,07. Inferiormente presenta il prolungamento (a) che si univa colle altre ossa sacro-cocigee. Lateralmente vedonsi ancora alcune porzioni dell' osso che si doveano unire colle ossa dell' ileo. — Misura esso da una estremità all' altra, cioè dalle due faccie che si articolavano colle ossa dell' ileo, 0,120 in lunghezza, eguali quasi nelle dimensioni al Sacrum del grande orso di CUVIER (pag. 286. Tom. VII) che toccava in lunghezza 0,123. Più piccolo di quello descritto da ROSENMÜLLER che era largo 0,135, ed un terzo più grande dei più grandi orsi viventi nei quali non supera 0,040 in lunghezza tanto in quelli neri d' Europa, che in quelli bruni di Polonia. — La fig. 27 rappresenta un frammento della porzione inferiore dell' osso sacro-cocigeo designato dalla parte antero-interiore — onde si veggono le divisioni che ancora ricordano il corpo delle vertebre o a meglio dire il trasformamento di varie vertebre in quest' osso.

O s s a d e l l' i l e o.

Tav. IV fig. 28. 29. A. B.

Il frammento (fig. 28) appartiene all' osso dell' ileo sinistro, il quale presenta ancora porzione della branca dell' osso che si articolava ed univa col sacro, mentre in vece è rotto nel lato che saldavasi coll' osso del pube. — La cavità cotiloidea che dava ricetto al capo superiore del femore è conservatissima, e manifesta ancora le impressioni lasciate dai legamenti capsulari: è larga 0,070, e profonda 0,035. Questo osso è molto maggiore e di più grandi dimensioni di quello descritto e figurato dal Prof. CATULLO pag. 46. fig. 2. Tav. VIII. La fig. 29 A. B invece rappresenta una porzione dell' osso iliaco destro, il quale nella parte posteriore A, mostra ancora la sutura colla quale univasi all' osso sacro, e in B parte della cavità cotiloidea. — Convien che l' attrito subito da quest' ossa fosse molto violento, quando vediamo, così rotte smussate persino le più robuste e compatte, quali appunto sono quelle costituenti la pelvi.

CAPO IV.

Arti anteriori.

Scapola o omoplata.

Tav. IV fig. 30.

Gli avanzi di quest' osso sono scarsissimi nelle spelonche, e non si rinvencono che allo stato frammentario, se ne eccettuano le parti più solide e dure, come l'acro-

mio; le parti più sottili sono del tutto scomparse. — CUVIER, ROSENMÜLLER e KARSTEN vanno egualmente privi di quest' osso, del quale non mancarono rari frammenti ad ESPER (CUVIER oss. foss. Tom. VII. pag. 272.) Io posseggo di questo osso un frammento eguale a quello rinvenuto dal Prof. CATULLO e descritto a pag. 45—46 e figurato nella Tav. VII. fig. 3 della sua memoria sulle caverne dell' Alpi Venete. — Mi venne esso favorito dallo studente di Medicina Carlo CAPPELLETTI di *Selva di Progno* al quale veniva fatto di scoprirlo nell' autunno del 1850 nelle caverne di Velo, unitamente a molte altre ossa. — Manca esso di tutta l'espansione sottile e dell' apofisi coronoidea, ed ha solo intera l'estemità dell' acromio lunga $3\frac{1}{2}$ oncie veronesi, che mostra ancora la fossa glenoidea lunga 2 oncie e $\frac{1}{2}$, larga 1 e $\frac{3}{4}$ nella quale articolovasi il capo superiore dell' omero. È quella a fig. 30.

O m e r o.

Tav. IV. fig. 31. A. B.

Questo osso del quale io posseggo parecchi esemplari ben conservati ed interi, è di forma cilindrica un poco contorta nella parte superiore, e schiacciata in quella inferiore. Presenta un grande rilievo nella parte interna (A) che partendo dal capo superiore si prolunga per due terze parti dell' osso, dove si unisce a due altre creste procedenti dal capo inferiore che costituiscono quasi una specie di delta. — Nei leoni e nei lupi invece, si unisce questo rilievo colle creste del capo inferiore poco più dalla metà dell' osso. — La cresta più esterna va a terminare negli orsi convessamente col condilo esterno del capo inferiore dell' omero, mentre essa nei leoni, e nei lupi va in linea retta a perdersi col resto dell' osso.

Finalmente la lamina orizzontale che partendo dal condilo esterno del capo inferiore dell' omero, si dirige obliquamente a ricoprire un poco la fossa posteriore, manca nel lupo ed è molto minore nel leone, il quale ha altresì questa fossa molto meno profonda.

La forma poi della carrucola articolare nell' osso dell' orso è poco profonda, nel leone invece è molto più pronunciata.

Termina questo osso in due capi uno superiore più piccolo e rotondo, l'altro inferiore più grande ed espanso, e distinto da un cilindro scavato a carrucola, sul quale si articola la cavità sigmoidea del cubito, ed ha una fossa nella parte più esterna dell' osso (B), destinata a ricevere il grande olecrano dell' ulna, della profondità di 0,040, la quale corrisponde ad un eminenza convessa nella parte opposta dell' omero, che sembra dividere l'una dall' altra due minori cavità situate alla base della carrucola articolare nel lato più interno dell' osso.

L'omero qui figurato è il sinistro; e mancando della piccola fossetta che dà passaggio sopra il condilo interno all' arteria cubitale, deve appartenere alla prima specie di orso di cui parla CUVIER a pag. 273, 275. T. VII. cioè all' *Ursus Arctoides*. Il capo superiore di questo osso è tutto logoro e non lascia bene vedere la

forma della faccia che articolavasi colla fossa glenoidea dell'omoplata. — Il capo inferiore invece è conservatissimo, e presenta molto ben conservati il condilo interno ed esterno, e tocca all'ampiezza di 0,12, mentre in quelli di CUVIER era appena 0,11 e negli orsi viventi 0,75 di lunghezza. La carrucola articolare è lunga, esclusi i condili, negli orsi del Veronese 0,08. La lunghezza totale dell'osso è di 0,33, quelli di CAMPER e CUVIER misuravano 0,35. I più grandi orsi viventi hanno l'omero lungo dal 0,34 al 0,36. Corrisponde perfettamente alle figure di JOHN, HUNTER (Trans. phil. 1794. pla. XX.) e a quelle di CUVIER Tav. 186. fig. 1. 2. 3.

O s s o del cubito.

Tav. IV fig. 32. 33. 34.

È raro il trovare nelle caverne quest'osso bene conservato ed intero; io ne posseggo 5 tutti interi, e raccolti nelle caverne di Velo. CUVIER, nell'immensa sua collezione non ne ebbe che due sole porzioni della parte superiore che sono quelle figurate nella Tav. 188. fig. 1. 2. 3. 4. ROSENMÜLLER ne delineò uno di interi nella Tav. IV fig. 1 di eguale grandezza a quello che ora andiamo a descrivere.

Questo osso è di forma un pò schiacciata, e termina in due capi, dei quali l'inferiore (fig. 32) è il più piccolo, distinto da due apofisi molto pronunciate che sono i malleoli interno ed esterno; il superiore più grosso, di forma affatto irregolare, e presenta molte faccette articolari (fig. 33) fra le quali una fossa semilunare molto ampia che è la sigmoidea che si articola colla carrucola del capo inferiore dell'omero (fig. 34), e molte apofisi, la più elevata delle quali è detta il grande olecrano, che viene ricevuta nella fossa posteriore dell'omero.

La sua lunghezza senza calcolare la parte inferiore mancante, è di 0,35 compreso il malleolo maggiore 0,040, cioè molto maggiore di quello di ROSENMÜLLER, ed eguale a quello di CUVIER descritto alla pag. 283 del Tom. VII, mentre i più grandi orsi viventi non l'hanno maggiore di 0,38. — L'ampiezza della fossa sigmoidea è di 0,055, l'altezza dell'olecrano 0,08, eguale a quelli di CUVIER. Minore grossezza dell'osso nella parte inferiore 0,04, maggiore presa sotto la fossa sigmoidea 0,075.

Gli altri cubiti da me rinvenuti offrivano le seguenti dimensioni: lunghezza 0,33, minore grossezza 0,03, maggiore 0,053; lunghezza 0,23; lunghezza 0,27; lunghezza 0,31: grosso inferiormente 0,03, superiormente 0,06; apertura della fossa sigmoidea 0,05. Uno rotto all'estremità superiore, poco sopra dell'origine della fossa sigmoidea, era lungo 0,021. Un'altro rotto e logoro in ogni sua parte, non presentava di intatto che la cavità sigmoidea la quale era larga 0,06 etc.

Differisce il cubito degli orsi, da quello delle tigri e leoni, pella minore lunghezza del grande olecrano (CUVIER Tom. VII pag. 283) per la maggiore piccolezza della cavità che riceve la testa superiore del radio, pella obbliquità della sua articolazione coll'omero. (MARCEL DE SERRES: Recherches sur les oss. hum. pag. 67.)

La fig. 33 rappresenta il cubito veduto di fianco, onde sieno ostensibili tutte le faccette articolari del capo superiore. — La fig. 34 lo rappresenta veduto dalla parte più larga e schiacciata, affinchè si possa vedere l'ampiezza della cavità sigmoidea e l'elevazione dell'olecrano, e la grossezza naturale dell'osso. — La fig. 32 rappresenta la metà inferiore di quest'osso conservatissima, affinchè si vegga la forma dei malleoli, dei quali l'uno è quattro volte più grande dell'altro — fra essi si numerano 6 piccoli fori distintissimi in linea retta, che avranno dato passaggio a dei vasi o dei nervi; essa è una cresta ossea che è la apsticoidea molto rilevata e tagliente.

O s s o del radio.

Tav. IV. fig. 35.

Io non posseggo di intero che un solo di questi ossi, abbastanza conservato e (fig. 31), la cui maggiore lunghezza è di 0,23 col capo più piccolo largo 0,055 e il più grande 0,060. — Quelli di CUVIER, di cui parla a pag. 281, figurati alla Tav. 187 fig. 1. 2. 3. 4 sono lunghi 0,34, larghi in basso 0,080, in alto 0,050. Quello di ROSENMÜLLER è lungo 0,31 mentre nei più grandi orsi viventi arriva quest'osso alla lunghezza di 0,32. Si vede quindi che l'osso che io descrivo apparteneva ad un giovane individuo. La sua forma è perfettamente cilindrica, e termina superiormente in un piccolo capo e varie faccette che si articolavano col cubito, inferiormente riceve un maggiore sviluppo e termina in un capo che è del doppio più grande del superiore, il quale si deve articolare colle ossa del carpo.

Molti altri frammenti di più vecchi individui mi fanno credere che le ossa del radio degli orsi del Veronese, poco dovevano differire nelle dimensioni da quelli di CUVIER. Si distinguono i radii dell'orso, da quelli degli altri carnivori per una specie di piccolo uncino, più grande che nelle tigri e leoni, e pella forma della testa superiore più stretta e meno circolare, pella fossette del tendine dei muscoli estensori dei diti, poco profonde, e collocate in avanti, laddove nelle tigri e leoni sono poste nel mezzo. (Cuv. oss. foss. Tom. VII. pag. 280.)

CAPO V.

Arti posteriori.

F e m o r e.

Tav. IV fig. 36. 37.

Molti sono i femori interi da me rinvenuti nelle caverne di Velo, di individui giovani ed adulti, della lunghezza di 0,30 sino a quella di 0,44 ma tutti più o meno rovinati nell'estremità dei capi superiore ed inferiore. Quello figurato quivi (fig. 36, 37) era intero, ma nell'estrarlo venne rotto a mezzo; senonchè essendo quello che più d'ogni altro presenta le parti dell'estremità più sane e perfette, me ne servii per darne la figura.

La fig. 36 rappresenta la metà superiore del femore; in essa vedesi conservatissimo il capo che articolavasi colla cavità cotiloidea del bacino, e sull' estremità presenta una depressione o fossetta da dove sorgevano i legamenti che si inserivano in quella curva depressione, che si osserva appunto nella gran fossa cotiloidea della pelvi. — I due trocanteri sono pure in istato perfetto; partendo dalle radici del maggiore, il capo del femore si eleva per 0,035.

La fig. 37 rappresenta il capo inferiore del femore. In esso sono ben conservati i condili esterno ed interno, i quali sono divisi l'uno dall' altro da una fossa, nella quale si articola la cresta del capo superiore della tibia. — Il capo è largo da un condilo all' altro 0,07 — in qualche altro frammento misura 0,09. Nei giovani individui il capo inferiore tal fiata si stacca dal resto dell' osso, col quale si articola con quattro piramidi corrispondenti, e quattro fosse scavate nel corpo dell' osso, due delle quali nella parte anteriore sono più profonde e ristrette, le altre più lunghe e meno profonde.

Tutto l'osso era lungo 0,044. Il più grande descritto dal CUVIER avea 0,041 di lunghezza, quello dei più grandi orsi viventi è lungo 0,043. Convengono col femore da me descritto le figure 9. 10. 11 Tav. 187 di CUVIER, e la fig. 2 Tav. VII di ROSENMÜLLER.

Caratteri distintivi del femore degli orsi sono un collo allungato e più obliquo che in qualunque altro animale carnivoro e la testa inferiore più corta al davanti che al di dietro a proporzione della sua lunghezza trasversa, e che quindi permette alla rotula di rimontare più sul davanti, circostanza che avvicina l'orso, come nota CUVIER (Tom. VII pag. 287) all' uomo e che gli facilita la stazione sui piedi di dietro.

R o t u l a.

Tav. IV. fig. 38. A. B.

Di quest' osso non fecero parola gli autori, quasi non esistesse, e mi duole di non poter quindi istituire confronto veruno cogli orsi fossili di altre località, e con quelli viventi. Ne do però quivi la figura affinchè qualche altro il quale per avventura si occupasse di siffatte ricerche, possa avere, quantunque scarso, un termine di confronto.

La sua forma è ovale; nella parte antero-estriore (B) è convessa, uniformemente striata; nella postero-anteriore è costituita da due piani inclinati (A) corrispondenti alle piccole infossature della parte anteriore del capo superiore della tibia, e di quello inferiore del femore. Essa è lunga 0,070, larga 0,055; sua maggiore grossezza 0,030.

T i b i a.

Tav. IV fig. 39. Tav. V fig. 56.

La tibia è un grosso osso cilindrico, contorto sul proprio asse, e con varie eminenze sulla sua superficie. Fra le altre, la cresta anteriore alla quale si attaccano i tendini dei muscoli estensori della gamba, è la più prolungata e visibile (fig. 39). Termina essa in due capi di differenti grandezze, uno inferiore piccolo ed ellittico, con due

fosse irregolari che si articolano colle ossa del tarso (fig. 56) l'altro superiore molto grosso, ha varie eminenze e depressioni, nelle quali si articolavano il capo inferiore del femore, e parte della rotula, e si nascondevano e passavano varii legamenti, fasci nervosi e vasi. Corrisponde quest' osso alle fig. 16. 17. 18. 19 di CUVIER Tav. 187, ed a quella di ROSENMÜLLER fig. 2 Tav. V. Misura esso 0,029, il capo superiore è largo 0,110, l'inferiore 0,090. Quelle descritte da CUVIER pag. 289 misuravano 0,026, erano larghe nel capo superiore 0,085, inferiormente 0,070. Il diametro minore della tibia che io descrivo, è di 0,035, di quella di CUVIER 0,030.

Le tibie dell' orso nero d'Europa sono lunghe 0,026, larghe superiormente 0,076, inferiormente 0,055. I più grandi orsi viventi hanno la tibia lunga 0,035, larga superiormente 0,072, inferiormente 0,060. — Il capo inferiore della tibia è tagliato obliquamente dal davanti all' indietro, e presenta come è detto più sopra, due cavità articolari visibili nella fig. 56. Altre tibie di minore grandezza ho io rinvenute nelle descritte caverne, e tra le altre molte di giovani individui, che misurano appena 0,20 — 0,023 con il capo superiore largo 0,08, l'inferiore 0,07.

Fibula o osso del perone.

Tav. IV fig. 40.

Anche di quest' osso posso dare la figura di quella porzione che mancava al CUVIER (Tav. 188 fig. 23) cioè della superiore. — È difficilissimo il rinvenirlo intero, pella eccessiva sua sottigliezza. — Presenta un corpo irregolarmente cilindrico, con varie creste sulla sua superficie, e termina inferiormente con un grosso capo che si articola colle ossa del tarso e lateralmente colla tibia. — Superiormente il capo è un poco schiacciato con varie faccette oblique ed articolari. — La forma di questo osso è uguale a quella che si ravvisa anche negli orsi viventi d'Europa. — Io non ne ho mai trovato la porzione inferiore, della quale invece fu provvisto il CUVIER, e privo ne andava totalmente il ROSENMÜLLER.

Quadro comparativo

delle diverse lunghezze degli arti degli orsi fossili del Veronese confrontate con quelli fossili di altri autori, e cogli orsi viventi.

		Orsi di Camper	I. specie d'orso di Cuvier	II. specie di orso di Cuvier	Orsi di Rosenmüller	Orsi di Karsten	Orsi del Veronese	Orsi più grandi viventi
Omero.	Lunghezza dell' omero	0,37	{ 0,38 0,39 0,40	0,46	0,47	0,44	0,33	{ 0,34 0,36
	Lunghezza del capo superiore dell' omero	"	"	"	"	"	0,12	0,75
	Lunghezza del capo inferiore dell' omero	0,11	"	"	"	"	0,13	0,075
	Lunghezza del radio	"	0,34	"	0,31	"	0,23	0,32
Radio..	Lunghezza del capo superiore del radio	"	0,055	"	"	"	0,060	"
	Lunghezza del capo inferiore del radio	"	0,08	"	0,075	"	0,055	0,055
Cubito.	Lunghezza del cubito	"	0,40	"	0,35	"	{ 0,35 0,33	0,38
	Altezza dell' olecrano del cubito	"	0,08	"	0,07	"	0,08	"
Femore	Lunghezza del femore	"	0,46	0,40	0,50	0,425	0,44	0,43
	Groschezza inferiore del femore	"	0,105	0,095	"	0,110	0,100	0,080
	Groschezza superiore del femore	"	0,045	0,110	"	0,130	0,42	0,100
Tibia..	Lunghezza della tibia	"	0,26	"	0,26	"	0,29	0,35
	Groschezza superiore della tibia	"	0,085	"	0,85	"	0,090	0,072
	Groschezza inferiore della tibia	"	0,070	"	0,070	"	0,075	0,060

CAPO VI.

Ossa delle estremità.

Ossa del carpo.

Osso che tien luogo dello scafoideo o semilunare.

Tav. IV. fig. 41. A. B.

Quest' osso ha la figura di un sette piuttosto che di una mezzaluna, e consta di una branca orizzontale, che è la più grande, convessa esternamente e lunga 0,07 e con varie concavità e faccie articolari internamente, che si potrebbero ridurre a cinque; una superiore obblunga, due mediane e divise da un solco che forma una cavità articolare, ed una laterale. La branca verticale che è la minore, è lunga 0,03 e si distingue da quella del leone pella sua maggiore lunghezza. — Tale porzione distinta da CUVIER col nome di tubercolosità, è lunga negli orsi da esso illustrati 0,025, in quelli del Veronese 0,030.

La lunghezza e larghezza trasversale di quest' osso, in quelli di CUVIER tocca a 0,052, in quelli del Veronese a 0,070. Il diametro antero-posteriore, preso nel mezzo, è lungo, in quelli di CUVIER, 0,031, in quelli del Veronese 0,035. (Cuv. Tom. VII pag. 293.) Le dimensioni antero-posteriori sono dello stesso diametro degli orsi viventi, ma le altre dimensioni sono di un quinto più pronunciate. Combina il mio osso perfettamente colle fig. 20, 21 della Tav. 187 di CUVIER e con quella fig. 9. Tav. VIII di ROSENMÜLLER, il quale però lo prese per l'unciforme (Cuv. pag. 292). La fig. 41. A rappresenta quest' osso veduto dal lato più interno, e dal lato delle faccette articolari — B dalla parte più esterna.

O s s o p i s i f o r m e .

Tav. V. fig. 42. A. B.

CUVIER non dà descrizione veruna di quest' osso a pag. 293—294 del Tom. VII e solo dice che ROSENMÜLLER ne fu privo. Egli lo figura alla Tav. 187 fig. 22—23, e pienamente conviene al mio osso. È esso formato da un rozzo cilindro con una estremità ottusa, ed una più dilatata a guisa di C che si apre in due faccette articolari, una delle quali (A) prende quasi tutta l'ampiezza di questa estremità ed è lunga 0,033 e costituisce i lati più divaricati di quest' osso; l'altra (B) invade appena la metà del lato opposto ed è lunga 0,25. Dopo queste due faccette l'osso si restringe e forma una specie di collo, dopo il quale viene il resto dell' osso stesso, con due grosse tuberosità corrispondenti al lato della faccetta A maggiore, e finisce con un capo grosso ed ottuso. — La lunghezza totale di tutto l'osso e di 0,047.

O s s o u n c i f o r m e .

Tav. V. fig. 43. A. B.

Con molta dubbiozza riferisco quest' osso alle fig. 9.10.11 Tav. 185 di CUVIER, essendo esse un pò troppo piccole ed indistinte. Consta di tre parti o tre piani affatto distinti, due dei quali (A) sono rettilinei e si uniscono ad angolo retto; il maggiore sarebbe lungo 0,040 e largo 0,030, con un grosso solco o doccia da un lato. — Il minore alto 0,020 e lungo altrettanto, presenta sull' orlo varie intaccature che si perdono sulle residue parti dell' osso. Il terzo (B) pare formato da una linea curva ascendente che va a terminare in una punta piuttosto acuta, ed è lunga 0,030 di forma affatto irregolare.

Delle altre ossa del carpo, cuneiforme, trapezio e trapezoide, mi sono mancati gli esemplari: e malgrado le mie molte ricerche non ne potei mai scoprire traccia veruna nelle caverne del Veronese.

Ossa del tarso.

Osso del calcagno.

Tav. V. fig. 44.

Questo osso della forma di un martello, in cui i processi trasversi terrebbero luogo della testa e del pennello di questo strumento, si distingue dalle ossa analoghe degli altri animali pell' apofisi laterale molto prolungata. — Si differenzia poi da quello del leone per essere meno lungo e meno schiacciato. Si uniforma il mio osso interamente alla fig. 6 Tav. VI del Prof. CATULLO e Tav. 186 fig. 10 di CUVIER, e Tav. VIII fig. 1 di ROSENMÜLLER, Tav. XIV fig. 1 di ESPEL. La sua lunghezza maggiore è di 0,095, quello del Prof. CATULLO, trovato nello stesso luogo dei miei, misurato sulla figura, sarebbe lungo 0,100. I processi trasversi misurano 0,080 nei più grandi, e 0,070 nei più piccoli; hanno tre faccette articolari, delle quali due sono concave, ed una convessa. — Quelli di ROSENMÜLLER misuravano 0,105, quelli di ESPEL erano un poco più grandi.

Osso dell' astragalo.

Tav. V. fig. 45. A. B.

CUVIER confessa a pag. 297 di non possedere di intero che uno solo di questi ossi, ed è quello che figurò e descrisse alla Tav. 186 fig. 11. 12. Nella parte esterna (A) presenta una grande convessità, con una depressione nel mezzo a guisa di carrucola; nella parte più interna (B) vedonsi due faccie articolari divise da un solco tortuoso lungo 0,010, e che partendo dall' apofisi più piccola si divide sino all' esterno, alle radici dell' apofisi mediana. — Di queste due faccette, una, cioè l' inferiore, è concava, lunga 0,045, e larga 0,025; la superiore è convessa, lunga 0,040, e larga 0,017. La maggiore lunghezza di tutto il corpo dell' osso, non comprese le apofisi, è di 0,054, comprese quelle, di 0,065. — La maggiore altezza è 0,044 presa, dalle due apofisi superiori 0,060. — Quelli di CUVIER erano lunghi 0,058, ed altri 0,053, mentre negli orsi più grandi viventi non arriva che a 0,048 di lunghezza, e 0,045 di altezza.

Osso scafoide.

Tav. V. fig. 46. A. B.

Corrisponde il mio osso perfettamente alla figura che ne dà il CUVIER alla Tav. 186 fig. 13. 14, quantunque, attesa la sua piccolezza sia difficile instituire un più esatto confronto. CUVIER lo descrisse a pag. 197 e ROSENMÜLLER lo figurò nella Tav. VIII fig. 10, ed esso è di maggiori dimensioni di quello descritto da ambedue.

La sua forma piuttosto che di un trapezio è quella di un triangolo, col lato maggiore rotondo che formerebbe una quarta parte di un cerchio. — Da una banda presenta una fossa articolare ellittica (B), lunga 0,037, e larga 0,030, nella parte opposta

presenta una convessità (A) irregolarmente faccettata. — Maggiore lunghezza dell' osso 0,040. Un' altro esemplare invece toccava alla lunghezza di 0,050, colla fossa articolare lunga 0,045, e larga 0,040. Quelli di CUVIER erano lunghi 0,035, larghi 0,04. Il mio è largo 0,05, lungo 0,45, molto più grande anche che negli orsi viventi.

O sso cuneiforme? (secondo?)

Tav. V. fig. 47. A. B.

Anche qui con molta dubbioza riferisco quest' osso al secondo cuneiforme, non trovando analogia veruna col vero cuneiforme, e col terzo cuneiforme figurati dal CUVIER nella Tav. 186 fig. 18. 19, nè colle fig. 20 e 21 di questa stessa tavola, nè con quella 6 e 12 della Tav. VIII di ROSENMÜLLER. La forma singolare di quest' osso, del quale furono privi e ROSENMÜLLER e CUVIER, non è gran fatto suscettibile di una regolar descrizione, per cui credo gioverà più la ispezione della figura, di qualunque frase caratteristica che mi argomentassi di darne.

Ossa del metatarso e metacarpo.

Tav. V. fig. 48. A. B. 49. A. B. 50. 51. 52. 53. 54. 55.

Quanto comuni e frequenti siano queste ossa nelle caverne, altrettanto furono sin qui le meno studiate dagli scrittori. — Mi duole moltissimo di non poter supplire a questo vuoto nella osteologia comparata degli orsi delle spelonche, ad onta dei molti materiali da me riuniti nelle mie varie ricerche; perchè senza lo scheletro di un orso vivente sarebbe impossibile di ciò conseguire. Una tale operazione sarebbe tuttavia molto difficile, e direi quasi impossibile il poter con sicurezza riportare ciasun' osso del metatarso e del metacarpo, e falangi, al vero posto che dovrebbero occupare, stante le differenti età degli individui cui si debbono riferire le reliquie che si scoprono nelle caverne. — CUVIER poté riunire quattro ossa del metatarso e del metacarpo e sono quelle figurate nella Tav. 188 fig. 5. 8. ROSENMÜLLER non ne rappresentò che uno dei primi nella sua Tav. VIII fig. 13. Io non dò la figura che di un solo degli ossi del metacarpo (fig. 50) e di due del metatarso (fig. 49. A. B) uno dal lato superiore, e l'altro dall' inferiore, affinchè si possano vedere le forme delle estremità che si articolavano colle ossa del tarso, e colle falangi. — Differiscono queste ossa da quello degli orsi viventi per essere quelle del metacarpo di $\frac{1}{4}$ più grosse, e di $\frac{1}{2}$ più corte, e quelle del metatarso di $\frac{1}{2}$ più corte, e grandi egualmente.

CUVIER dà la figura di alcune falangi della prima fila (Tav. 188 fig. 9. 10. 11) e di due della seconda (Tav. 188 fig. 12. 13) e di alcune delle unguali (Tav. 188 fig. 14. 15. 16). Io mi limiterò a dare la figura di una sola della prima fila (fig. 48. A. B) onde si veggia, in B, la cavità superiore che riceveva il capo inferiore delle ossa del metatarso o metacarpo, ed in A le due apofisi che si articolavano colle faccette articolari del capo superiore delle ossa della seconda fila delle falangi. Queste ossa sono eguali a quelle degli orsi viventi.

La fig. 51 rappresenta un' enorme falange dei piedi posteriori, appartenente alla prima del dito pollice. — Essa oltre al differire dalle analoghe ossa del piede delle maggiori dimensioni, accresciute in questa falange del triplo, si distingue dalle altre per un maggiore sviluppo della parte inferiore e superiore dell' osso, e per due specie di grosse protuberanze (fig. 51 . B) che dovevano molto facilitare la stazione dell' animale sui piedi di dietro. Essendo altresì quest' osso di molto maggiori dimensioni nelle parti notate, che negli orsi viventi, ne viene, che gli orsi primitivi doves- sero avere una abitudine più frequente a reggersi sulle zampe posteriori, e che la loro stazione potesse essere più prolungata, e più ferma. — La fig. 51 . A la rappresenta dal lato superiore; la fig. 51 . B dal lato inferiore.

Le figure 52.53.54.55 rappresentano varie forme delle costole degli orsi delle caverne. Anche di queste mi è incresecevole il non poter dare più istruttive notizie, mancando delle analoghe ossa degli orsi viventi, con cui instituire confronti, dei quali pure sono privi gli autori (53).

N o t e.

- (1) Di questa valle ho dato una descrizione nel recente mio opuscolo, intitolato: „*Schizzo Geognostico sulla Valle del Progno o torrente d'Ilasi, con un saggio sopra la flora primordiale del monte Bolca* (Verona, Tip. Antonelli 1850). Ad esso rimando il lettore, anche pella rettificazione alla quale serve il presente lavoro, di qualche terreno, e di alcune località, delle quali in quell' operetta tenni discorso.
- (2) Premetto che ommettendo ogni storia sugli antecedenti studj e tentativi geologici delle nostre provincie, unicamente m'attengo alla classazione che dei nostri terreni venne stabilita nei congressi di Milano, Genova e Venezia.
- (3) Questo banco a pentacriniti con aculei eziandio d'echinodermi, trovasi sempre nel mezzo agli strati oolitici.
- (4) In questa località alterna anche colla lignite (Vedi CATULLO *Zool. foss.* pag. 242—256 e Lodovic PASINI: *Estratto ragion. della Zool. foss. ecc.* pag. 23—24).
- (5) Vedi CATULLO *Zool. foss.* loc. citat. (pag. 242—256.)
- (6) A Badia Calavena nella Frazione di Sprea, nel luogo detto Lonardei, una *Trigoniu*? o *Isocardia*? in cattivissimo stato, indeterminabile, da se sola forma un banco dello spessore di un metro come fu detto nel citato mio opuscolo (pag. 13), nel quale collocavo questo deposito nella creta inferiore. Maggiori esami però mi conducono ora a riferirlo all' Jura, col quale mi sembra avere più analogia e rapporti.

- (7) Vedi il novello lavoro del Ch. A. De Zigno inserito in questo volume a pag. 1; intitolato: *Coup d'oeil sur les terrains stratifiés des Alpes Venetiennes*, nel quale parla lungamente dei depositi juresi delle nostre provincie.
- (8) Delle specie principali e più comuni vedi il catalogo nel citato mio opuscolo p. 16.
- (9) La forte inclinazione di questi strati sopra tutto il lago di Garda, in maniera da costituirne il letto, fa supporre contemporanea la formazione di questo baccino, all'epoca in cui tali depositi passarono dallo stato loro originario orizzontale, a quello d'inclinazione che conservano ancora; e siccome un tale fenomeno sembrerebbe essere succeduto all'epoca delle eruzioni basaltiche, così non sarebbe improbabile la coevità del bacino benacense a questo singolar cataclismo. Basterà a mia giustificazione la citazione delle rocce emersorie su varj punti del M. Baldo, e sulle rive stesse del lago tra Malcesine e Cassone lungo la strada maestra, dove sono ad immediato contatto colle rocce juresi.
- (10) Nel paese di Tregnago (Marcenigo, Scorgnano) abbiamo sotto il calcare neocomiano i seguenti depositi: 1° calcare neocomiano che forma la cima del monte; 2° calcare giallastro compatto; 3° calcare giallastro, marnoso e friabile; 4° calcare biancastro cristallino; 5° calcare giallastro screziato di bianco e rosso; 6° calcare rossastro saccarino; 7° calcare rossastro corrotto e friabile, che impiegasi come sabbia, unito alla calce, pelle costruzioni; 8° calcare biancastro pure corrotto, che usasi come il precedente; 9° finalmente, calcare rossastro-compatto più o meno cristallino e saccaroide che forma la base del monte.
- (11) Di questi Alcionj vedesi una specie particolare nel paese di Mezzane (Postumano) della forma e grossezza di un corno di bue. È ivi tanta la copia di questo spongiario che il luogo è chiamato *Monte dei corni*.
- (12) Più di 1200 metri sul livello del mare (Vedi MASSALONGO: *Schizzo geognostico* ecc. pag. 10 nella nota).
- (13) Su questo fenomeno dei terreni terziarj isolati e ad una tale elevazione, sarebbe molto a ragionare, avendo essi un grande rapporto coll'epoca alla quale si debba riferire il sollevamento delle nostre Alpi. (Vedi Murchison nel *Philosophical Magazine*: Giugno 1829, e Lod. PASINI: Nota sui rapporti dei terreni secondarj e terziarj etc., negli *Annali delle Scienze del Regno Lomb. Ven. Bim. III. IV. pag. 1—3.*)
- (14) In questa località del M. Baldo (Stanga e Ardefort) ho notato una roccia calcarea lamellosa, analoga a quella del M. Bolca con impronte di vegetabili in cattivissimo stato, granelli di terra verde, e qualche rara squama di pesce.
- (15) Dei depositi terziarj del M. Purga di Bolca ho dato in iscorcio la serie nel più volte citato mio opuscolo pag. 11 Nota 1°: aggiungerò qui la successione di quelli del M. Postale compresi anche quelli di formazione più antica. Il depo-

sito più basso che si vegga alle sue radici nella Val Cherpa è un calcare sabbioso, giallastro o rossastro al quale seguono: 1^o) calcare bianco compatto (biancone?); 2^o) scaglia bituminosa; 3^o) scaglia rossastra; 4^o) scaglia rossa egualmente; 5^o) peperino in banchi molto potenti; 6^o) banco calcareo della grossezza di un metro a *Terebratula polymorpha*, Nob.; 7^o) tufe e basalti corrotti; 8^o) calcare grossolano lamelloso; 9^o) calcare a nummoliti e alveoline; 10^o) calcare a ittioliti; 11^o) piccolo strato calcareo ad alveoline; 12^o) calcare ad ittioliti; 13^o) calcare a nummoliti ed alveoline; 14^o) calcare a ittioliti; 15^o) calcare grossolano a nummoliti; 16^o) calcare grossolano conchigliifero in banchi molto potenti; 17^o) calcari, tufe, e basalti confusi, che formano la vetta del monte.

- (16) Isti. Geol. Cap. 22. pag. 206. Tom. I. §. 135—139. (Paris 1822.)
 (17) Opera citata Tom. I. pag. 208. §. 136.
 (18) Essai sur les cavernes pag. 16.
 (19) Guid. du Geol. voyag. Tom. II. pag. 109.
 (20) Bul. de la Soc. Geol. de France. Tomo IV.
 (21) Corso elemen. di Geol. Milano 1846 §. 124 pag. 160.
 (22) Elementi di Geol. prat. e teor. pag. 201—215.
 (23) Essai sur les cavernes troisième. Edit. 1838 pag. 18—19.
 (24) Notizie natur. e civ. sulla Lombardia. Milano 1844 pag. 56.
 (25) Sopra l'ingresso uno strato un poco sporgente forma come una specie di gradino che gira per buon tratto attorno alla grande muraglia.
 (26) Le misure sono sempre in piedi veronesi.
 (27) Contiene sempre ghiaccio in tutte le stagioni; esso viene estratto e messo in commercio.
 (28) Se il sollevamento dei monti fosse succeduto quando la roccia basaltica era ancor fluida si sarebbe essa riversata sui fianchi dei monti allora prodotti, e quindi le brecciole o peperiti non si dovrebbero mai trovare alla sommità delle montagne, ma unicamente alle radici.
 (29) Lettera Geologica sui monti veronesi del Dott. Ci. POLLINI. Bibl. Ital. Tom. 38. 1825. Par. 2. pag. 367 Nota 3.
 (30) Sulle caverne delle prov. ven. 1845. pag. 41. (Atti dell. I. R. Ven. Istituto.)
 (31) Non la nomina come esistente a Velo, ma solo dice che a due miglia da Bolca trovasi una gran grotta.
 (32) *Vet de Ossibus Ursi quae in speciebus montanis ad sylvam Progni conduntur.*
 (33) Anche il COLLEGNO ne fa menzione ne' suoi Elementi di Geol. teor. prat. pag. 213.
 (34) Memoria epist. sulle ossa degli elefanti ecc. pag. 41. In essa credeva che le ossa di questa caverna si dovessero riferire a grandi amfibj, simili alle foche. (Vedi anche CATULLO. Memoria sulle cav. delle alp. ven. pag. 40.)

- (35) Inserita negli atti dell' I. R. Veneto Istituto 1845. — Oltre questo lavoro, il Profess. CATULLO dà un cenno di questa caverna anche nel giornale di Brugnatelli. Pavia 1825.
- (36) I fori si distinguono colle lettere alfabetiche da sinistra a destra.
- (37) Entrando negli ingressi C. D. E., a mano destra si veggono ancora gli avanzi dei fornelli che servivano ad una tale operazione.
- (38) Sulle cav. delle alp. ven. pag. 54 e 58.
- (39) Questa misura l'ho presa per approssimazione, essendo impossibile l'arrampicarsi per questa cavità.
- (40) Non avendo allora dato certo peso a questa iscrizione, trascurai di trascrivermi esattamente ogni cifra; e mi sovviene che l'anno sottoscritto non era precisamente il 1500, ma qualche anno di più che ora non ricordo. — L'essere però i caratteri ancora bene distinti e freschi, come se appena scolpiti, è l'effetto della mancanza quivi dell' azione degli agenti esterni, e ora d'ogni stilicidio.
- (41) Un' altra caverna, ma molto minore vedesi nella Val Scura, ed è detta *Tana delle sponde*, lunga 37 piedi e piena di frammenti caduti dalle volte stesse della caverna.
- (42) In questo laghetto vivono il *Cancer astacus*, il *Triton cristatus*, e *alpestris*, la *Rana esculenta* ed *alpina*, varie specie di *Ditiscus*, fra i quali comunissimi il *marginatus*, *l'impressus*, e *minutus*, la *Nepa cinerea*, il *Girinus natator*, e gli *Elophorus aquaticus*, e *minimus*, una *Linnea* ed un *Planorbis*: è pure tutto pieno dell' *Arundo phragmites*, del *Potamogeton crispum* e *pusillum*, e di una *Lemma* e di molte *Conferve* ecc.
- (43) L'analisi sopra queste ossa fossili del Veronese mi venne istituita dal mio amico Antonio CENI, assistente alla cattedra di Botanica nell' I. R. Università di Padova.
- (44) MARCEL DE SERRES: *Essai sur les caver.* pag. 93 e nell' altra opera intitolata *Recherches sur les ossem. humat. etc.* pag. 24.
- (45) Riguardo alla fossilizzazione delle ossa degli animali, non posso a meno di far notar qui in iscorcio cosa intendasi presso i paleontologi esprimere con questo vocabolo; avendo sentito più fiate da alcuni poco versati in questa materia, farne un uso poco consentaneo al valore che se gli deve attribuire, e non credendo fossili gli avanzi delle caverne, perchè non sono passati allo stato di carbonato calcareo. *Fossile* secondo l'etimologia del vocabolo (fodere) è tutto ciò che si cava dalla terra: quindi sotto questo aspetto non pure le sostanze organiche, ma anche gli stessi minerali si potrebbero *fossili* appellare. Però i naturalisti, ad unanime consenso, conservarono questo epiteto alle sole sostanze organiche, che colla loro presenza anteriore, ad ogni epoca storica, caratterizzarono uno speciale periodo geologico. La conservazione di questi avanzi, la maggiore o mi-

nore qualità di sostanze animali che ancora conservino, o la totale petrificazione, nulla possono dirci sulla loro data, dipendendo questo interamente dalle circostanze speciali che accompagnarono la loro inumazione.

Molti avanzi organici infatti anche a giorni nostri, come le conchiglie dei molluschi, che attualmente periscono nel seno del mare, si petrificano nella stessa guisa, che nei bacini degli antichi mari geologici (MARCEL DE SERRES: *Essai sur les cav.* Introd. pag. VII *). Similmente si dica di ogni altro organico avanzo, il quale ove si trovi in circostanze favorevoli alle quali si associi l'azione delle acque, non tarderanno a sostituire al fosfato il carbonato calcareo. Gli avanzi delle caverne, che rimasero così presto in secco, non poterono quindi subire questa estrema alterazione, solo col loro lungo soggiorno nelle caverne acquistaron una particolare proprietà, quale si è quella di assorbire l'umidità, e di allappare la lingua (MARCEL DE SERRES: *Essai sur les oss. etc.* pag. V. Introd.); il quale fenomeno secondo parecchi geologi è sufficiente per caratterizzare questi avanzi per fossili. — La sostituzione adunque della materia inorganica alla organica, se nacque nei frammenti sepolti nelle acque, non si verificò mai nelle ossa sepolte nelle caverne, qualunque ne sia la loro antichità (MARCEL DE SERRES: *Recherches sur les oss. hum.* pag. 229 **).

Altri caratteri, oltre a quello di attaccare la lingua, differiscono pure gli avanzi fossili delle caverne dagli umabili del nostro periodo, e sono la natura dei depositi, la qualità del terriccio che li avvolge, una maggiore compattezza e friabilità, una frattura frammentaria concoidale, anzichè quella ineguale e sfogliosa delle ossa degli animali viventi.

- (46) Il Sig. di MARCEL DE SERRES in più luoghi del suo saggio sulle caverne, dopo di avere numerate tutte quelle caverne nelle quali si sono rinvenuti avanzi umani, o dell' umana industria (pag. VII Introd. e pag. 185 — 195, 196 — 228) conchiude che la dispersione delle fanghiglie ossose dovette succedere non solo dopo la comparsa dell' uomo, ma anche dopo l'invenzione delle arti (pag. 214. 246. 247. 248).

Però in molti luoghi di quella sua opera, non sembrò sostenere egualmente la sua opinione; per esempio alla pagina 246 dopo di avere asserito questo fenomeno posteriore alla ritirata dei mari nei bacini attuali, cioè all' epoca quadernaria, in altro luogo avea detto (pag. 62) essere il fenomeno succeduto in un epoca poco lontana dal periodo attuale, che è quanto dire, qualche tempo prima della comparsa dell' uomo, essendo esso affatto speciale di questo periodo!!

*) I semi di *Chara* nei laghi di Scozia si petrificano tutto giorno.

***) Senza l'azione dell' acqua non può mai succedere una petrificazione.

L'associazione poi delle ossa umane con animali di specie e generi estinti, oltre al ricevere spiegazione, come dissi più sopra dall'azione del diluvio Noetico, che mescolò in qualche luogo e confuse gli avanzi di queste due epoche remote, e da altre minori e successive alluvioni, ammesse pure dal MARCEL DE SERRES (oper. cit. pag. 59—245) e delle quali non mancano storici appoggi*), si può eziandio dilucidare come osserva DEFROYERS (Bull. de la Soc. Geol. de France. T. 2 p. 127) per mezzo della storia. Non mancano infatti esempi di popoli che vivessero nelle caverne, sia per imperiose necessità, che per naturali abitudini. I Retinesi dopo incendiate le loro città dai Romani, scelsero a loro dimora le caverne (Dione lib. LXI). Le caverne della Dalmazia servirono di abitazione a quei popoli, spaventati dalle ruberie degli Uscocchi, e sappiamo pure da Floro (Hist. Rom. Lib. 3 cap. 70); citato anche dal Prof. CATULLO (sulle Cav. delle Prov. Venete. pag. 9) che Giulio Cesare fece chiudere le astate genti dell'Aquitania nelle caverne. Marco Polo narra, che in un regno delle Indie chiamato Dagroiam nella Giava minore, si usano mangiare gli ammalati, e poi posti gli avanzi e le ossa in arche, si sospendono alle volte delle caverne**) (Viaggio di Marco Polo etc. Venez. 1847 part. III Cap. 18 pag. 157) per cui credo che il voler provare il contrario nello stato delle attuali cognizioni, sarà del tutto tempo perduto.

- (47) Nelle epoche geologiche, più semplici erano le funzioni fisiologiche dei varii animali, e quindi più esclusivi i cibi. A mano che si andava progredendo nell'ordine della creazione, e che più perfetti erano gli esseri, più complicate erano eziandio le funzioni della vita, meno esclusivi diventavano i cibi, fino che si arrivò agli animali dei più complessi apparati, e all'essere onnivoro per eccellenza. — Con ciò provvide natura alla più lunga esistenza e maggiore durata delle sue creature, le quali pelle mutate condizioni, non avrebbero potuto sopravvivere al mancare del naturale alimento, se organi più complessi non si fossero prestati alle novelle e diverse produzioni.
- (48) *Recherches sur les Poiss. foss. T. I. pag. 172.*
- (49) *BROCCHI Conchigl. foss. subap. pag. 229. T. I.*
- (50) *LEYLL Princip. de Geolog. 4. partie. Paris 1848 pag. 259.*

*) Sono celebri nella storia, le innondazioni o diluvii di Xixutro, di Annac, Ogige, Deucalione, Prometeo, Proteo, Achelao, dei Samotraci (Ved. Diodoro. lib. V), degli Indiani (Ezûrûdam. comm. di Vedam), dei Peruviani, Floridesi, Scandinavi, degli Egizji, Mexicani etc. etc. (Vedi Burnet de Lonchamps Fastes univer. ou tableaux hist. chron. et géog. etc. Bruxelles 1823.)

**) Tutti quelli che hanno trattato intorno alle origini della civile Società, sono d'accordo, nel credere le caverne, i luoghi di naturale rifugio ai primi abitatori della terra.

- (51) I principali in gran parte citati anche dal CUVIER nella grand' opera (*Ossem. foss.*) sono: HAYN (*Ephem. des curieux de la nature. Dec. I. an. III 1672, observ. 130. pag. 220*), MILIUS (*Memorabilia Saxoniae subterraneae*), LEIBNITZ (*Protogaea*), SOEMMERING (*Memoir sur les oss. foss. etc. Magaz. de Grose. Pour l'histoir nat. de l'homme. T. III*), BRÜCKMANN (opera inserita nella collezione di Breslau, primo trimestre 1732), WALCH (*Monument de Knorr. par. II. Sect. II*), ESPER (*Società dei Natur. di Berlino 1784*), ROSENMÜLLER (*Material. per la conosc. e l'istoria delle ossa fossili. Lipsia 1795*), J. HUNTER (*Trans. Philos. 1794 T. 19*), J. PATERSON, BUFFON, FISCHER, SCHREBER, FUCHS, CAMPER, ARDUINO, LUDWIG, PALLAS, BLUMENBACH, BENZENBERG, GOLDFUSS, DRAPIEZ, SCHLOTTHEIM, CUVIER (*Ossem. foss. T. VII*), MARCEL DE SERRES (*Essai sur les caver.*), DUBRUEIL, J. JEAN (*Recher. sur les oss. humai de cav. dei Luneville, Montpellier 1839*), CATULLO (sulle cav. delle alpi venet. *Atti dell' I. R. Ven. Istituto*), G. PONZI (sulle oss. foss. della Cam. Romana (*Atti del cong. di Genova, adunanza del 28. Sbre. 1846*) etc. etc.
- (52) Le enormi differenze che avrà rimarcato talora il lettore intorno alle dimensioni degli orsi del Veronese, con quelli d'altre località, dipendono unicamente dalla varia età degli individui a cui appartenevano le esaminate reliquie.

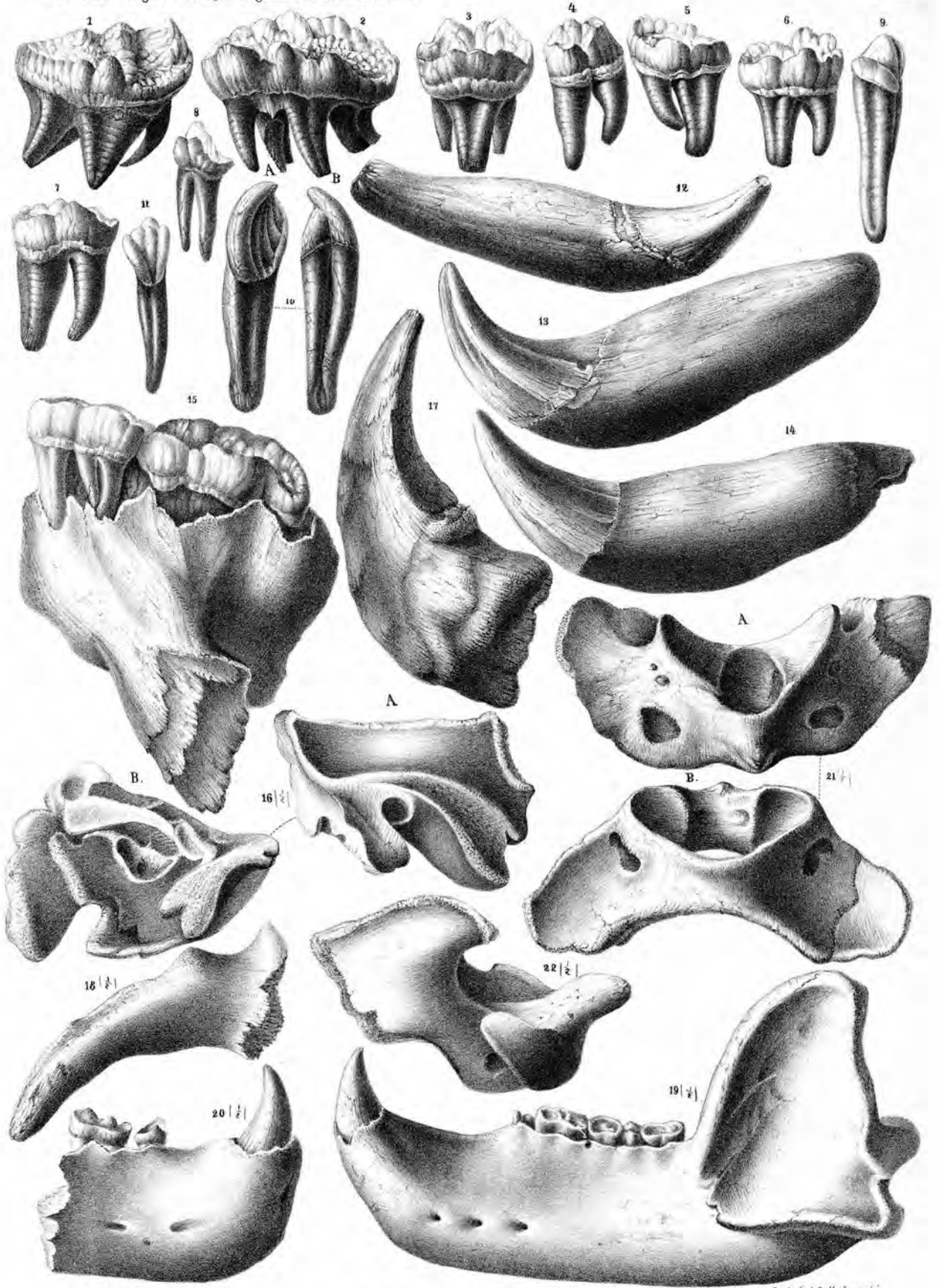
Errata corrige.

Alla pag. 53 si deve levare tutto il periodo, il quale alla riga 12 incomincia „Nelle epoche“ e finisce alla riga 14 „l'epoca successiva.“

Così pure si levi la parola „così“ al principio della riga 15.

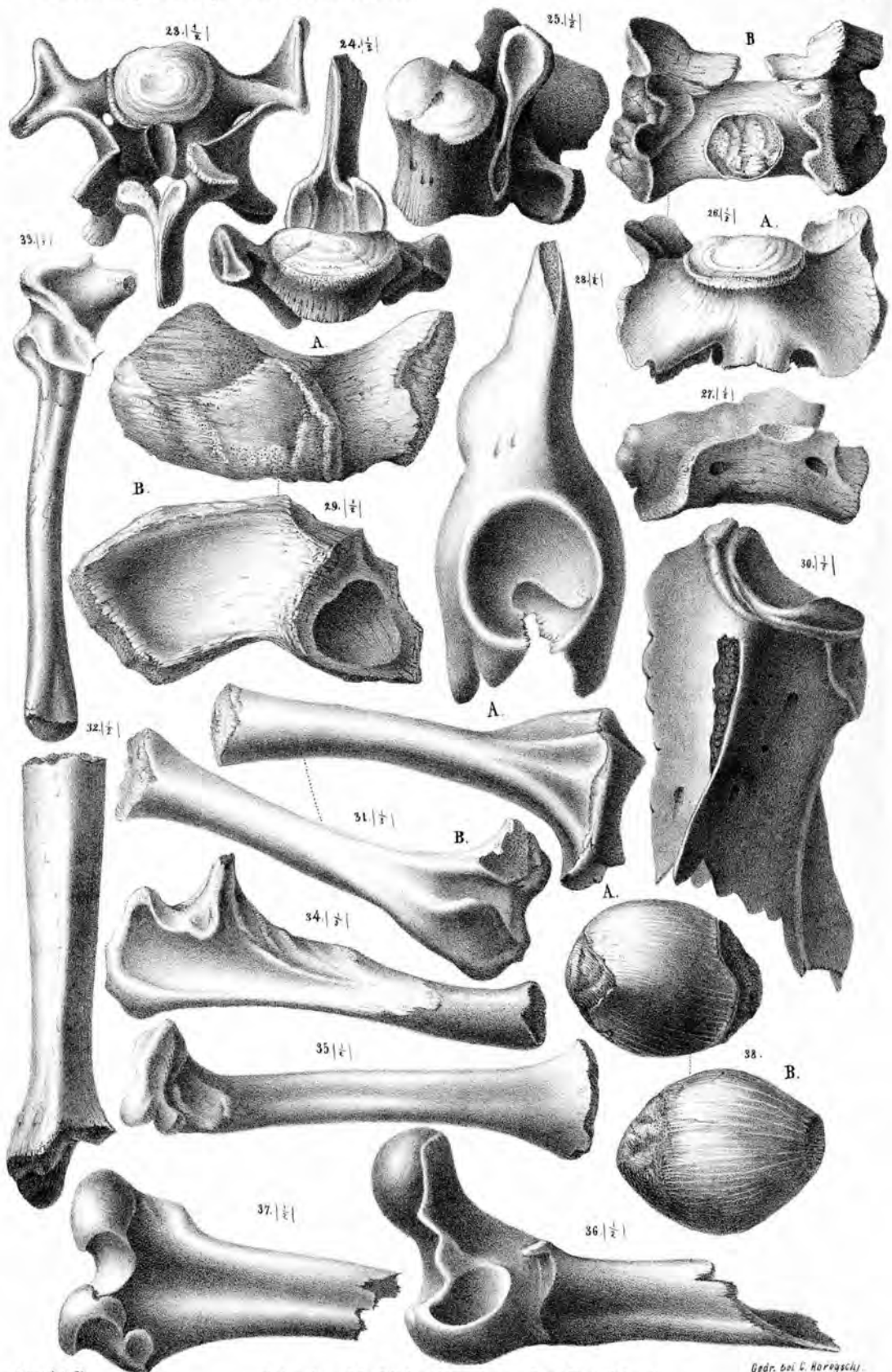
Spiegazione delle Tavole.

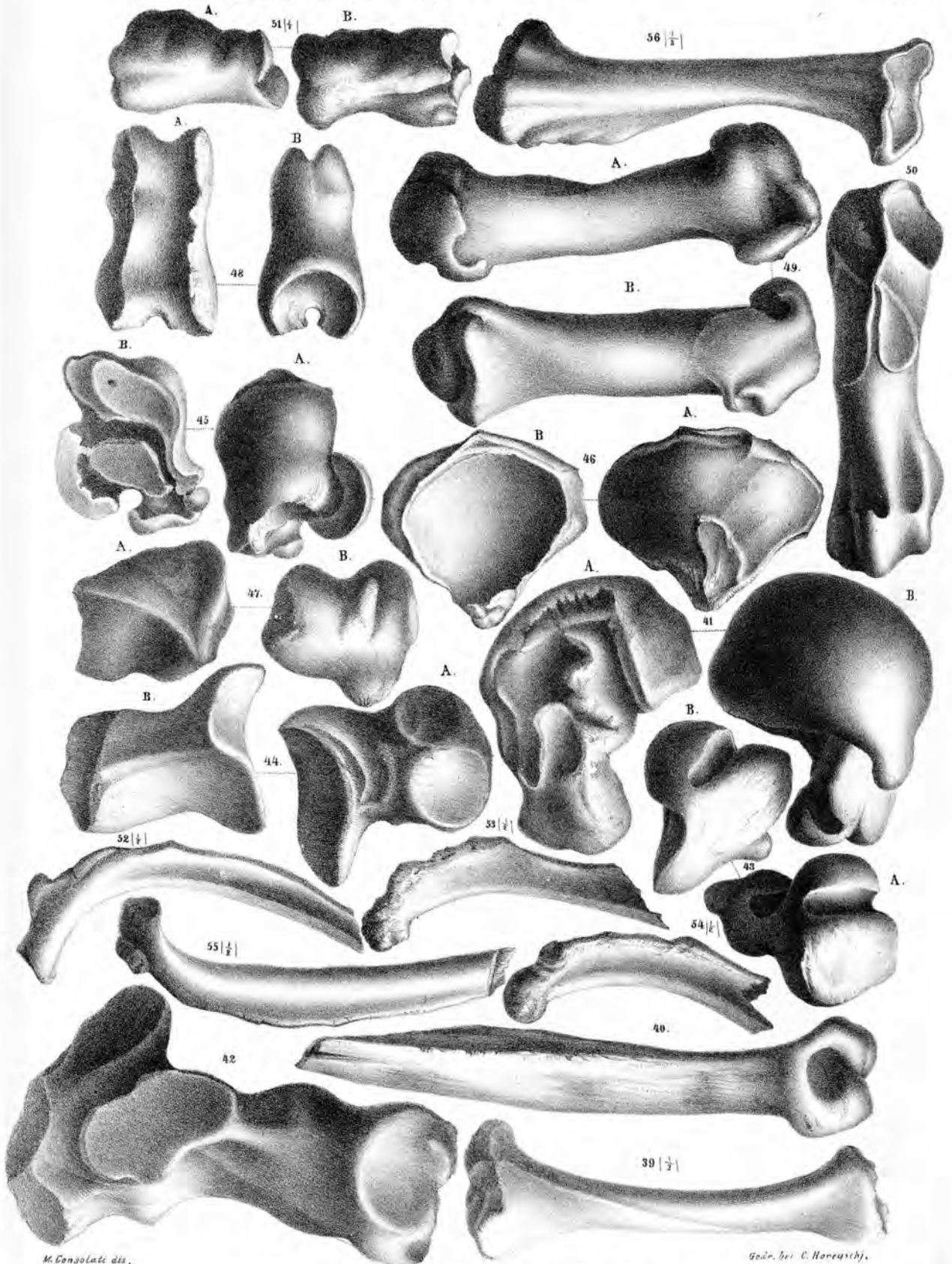
	pag.		pag.
Tav. III. fig. 1. 2. Ultimo grande molare della mascella superiore	55	Tav. III. fig. 24. Vertebra dorsale	68
” ” 3. Penultimo molare della stessa mascella	56	” ” 25. Vertebra lombare	68
” ” 4. Antipenultimo molare della mascella superiore	57	Tav. IV. fig. 26. A. B. 27. Porzione dell' osso sacro	69
” ” 5. Ultimo molare pure della mascella superiore	57	” ” 28. 29. Ossa dell'ileo	69
” ” 6. Penultimo molare della mascella inferiore	58	” ” 30. Scapola	69
” ” 7. Antipenultimo molare della stessa mascella	58	” ” 31. A. B. Omero	70
” ” 8. Primo molare della stessa mascella	59	” ” 32. 33. 34. Ossa del cubito	71
” ” 9. Incisivo laterale inferiore	60	” ” 35. Osso del radio	72
” ” 10. A. B. Incisivo laterale super.	61	Tav. IV. fig. 36. 37. Femore	72
” ” 11. Incisivo mediano	60	” ” 38. A. B. Rotula	73
” ” 12. 13. 14. Canini delle mascella superiori ed inferiori	61	” ” 39. Tibia	73
” ” 15. Porzione della mascella sup.	63	” ” 40. Fibula	74
” ” 16. A. B. Porzione del cranio dell' orso delle spelonche	63	” ” 41. A. B. Osso che tiene luogo dello scafoideo	75
” ” 17. 18. Arcate zigomatiche	63	Tav. V. fig. 42. A. B. Osso pisiforme	76
” ” 19. Mascella inferiore dell' Ursus arctoides	64	” ” 43. A. B. Osso unciforme	76
” ” 20. Mascella inferiore destra dell' Ursus spelaeus	65	” ” 44. Osso del calcagno	77
” ” 21. A. B. Prima vertebra cervicale	66	” ” 45. A. B. Osso dell' astragalo	77
” ” 22. Seconda vertebra cervicale	67	” ” 46. A. B. Osso scafoide	77
” ” 23. Vertebra cervicale successiva	67	” ” 47. A. B. Osso unciforme? (secondo?)	78
		” ” 48. A. B. } Ossa del metatarso	
		” ” 49. A. B. } e metacarpo	78
		” ” 50 si 55. }	
		” ” 56. Tibia	73
		Tav. VI. Veduta delle caverne della Comune di Velo	
		A. Covoli di Campo Silvano	37
		B. ” di Velo	39



M. Conzolate dis.

Geogr. Sci. C. Hoegschi.



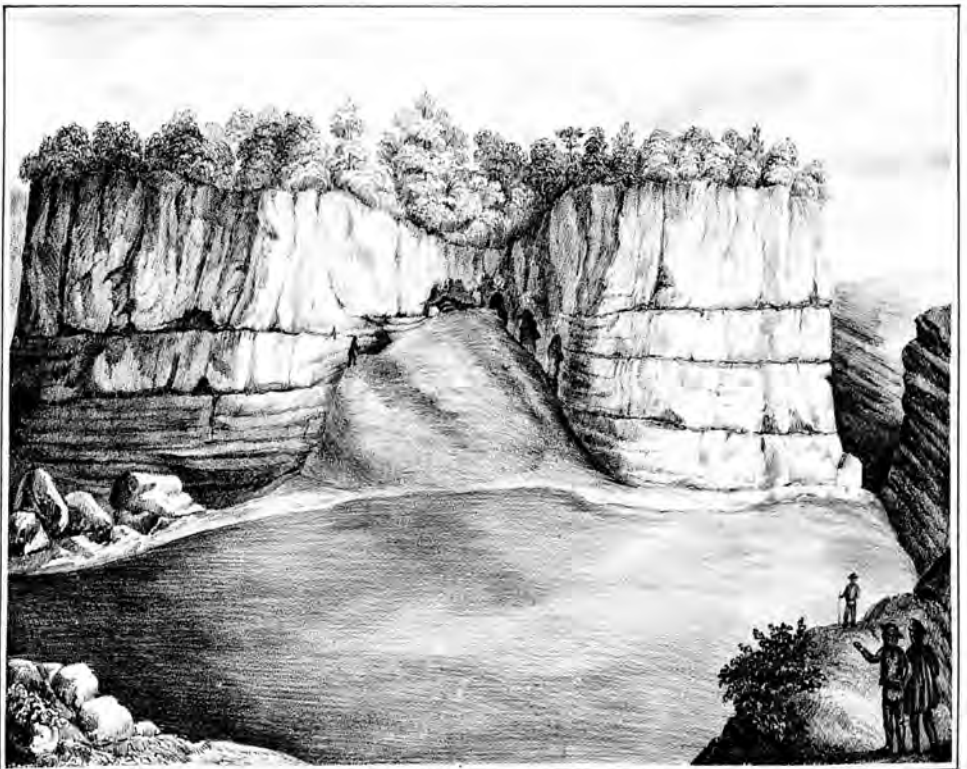


M. Consolati dis.

Grav. bei C. Horegtschj.



Caverna della Cavolo di Campo Silvano



Caverne delle Cavoli di Velo.

E r r a t a.

<i>Errata</i>	<i>Corrigé</i>
Pag. 32 Lin. 19 $\frac{1}{2}$ Calcarei	Calcarei
„ 32 „ 31 brecciato	brecciati
„ 41 „ 37 piegandosi	piegasi
„ 42 „ 26 che arcuate .	che sono arcuate.
„ 43 „ 14 scoglie .	scaglie
„ 43 „ 21 versonne .	versasse.
„ 46 „ 28 precessore	predecessore
„ 49 „ 1 pigolare	scigolare
„ 49 „ 14 Neopteri	Nevropteri
„ 49 „ 25 papo .	pozzo
„ 49 „ 32 Calavera .	Calavena
„ 50 „ 31 Sorex mus .	Sorex e Mus.
„ 51 „ 1 Gazza . .	Gazzà
„ 51 „ 10—11 Trabochetto	Trabochello
„ 52 „ 3 Cintro .	Centro
„ 53 „ 10 dalla . .	alla
„ 53 „ 15 esseri . .	gli esseri
„ 53 „ 37 immuni .	immani
„ 56 „ 36 Tav. V. fig. I.	Tav. III. fig. 15
„ 57 „ 18 Haya . .	Hayn
„ 64 „ 31 massetoxica	masseterica
„ 64 „ 33 noto .	nato
„ 65 „ 11 fig. 14 . . .	fig. 19
„ 65 „ 12 fig. 15 . . .	fig. 20
„ 67 „ 18 Tav. III fig. 23 .	Tav. IV. fig. 23
„ 67 „ 30 hanno . . .	havvi
„ 68 „ 1 Tav. III fig. 24 . . .	Tav. IV fig. 24
„ 68 „ 17 Tav. III fig. 25 . . .	Tav. IV fig. 25.
„ 68 „ 27 logore	logori
„ 72 „ 10 (fig. 31)	(fig. 35)
„ 73 „ 29—30 Tav. IV fig. 39. Tav. V. fig. 36 .	Tav. V. fig. 39—56
„ 75 „ Tav. IV fig. 41 a. b . . .	Tav. V. fig. 41 a. b
„ 76 „ 9—10 Tav. V. fig. 42 a. b . . .	Tav. V. fig. 44
„ 77 „ 1 Tav. V fig. 44 . . .	Tav. V. fig. 42
„ 85 „ 19 pag. 53	pag. 25

IV. Ueber böhmische Graptolithen.

Von

Eduard Suess.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Mitgetheilt in der Sitzung der k. k. geologischen Reichsanstalt am 24. März 1851.

Vorwort.

Man war lange gewohnt, unter dem umfassenden Namen *Graptolithus* alle jene, auf den ersten Anblick wenigstens ähnlichen Formen zu vereinigen, die vorzüglich die Fauna einer merkwürdigen Reihe von Schiefeln im silurischen Systeme bilden, und jedenfalls scheinen Thiere, deren verticale Verbreitung auf so enge Grenzen beschränkt ist, denen also ganz abnorme Lebensbedingungen entsprochen haben müssen, schon aus diesem Grunde, verwandten Gattungen anzugehören. Aus diesem Grunde kannman sich wohl auch die zahlreichen Versuche erklären, die gemacht wurden, um Formen von ganz verschiedener Structur aus einander abzuleiten und zwar durch die Annahme von Vorgängen, die durch kein Analogon aus der jetzigen Schöpfung gestützt werden können.

Die reiche Literatur über Graptolithen zeigt, welche Aufmerksamkeit diesen auffallenden Fossilien geschenkt worden ist, und dennoch bleiben besonders in Bezug auf zoologische Classification viele Räthsel zu lösen. Vielleicht werden die nachfolgenden That-sachen im Stande seyn, einige von diesen Fragen zu klären: sie sind durch die mehrjährige Untersuchung einer grossen Reihe dieser Versteinerungen gewonnen, welche theils durch die gütigen Bestrebungen meiner Freunde, theils durch eingeleitete, specielle Sammlungen zusammengebracht wurde. Nur durch eine umfassende Zusammenstellung von Exemplaren war es möglich, die Arten in den einzelnen Altersepochen zu betrachten und aus fehlerhaften Bildungen und Zufälligkeiten weitere Anhaltspunkte zu ziehen. In dieser Richtung besonders habe ich meinen innigsten Dank Sr. Hochwürden dem Herrn Professor BILIMEK zu Wiener-Neustadt, dem Custos-Adjuncten Herrn DORMITZER und Herrn MORIZ PFEIFFER in Prag auszusprechen; durch die Zu-vorkommenheit des Herrn BARRANDE war es mir gestattet, seine Sammlungen schon vor der Veröffentlichung der „*Graptolites de Bohême*“ zu Rathe zu ziehen und mit einem Theile der meinigen zu vergleichen, auch verdanke ich demselben das abgebildete Exemplar von

Rastrites Linnaei. Die Sammlungen sowohl des National-Museums zu Prag, als auch der k. k. geologischen Reichsanstalt zu Wien wurden oft benützt, und es war mir gestattet, einen ansehnlichen Theil der mikroskopischen Arbeiten mit dem ausgezeichneten Instrumente der letztgenannten Anstalt auszuführen.

Einige wenige Worte genügen als Andeutungen über den geologischen Horizont, die geographische Verbreitung, die Art der Erhaltung und die Lagerungsverhältnisse in Böhmen.

Horizont: In den Schiefeln, die constant unweit der Grenze des oberen und unteren silurischen Gebietes gefunden werden, nur in wenigen Arten in die angrenzenden Schichten übergreifend. Alles, was von einem Vorkommen in anderen Horizonten bekannt wurde, ist von den Verfassern selbst als zweifelhaft bezeichnet, so das Erscheinen eines Graptolithen mit centraler Axe im Kohlengebirge, PORTLOCK, Rep. pag. 321, so auch das Vorkommen von *Frucoïdes serra* mit *Ammonites amallheus*, SCHAFFHÄUTL, Alpengeb. pag. 22 et 142.

Geographische Verbreitung: Graptolithen sind so ziemlich aus allen bisher beschriebenen silurischen Gegenden bekannt geworden; sie finden sich in Böhmen, Sachsen, Thüringen, Altenburg und Baiern, in Frankreich, auf der Insel Sardinien (LA MARMORA), in den Pyrenäen (BOUBÉE) und bei Oporto in Portugal (SHARPE), in England, Wales und Schottland, in Skandinavien und auf Bornholm, am Ural. Als Geschiebe in der Umgegend von Berlin und zu Stargard im Mecklenburg'schen; in Nord-Amerika und zwar in der Nähe von Quebec (BRONGNIART), und in den Staaten New-York, Utica und Cincinnati; in Süd-Amerika in der Republik Bolivia, in den Departements Chuquisaca und Santa Cruz de la Sierra (D'ORBIGNY).

Art der Erhaltung: Die Graptolithen-Reste, die oft in Millionen auftretend, die Spaltflächen der Schiefer vollkommen bedecken, sind entweder in Schwefelkies oder in bituminöse Stoffe, durchaus nie in Kalk verwandelt. Die in Kalkstein eingeschlossenen und dann nicht flach gedrückten zeigen keine Schale. Es lässt sich hieraus schliessen, dass ihre Masse nicht eine kalkige, sondern eine jener der Rinden-Corallen (*Corticosaë*) ähnliche gewesen sey.

Lagerungs-Verhältnisse in Böhmen: Die Schichtenfolge der Silurischen Region des centralen Böhmens ist durch die grossartigen Arbeiten des Herrn BARANDE so gründlich erörtert worden, dass nur wenig Specielles hier hinzuzufügen bleibt. — Die Schiefer, als bei weitem die reichste Fundstätte, sind leicht spaltbare, schwarze Thonschiefer, die zuweilen Kalk aufnehmen und dann unter der Säure brausen. Ihr Gehalt an Kohlenstoff ist sehr bedeutend, sehr oft führen sie rundliche Anthrazit-Massen. Diese treten in der Form von flachen, an ihrer Oberfläche vollkommen glatten und glänzend-schwarzen Sphaeroiden auf, in horizontalen Schichten in die Schiefer eingelagert. Es kann bei einer solchen Schichtung wohl nicht die Rede von der Entstehung dieser Sphäroide durch blosse Molecular-Anziehung seyn. Gestützt auf ein

ganz ähnliches Vorkommen in beinahe allen Silurischen Gebirgen, und zwar auch in sowohl höher, als tiefer liegenden Kalkschichten muss man sie wohl als eine allgemeine Erscheinung betrachten, und es scheint nicht unmöglich, dass sie die durch die Fluthen zusammengeballten und begrabenen Ueberreste mariner Pflanzen seyen. — Schwefelkiese finden sich sehr häufig in den böhmischen Graptolithen-Schichten, und zwar nicht nur in der Form von Fossilien oder als Auskleidung der Spaltungsflächen, sondern auch in kleinen Hexaedern, die vom Schiefer umhüllt, jedenfalls von gleichem Alter mit demselben sind *).

Die Diorite, die an sehr vielen Stellen mit diesen Schiefen auftreten, scheinen jedenfalls, wenn auch nicht bedeutend, jünger als diese, denn sie haben sie wirklich durchbrochen und verändert. Wenn man, nachdem man Slichow verlassen hat, die Strasse am Flusse verfolgt, und dann hinter dem vierten dem Dorfe Kuchel angehörigen Hause, senkrecht auf die Richtung der Strasse den Berg ersteigt, so sieht man, dass derselbe ungefähr bis zu seiner Hälfte aus Diorit besteht, während der obere Theil von Schiefer und von jüngeren Kalkschichten gebildet wird. An der scharfen Grenze des Diorits mit dem Schiefer, die durch den nackten Felsen auf eine weite Strecke blossgelegt ist, sieht man zahllose kleine Lamellen und grössere Bruchstücke des Schiefers von dem vulkanischen Gesteine umhüllt. Der Schiefer ist hier dunkelschwarz, beinahe glänzend, sehr hart und spröde; der Schwefelkies ist bis auf mehrere Klafter Entfernung in allen Spaltflächen zersetzt und man findet höchstens schwammige Verbindungen von Eisen an seiner Stelle. Die Flächen des am stärksten veränderten Thonschiefers sind mit einer glänzenden Schicht von Eisenoxyd überzogen, und dennoch kann man bei der Feuerbeständigkeit des Materiales auch an solchen Stücken noch deutliche Graptolithen sehen.

Classification.

Graptolites seu *Graptolithus*, LINNÆUS, WAHLENBERG, BECH, MURCHISON, GEINITZ, EMMONS, HALL, VANUXEM, MATHER, D'ORBIGNY, M'COY, NICOL, SALTER, PORTLOCK, LONSDALE, BARRANDE, RICHTER, HARRNESS et al.

Prionon, NILSSON.

Prionotus, NILSSON, HISINGER.

Lomatoceras, BRONN, EICHWALD.

Int. Orthoceratites, WALCH et KNORR, SCHLOTHEIM.

Int. Fucoides, BRONGNIART, CONRAD.

Folia graminum, BROMEL.

Eine Trennung wagte M' COY, er theilt unter dem Namen *Diplograpsis*, wie es scheint, alle jene Formen von den eigentlichen Graptolithen ab, deren Axe central

*) Diese Schiefer führen in Nord-Amerika bei den Little Falls Bleiglanzadern und Lagen von Strontian-Sulphat. Im Thale von Hudson wurde der Anthrazit abgebaut. SILLIMAN Journ. vol. 47. pag. 375, VANUXEM, Pensylv. et Virginia Rep. III.

ist. Eine andere Eintheilung ist die von BARRANDE vorgeschlagene: er beschreibt folgende drei Gattungen:

1. *Graptolithus* LINN. Solide Axe, mit Reihen von Zellen besetzt, die sich mehr oder weniger berühren. Zerfällt in die Unter-Abtheilungen: 1. *Monoprion*, mit einer Verticalreihe von Zellen und seitlicher Axe, und 2. *Diprion*, mit centraler Axe und zwei angehefteten Zellenreihen.
2. *Rastrites* BARR. Axe fadenförmig, eine Reihe von Zellen, die sich gegenseitig nicht berühren.
3. *Gladiolites* (vel *Retiolites*) BARR. Ohne solide Axe, zwei Zellenreihen, die Schale bloss durch ein Netzwerk dargestellt.

Die Veränderungen, die ich für diese Eintheilungsweise vorschlagen werde, verwandeln diese Gattungen in folgende:

1. *Retiolites* BARR. Zu beiden Seiten einer centralen Axe stehen zwischenständige Nebenäste, die durch ein von ihnen selbst reihenweise ausgeschiedenes Zelensystem verbunden sind.
2. *Petalolithus*. Zu beiden Seiten der centralen, bandförmigen Axe stehen zwischenständige Nebenäste, die durch eine wahrscheinlich von ihnen selbst abgeschiedene und membranartige Substanz verbunden werden. = *Diprion* BARR.
3. *Graptolithus* LINN. An einer Seite einer röhrenförmigen Axe sitzen Zellen, die an der der Axe entgegengesetzten Seite eine Oeffnung haben. Sie zerfallen in drei Unterabtheilungen:
 1. Axe stark, in einer Ebene nach einer bestimmten Curve gekrümmt; die Zellen berühren sich stets.
 2. Axe etwas schwächer, nur am älteren Ende nach einer bestimmten conischen Schraubenlinie (die in eine cylindrische übergeht) gewunden, am jüngeren Ende fadenförmig, biegsam; die Zellen berühren sich, wenn sie ausgewachsen sind, in der Jugend jedoch nicht.
 3. Axe fadenförmig, nur selten nach einer stetigen Curve gekrümmt; die Zellen berühren sich selbst im Alter nicht. = *Rastrites* BARR.

Durch den natürlichen Uebergang, den die Arten der zweiten Abtheilung der Graptolithen zu den Rastriten bilden, und durch den die niedrigere Organisationsstufe dieser dargethan wird, ist eine zu innige Verbindung hergestellt, als dass man *Rastrites* als abgesonderte Gattung belassen könnte. Die auf das Subgenus *Diprion* Bezug habenden Thatsachen erhellen aus der mikroskopischen Untersuchung desselben.

Es bleibt nur noch zu erwähnen, dass die der Beschreibung der einzelnen Arten beigegebene Synonymik nur so weit vollständig ist, als die Kennzeichen von den betreffenden Autoren genugsam hervorgehoben wurden, um die Art als identisch annehmen zu können. In Böhmen nicht erscheinende Arten sind hie und da erwähnt und als verbindende Formen in die Lücken der Reihe eingeschaltet.

I. Genus: *Retiolites* BARR.= *Gladiolites* BARR.

(BARR. Grapt. Boh. pag. 68, not. et v. LEONH. u. BRONN. Jahrbuch. 1850, V. pag. 640 not.)

Von der Mitte einer schmalen, gegen das eine Ende sich verjüngenden Form laufen Aeste aus, die, gegen das andere Ende herabgezogen und concav gekrümmt, sich allmählich, von der Mitte der Form gegen den Umriss zu, ihrer ganzen Länge nach theilen, indem sie an ihrer concaven Seite Reihen von Zellen absondern. Bei den nachfolgenden Beschreibungen wird immer das schmalere Ende des Retioliten als das obere betrachtet, so wie es in den zugehörigen Zeichnungen dargestellt ist.

Es ist auffallend, dass den zahlreichen Beobachtern, die das Zellen-System, und zum Theil auch den sich sondernden Theil der Seitenäste gesehen, der merkwürdige Process des Wachsthumes entgangen ist: und es wird vielleicht die nachfolgende Beschreibung desselben hinreichen, nicht nur zu zeigen, dass die Retioliten weder aus einer freiwilligen, noch aus einer unfreiwilligen Formveränderung der eigentlichen Graptolithen entstehen konnten, sondern auch genügen; ihre generische Trennung ausser Zweifel zu setzen.

Der Umriss bildet im Allgemeinen an der Spitze einen Winkel von 20 bis 30°, dessen Schenkel nahe am Scheitel, als dem jüngeren Theile, convex parabolisch gekrümmt sind, und entfernter von diesem, wo die ausgebildete Form ihre Breiten-Dimensionen nicht mehr ändert, parallel fortlaufen. Ueber diesen Umriss scheinen bei *Ret. Geinitzianus* BARR. oft Spitzen hervorzuragen, zuweilen am ganzen Umfange, zuweilen bloss an einer Seite, oft auch nur unregelmässig hie und da. Diese Spitzen haben Anlass gegeben, eine und dieselbe Form in verschiedene Arten zu trennen, da sie doch ihre Entstehung nur zufälligen Beschädigungen dieser einen Form verdanken. (vid. die Anomalien von *Ret. Geinitzianus*.)

Die untere, dritte Seite des Umfangs-Dreieckes erscheint in allen bisher bekannt gewordenen Exemplaren zerrissen, oder durch schlechte Erhaltungsweise unkenntlich, und es ist bisher noch nicht gelungen, die Formen in dieser Richtung zu begrenzen.

Die mittelständige Axe ist in den meisten Fällen sehr schwach, oft bloss an dem breiteren Ende, oft gar nicht sichtbar; ausnahmsweise jedoch, und besonders bei jungen Exemplaren, findet sie sich stark entwickelt. Taf. VII Fig. 1. c zeigt ein junges, zerrissenes Exemplar von *Retiol. Geinitzianus*, bei dem die zurückgebliebene Axe sogar frei herabhängt; man findet sie keineswegs steif, sondern biegsam, gleichsam flatternd.

An dieser Axe steht jederseits eine Reihe von Neben-Aesten in regelmässig gegen die Spitze abnehmenden Vertical-Entfernungen, und zwar nicht gegenständig, sondern zwischenständig, so, dass der Fusspunkt eines jeden Nebenastes zwischen die Fusspunkte zweier der anderen Hälfte der Form angehörigen Aeste fällt. Es kann daher geschehen, dass bei fortschreitender Entwicklung die Hauptaxe zu einer leichten Zickzack-Linie verzogen wird. — Zuweilen kommen Ausnahmefälle vor, die darauf hinzudeuten scheinen, als sey das Wachsthum der Theile auf einer Seite der Axe ziemlich unabhängig von den Theilen der anderen Seite, man findet nämlich vollkommen ausgebildete Exemplare, bei denen die Vertical-Entfernung der Aeste einer Seite jene der anderen Seite in constantem Verhältnisse übertrifft. Hiedurch wird das Regelmässige der Zwischenständigkeit gestört, und es können sogar einzelne Fusspunkte gegenständig werden; diese Abweichungen sind jedoch nie bedeutend: ich habe als Maximum bei einem Exemplare des *Retiol. Geinitzianus* den 21. Ast einerseits zwischen dem 24. und 25. Ast andererseits gefunden.

Betrachtet man unter dem Mikroskope, von der Spitze, die sich gar bald als der jüngste Theil erweist, gegen das breitere Ende der Form herabschreitend, eine verticale Reihe von Nebenästen: so sieht man dieselben eine Reihe merkwürdiger Veränderungen erfahren, Veränderungen, die allein über das wahre Wesen der Retioliten Aufschluss zu geben im Stande sind.

Die äusserste Spitze zeigt, wenn sie gut erhalten ist, eine Reihe kurzer, paralleler Linien, von denen die obersten die kürzesten und am dichtesten aufgehäuft sind: es sind diess die ersten Nebenäste. — Sehr bald entstehen an diesen Stellen Zwischenräume, die an der Axe breiter, gegen den Umfang zu schmaler werden; genaue Betrachtung zeigt, dass diese Räume keineswegs zwischen den Aesten, sondern in ihnen selbst entstanden seyen, es haben sich nämlich die Aeste von der Mitte gegen den Umfang zu, jeder der ganzen Länge nach, in 2 Theile gespalten; die Spalträume sind durch senkrechte, ziemlich starke Querwände in 5 — 6 Abtheilungen getrennt. Diese Abtheilungen oder „Zellen,“ die beinahe keilförmig in den Ast eindringen, bilden sich in verticaler Richtung aus, und bewirken so die entschiedene Trennung desselben. Der obere Theil behauptet seine Stellung, während der untere, abgelöste Theil sich der ganzen Länge nach an den nächstältesten Ast anlegt, um mit diesem fest zu verwachsen; die äussersten Spitzen des getrennten Astes bleiben vereinigt, und an dieser Vereinigungsstelle entwickeln sich später die den Umriss beschützenden „Wände des Umrisses.“ (Einen augenscheinlichen Beweis dafür, dass bei diesem Entwicklungs-Prozesse der sich ausbildende Theil aus einem weicheren Zustande in einen härteren übergehe, bietet der Umstand, dass die früher starken Querwände, ohne an Masse zuzunehmen, im Verhältnisse zu ihrer Verlängerung sich schwächen, und dass sie concav nach aussen gebogen werden, indem die älteren, an der Axe gelegenen Zellen bei fortschreitender Breitenentwicklung ihren Alters-Vorrang vor den jüngeren, in der Nähe des Umrisses gelegenen, behaupten.)

Verfolgt man so, nach abwärts fortschreitend, die Reihe der Nebenäste, so sieht man den oberen Theil bald zum zweiten Male productiv werden; er spaltet sich von neuem und zeigt in dem so entstandenen Raume die bekannten Querwände. Diese Querwände stehen in Bezug auf jene der vorhergehenden, derselben Abtheilung angehörig Zellenreihe zwischenständig, und daher kommt es, dass der losgetrennte Längstheil, statt die Zellenreihen parallel zur Krümmung seiner oberen Hälfte zu theilen, von den vordrängenden Fusspunkten der älteren Querwände meist zu einer Zickzack-Linie verzogen wird.

Denselben Vorgang der Ast-Trennung sieht man an dem ganz erhaltenen Exemplare sich 4 bis 5 mal wiederholen, so, dass in der Regel der Ast erst dann sich von neuem zu theilen beginnt, wenn die vorhergehende Zellenreihe ganz entwickelt ist, und dass die Querwände der sich folgenden Zellenreihen immer zwischenständig bleiben, dass folglich jede Querwand einer Reihe wenigstens ungefähr mit einer der zweit-vorhergegangenen Absonderung correspondirt. — Endlich am breitesten Ende, das jedoch im Kalke nur selten, im Schiefer beinahe nie erhalten ist, sinkt der obere Theil des Astes ebenfalls zu einer gewöhnlichen, reihentrennenden Wand herab, die Production hat aufgehört. — Es ist diess die letzte Beobachtung, die in der Richtung des breiteren Endes gemacht werden konnte, so dass es scheint, als habe, wo die Productivität aufhört, auch die ganze Form ihr Ende erreicht; man sieht an solchen Stellen oft die untersten Zellenreihen einer Abtheilung sich unverhältnissmässig vergrössern, und die aufliegenden, jüngeren Zellen reihenweise verschieben oder auf einen Punkt zusammendrücken, so dass zuweilen bloss die oberen, dem Aste anliegenden Zellen ihre Plätze behaupten: es scheint, als besitze dieser Theil auch jetzt noch eine grössere Festigkeit.

Diese zahlreichen, aufeinanderfolgenden Veränderungen konnten nicht ohne eine bedeutende Verlängerung der centralen Axe vor sich gehen, und man ist versucht, durch den umgekehrten Schluss aus dieser Verlängerung die Trennungen der Aeste zu erklären. Bei dem nächstfolgenden Genus *Petalolithus*, bei dem dieses Organ in weit ausgezeichneterer Weise vorhanden ist, werden die Einflüsse dieser Verlängerung auf die Ausbildung der Form erörtert werden. — Den schwierigsten Punkt bei jedem Versuche die Entwicklung der Retioliten zu erklären, würde die, wenn auch nicht ganz regelmässige Zwischenständigkeit der Organe der dritten Ordnung, nämlich der verticalen Querwände der Zellen, bilden.

Bei dem wichtigen Einflusse, den die Nebenäste auf die Ausbildung des ganzen Retioliten ausüben, schien es nothwendig jede Eigenschaft, die sich regelmässig in allen Arten und Exemplaren wiederholte, auf das Genaueste zu betrachten. Eine solche Eigenschaft schien mir vor Allem ihre regelmässige Krümmung nach oben in der Nähe der Axe, und das Herabsenken des äusseren Endes. — Um eine Erklärung geben zu können, ist es nothwendig, dass man auf die Vorgänge zurückblicke, die während der Bildung der ersten und besonders der zweiten Zellenreihe an den gekrümmten Stellen

Statt gefunden haben. — Das gabelförmige Spalten der Nebenäste zeigt, dass Zellen, die kaum ihre horizontale Dimension erhalten hatten, schon im Stande waren, sich rasch in verticaler Richtung auszubilden; es musste daher, bei Bildung der zweiten Zellenreihe, die erste Reihe in der Nähe der Axe auf höhere Zellen drücken, als in der Nähe des Umfanges. Dass ein solcher Druck nach aufwärts von Seiten der älteren Zellen fortwährend stattfand, zeigt schon das Ineinanderschieben der zwischenständigen Fusspunkte der Querwände und die Beugung der reihentrennenden Wand. Dieser Druck auf die Querwände der zweiten Entwicklungs-Epoche bewirkt, dass in dieser Höhe die Curve zuerst bestimmt auftritt: spätere Zellenreihen fanden im Verziehen der reihentrennenden Wände genügenden Spielraum zur Entwicklung ihrer Höhendimension, und von da an bleibt daher die Curve ziemlich constant. — Die Krümmung der Nebenäste ist also bei einiger Uebung allein schon hinreichend, um bei einem vorliegenden Exemplare zu bestimmen, ob es zu den üppigen oder langsamer aufgewachsenen gehöre, eine Bestimmung, für die man bei den Petalolithen beinahe nur diesen einzigen Anhaltspunkt besitzt.

Der Querschnitt der Retioliten zeigt alle bisher genannten Aeste, Reihen trennenden und Querwände so hoch, dass die einzelne, ausgebildete Zelle nahezu zum Würfel wird; löst man aus den dünnen Kalkstreifen, die die Graptolithen-Schiefer oft durchziehen, ein Exemplar aus, so zeigt es auf beiden Flächen dasselbe Bild. Diese beiden Flächen laufen unten parallel, wo jedoch der Umriss sich gegen die Spitze zu krümmen beginnt, verringert sich auch die Dicke des Ganzen. Zahlreiche Beobachtungen, worunter ich besonders die an Exemplaren aus der Sammlung Sr. Hochw. des Hrn. Professors P. BILIMEK gemachten hervorhebe, zwingen mich, von der von Herrn BARRANDE ausgesprochenen Ansicht abzuweichen; die Thatsachen, die in den „*Graptolites de Bohême*“ aus dem Verdrücken eines Prisma ähnlichen Querschnittes erklärt wurden, werden bei *Ret. Geinitzianus* aus der unregelmässigen Entwicklung der Nebenäste abgeleitet werden.

Es bleibt noch hinzuzufügen, dass die einzelnen Entwicklungsepochen der Nebenäste keineswegs immer zu beiden Seiten der Axe gleichzeitig eintreten; man findet Retioliten, bei denen in derselben Höhe einerseits zwei, andererseits schon drei Zellenreihen abgesondert sind, die dennoch, bei ungestörter Zwischenständigkeit der Aeste dieselbe Höhe einnehmen: die grössere Productivität einer Seite bedingt also nicht eine grössere Ausbildung in verticaler Richtung. — Hiedurch, so wie durch die vorangegangenen Bemerkungen über die gestörte Gegenständigkeit der Aeste, scheinen die Grenzen gezogen, innerhalb welchen das Wachsthum einer Reihe von dem der anderen abhängt, und man könnte in Uebereinstimmung mit diesem die Anomalien, die sich an den einzelnen Exemplaren zeigen, eintheilen in solche, die durch die Axe, und andere, die durch die Nebenäste hervorgerufen werden. — Beide Umrisse der Seiten vereinigen sich immer zu einer Spitze; bei ausgebildeten Exemplaren sind nie Breiten-Dimensionen entdeckt worden, die in Bezug auf die Axe unsymmetrisch gewesen wären.

1. *Retiolites Geinitzianus* BARR.

Tab. VII fig. 1.

- Facoides dentatus*, BRONN. histoire des vegetaux fossiles *Amansites*. I. pag. 70. Pl. VI. fig. 9 — 12.
Prionotus Pristis, HISINGER *Lethaea Suecica* pag. 114. tab. 31. f. 5.
 an » *scalaris* » » » Suppl. pag. 113, tab. 34 f. 4.
 an *Graptolithus scalaris*, LINN. *Systema naturae*, Iter Scaniae.
 » » LINN. GEINITZ, v. LEONHARD und BRONN *Jahrbuch* 1842, Taf. 10 fig. 17—19.
 » *foliaceus* MURCH. GEINITZ, v. LEONHARD und BRONN. *Jahrbuch* 1842, pag. 699 Taf. 10.
 » » » » Grundriss der Versteinerungskunde pag. 312, Taf. 10 f. 12 a.
 » *Pristis*, PORTLOCK, Report on the Geology of the County of Londonderry, pag. 320, tab. 19, fig. 9—11.
 » » » » Geological Survey, vol. II. pag. 404.
 » *dentatus*, VANUXEM, *Silliman American Journal*, vol. 47. October, 1844.
 an » *secalinus*, HALL, *New-York Palaeontology*, vol. I. Laf. 72.
 an » *mucronatus*, RICHTER (non HALL), *Zeitschr. Deutsch. geol. Gesellsch.* II. Heft 3. pag. 203.
Gladiolites (= *Retiolites*) *Geinitzianus*, BARRANDE, *Graptolites de Dohême*, pag. 69. taf. IV, fig. 16—33.
 (conf. etiam QUENSTEDT, v. LEONHARD und BRONN *Jahrbuch*, 1840, 27 b taf. I. f. 5.)

Ausgezeichnet durch starke Querwände des Umrisses, die gleich an den ersten Zellenreihen sich senkrecht stellen, und nur durch sehr kleine Einkerbungen von einander getrennt sind; hiedurch erscheint der Umriss der Form dem freien Auge wie von einer stetigen Curve begrenzt. Lang und schmal, mit schwacher Hauptaxe, die wenn sie bei abgerissenen Exemplaren frei herabhängt, sich sehr leicht biegsam und fadenförmig zeigt. Winkel an der Spitze 14° — 23°. Erreicht eine Länge von 2·75 Zoll und eine Breite von 0·2 Zoll.

Die den Umriss begrenzenden Wände (die „Wände des Umrisses“) sind nichts anderes als eine nach der ersten und allen nachfolgenden Trennungen des Nebenastes zurückgebliebene Verbindung der äusseren Spitzen; die kleine Einkerbung, mit der sie bei dieser Art in die betreffende Astspitze einlenken, bezeichnet daher die Stelle, an welcher sich nach der ersten Trennung die untere Hälfte des zugehörigen Astes an den nächst älteren anlegte. Will man also die Stärke eines Astes in Bezug auf seine Productivität schätzen, so muss bloss der unterhalb der Einkerbung gelegene Theil in Betracht kommen. — Erreicht das ältere Ende dieses *Retioliten* die Periode der vierten Trennung, so pflegen daselbst die Wände zu reissen, denn auch sie gehören zu denjenigen Theilen, die, in der Jugend stärker, durch ihre Verlängerung sich schwächen, und sie sind eben durch diese Eigenschaft in hohem Grade geeignet, die Seiten des jüngsten, obersten Theiles zu schützen.

Eine sonderbare Erscheinung, die dem *Retiol. Geinitzianus* allein eigen zu seyn scheint, theilt oft jede Hälfte dieser Form vertical in drei gleiche Theile. Die erste Theilung zeichnet sich durch eine einfache Linie, die, ungefähr in gleicher Stärke mit der Axe, parallel mit dieser fortlaufend, das gegen innen gelegene Drittel der Vertical-Hälften absondert. Diese Linie zieht ohne die geringste Störung zu erleiden, über Nebenäste und Zellen hinweg, und zeigt sich in der Abbildung des *Grapt. mu-*

cronatus RICHTER (Zeitschr. Deutsch. geol. Gesellsch. II. 3 Heft. Taf. VIII. fig. 18) sogar stark auf die Seite gezogen; ich selbst konnte nur leichte, jedoch auch von der Bildung der Unterlage scheinbar unabhängige, Verkrümmungen beobachten. — Diese Umstände scheinen auf ein ausserhalb der Ebene des Zellen-Systemes gelegenes Organ oder Ligament zu deuten, denn auch im Querschnitte war nie die Spur einer solchen Linie zu finden. Sie tritt meist in der Höhe der dritten Trennung der Aeste auf und scheint an den Enden scharf begrenzt. Eine zweite, schwächere Linie sondert oft das dem Umfange anliegende Drittheil von der übrigen Form ab, sie ist jedoch selten deutlich erhalten: beinahe immer aber, auch bei fehlender Linie, ist die Grenze dieses Drittheiles ausgesprochen durch eine Reihe von Störungen, die die Ausbildung des Netzwerkes an diesen Stellen erlitten hat, und die eben in derselben Höhe (der dritten Trennung der Aeste) ihre grösste Deutlichkeit erlangen. Der Vorgang, durch welchen diese Störungen entstehen, dürfte folgender seyn: Bei Absonderung der ersten Zellenreihe scheidet sich zugleich die Masse für die Umrisswand ab, die Spitzen des eben getrennten Astes verbindend; bei der zweiten Trennung vermag jedoch die gabelförmige Spaltung, der Wand des Umrisses halber, nicht schnell vorzudringen, und während sich nur die der Axe zunächst liegenden Zellen dieser Reihe entwickeln können, tritt auch schon die dritte Asttrennung ein. Die unausgebildeten Zellen der zweiten Reihe werden gedrückt, und nicht im Stande, die ihnen zukommende Masse zu ihrer Vergrösserung zu verwenden, verstärken sie nur die unter ihnen liegende Reihen-trennende Wand, und zwar besonders an ihrem äussersten Ende. Dieser ganze verstärkte Theil wird durch die zu spät erfolgende Entwicklung der Wand des Umrisses, so wie durch die Ausbildung der dritten Zellenreihe nach aufwärts bewegt, und es entsteht unter demselben ein leerer Raum, der nur durch die sich unregelmässig entwickelnden Zellen der ersten Reihe erfüllt ist (Taf. VII. fig. 1. b). An der Stelle, wo sich der verstärkte Theil von der Richtung der Reihen-trennenden Wand entfernt, verstärkt sich oft auch die zunächst stehende Zelle, wodurch eine feste Verbindung mit dem nächst folgenden Aste hergestellt wird. Da bei der abnormen Bildung der Wand des Umrisses diese dem Reissen ausgesetzt ist, vertritt diese Zelle mit dem verstärkten Theile den schützenden Umriss. Hiedurch entstehen die Formen, die längs dem Umfange Spitzen zeigen, so wie durch das Zerreißen der verstärkten Zelle jene, die mit gefiederten Blättern verglichen worden sind. — Diese Anomalien zeigen sich dem Beobachter am deutlichsten, wenn der Ast eben die ersten Spuren der vierten Trennung zeigt, doch lässt sich auch bei anderen Exemplaren ihre Entstehung leicht verfolgen, wenn man die Einkerbungen an den Enden der einzelnen Umrisswände im Auge behält. — Einen deutlichen Beweis für diese Entstehungsart gibt auch die sich ändernde Lage des verstärkten Theiles; an den jüngeren Theilen ist sein Ende nach abwärts gerichtet, parallel dem Aste; bei entwickelter dritter Zellenreihe steht er ziemlich horizontal, und erhält sich die Wand des Umrisses bis zur vierten Trennung, so sieht man denselben sogar nach aufwärts gezogen werden. Die vierte Reihe selbst übt nur wenig Einfluss mehr aus, und zu-

weilen sieht man den verstärkten Theil, nach dem Zerreißen der Umrisswand, sich selbst, nachträglich, zu einer Zellenreihe entwickeln.

Eine Eigenthümlichkeit, die nur in der Nähe der Spitze, und nur selten vorkommt, ist Taf. VII. Abth. 4. fig. 1. d abgebildet. Man bemerkt an den Spitzen der sich trennenden Aeste eine grössere Masse angehäuft, die unregelmässig begränzt ist; vielleicht deutet diess bloss auf eine zu üppige Entwicklung von Masse, die erst später verbraucht wird.

Die Dimensionen des *Retiol. Geinitzianus* stehen in solchem Verhältnisse zu einander, dass durch die Theilung der Breite einer Hälfte in drei gleiche Theile (in der Höhe der dritten Trennung der Aeste) der von jedem Aste umschlossene Raum in eben so viele beinahe gleichseitige Parallelogramme getheilt wird, über deren äusserstes dann der verstärkte Theil in nicht ganz diagonalen Richtung läuft. — Herr BARRANDE hat in seiner Beschreibung dieses Retioliten (*Graptolites de Bohême* pag. 69) nicht dieses Parallelogramm betrachtet, sondern das, welches weit auffallender als dieses, von einer Wand des Umrisses und zwei verstärkten Theilen gezeichnet wird; über dieses läuft, leicht nach aufwärts gekrümmt, der productive Obertheil eines Astes (Taf. VII fig. 1. e) in beinahe diagonalen Richtung, zuweilen schon mit deutlichen Spuren der vierten Trennung. (Die Abweichung von der wahren Diagonale ist die Höhe der ersten Zellenreihe.) Das Daseyn der vierten Zellenreihe scheint allein schon hinreichend zu zeigen, dass diese Diagonale nicht die Verticalkante eines (hohlen?) nach aufwärts gedrückten, vierseitigen Prismas sey. (Es musste gleich auffallen, warum nur diese eine Kante und nur in dieser einen Lage erscheine, auch gehörte zur Bildung einer jeden solchen Form ein Druck in zwei verschiedenen Richtungen.) Die einfachen Querschnitte, die ich immer fand, weichen leider nicht nur von den in den „*Graptolites de Bohême*“ abgebildeten, sondern auch von denen der Geschlechter ab, die dem flüchtigen Betrachter die meiste Aehnlichkeit zu bieten scheinen, nämlich der silurischen Pteropoden-Genera *Conularia*, *Coleoprion*, *Pugiunculus*.

Bemerkenswerth sind noch bei dieser Art die schon einmal erwähnten Unregelmässigkeiten, die bei höherem Alter eintreten. Ein ausgezeichnetes Beispiel ist Taf VII fig. 1. e. Die älteren Zellen, sowie die der Axe näheren haben die jüngeren theils verschoben, theils auf einen Punkt zusammengedrückt; der Umriss hat eine unregelmässige Form angenommen, und der, wenigstens scheinbar, nicht mehr productive Seitenast zeichnet sich nur durch den Vorsprung am Umriss und eine bessere Ordnung der Zellen aus. Stellen von solchem Alter finden sich nur sehr selten, und manchmal sieht man sie von einer Seite gedrückt, wodurch wirklich eine Verticalkante in jeder einzelnen Zelle sichtbar wird. Da wie oben gesagt, die Zelle nicht ganz die Höhe des Würfels erreicht, kann noch weit weniger die Verticalkante die Länge der Diagonale der Grundfläche haben, daher sieht man die aufwärts gedrückten Kanten kurz nach der Mitte der Zelle schon sich theilen und die Zeichnung der unteren Fläche sichtbar werden.

Retiol. Geinitzianus findet sich in den Graptolithen-Schichten von Böhmen (meistens in den N. O. Gegenden des Beckens), von Sachsen, Thüringen, von Dalecarlien (Draggån), von Quebec und von Utica (?).

Abth. 4. Tab. VII. fig. 1.

- Fig. 1. a.** Oberes Ende von *Retiolites Geinitzianus* BARR., aus den Schiefeln von Kuchelbad bei Prag. Links 29, rechts 28 Aeste. An diesem Stücke sieht man zweimal die Aeste vollkommen gegenständig werden, und zwar (links gezählt) den 10ten und den 29ten, der dem 28ten andererseits entspricht. Die ganze Länge einer Anomalie umfasst also hier bloss 18, resp. 17 Vertical-Abstände eines Astes.
- Fig. 1. b.** Dasselbe Exemplar, 8mal vergrößert; man erkennt es, als im dritten Stadio der Entwicklung; die obersten Aeste bilden erst die 2te Zellenreihe. Man kann am rechten Rande bei den älteren Theilen die Entstehung der dieser Art eigenthümlichen Unregelmässigkeiten beobachten, die an der linken Seite wegen der einwärts gedrückten Umriss-Wandungen und dem starken Vordrängen der jüngsten Zellen bei weiten weniger auffallen. — Die vier letzten Aeste rechts zeigen schon deutlich den verstärkten horizontalen Theil, so wie die verstärkte Zelle an seinem inneren Ende.
- Fig. 1. c.** Abgerissenes Exemplar von *Retiolites Geinitzianus* BARR. mit frei herabhängender Axe; 18 Aeste jederseits. Aus den Schiefeln von Hodkoviček.
- Fig. 1. d.** Dasselbe Exemplar, der linke Rand vielfach vergrößert. Dieses kurze Exemplar hat in seinem 15—18ten Aste die 4te Epoche der Trennung schon nahe vollendet, und zeigt in allen seinen Theilen eine üppige Verbreitung von Masse. Die Axe ist stark, Zellen- und Reihentrennende Wände sehr stark, die letzteren durch das schnelle Wachsthum ganz verzogen; an den Spitzen der Nebenäste sind noch bedeutende Anhäufungen von unregelmässiger Begrenzung.
- Fig. 1. e.** Linker Rand eines im 4ten Entwicklungs-Stadio begriffenen Exemplares, vielfach vergrößert. Es sind hier zwei Zellenreihen in ihrer Ausbildung zurückgeblieben, daher der horizontale Theil sehr auffallend. Die Wand des Umrisses ist gerissen, man sieht jedoch die dieselbe begrenzenden Einkerbungen an den Enden der Nebenäste, die die 5te Spaltung beginnen. Ueberhaupt bildet dieses Stück das der vorhergehenden entgegengesetzte Extrem, nicht nur durch das Zurückbleiben so vieler Zellenreihen, sondern auch durch die sparsame Vertheilung der Masse; bezeichnend ist aber besonders der Umstand, dass die Zellenwände sogar gegen innen concav stehen. Aus den gelben (Graptolithen-) Schiefeln von Hodkoviček.

Fig. 1. f. Unterstes, bekanntes Ende von *Ret. Geinitzianus* BARR. Linke Hälfte, vielfach vergrössert. Aus den dünnen, die Graptolithen-Schichten durchziehenden Kalklagen von Wiskočilka bei Prag.

Fig. 1. g. Der horizontale Theil, der durch die unregelmässige Bildung dieser Art entsteht, vielfach vergrössert, mit der verstärkten Zelle und der Einkerbung der Umrisswände an der Einmündung in den Nebenast.

2. *Retiolites grandis*, nov. sp.

Abth. 4. Tab. VII. fig. 2.

Leicht erkennbar durch seine auffällende Grösse, die gerundete Form des jüngsten Endes, durch den geringen Vertical-Abstand der Nebenäste, so wie insbesondere durch die eigenthümliche Bildung der Wände des Umrisses.

Während bei *Ret. Geinitzianus* der zuerst abgelöste Theil des Nebenastes auf der ganzen Länge des nächst-ältesten Astes aufliegt, und sich erst an dessen Ende durch eine leichte, nur bei starker Vergrösserung sichtbare Einkerbung trennt, um, vertical aufwärts gekrümmt, die Wand des Umrisses zu bilden: trennt sich bei dieser Art derselbe Theil schon weit vor dem Rande von dem nachfolgenden Aste, und läuft schräg nach aufwärts zu der Spitze des zugehörigen, productiven Asttheiles. Oft sieht man beide vereinigten Theile noch eine kleine Strecke herausragen, oder gekrümmt sich nach einwärts legen, und man kann wohl mit Recht sagen, dass die erste Trennung der Aeste nur unvollkommen vor sich gehe. — Es scheint, als würde das vereinigt gebliebene Ende erst bei grösserem Alter zur Entwicklung der Dimensionen der Breite in Anspruch genommen.

Die zum Schutze des Umrisses bestimmten Theile bieten also dem unbewaffneten Auge nicht mehr eine stetig gekrümmte Begrenzungslinie dar, sondern eine Reihe von Spitzen und von Einschnitten. Die ältesten Exemplare, die von diesen *Retioliten* bekannt sind, zeigen nur die beginnende dritte Entwicklungs-Epoche, und in dieser Höhe reichen die Einschnitte bis auf den vierten oder fünften Theil der Astlänge; es ist wahrscheinlich, dass sie bei grösserem Alter sich verringern.

Bedeutende Schwierigkeiten bei der Untersuchung dieser Astspitzen bietet eine kleine Anhäufung von Schwefelkies, die bei den wenigen bisher aufgefundenen Exemplaren dieselben stets umhüllt, und die ganze Form mit einem glänzenden Reife ziert. So constant diese Erscheinung auch ist, so muss man sie doch eher einer grösseren Anhäufung von Masse an eben diesen (den am unvollkommensten entwickelten) Stellen, als den Ueberresten vergänglicherer Organe zuschreiben, da sie nur an dieser einzigen Art beobachtet wurde.

Die Axe ist fadenförmig, stets bis an die Spitze durchlaufend, zuweilen durch die Aeste verzogen, die, in verhältnissmässig geringen Höhen-Abständen, gegen die Fuss-

punkte zu verstärkt, meist in der Nähe der Axe eine jähe Krümmung nach aufwärts zeigen, und dann sanft gegen den Umfang sich neigen.

Die Zellen sind gross und sehr dünnwandig, mit stark ineinander gerückten Fusspunkten der Querwände; die Querschnitt-Dimension scheint gering zu seyn. — Die äusserste Spitze ist stumpf abgerundet und der Parallelismus des Umfanges tritt schon in der Höhe der kaum entwickelten, zweiten Astspaltung hervor, scheint jedoch, wegen fortwährender Entwicklung der Breiten-Dimensionen mit Hilfe der noch ungespaltenen Astenden, nie vollkommen zu werden.

Dass das hier abgebildete Exemplar ein regelmässig entwickeltes sey, kann man aus der Krümmung der Aeste und dem Zurückfallen ihrer Spitzen in die Horizontalinie der Fusspunkte ersehen: dennoch ist bei der grossen Anzahl von diesen Aesten kaum die Periode der dritten Spaltung erreicht.

Diese seltene Art erscheint in den Schiefen von Wiskočilka bei Prag.

Fig. 2. a. *Retiolites grandis* aus den Schiefen von Wiskočilka.

Fig. 2. b. Der ältere Theil dieses Exemplars in achtmaliger Vergrösserung.

II. Genus: *Petalolithus*.

Subg. *Diplograpsis* M'COY (excl. *Retiol.*); subg. *Diprion* BARR.

(Πεταλον - λιθός.)

Die, oft nicht die Länge eines Zolles übertreffende Form wird, ganz ähnlich der der Retioliten, von einer centralen Axe mit zwischenständigen Nebenästen getragen und von Umrisswänden geschützt; die Axe ist breit, bandartig, weit über das ältere Ende der eigentlichen Form verlängert, und mit ihrer Breitendimension senkrecht stehend auf der Ebene der Nebenäste; diese verrichten dieselben Functionen wie bei den Retioliten.

Die Axe läuft einerseits, oben, ohne Unterbrechung bis zur Spitze fort, und verlängert sich andererseits, freiflatternd, noch weit über das Ende des Umrisses; als Maximum des Verhältnisses dieser Verlängerung zur ganzen Axenlänge kann das von 0.6:1 angegeben werden, so dass also Exemplare vorkommen, deren Axe bloss auf 0.4 ihrer Länge mit Seitenästen besetzt ist. — Durch die Lage der Breitendimension dieser Axe gegen die Ebene der Nebenäste muss immer die untere Hälfte dieser Dimension von den eigentlichen Petalolithen verdeckt werden, so weit die Axe noch productiv ist. Man sieht daher, wenn, durch den Druck, den alle in den Schiefen gefundenen Petrefakte erlitten haben, die sichtbare Hälfte des productiven Theiles der Axe auf die rechte oder linke Seite umgelegt wurde, durch die Mitte des Petalolithen einen ziemlich breiten Streif ziehen, dessen einer Rand (der der Richtung der Umlegung entgegengesetzte) die wahre Mittellinie ist, während der ganze Streif alle auf einer Seite dieser Mittellinie gelegenen Fusspunkte der Nebenäste verdeckt. Wo

sich am älteren Ende der Umriss des Petalolithen schliesst, sieht man dann zuweilen die untere, verdeckt gewesene Hälfte der Axe sich mit der oberen verbinden, da sie auf die entgegengesetzte Seite der Mittellinie umgelegt wurde. — Die nicht productive Verlängerung zeigt sich unregelmässig gewunden und umgeschlagen, wie ein der Strömung ausgesetztes oder vom Winde getragenes Band. Nicht selten, und besonders im Ueberschreiten darunterliegender Körper, spaltet sich diese Verlängerung in zwei Theile, die auch weiter spaltbar scheinen; behandelt man die Axe von *Petalolithus palmeus* mit starker Säure, so kann man dann unter dem Mikroskope immer mehrere Stränge sehen, aus denen dieselbe zusammengesetzt ist, und die parallel nebeneinander fortlaufen. Diese Erscheinung tritt gewöhnlich eine oder zwei Linien unter dem letzten Nebenaste am deutlichsten auf.

Die Vermuthung, dass die „nicht productive Verlängerung der Axe“ durch das Abfallen abgestorbener Nebenäste entstanden sey (conf. BARR. *Grapt. de Boh.* pag.11), gewinnt durch die Thatsachen sehr an Wahrscheinlichkeit, die man aus der Betrachtung der Störungen, die die Zwischenständigkeit der Nebenäste erlitten haben, ziehen kann. Es ist bei den Retioliten erwähnt worden, dass zuweilen die Verticalabstände der Aeste der einen Seite die Abstände der anderen Seite in constantem Verhältnisse übertreffen. Es kann von keiner zufälligen, schon durch den Bau des Ganzen unwahrscheinlichen Verschiebung die Rede seyn, wenn man sieht, dass der Fehler der Zwischenständigkeit bei jedem einzelnen Verticalabstände sich vergrössert und dass einzelne Aeste gegenständig werden können; durch eine Verschiebung entstehen constante, aber nicht der Entwicklung des einzelnen Astes proportionale Störungen. Die Entfernung von dem Punkte, wo zwei Aeste regelmässig zwischenständig stehen, bis zum Punkte, wo die erste Gegenständigkeit eintritt, wenn alle zwischenliegenden Aeste vollkommen ausgebildet sind, so dass man sie in Bezug auf die Verticalabstände als gleich alt betrachten darf, könnte man die halbe Länge der Anomalie nennen, und die Anzahl von Aesten, die dieselbe umfasst, würde ein Mass für die Störung geben. Bei den Petalolithen sind diese Bevorzugungen einer Seite von jenen der andern so unbedeutend, dass man nur selten im Stande seyn wird, einen vollkommenen Uebergang von der Zwischenständigkeit zur Gegenständigkeit zu beobachten. Wenn aber die ältesten sichtbaren Aeste schon bedeutend von der Zwischenständigkeit abweichend erscheinen, oder wenn man wirklich gegenständige Aeste findet, so darf man gewiss von dem Punkte der Gegenständigkeit nach abwärts sich die Reihe der Aeste zu beiden Seiten der freischwebenden Axe bis zu einer halben Länge der Anomalie, d. i. bis zu vollkommen regelmässiger Zwischenständigkeit ergänzen. Es werden bei Beschreibung der einzelnen Arten noch mehrere Thatsachen aufgeführt werden, die für diese Ansicht sprechen. — Die Anzahl der Nebenäste der Petalolithen schwankt je nach der Art und dem Wachsthum des Exemplares von 6 bis 28; die verticalen Abstände sind gewöhnlich im Verhältniss zur Astlänge nur unbedeutend, bei *Petalolithus ovatus* entwickeln sie sich jedoch sehr rasch und erreichen bedeutende Dimensionen.

Wenn auch von dem Zellen-Systeme selbst nie deutliche Spuren zu entdecken waren, so kann man doch mit grosser Sicherheit die Anwesenheit von Theilen einer analogen Entstehungsweise behaupten: wenn man sieht, dass sowohl die productiven Nebenäste, als auch die nicht productiven, abgelösten Längstheile derselben, jene bei ihrer sich wiederholenden Spaltung, diese bei der Bildung der Umrisswände, einen Gang der Entwicklung verfolgen, der jenem der correspondirenden Theile bei den Retioliten auf das Genaueste entspricht. — Die Spaltung der Nebenäste zeigt sich sehr auffallend, da derselben eine grössere Massenanhäufung vorauszugehen scheint.

Diese ganze Masse trennt sich in der Form einer Linie ab, die oft stärker ist, als der zurückbleibende Ast selbst und die, sich von demselben bei der Spaltung unter einem Winkel, der oft 30° erreicht, entfernend, ihre Masse wieder an die nicht mehr erkennbaren, im eben entstandenen Zwischenraum liegenden Theile abgibt, ähnlich den reihtrennenden Wänden der Retioliten. Daher kommt es wohl auch, dass immer nur die zuletzt entstandene Linie dieser Art in dem ganzen Verticalraume eines Astes sichtbar bleibt und dass der Zwischenraum zwischen dieser Linie und dem Aste eine zartere Bedeckung von Schwefelkies zeigt, als der unter der Linie liegende Theil.

Aus dem eben Gesagten, so wie aus der Erhaltungsweise der Petalolithen scheint hervorzugehen, dass die Theile, die den Platz des Zellensystemes der Retioliten einnehmen, aus einer (mit Stemmata versehenen?) hautähnlichen Substanz bestanden haben, und es spricht für diese Ansicht ausser dem starken Hervortreten der Axe und der Aeste und ausser dem völligen Verschwinden der früher vom productiven Aste losgetrennten Linien:

1. der Querschnitt. Die Lage von Schwefelkies, die die erwähnten Theile allein dem Auge bemerklich macht, erscheint in der Querschnitts-Dimension so gering, dass man selbst bei einiger Vergrösserung dieselbe noch nicht erkennen kann;
2. eine Reihe von naheliegenden, der Wand des Umrisses parallelen Linien, die an mehreren englischen Arten gezeichnet und beschrieben wurden. Mr. SALTER, der diese Linien untersucht hat (HARKNESS loc. cit. pag. 64), hält dieselben für keine constante Erscheinung, und es scheint als seyen dieselben nur als durch einen Druck auf die Wand des Umrisses (in horizontaler Richtung) entstanden zu betrachten.
3. Mr. HARKNESS (pag. 63) hat auf einzelnen Arten als scheinbare, äussere Oberfläche eine glänzende, bituminöse Masse gefunden.

Die noch zu erörternden Anomalien der Nebenäste werden ebenfalls darauf hinweisen, dass sie keinesfalls durch ein so festes Verbindungsmittel aneinander geknüpft waren, als es das Zellensystem der Retioliten seyn musste.

Die Wände des Umrisses entwickeln sich im Allgemeinen erst in späterem Alter zu verticalen Linien, es finden sich jedoch in Amerika und England Arten, von denen es scheint, als bleibe bei ihnen die Ausbildung dieser Theile in einer Weise

zurück, die sie mehr dem *Retiolites grandis* annähert. Merkwürdig ist, dass auch bei den Petalolithen die Arten mit weniger entwickelten Querwänden die grösseren sind. Leider liegen mir von diesen Arten nur sehr wenige Bruchstücke vor, da jedoch jene auffallende Axenverlängerung der böhmischen und scandinavischen Arten noch nicht beobachtet wurde und da sich hier auch der Umriss länger und weit mehr parallel als in jenen Arten zeigt, so scheint es, als werde man die Petalolithen in eine Abtheilung mit abfallenden Nebenästen und entwickelten Umrisswänden, und in eine andere mit nicht abfallenden Aesten und nicht entwickelten Umrisswänden trennen müssen.

Es ist bei der vorhergehenden Gattung einer Methode erwähnt worden, aus der Krümmung der Aeste und aus dem Höhenunterschiede der Spitze derselben in Bezug auf den Fusspunkt, auf die Art der Entwicklung des Exemplares so wie auf die dem einzelnen Aeste entsprechende Periode zu schliessen. Ist zwar ein solches Verfahren bei den Retioliten beinahe nie nöthig, da die reihentrennenden Wände selbst zu sehen sind: so bietet es dafür bei der Untersuchung der jetzt vorliegenden Formen die wichtigsten Anhaltspunkte, und die Anomalien, auf die man im Laufe der Beobachtungen stösst, zeigen durch die Art ihrer Erklärung von Neuem die innige Verwandtschaft dieser Gattung mit der vorhergehenden.

Man findet zahlreiche Exemplare von *Petalolithus palmeus* und *P. ovatus*, deren Umrisse, statt von unten der Axe parallel fortzulaufen und bloss gegen das jüngere Ende zu sich zu nähern, auch gegen das untere, ältere Ende convergiren, daselbst zusammentreffen und so jene merkwürdigen, blattähnlichen Ovale entstehen lassen, deren grösste Breite meist ziemlich regelmässig in der halben Höhe liegt (Abth. 4. Taf. VIII fig. 1 b, und 3 a). Durch die beobachteten Trennungen der Nebenäste, so wie durch viele angeführte Umstände überzeugt, dass jeder einzelne Ast älter sey als der ihn überlagernde, scheint man in dieser Verengung nach unten einem grellen Widerspruche zu begegnen. Dennoch ist dieselbe durch den Bau des Ganzen wohl begründet. Wenn schon die Symmetrie, mit welcher sich die Curve des Umlanges zu beiden Seiten auch dann krümmt, wenn die Form kein Oval ist (Taf. VIII fig. 1 c), auf die Axe als centrales Agens hindeutete: so wird die Ansicht, dass diese das störende Organ sey, zur Gewissheit, wenn man sieht, dass diese Verengung nicht durch eine Verkürzung der Nebenäste, sondern lediglich bei gleich bleibenden Verticalabständen durch die Abnahme des Winkels veranlasst wird, den dieselben mit der Hauptaxe einschliessen*). Es hat den Anschein, als müsse die Axe, um der Verticalentwicklung, besonders der jüngeren Aeste, zu genügen, sich rasch verlängern, und als ziehe sie hiebei die Fusspunkte aller älteren Aeste, deren Spitzen durch die Umrisswände gebunden sind, nach aufwärts. Auf diese Weise geschieht es wohl auch, dass einzelne Aeste eine ganz abnorme, nach oben

*) Die halbe Breite der Form ist der Sinus dieses Neigungswinkels.

convexe Form erhalten, wie man diess sehr oft bei *Petalolithus ovatus* beobachten kann. Taf. VIII zeigt fig. 1 in dreifacher Vergrösserung drei verschiedene Formen von *Petalolithus palmeus*, eine ovale, eine geschweifte und eine mit einem der Axe parallelem Umriss, deren Neigungswinkel der Aeste gegen die Axe spitz, und deren Breite daher gering ist.

Die eben besprochene Erscheinung ist nicht zu verwechseln mit einer anderen, die nicht als Anomalie, sondern als regelmässige Bildung zu betrachten ist und die daher auch bei keinem Exemplare fehlt. Es ist diess ein Verkürzen und Einsinken der zwei bis vier letzten Aeste und ihrer Verbindungstheile, die, vielleicht abgestorben, dem Zeitpunkt des Abfallens sich nähern. Oft sind diese Aeste ohne Verbindung mit einander und meist in einem schlechten Zustande der Erhaltung. Sie bilden durch ihr Einschrumpfen die untere Spitze der ovalen Formen und dienen dazu, die vorbesprochene Erscheinung noch auffallender zu zeigen.

1. *Petalolithus palmeus*.

Abth. 4. Tab. VIII fig. 1.

Graptolithus palmeus BARR. Graptolites de Bohême pag. 59. taf. III. fig. 1—7.

Wahrscheinlich übereinstimmend mit *Graptolithus foliaceus* MURCH. Sil. Syst. pag. 694 Taf. 26 fig. 3; Trans. Geol. Soc. VI, 1. 558; HARKNESS loc. cit. pag. 64, Taf. 1, fig. 13. — Axe fein, fadenförmig, oft sehr verlängert und in der Verlängerung umgelegt, wo dann die nicht sehr bedeutende Breitendimension sichtbar wird. Die Form des Umfanges ist zwar sehr veränderlich, jedoch immer symmetrisch in Bezug auf die Axe, bald schmal mit sehr spitzen Neigungswinkeln der Aeste gegen die Axe, bald oval, mit gleichmässig veränderten Neigungswinkeln, bald auch geschweift, am unteren Ende mit constanten, spitzen Neigungswinkeln, die sich plötzlich vergrössern, und so eine schnelle Zunahme der Breite des Petalolithen bewirken. Diese Unregelmässigkeiten bleiben nicht ohne Einfluss auf das Abfallen der Aeste und es erreichen bei ganz ausgebildeten Exemplaren immer jene mit spitzen Neigungswinkeln die grösste Anzahl von Aesten. Die nachfolgenden Daten, die drei schönen Exemplaren aus der Sammlung Sr. Hochwürden des Herrn Prof. BLUMER entnommen sind, zeigen ungefähr die durchschnittlichen Verhältnisse:

Länge der Axe	}	1 Zoll 8 Lin.; hievon tragend: 11½ Lin. mit 27 Aesten bei parallelem Umriss.
		1 „ 7¼ „ „ „ 7½ „ „ 22 „ „ blattförmigem „

Die Wände des Umrisses rücken nur langsam vor, und bleiben fast in allen Fällen concav, jene Stellen ausgenommen, wo die Aenderung der Neigungswinkel der Aeste einen Einfluss auf sie übt. Die die Aeste verbindenden Theile sind nur durch eine äusserst zarte Schichte von Schwefelkies dargestellt und müssen jedenfalls ausserordentlich schwach gewesen seyn. — Die vom Aste abgetrennten Linien haben sehr oft

schon während der Trennung ihre Masse an diese Theile abgegeben, so dass sie sich nicht mehr bis an die Axe verfolgen lassen. Eine starke Massenanhäufung, wie sie schon bei den Spitzen der Nebenäste von *Retiolites Geinitzianus* besprochen wurde, zeigt sich oft auch hier an denselben Stellen.

Es lässt sich nicht mit Bestimmtheit sagen, ob diese Art mit dem in England gefundenen *Grapt. foliaceus* MURCH. identisch sey; mit einigen Abbildungen des Herrn RICHTER scheint sie übereinzustimmen. Im SW. Theile des Prag-Berauner Beckens.

2. *Petalolithus parallelo-costatus* Sss.

Taf. VIII. fig. 2.

Die Hauptaxe ist viel breiter als bei der vorhergehenden Art, und deutet zuweilen an ihrem ältesten Ende noch auf eine Zunahme an Breite nach dem Abfallen der Nebenäste hin. Die weit stärkere Schwefelkies-Bekleidung lässt Nebenäste und abgetrennte Theile bei weitem nicht so stark hervortreten als bei *Petal. palmatus*. Die Aeste sind lang, jedoch ihre Neigungswinkel gegen die Axe meistens sehr spitz. Wenn sich diese Winkel ändern, so ändern sie sich alle in gleichem Maasse und man wird bei dieser Art nicht leicht die früher erwähnten Anomalien auffinden können. — Die freihängende Axe zeigt im Schwefelkiese eine grössere Massenzunahme gegen ihre Ränder und man kann vielleicht hieraus auf einen linsenförmigen Querschnitt schliessen. Man sieht dieselben zuweilen, indem sie einen unterliegenden Körper, z. B. einen Graptolithen überschreitet, sich deutlich in zwei Theile trennen, die sich dann wieder vereinigen. 20 — 34 Aeste. In Böhmen mit *Petal. palmatus*.

3. *Petalolithus folium*.

Prionolus folium His. Leth. Succ. 114, Taf. 34, fig. 8.

Graptolites folium His., PORTLOCK rept. 321, Taf. 20 fig. 5; SALTER Geol. Journal V Taf. 1, fig. 5;

HARRNES loc. cit. pag. 63, Taf. I, fig. 12; an? RICHTER loc. cit. pag. 203, Taf. VIII, fig. 15 — 17. mult. al. locis.

Diese Art, in Böhmen noch nicht gefunden, mag hier als den Uebergang zu *Petal. ovatus* bildend, einen Platz finden; sie zeichnet sich durch ihre bedeutende Breite, durch die geringen Verticalabstände der Aeste, so wie durch eine auffallende Abrundung des jüngeren Endes aus, und ist die grösste unter den beschriebenen. Die Axenverlängerung ist nur unbedeutend.

4. *Petalolithus ovatus*.

Graptol. ovatus (Diprion) BARR. Grapt. Boh. pag. 69 Taf. 3. fig. 8, 9.

Taf. VIII. fig. 3, 4. vergrössert.

Diese auffallende Form übersteigt selten die Länge eines halben Zolles, ihre Breite aber beträgt zuweilen $2\frac{1}{2}$ Linien, so dass bei dem immer gegen beide Enden sich nei-

genden Umriss oft nahe kreisrunde Gestalten entstehen. Die Nebenäste sind lang, ihre Vertical-Entfernungen entwickeln sich sehr rasch und werden im Verhältnisse zu den übrigen Dimensionen zuweilen sehr gross. Merkwürdig ist hier das Auftreten der oft erwähnten Störungen. Einzelne Aeste werden nach oben zu concav und es mag in einzelnen Fällen wohl diese Beugung die schnellere Absonderung der Zwischentheile veranlassen haben. — Die Verlängerung der Axe ist nie bedeutend, oft erscheint dieselbe mitten in der Form leicht gekrümmt. Die Umrisswände sind stark.

Unter den sehr vielen Exemplaren dieser Art, die hier der Beobachtung unterzogen wurden, haben sich zwei gefunden, die eine höchst überraschende Erscheinung zeigen. Man sieht nämlich die Nebenäste noch weit über den Umriss, ihre Richtung beibehaltend, sich verlängern (Fig. 4). Das hier abgebildete Exemplar befindet sich in der Sammlung des hochwürdigen Herrn БИЛИМЕК. Es scheint nicht hiedurch eine neue Art bedingt zu seyn, denn diese Theile sind so zart und so fein abstehend, dass sie bei den anderen Exemplaren wohl leicht verloren gehen konnten.

Der reichste Fundort ist Selkowitz im Berauner Kreise.

An die Petalolithen scheint sich eine Reihe von Versteinerungen anzuschliessen, die in Böhmen nicht vorkommen und mir nur in einzelnen Exemplaren vorliegen. Es sind diess insbesondere:

Graptol. bicornis HALL. Palaeont. New-York, I, Taf. 73; HARKNESS loc. cit. pag. 63, Taf. I, fig. 11. Wahrscheinlich übereinstimmend mit *Graptol. rectangularis* M'COX.; conf. *Gr. sagittarius* RICHT.

Diprion pennatus HARKN. loc. cit. pag. 62. Taf. I, fig. 9.

Diprion nodosus HARKN. loc. cit. pag. 63. Taf. I, fig. 10.

Graptol. mucronatus HALL, Taf. 72.

Von den eigentlichen Petalolithen unterscheiden sie sich durch das Beibehalten der älteren Zellen und die mannigfachen Formen der Umrisswände.

III. Genus: *Graptolithus* LINNÉ.

Nach Beschreibung der Retioliten und Petalolithen kommen wir zu einer nicht minder räthselhaften Gruppe, die jene Formen umfasst, welche LINNÉ zuerst im Auge gehabt zu haben scheint, als er den Namen *Graptolithus* in die Wissenschaft einführte. So verschieden und zahlreich diese Formen auch erscheinen, kann man doch an allen Arten folgende Theile als wesentlich und bezeichnend hervorheben:

1. Eine Röhre, die als tragende Hauptaxe die Rückenseite der ganzen Form durchläuft; sie ist steif oder biegsam.

2. Zellen, die an dieser Röhre ansitzen, und zwar immer in einfacher Verticalreihe, mit einer Oeffnung an der der Anheftung entgegengesetzten Seite (der Stirnseite).

Andere Theile, wie z. B. ein im Inneren längs der Axe fortlaufender Verbindungskanal, der die einzelnen Zellen-Querwände durchsetzt, oder die bei den Oeffnungen der einzelnen Zellen hervortretenden Fäden, scheinen wohl unerlässliche Organe gewesen zu seyn: da sie jedoch bloss bei einzelnen Arten beobachtet werden konnten, wage ich es noch nicht, sie als dem ganzen Genus eigenthümlich zu betrachten.

Die ganze Gruppe zerfällt in drei Unterabtheilungen, die durch viele Kennzeichen sich gegenseitig abgrenzen:

1. Graptolithen, deren Axe bis an das jüngste Ende hinauf nach der der betreffenden Art entsprechenden Curve gekrümmt ist. Diese Curve liegt stets in einer Ebene und geht am älteren Ende immer in eine gerade Linie über. — Die Zellen scheinen in manchen Arten einen Theil der Röhrenaxe zu umfassen; sie stehen eng aneinander geschlossen, so zwar dass wenigstens zwei Drittheile der oberen Wandfläche jeder Zelle von der unteren Wandfläche der nächstjüngeren gedeckt werden. — Die ausgezeichneten Arten dieser Unterabtheilung sind die einzigen von allen in dieser Schrift beschriebenen Versteinerungen, die die Grenze der eigentlichen Graptolithenschiefer überschreiten.
2. Graptolithen, deren Axe nur nahe bis an das jüngste Ende der entsprechenden Curve folgt, an der Spitze aber frei und flatternd erscheint. Die Curven dieser Abtheilung sind conische Schraubenlinien, die am älteren Ende zuweilen in cylindrische übergehen. — Die ausgewachsenen Zellen berühren sich auf ungefähr zwei Drittheile ihrer Länge, die jungen jedoch, die an dem biegsamen Theile haften, neigen sich unter sehr spitzem Winkel gegen die Axe und berühren sich je nach ihrer Entwicklungsstufe, halb oder unvollkommen. Sie bilden hiedurch den Uebergang zur nächsten Unterabtheilung:
3. *Rastrites* BARR. Die Axe ist sehr schwach und folgt nur selten und unvollkommen krummen Linien, die jener der ersten Abtheilung zugehören. — Die Zellen berühren sich nie, sie sind lang, meist röhrenförmig und erreichen keine so grosse Anzahl wie bei den andern Graptolithen; der Neigungswinkel gegen die Axe ist gross.

Es mag unmittelbar auf diese Bemerkungen die Beschreibung der mir vorliegenden böhmischen Arten folgen, nebst der Aufzählung der bei einzelnen derselben beobachteten Erscheinungen; der abgesonderten Darstellung der Thatfachen werden die Betrachtungen folgen, die aus der Combination der bei verschiedenen Arten aufgefundenen Organe entstehen. — Um die Entwicklungsreihe der einzelnen Abtheilungen zu vervoll-

ständigen, werden an den betreffenden Orten auch jene nicht böhmischen Arten erwähnt werden, die bezeichnende und verbindende Uebergänge bilden.

ERSTE ABTHEILUNG. Die Axe liegt ihrer ganzen Länge nach in derselben Ebene. Sie ist entweder bis an das jüngere Ende hinauf gerade, oder sie krümmt sich an demselben noch zu einer Spirallinie. Die Zellen, die an dem erwachsenen, nie stark gekrümmten Theile mit ihrer Breitendimension in der Ebene der Axe liegen, treten an den gekrümmten Stellen oft allmählig, vielleicht durch eine Drehung der Axe gehoben, aus dieser Ebene heraus, stellen sich nach und nach senkrecht auf dieselbe, und treten so ganz auf die andere Seite der Axe hinüber. Dieser Vorgang wiederholt sich bei einigen Exemplaren öfter, und man darf auch bei Arten, die nicht bis zur ganzen Spirale eingerollt sind, nie einen Unterschied zwischen concaven und convexen Zellenreihen machen. Durch den Druck, der auf diese Formen ausgeübt wurde, zeigen die nahe senkrecht auf die sichtbare Ebene stehenden Zellen eine weit geringere Breitendimension und daher das geflochtene Ansehen der spiralförmigen Graptolithen. — Einige in Amerika, Schweden und England gefundene Arten, die unzweifelhaft dieser Abtheilung angehören, zeigen, dass die Axe im Stande sey, dichotomirend einen zweiten Graptolithen entstehen zu lassen. Es sind zu so entstandenen Formen zu zählen: *Prionotus geminus*, HIS. Leth. Suec. II. 5, Taf. 38 fig. 5; *Grapt. ramosus* HALL, New York Palaeont.; *SALTER* Quarterly Journ. V, 1849, pag. 17, fig. 7; *Grapt. Murchisoni* BECK, MURCH. Sil. Syst. II. Diese Erscheinung fand ich in Böhmen nur bei Arten aus der zweiten Abtheilung deutlich; *Grapt. Becki* BARR. wird Gelegenheit bieten, auf diesen Gegenstand zurückzukommen. — Bevor die getrennten Theile der Axe unter einem Winkel, der zwischen 20° und 35° schwankt, von einander sich entfernen, laufen sie oft eine Strecke weit neben einander fort; hiedurch entstehen Gestalten, die einzelnen Petalolithen sehr ähnlich sind. — Die Zellen sitzen dicht aneinander. ihre Oeffnungen sind meist in Gestalt einer Röhre producirt, die beweglich oder wenigstens biegsam gewesen zu seyn scheint; diese Oeffnungen sind meist breit und niedrig und in einzelnen Fällen treten lange, fadenförmige Organe aus ihnen hervor (*Grapt. testis* BARR.). Die eigentlichen Zellen selbst berühren sich in ihrer ganzen Breite, d. i. bis zur Entstehung der producirtten Röhren; sie verlieren gegen das obere (jüngere) Ende zu schneller an Breite als an Höhe und man kann sich sie bestehend denken aus einer oberen gewölbten Wandung, einer unteren im verkehrten Sinne gewölbten Wandung, zwei (meist) convexen Seitenwandungen, aus der vorderen Röhre mit der Oeffnung, und aus dem Theile, der an die Axe sich anlegt. Oft scheint es, als würden die Seitenwandungen der Zellen, wenigstens in der Nähe der Axe sich zu einem, alle Zellen schützenden Theile vereinigen, es bleibt jedoch, des Zustandes wegen, in dem sich die Versteinerungen befinden, auch zuweilen zweifelhaft, ob dieses Verschwinden der Querwand nicht anderen Einflüssen zuzuschreiben sey.

Die Querwände der Zellen sieht man im Inneren nie bis an die Axe sich erstrecken und in vielen Fällen ist es gewiss, dass sie nicht weiter reichen, als die ihnen an der Aussenseite entsprechende Furche oder Linie. Hiedurch entsteht zwischen der Axe und dem nicht geschlossenen Rücken der Zellen ein Raum, der die einzelnen Zellen verbindet, und von Herrn BARRANDE Canal genannt wird. Andererseits war auch auf keinerlei Weise eine Verbindung zwischen der eigentlichen Axe und den Zellen nachzuweisen, und in einzelnen Fällen, in denen die Querwandungen ein röhrenförmiges Organ enthalten, tritt dieses mit einer erweiterten Mündung an den Canal. Bei jenen Exemplaren, die im Kalke auftreten, lässt sich die Axe herauslösen und man sieht, dass an ihrer Innenseite eine einzige, ununterbrochene Wand fortläuft.

1. *Graptolithus Priodon* GEIN.

Lonatoceras Priodon, BRONN Leth. geogn. pag. 56, Taf. I, fig. 13.

Graptolites Priodon, GEINITZ, v. LEONH. u. BR. Jbuch 1842, pag. 699 Taf. 10 fig. a, b; idem Grundr. d. Verst. pag. 312, Taf. 10 fig. 13; Vers. Bamb. Kreissamml. pag. 12; BARR. Grapt. de Boh. pag. 33, Taf. 1, fig. 1—14.

Zu vergleichen mit: *Grapt. sagittarius* LINK. Iter Scaniae, pag. 147; id. Syst. Naturae ed. XII, ann. 1796; WAHLB. nov. Act. Ups. 1821, VIII, pag. 93; PORTL. rep. pag. 320, Taf. 19 fig. 10; GEINITZ, v. LEONH. u. BR. Jbuch. pag. 700; MURCH. Quart. Journ. 1845, pag. 493; M'COY, a. a. O., 1848, pag. 223; MURCH. VERN. KAISERL. RUSS. vol. II. pag. XII; HALL New York. Palaeont. I. Taf. 73.

Auch zu vergleichen: *Grapt. Ladensis* MURCH. Sil. Syst. pag. 694, Taf. 26, fig. 12; M. V. K. RUSS. vol. II, pag. XII; DOUBÉ, Mem. Soc. géol. France, II sér, tome 2, pag. 401 et 402; PORTL. rep. pag. 310, T. 19 fig. 8?; Mem. Geol. Survey, II pag. 308; NICOL. Quart. Journ. 1850, VI, pag. 64; conf. *Prion. sagittarius* HIS. Leth. Suec. pag. 114, Taf. 34, fig. 6; und *Grapt. sagittarius* RICHT. Zeltsch. deutsch. geol. Gesellsch., II. Band, 3, pag. 204, Taf. VIII, fig. 6—9 et 12.

Taf. VIII fig. 5. a—c.

Axe stark, am jüngeren Ende zu einer Spirale von höchstens einem Umgange eingewunden; die Querwände der Zellen (obere und untere Wandung) sind sehr stark geschweift und neigen sich gegen die Axe unter einem Winkel von nahe 45°. Sie lassen sich nicht bis zur Berührung mit der Axe verfolgen; die obere Wandung ist sehr stark convex gewölbt und liegt in einer concaven Wölbung der nächst-jüngeren unteren Wandung; wo sie dieselbe verlässt, fällt sie beinahe senkrecht zur Bildung der producirtten Röhre herab; an dieser oberen Wandung stehen die verticalen, wenig convexen Seitenwandungen, die nach vorne nicht stark convergiren, daher bleibt die producirtte Röhre so wie die Oeffnung selbst sehr breit. Die Form der Oeffnung ist hier die einer sehr gestreckten Ellipse, deren grosse Axe (durch die Seitenwandungen gebildet) beinahe die Hälfte der Breite des ganzen Graptolithen erreicht, während die kleine Axe, bei der Verengung, die durch die obere, so wie durch die untere Wandung erzeugt wird, unverhältnissmässig klein ausfüllt. Die letztere steigt nämlich, nachdem sie von der nächst-älteren Zelle sich getrennt hat, steil nach aufwärts, so, dass die producirtte Röhre vertical, die Oeffnung aber ziemlich horizontal steht, die

Schweifung der Querwände aber, die diese Art so leicht kenntlich macht, noch mehr hervortritt.

Von dieser Art, die für die unteren Schichten des oberen silurischen Gebietes bezeichnend ist, erscheinen an vielen Punkten (und besonders schön am Berge Kossow im Berauner Kreise) Steinkerne im derben Kalksteine. Die zuweilen erhaltenen Zellenwände sind in einen bituminösen Ueberzug verwandelt, seltener in Schwefelkies, nie in Kalk. Man kann diese Steinkerne leicht auslösen, die bituminösen Querwände durch Erwärmen vernichten, und dann deutlich sehen, dass die ausfüllende Kalkmasse im Innern, längs der Axe zusammenhänge (conf. BARR. Grapt. pag. 38).

Zuweilen, jedoch selten, sieht man dann auch über die convexe, obere Wandung einer oder der anderen Zelle eine erhöhte Linie hervortreten, der eine Vertiefung an der deckenden, unteren Wandung entspricht; auch dieser Theil lässt sich nicht bis zur Berührung der Axe verfolgen (er wird, bei vielen anderen Arten wieder erscheinend, die Zellenröhre genannt werden, während jene Verbindung, die im Inneren, längs der Axe fortläuft, mit dem von Herrn BARRANDE vorgeschlagenen Namen: Canal bezeichnet werden wird). Die Axe ist manchmal frei, manchmal gleichsam in die Form hineingedrückt (fig. 5, b).

Auch in den Schiefen von Dworetz, die jedenfalls jünger als die Graptolithenschichten sind, tritt *Grapt. Priodon* auf, und bietet so einen Anhaltspunkt bei der Beurtheilung der Querschnitts-Dimensionen an Arten, die nur im Schiefer gefunden werden.

Graptolithus Priodon ist bekannt aus Böhmen, Sachsen und Thüringen. *Graptol. sagittarius*, der sich wohl mit dieser Art vereinigen liesse, wurde gefunden: in Grossbritannien, Scandinavien und der Insel Bornholm (als Geschiebe zu Stargard in Mecklenburg und in der Nähe von Berlin), am Ural, so wie in den Staaten New York und Utica. — *Graptol. Ludensis*, der sich durch weniger geschweifte Querwände und einen spitzen Neigungswinkel derselben gegen die Axe zu unterscheiden scheint, kömmt in Grossbritannien, Scandinavien, in den Pyrenäen, in Thüringen und am Ural vor.

2. *Graptolithus Bohemicus* BARR.

BARRANDE, Grapt. de Boh. pag. 40 Taf. 1 fig. 15—18.

Taf. VIII fig. 6. a — c.

Die Axe liegt in einer vertieften Rinne, zum Theile von den Seitenwänden der Zellen umfasst; sie krümmt sich an der Spitze höchstens zu einem Vierteltheile eines Umganges der Spirale, und folgt auch am ausgebildeten Ende nicht so streng und steif der geraden Linie als die vorhergehende Art, ohne jedoch so bedeutende Abweichungen zu zeigen, wie z. B. *Graptol. taenioides*. — Die Zellen zeigen einen sehr merkwürdigen Bau; ihre Querwände neigen sich unter einem Winkel von 35° gegen die Axe, und könnten daher trotz der unbeträchtlichen Breite des Ganzen eine ziemliche

Länge erreichen, sie verschwinden jedoch, nachdem sie kaum drei Vierteltheile der ganzen Breite durchlaufen haben, und sind daher auf der Rückenseite des Fossils gar nicht sichtbar. Diese erscheint bloss in der Gestalt von zwei schmalen Wülsten, zwischen denen die Ueberreste der Axe begraben sind. — Bricht man ein Exemplar dieses Graptolithen sorgfältig ab, so lösen sich, so weit die Querwände sichtbar waren, die Zellen mit convexer unterer und concaver oberer Wandung; was zwischen dem Ende der Querwand und der Axe liegt, zeigt den frischen Bruch der kalkigen Ausfüllungsmasse. — Die Aushöhlung der oberen Zellenwandung dauert nur so weit, als die obere Zelle aufliegt; sie ist bedeutend und bildet mit den wenig gewölbten, senkrecht stehenden Seitenwänden scharfe Kanten. Man darf keinen allzugrossen Widerspruch zwischen den concaven oberen Wandungen dieser Art und den convexen oberen Wandungen der vorhergehenden suchen. Es fehlt nämlich hier die producirte Röhre gänzlich, wenn man nicht anders den ganzen vorderen, nicht verengten Theil der Zelle als eine solche betrachtet. Die Oeffnung nimmt den ganzen Querschnitt der Zelle ein. (In dieser Richtung finde ich die Zellenwände nie scharf begrenzt, und es scheint nicht unmöglich, das zartere Theile hier zu Grunde gegangen seyen. Dasselbe gilt für die nächstfolgende Art.)

Bei der geringen Höhe der einzelnen Zellen und dem spitzen Neigungswinkel, den sie gegen die Axe bilden, ist es erklärlich, dass ein senkrecht auf die Axe geführter Querschnitt mehrere Querwände treffen muss. Solche Querschnitte sind Taf. VIII Fig. 6, d. e. abgebildet, und zeigen die genaueste Uebereinstimmung mit dem soeben über den Bau der Zellen Gesagten. Die erste (der Oeffnung zunächst gelegene) durchschnittenen Wand wurde nahe an ihrer Oeffnung getroffen, und da an dieser Stelle die Wölbung am stärksten ist, zeigt der Querschnitt eine sehr gebogene Linie. Die zweite Querwand, welche nahe an ihrem Ende geschnitten ist, gibt ein weit flacheres Profil. Am Stirnrande zeigt sich der Querschnitt der Oeffnung, und aus einem der Durchschnitte sieht man, dass innerhalb gewisser Grenzen das vordere Ende der Zellen auch seitlich verdrückbar war. (Diese Erscheinung tritt nie bei einer einzelnen Zelle, sondern immer auf die Länge von wenigstens einem Zolle längs dem Stirnrande auf; sie scheint also nicht in der Willkühr der einzelnen Zellen gelegen zu seyn.) —

Die Schiefer von Kuchelbad werden an ihren höchsten Punkten von kaum einen Zoll mächtigen Schichten eines sehr mürben Kalkes durchzogen, der das Bindemittel einer zahllosen Menge von Versteinerungen abgibt, die sämmtlich den untersten Schichten der oberen silurischen Epoche entsprechen, und ausgezeichnet sind durch die schönen Exemplare von *Graptol. Bohemicus*. Ausserdem findet sich diese Art am Berge Kosow, zu Gross-Kuchel und an vielen anderen Punkten.

3. *Graptolithus serratus* SCHLOTH.

Orthoceras serratus SCHLOTH. Petrifkde. II, p. 56, taf. 8, fig. 3.

Graptol. „ SCHLOTH. GEINITZ Grundr. pag. 312, taf. X, fig. 12, et L. Br. Jahrb. 1842, pag. 697, taf. X; conf. QUENS. L. Br. Jahrb. 1840, pag. 275.

Graptol. v. *Prionotus dentatus* D'ORB. Voy. d. l'Amér. mérid. III, pag. 32, 33. taf. II. fig. 1.

„ ROEMERI BARR. Grapt. Boh. pag. 41, taf. 2. fig. 9—11.

conf. „ *latus* M'COY; Quart. Journ. 1848, IV, pag. 223, fig. 1.

Die Axe ist schwach, nur wenig eingesenkt und stets ihrer ganzen Länge nach ziemlich gleichmässig mit convexer oder auch concaver Zellenreihe gekrümmt; bei der auffallenden Breite der Form tritt auch die Breite des Canals hervor. Die Zellen sitzen dachziegelartig übereinander, jedoch mit nur leicht gewölbten Querwandungen und ohne scharfe Kanten zwischen diesen und den Seitenwänden zu bilden. Ihre verticale Höhe ist sehr gering, und daher, so wie aus ihrer grossen Länge ist es erklärbar, dass der senkrecht auf die Axe geführte Querschnitt (wie bei der vorhergehenden Art) mehrere Querwände trifft, wenn sich auch die Zellen unter einem stumpferen Winkel gegen die Axe neigen als bei *Grapt. bohemicus*. — Der Umriss dieses Querschnittes convergirt stark gegen die Oeffnungen der Zellen; diese stehen nahezu in auf die einzelnen Querwände senkrechten Ebenen und scheinen die ganze Höhe und Dicke der Zelle einzunehmen.

Graptol. serratus scheint so wie beide vorhergehende Arten, den die eigentlichen Graptolithen-Schichten überlagernden Kalken eigenthümlich zu seyn. Merkwürdig ist die Uebereinstimmung der in Thüringen und Böhmen gefundenen Stücke mit dem, was D'ORBIGNY aus der Republik Bolivia und von den Ufern des Rio grande beschreibt. Jene Art aus Grossbritannien (*Grapt. latus* M'COY), die der vorliegenden nahe steht, scheint sich bloss durch grössere Länge und eine unregelmässiger gebildete Axe zu unterscheiden. Die Länge überschreitet in Böhmen nicht $3\frac{1}{4}$ “, die Breite nicht $3\frac{1}{2}$ “.

4. *Graptolithus testis* BARR.

BARR. Grapt. Boh. pag. 53. taf. 3. fig. 19—21.

Tab. VIII fig. 7.

Die Axe, vom ältesten Ende an gekrümmt, windet sich an der Spitze zu einer Spirale von höchstens 2 Umgängen ein; sie ist stark und tritt auch bei undeutlicher Erhaltung der anderen Theile hervor. — Die Zellen zeigen sich, wenn die äussere Hülle des Graptolithen noch in der Form eines zarten, bituminösen Ueberzuges erkennbar ist, durch schwache Furchen getrennt, die in geringer Entfernung von der Axe mit einer kleinen Einsenkung endigen. Ihr Neigungswinkel gegen die Axe ist, so wie ihre verticale Höhe in den meisten Fällen sehr schwankend; jedoch überschreitet der Winkel nicht 50° und die Höhe nicht das 1 $\frac{1}{2}$ fache der Breite. Auf der

der verlängerten Zellenöffnung entsprechenden Stelle ist die Zelle zur Bildung eines meistens durch eine leichte Einschnürung getrennten, rundlichen Theiles vorgezogen, aus welchem lange, röhrenförmige Organe, leicht biegsam und nach allen Richtungen verzogen, ihren Ursprung nehmen (Fig. 7. d). Die Hülle der obengenannten runden Hervorragungen scheint wirklich nur eine die Basis der röhrenförmigen Organe umfassende Verlängerung der Zellenwände zu seyn, während diese Organe als weit festere Theile zu betrachten sind, die bei ungünstiger Erhaltungsweise, so wie die Axe und die eben zu beschreibenden inneren Theile, weit schärfere und dunklere Spuren zurücklassen. Sie endigen in eine sehr stumpfe Spitze und scheinen einen kreisförmigen Querschnitt zu haben; werden sie durch irgend einen Zufall in eine stark von der der Zellenquerwand abweichende Richtung verzogen, so folgt ihnen in dieser Richtung die sie unten umfassende Hervorragung der Zelle nach und wird zugleich mit ihnen verzogen (Fig. 7. c).

Gelingt es, den bituminösen Ueberzug vollständig abzulösen oder vor dem Löthrohre abzuknistern, so gelangt man zu den Fig. 7. e dargestellten inneren Theilen. — Die röhrenförmigen Organe vereinigen sich innerhalb des Umrisses der Zelle in der die Zellenöffnung vertretenden Hervorragung zu einem dunkeln, gegen innen nicht scharf begrenzten Knoten; in einzelnen Ausnahmefällen scheinen mehr als zwei solche Organe aus diesem Knoten hervorzugehen. Die Zellenquerwand war nie deutlich, höchstens in zweifelhaften Bruchstücken aufzufinden, an ihrem Ende jedoch bemerkt man bei einigen Exemplaren eine höchst merkwürdige Form. Es ist diess ein dunkler, bituminöser Fleck von der Gestalt eines liegenden 8, gegen das Innere der Zelle nicht scharf begrenzt, gegen die Axe zu aber oft eingedrückt und wie mit einem stärkeren Rande versehen. Die Unbeständigkeit des Auftretens dieser Theile, die meist nur durch unbestimmte, schmalere Reste ersetzt sind, lässt vermuthen, dass sie ursprünglich in der Ebene der Zellenquerwand gelegen waren, und nur durch Verdrückungen sichtbar wurden. (Jene schmalere Reste würden dann als in ihrer ursprünglichen Lage liegend zu betrachten seyn.) Von dem parallel zur Axe verflächten oder gar eingedrückten Umrissen dieses Theiles und von der Axe selbst ist jener nicht unbedeutende, das Innere der einzelnen Zellen verbindende Raum begrenzt, den Herr BARRANDE den Canal nennt; er zeigt hier, nahezu in einer Linie mit den eben erwähnten verflächten Umrissen, noch eine Reihe von sehr kleinen, aber grellen Punkten, die in gleichen Abständen, meist zwei in jeder Zelle stehen, und vielleicht der inneren Fläche der dem Steine aufliegenden Graptolithenhälfte angehören. Sie scheinen aus eben diesem Grunde, ausser der Axe, die am wenigsten verschiebbaren Theile des ganzen Graptolithen zu seyn, und sie haben sich auch wirklich in der vorliegenden Figur (7. e) in gerader Linie erhalten, während die anderen Theile verschoben wurden. — Dieses Exemplar befindet sich in der Sammlung des hochw. Herrn BILIMEK; die besterhaltenen Stücke finden sich in Borek und Selkowitz, und erreichen daselbst eine Länge von 6 Zollen.

5. *Graptolithus ferrugineus* SSS.

Tab. IX. fig. 7.

Die Axe ist schwach und windet sich an ihrem jüngeren Ende nicht ein, weicht jedoch hin und wieder stark von der geraden Linie ab und erscheint bei ihrer grossen Länge meist an vielen Stellen gebrochen und verbogen. — Die niedrigen Zellen sitzen unter einem Neigungswinkel von 35° — 45° gegen die Axe mit beinahe geraden, kurzen Querwänden aufeinander; ihre Breite ist sehr verschieden und das Fig. 7. a dargestellte, zweifach gebrochene Exemplar zeigt die Zellen des jüngeren Theiles breiter als jene des älteren. Der Canal ist stark, und hebt sich oft in dem sehr flachen Querschnitte über die Zellen; unter der Zellenquerwand, an der Stelle der Oeffnung, sieht man nicht selten ein oder zwei längere Fäden herabhängen, die lebhaft an die röhrenförmigen Organe von *G. testis* erinnern. Sie sind weit weniger steif, schwächer, und erreichen höchstens eine Länge, die der 2 oder 3fachen Zellenbreite gleichkömmt. Nie stehen sie, wie bei *G. testis*, steif oder in wenigen, gezwungenen Krümmungen von der Zelle ab: sie hängen lose nach abwärts, ihr Ende dem älteren Theile des Graptolithen zugekehrt, und deuten vielleicht hiedurch auf eine senkrechte Stellung der Axe.

Diese Art wurde bisher nur an einigen Stellen der Horzowitzzer Eisengruben gefunden, und zwar in einem eisenschüssigen, festen Schiefer, der jedenfalls den mittleren silurischen Gruppen angehört, dessen Beziehungen zu den Schichten der Umgegend jedoch noch nicht mit Sicherheit bestimmt sind. — Die hier abgebildeten Exemplare befinden sich im k. Museo in Prag.

6. *Graptolithus laevis* HALL.

New-York Pal. pag. 274. taf. 74. fig. 7.

Tab. IX. fig. 6.

Einige in Kuchelbad bei Prag gefundene Stücke bieten die grösste Aehnlichkeit mit dieser bisher nur aus Nordamerika bekannten Art. Ihre Axe ist sehr schwach und weicht in wellenförmigen Krümmungen, die gewöhnlich gegen das jüngere Ende zu auffallender werden, von der geraden Linie ab. Eine Einrollung an diesem Ende ist nicht zu bemerken. Von den Zellen sieht man nie mehr als einige zerrissene Ueberreste, während die übrigen zugleich mit diesen vorkommenden Arten auf das Vollkommenste erhalten sind. Die Zellenquerwände sind nicht mehr erkennbar und daher auch die Stärke des Canals nicht mehr zu bestimmen. Dennoch wäre es irrig, wollte man diese Stücke nur für beschädigte Reste irgend einer anderen Art halten, denn zu bedeutend weicht der Habitus der Axe von dem aller übrigen Graptolithen ab, und es scheint viel wahrscheinlicher, dass bei dieser, wie bei beiden vorhergehenden Arten: *Grapt. testis* und *Grapt. ferrugineus* die Wände der Zelle von weit zarterer Consistenz gewesen seyen, als bei den übrigen Arten. Hiedurch ist auch das grelle Hervortreten der festeren Theile (wie bei dem vorliegenden Falle die Axe) zu erklären.

7. *Graptolithus dubius* SSS.

Tab. IX fig. 5.

Die Axe ist zwar nicht stark, folgt jedoch im Alter streng der geraden Linie und zerbricht schon unter ziemlich stumpfen Winkeln; in der Jugend ist sie leicht nach vorwärts gekrümmt; am unteren Ende ragt sie, von Zellen entblösst noch eine Strecke von manchmal 6 Linien frei hervor. Da nicht wie bei den Petalolithen eine zweite Reihe von auf der Axe haftenden Theilen vorhanden ist, kann man auch nicht mit Gewissheit sagen, ob dieser frei herabhängende Theil durch das Ablösen der Zellen entblösst worden, oder ob sein jetziger Zustand der ursprüngliche sey. — Die Zellenquerwände sind gerade, sehr regelmässig unter einem Winkel von weniger als 45° gegen die Axe gestellt; senkrecht auf ihre Richtung ist die Zelle vorne zur Bildung der Zellenöffnung abgeschnitten. Zuweilen scheint die Querwand in eine kleine, hervorragende Spitze verlängert zu seyn; der Canal ist bei der schlechten Erhaltungsweise dieser Querwände nur selten zu erkennen; er ist dreimal so stark als die Axe.

Diese Art scheint von HERRN BARRANDE mit *Grapt. colonus* (Grapt. Boh. taf. II fig. 5) vereinigt worden zu seyn; die nachfolgende Beschreibung dieser höchst merkwürdigen Art wird zeigen, dass hier wirklich eine Trennung vorgenommen werden musste, und es scheint sich *Grapt. dubius* eher an *Grapt. Ludensis* oder an die dichotomirenden nordamerikanischen Arten anzuschliessen.

8. *Graptolithus taenius* SOW. et SALT.

Graptol. taenia SOW. et SALT. Quart. Journ. 1849, V, pag. 16, taf. 1. fig. 8.

conf. „ *Griestonensis* NICOL. „ „ 1850, VI, pag. 63, fig. 2.

partim „ *nantius* BARR. Grapt. Boh. pag. 45, taf. 2, fig. 6.

Die Axe ist stark, durchaus leicht gekrümmt und windet sich an dem jüngeren Ende nicht ein; sie erreicht eine Länge von 5 Zoll. An ihr liegt die Hälfte der ganzen Breite des Graptolithen einnehmend, und meist durch die hineingedrungene Steinmasse stark aufgetrieben, der Canal, in auffallend grossen Dimensionen. — Die Zellen sind in der Regel von der in den Canal eingedrungenen Masse nur wenig ausgefüllt, und liegen daher meist tiefer und flach; sie sind sehr schmal, die Querwände gerade, ihr Neigungswinkel gegen die Axe sehr spitz (30° — 35°). Hiedurch geschieht es, dass die Zellen sich nur sehr unvollkommen decken und der grösste Theil der oberen Zellenwandungen bloss liegt. Senkrecht auf diese (die oberen Zellenwandungen) ist die Zelle abgeschnitten; die Oeffnung selbst habe ich noch nicht gesehen.

Vielleicht bietet die Vereinigung des sehr starken Canals mit den sich wenig deckenden Zellen einen weiteren Anhaltspunkt zur Eintheilung der Graptolithen; das Blossliegen der oberen Zellenwandung wurde oben als Merkmal bei der Bildung der einzelnen Gruppen benutzt, und diese Art ist daher in Bezug auf die Zellen

eine Uebergangsform: andererseits aber wurde bei den ausgezeichnetsten Arten von Graptolithen mit freiliegenden Zellen nie der Canal mit Bestimmtheit nachgewiesen.

9. *Graptolithus colonus* BARR.

Grapt. Boh. pag. 42. taf. 2. fig. 1—4.

Tab. VIII fig. 8.

Diese Art bietet je nach ihrer Lage im Gesteine und nach den Veränderungen, die das Exemplar erlitten, dem Beobachter, oft an derselben Axe, sehr verschiedene Bilder dar, deren jedes Einzelne einer Beschreibung bedarf und die oft grosse Schwierigkeiten bieten, wenn man sie auseinander abzuleiten sucht. Bei allen ist die Axe stark, bis an das jüngste Ende hinauf gerade und steif, der Canal mehr als doppelt so stark und gegen oben nur wenig an Stärke abnehmend. Am unteren Ende, bei einer fortlaufenden Breite von 0.95 Linien zählt man 25 Zellen auf den Zoll, so dass die einzelne Zelle nahezu gleiche Höhe und Breite hat.

Fig. 8. b zeigt die häufigste Erscheinung dieser Art. Beinahe senkrecht auf die Richtung der Axe und des Canals laufen scharfe Furchen, wie Querwände von Zellen, aus; dort wo sie den äusseren Umriss des Graptolithen verlassen sollten, d. i. an der Stelle, wo die Ueberlagerung durch die nächste jüngere Zelle endet, zeigt diese Furche einen deutlichen Bruch, und fällt als eine leicht nach auswärts gekrümmte Umrisslinie der Zelle auf die nächstfolgende herab. In dem Punkte also, wo die obere Wandung der Zelle aufhört bedeckt zu seyn, vereinigen sich drei Linien: eine senkrecht auf die Axe stehende gerade, und zwei leicht gewölbte Linien, die den Umriss bilden. — Diese Bildung der Zellen sieht man nur bei wohlerhaltener Oberfläche des Graptolithen; entfernt man diese durch eine Säure, wozu sich besonders die Exemplare aus den oberen Schieferschichten von Wiskocilka, die Kalk enthalten, eignen, so gelangt man zu den Fig. 8. c abgebildeten Theilen.

Senkrecht auf die Axe und den Canal, also entsprechend den horizontalen Furchen an der Oberfläche liegen sehr starke, bituminöse Wände, die gegen den Canal zu (meistens mit einer kleinen Einkerbung am Ende) eine breite, vertical stehende Basis besitzen und diesen zum Theile von dem Inneren der Zelle trennen. Am vorderen Ende treffen diese Theile auf eine scharfe Linie, die zu mehr als einem Halbkreise zusammengebogen ist. Diese Linie, die nicht selten an dem Punkte, wo sie sich mit der horizontalen Scheidewand verbindet, einen Bruch oder eine Krümmung erleidet, begrenzt also sowohl über als unterhalb dieser Scheidewand einen Theil einer Zelle nach Aussen, lässt aber dadurch, dass weder sie selbst, noch die nächstfolgende derartige Linie bis in die Mitte der Zelle reicht, an dieser Stelle eine Verbindung zwischen dem inneren Zellensacke und dem äusseren offen. Parallel zur Axe scheint je-

doch auch an dieser Seite eine Linie fortzulaufen, welche die einzelnen Halbkreise schliesst, und von der auch einzelne Spuren in den zwischen den Halbkreisen gebliebenen Lücken zu entdecken sind.

Aus diesem Grunde vorzüglich darf man diese eben beschriebene Erscheinung, wenn sie auch nie bei wohlerhaltener Schale gefunden wurde, nicht für einen einfachen Verticalschnitt des Graptolithen halten, so sehr auch das Verfahren dafür spricht, durch welches sie aus Fig. 8. b entstanden ist. Es ist wahrscheinlicher, dass die Erklärung dieser Gestalten in dem bei *Grapt. bohemicus* gegebenen Querschnitte zu suchen sey, dass nämlich bei dieser Art den verlängerten Zellenmündungen eine seitliche Bewegung gestattet gewesen sey und dass, als sie in den Schlamm begraben wurden, durch den Widerstand desselben alle diese kurzen Röhrrchen nach aufwärts gekehrt wurden; Fig. b wäre dann die untere, Fig. c die obere Ansicht, die halbkreisförmigen Linien aber die Umrisse der einzelnen Zellenöffnungen. — Auffallend ist das Fig. 8. d dargestellte jüngere Ende eines solchen Graptolithen: von dem Halbkreise läuft schräg nach aufwärts eine Linie, die in ihrer Richtung der Diagonale einer Zelle entsprechen würde; in einiger Entfernung von der Axe theilt sie sich und umfasst zum Theile einen dunkeln, zwar nach oben nicht begrenzten, jedoch unten scharf von ihr getrennten Fleck. Ein ähnlicher Flecken zeigt sich Fig. 8. c unterhalb der horizontal liegenden Scheidewand. — Fig. e und Fig. f sind Theile, welche höchst wahrscheinlich auch dieser Art angehören; das eine ist eine starke, wahrscheinlich cylindrische Röhre, das zweite aber zeigt die umgelegte Scheidewand und eine Furche in der Mitte, die vielleicht dieser Röhre entspricht.

Grapt. colonus erscheint sowohl in den Graptolithenschiefeln, als auch in den sie überlagernden Dworetzer Schiefeln.

10. *Graptolithus Sedgwicki* HARKN.

HARKN. loc. cit. pag. 93. taf. 1. fig. 9.

Tab. IX. fig. 11.

Die Axe ist stark, und windet sich nicht ein, jedoch weicht sie am jüngeren Ende zuweilen von der geraden Linie ab und erreicht eine Länge von kaum $1\frac{1}{2}$ Zoll. — Die Zellen sind klein, ihre obere Wandung wenig gewölbt, der Neigungswinkel sehr spitz (30°). Das vordere Ende der oberen Wandung d. i. der obere Theil der Zellenmündung ist mit einer starken Spitze geziert, die zuweilen nach aufwärts verzogen ist.

Der Canal ist schwach, nimmt aber, wie bei *Grapt. colonus*, gegen das jüngere Ende nur wenig ab. Die jungen Exemplare haben Aehnlichkeit mit den Spitzen von *Grapt. taenius*, unterscheiden sich jedoch durch die Spitze an der Zellenmündung.

Das Vorkommen dieses Graptolithen in Böhmen ist bis jetzt nur von einer sehr beschränkten Localität in Kuchelbad bekannt, wo er sehr häufig zu seyn scheint; den-

noch stimmen alle Kennzeichen, selbst bis auf die Art des Auftretens, so scharf mit der von H. HARKNESS beschriebenen Art, dass *Graptol. Sedgewicki* eines der merkwürdigsten Beispiele der Verbreitung silurischer Fossilien abgibt.

11. *Graptolithus Becki* BARR.

Grapt. de Boh. pag. 50, taf. 3, fig. 14—18.

Tab. IX fig. 4.

Die Axe ist stark und rollt sich am jüngeren Ende nicht ein, wohl aber weicht sie an dieser Stelle, wie bei der vorhergehenden Art wegen der geringeren Festigkeit dieses Theiles in leichten, unregelmässigen Krümmungen von der früheren Richtung ab. Das untere, älteste Ende zeigt sich nicht selten mit concavem Zellenrande unter einem Winkel von ungefähr 140° nach vorne von der geraden Linie abgelenkt (Fig. 4. a); hiebei sitzen noch 4—5 Zellen an dem abgelenkten Stücke der Axe, dessen anderer Theil dann, ähnlich dem unteren Ende von *Grapt. dubius* von Zellen entblösst ist. Bei dem sich wiederholenden Auftreten dieser Erscheinung, und bei dem Umstande, dass nicht nur das entblösste Ende der Axe, sondern auch die Zellenreihe hiebei gekrümmt wird, scheint es, als sey die Ursache in einer zerstörten Bifurcation des Graptolithen zu suchen, wie solche an anderen Arten sowohl in Grossbritannien und in Schweden als auch in Nordamerika beobachtet worden sind, und wie sie auch bei *Grapt. Proteus* aus Böhmen beinahe ausser Zweifel sind. — Die Zellen sind beinahe so hoch als breit, Querwände und Canal wegen der unvollkommenen Erhaltungsweise nicht mit Bestimmtheit zu erkennen. In dem unteren Theile jedes Zellensackes findet man entweder eine tiefere Höhlung oder eine grössere Anhäufung des den Graptolithen ersetzenden Schwefelkieses, es lässt sich jedoch nicht angeben, ob diess von einem besonderen innern Organe (wie bei *G. testis*) oder nur von der Einsenkung des leeren Sackes herrühre. Die Zellenmündungen und ihre verlängerten Ansätze sind kelchartig umgebogen und erhalten dadurch viele Aehnlichkeit mit jenen von *Grapt. Priodon*; sie erreichen in der Jugend schnell ihre verticale Höhendimension, ohne in Bezug auf die Breite ausgebildet zu seyn, und hiedurch scheinen am jüngern und schmälern Ende die zarten Verlängerungen der Mündungen in grösseren Entfernungen zu stehen, als im Alter.

Die Länge der Axe beträgt zuweilen mehr als 4 Zoll und die Zahl der Zellen übersteigt oft ein Hundert; besonders häufig ist diese Art in den Schiefen von Litolhaw im Berauner Kreise, wo durch sie oft grosse Flächen ganz mit Schwefelkies bedeckt werden; auffallend ist auf grösseren Schieferstücken das paarweise Beisammenliegen der Exemplare, ohne dass man des reichlichen Kieses halber, mit Sicherheit eine Bifurcation eines Exemplares von einer blossen Ueberlagerung zu unterscheiden im Stande ist. — Dieselbe Art ist von Hrn. HARKNESS aus Dumfriesshire beschrieben worden, so wie der ihr verwandte *Grapt. Nicoti* HARKN.

12. *Graptolithus Nilssoni* BARR.

Grapt. Boh. pag. 51. taf. 2. fig. 16 — 18.

conf. *Graptol. tenuis* HALL. New-York Pal. taf. 71.

Obgleich sehr schwach, krümmt sich die Axe dennoch stetig nach einer wenig gewölbten Curve, deren Krümmungshalbmesser gegen das jüngere Ende nur wenig abzunehmen scheint; weder das ältere, noch das jüngere Ende sind vollständig bekannt, und sie finden sich, trotz der sehr geringen Breitendimensionen, selbst bei Exemplaren von mehr als drei Zoll Länge noch nicht vor. — Die Zellen decken sich nur unvollständig, so dass man aus dem blossliegenden Theile der Querwände auf ihre Richtung und den Neigungswinkel gegen die Axe schliessen kann. Die Bewegung der Zelle nach vorn steht beinahe senkrecht auf die Richtung der Querwand; der Canal scheint breit zu seyn; einzelnen Exemplare sind schon unter sehr stumpfen Beugungswinkeln gebrochen.

Von *Grapt. Sedgwicki* unterscheidet sich diese Art insbesondere durch die regelmässige, stetige Krümmung der weit schwächeren Axe, durch das Fehlen der Spitze an dem vorderen Rande der Querwand, durch geringere Breite und grössere Länge; von *Grapt. falx* durch eine grössere Länge bei einer geringeren Krümmung der Axe so wie durch eine verschiedene Bildung der Verlängerung an der Zellenmündung. Sie findet sich vorzugsweise in Kuchelbad und Borek.

Graptolithus falx Sss.

Tab. IX fig. 10.

Eine kleine, unscheinbare Form, jedoch leicht zu erkennen an der starken, sichelförmigen Krümmung der ganzen Axe, so wie an der sonderbaren Bildung der Verlängerungen an den Zellenmündungen. Die Stärke der Axe so wie des Canals ist nicht mit Gewissheit anzugeben; wie bei der vorhergehenden Art schliesst man auch hier aus dem blossliegenden Theile der Querwand auf die Lage der Zelle in Bezug auf die Axe; er neigt sich gegen diese unter einem Winkel von 35 resp. 145 Graden. Zur Bildung der Verlängerung der Zellenmündung ist die ganze Zelle schon nahe an der Stelle, wo die Bedeckung durch die nächstfolgende Zelle endigt, in Gestalt einer Röhre oder eines Schlauches vorgezogen, der plötzlich sich krümmt und in entgegengesetzter Richtung herabfällt und zwar in einer Länge, die oft jene des nicht bedeckten Theiles der Zelle erreicht oder gar übertrifft (Fig. 10. b). Es ist diess das ausgezeichnetste Beispiel einer solchen Zellenbildung, wie sie schon bei *Grapt. Priodon* und *Becki* beschrieben wurde und wie sie auch die jüngeren Theile von *Grapt. Proteus*, wie die des *Grapt. gemmatus* und *Barrandei* zeigen.

Die Länge der Axe beträgt nur selten einen halben Zoll und die Zahl der Zellen übersteigt beinahe nie zehn; dennoch gestattet die seltsame Bildung der Ver-

längerungen an den Mündungen nicht, sie als Bruchstücke von dem jüngeren Ende irgend einer anderen Art zu betrachten.

Da bei *Grapt. fulx*, wie bei *Grapt. Nilssoni* keines der beiden Enden der Axe mit Bestimmtheit anzugeben ist, weiss man nicht, ob der Neigungswinkel der Querwände gegen die Axe bei diesen beiden Arten ein stumpfer oder ein spitzer zu nennen sey, um die Beschreibung den Vorhergegangenen analog durchzuführen. Wollte man, sich auf die Aehnlichkeit mit den schon beschriebenen Arten stützend, diese Winkel spitze nennen, so sprechen dagegen jene mir eben vorliegenden und an vielen Orten beschriebenen dichotomirenden Stücke von *Prionotus geminus* HIS., *Graptol. ramosus* HALL. und andere, deren einzelne Stücke zuweilen dem *Grapt. Nilssoni*, zuweilen auch dem *Grapt. ferrugineus* nicht unähnlich sind, und deren Zellen-Querwände gegen die dichotomirende Stelle sich neigen.

14. *Graptolithus convolutus* HIS.

- conf. *Gezähnte Liliten*, WALCH et KNORR III. Suppl. taf. IV, fig. 5—6 et taf. X fig. 1.
Prionot. convolutus HIS. Leth. Suec. pag. 114. taf. 34. fig. 7.
 „ „ „ Bull. soc. géol. France, II. sér. 2 tôme. pag. 402.
Graptol. spiralis GEN. L. Br. Jahrb. 1842, taf. X fig. 21, 22, 24—29.
 Id. Grundr. Verst. pag. 314. taf. X fig. 14.
 „ „ „ DARR. Grapt. Boh. pag. 54, taf. 3, fig. 10—10.

Tab. IX. fig. 8.

Ausgezeichnet ist bei dieser Art die Einrollung der Axe, die in einer regelmässigen Spirale bis an das älteste Ende hin geschieht und von der höchstens der jüngste Theil um ein Unbedeutendes abweicht. — Entfernt man die bedeckende Schichte von Schwefelkies, durch die in den meisten Fällen die äussere Umhüllung des Graptolithen dargestellt ist, und die keine deutlichen Spuren von Querwänden erkennen lässt, so gelangt man zu einer Reihe von senkrecht auf die Axe stehenden Furchen oder Linien, die ähnlich den entsprechenden Theilen bei *Grapt. colonus*, als die Querwände der Zellen zu betrachten seyn dürften. Sie endigen am Canale kolbenförmig verdickt. Die Oeffnungen der einzelnen, beinahe quadratförmigen Zellen sind mit einer röhrenförmigen Verlängerung versehen, in welcher sich noch eine scharfe Linie bemerkbar macht, die oft wohl bis nahe an die Querwand sich erstreckt, im Allgemeinen jedoch nicht mit derselben vereinigt ist (Fig. 8. a). Der Querschnitt dieser röhrenförmigen Verlängerungen scheint ein flachgedrückter gewesen zu seyn und es ist die eben erwähnte scharfe Linie, die der ganzen Länge nach diese Verlängerung durchzieht, wohl zu unterscheiden von der dunkleren Stelle, die sie zuweilen umschliesst und die durch das Einsinken der Mitte dieser hohlen Röhre entsteht. — Die Vertheilung scheinbar härterer Theile am Aussenrande des Graptolithen, ohne dass dieselben mit den Querwänden in Berührung stünden, erinnert sehr an analoge Theile des *Grapt. testis*. — Einige

kurze, nicht eigerollte, aber auch nicht streng gerade Bruchstücke, die in Kuchelbad bei Prag aufgefunden wurden, gehören wahrscheinlich auch dieser Art an. Die Zellenquerwände waren zwar nicht zu entdecken, wohl aber die, die Verlängerungen der Zellenmündungen durchziehenden Linien (Fig. 8, b und c). Die Verlängerungen selbst erscheinen kürzer, ihre Basis breiter.

Diese Art findet sich in Böhmen beinahe an allen Punkten, wo die Graptolithenschichten zu Tage gehen; in Bruchstücken findet sie sich auch in den diese überlagernden Schiefeln von Dworetz; ausserdem noch in Norwegen (Furudäl), in der Normandie, im Voigtlande (Ronneburg) und in den Pyrenäen (?).

ZWEITE ABTHEILUNG. Die Axe ist spiralförmig auf einer konischen Ebene aufgewunden, die am älteren Ende zuweilen in eine cylindrische übergeht; die Querwände der ausgebildeten Zellen berühren sich ihrer ganzen Länge nach, während sie in der Jugend sich unter einem weit spitzeren Winkel gegen die Axe neigen, sich nur höchst unvollständig decken und bei der entsprechenden unvollkommenen Entwicklung der Axe, kaum eine Spur der in allen völlig ausgebildeten Theilen aufzufindenden Canalbildung erkennen lassen.

Bei den beiden Arten dieser Abtheilung, die eine nähere Untersuchung der inneren Theile zulassen, bei *Grapt. turriculatus* und *Grapt. Proteus*, findet man (Taf. IX fig. 3, c) nach Entfernung der Einhüllung von Schwefelkies Querlinien, die beinahe senkrecht auf die Axe stehen und sich durch die ganze Länge des röhrenartigen Ansatzes an der Zellenmündung fortsetzen; sie endigen in auffallender Entfernung von der Axe mit einer starken Verdickung, und bieten manche Aehnlichkeit mit den inneren Theilen von *Grapt. colonus*. — Durch den Druck, den diese Formen in den Schiefeln erlitten, mussten sie aus ihrer konischen Fläche gerückt werden und je nach der Richtung, den dieser Druck in Bezug auf die senkrechte Axe des Kegels genommen, die verschiedenartigsten Projectionen auf der Schieferplatte zurücklassen. Mit dem Neigungswinkel dieser Axe gegen die Ebene des Bildes nimmt auf diesem die Krümmung der einzelnen Windungen zu, bis bei senkrecht stehender Axe das in sich selbst herabgedrückte Fossil eine einfache Spirale zeigt, bei der die Entfernungen der einzelnen Umgänge von dem Scheitelwinkel des Kegels abhängig ist.

Die Zellen bilden je nach der Seite der Axe, an welcher sie haften, das leichteste Mittel, die drei bisher bekannt gewordenen Arten dieser Abtheilung zu unterscheiden: bei *Grapt. turriculatus* sitzen sie an der Unterseite der Axe und kehren ihre Mündungen gegen das erwachsene Ende; bei *Grapt. armatus* wenden sie sich zugleich mit der Axe und stellen ihre Mündungen stets in die Richtung des Krümmungshalbmessers des entsprechenden Axenstückes; bei *Grapt. Proteus* endlich sind sie an der oberen Seite befestigt und kehren ihre Verlängerungen gegen die Spitze.

Alle drei Arten finden sich im silurischen Becken von Böhmen und es ist *Grapt. convolutus* HIS. in PORTL. Londonderry Rep. pag. 320, taf. 19, fig. 8, der wahrscheinlich mit *Grapt. turriculatus* BARR. übereinstimmt, das einzige Beispiel eines Vorkommens in andern Gegenden.

15. *Graptolithus turriculatus* BARR.

Grapt. Boh. pag. 56. taf. 4. fig. 7—11.

Tab. IX. fig. 1.

Die Zellen sitzen (nicht umfassend) an der unteren Seite der Axe; ihre Mündungen sind mit kurzen Ansätzen versehen, die obwohl beweglich und vielfach verzogen, dennoch im Allgemeinen immer gegen die Basis des Kegels gewendet sind. Als eine äusserst seltene Erscheinung sind Fig. 1, c weitere Verlängerungen der Ansätze an den Zellenmündungen zu sehen, es sind diese nämlich zu zarten vielleicht röhrenförmigen Organen fortgesetzt, die zuweilen an Länge das Dreifache der ganzen Zellenbreite weit übertreffen. Nur in den Schleifen schiefgedrückter Windungen, wo sie nach allen Richtungen von der Axe umschlossen und geschützt werden, kann man diese Theile zuweilen auffinden, die durch die Art ihrer Erhaltung weit mehr wahren Fortsetzungen der Röhre an der Zellenmündung ähnlich sehen, als jenen festeren Organen, die z. B. bei *Grapt. testis* aus eben dieser Mündung hervordringen.

Der Winkel an der Spitze des Kegels (Fig. 1, d) beträgt ungefähr 35° und die senkrechte Entfernung der einzelnen Windungen (die wie bei allen Arten dieser Abtheilung zugleich mit dem Halbmesser der Windungen zunimmt) ist so gering, dass bei den herabgedrückten Exemplaren sich diese Umgänge stets kreuzen. Die durch den Druck in der Richtung der Kegelaxe entstandenen Spiralen sind wegen des spitzen Winkels am Kegel so eng eingerollt, dass sich in den meisten Fällen die Zellen der einzelnen Umgänge berühren (Fig. 1, b); der Kreisumfang, aus dem Durchmesser der letzten Windung eines solchen Exemplares gerechnet, stimmt genau mit den beiden Sehnen, in die sich dieselbe Windung bei Exemplaren verwandelt hat, welche senkrecht auf die Verticalachse gedrückt wurden, und es darf daher der geringe Raum nicht auffallen, den die spiralförmigen Exemplare im Vergleiche zu den anderen einnehmen. Um den Uebergang zwischen diesen beiden Formen darzustellen, wurde Fig. 1, e ein Exemplar abgebildet, das ungefähr unter einem Winkel von 30° (gegen die Verticalaxe des Kegel) gedrückt seyn mag. Die einzelnen Windungen zeigen sich schon sehr stark gekrümmt, und das jüngere Ende wird schon von den späteren Windungen umfasst.

Ein Exemplar im Museo zu Prag zählt 12 Umgänge und 285 wohlerhaltenen Zellen; von dem sechsten Umgange an bleiben sich die senkrechten Entfernungen so wie die Halbmesser der nachfolgenden Umgänge ziemlich gleich, und die Ebene der Axe geht aus einer konischen in eine cylindrische über.

Besonders häufig ist diese Art in Litohlaw bei Beraun; sie ist auch zu vergleichen mit *Grapt. serratus* HIS. PORTL. rep. pag. 320 taf. 19 fig. 8.

16. *Graptolithus armatus* Sss.

Tab. IX. fig. 2.

Die Axe ist schwach und die Erhaltung der inneren Theile so ungünstig, dass man diese Art nur nach den äusseren Umrissen mit den ihr verwandten vergleichen darf. Sie unterscheidet sich von *Grapt. turriculatus* und *Proteus* vor allem dadurch, dass die Zellen stets radial d. i. in der Richtung des Halbmessers des entsprechenden Axenstückes stehen. Die verticale Entfernung der Umgänge ist gleich vom jüngeren Ende an sehr bedeutend, der Winkel an der Spitze des Kegels kleiner als bei *Grapt. Proteus* und grösser als bei *Grapt. turriculatus*. Obwohl die Zellen am jüngsten Ende sich beinahe gar nicht überlagern und auch manchmal kolbenförmig zurückgelegt zeigen, so bleibt doch dieser Theil stets stärker und viel kürzer als bei *Grapt. Proteus*, und das Hinaustreten aus der konischen Ebene wird nie so bedeutend. Bei dem kleinen Winkel an der Spitze des Kegels und bei der grossen senkrechten Entfernung der einzelnen Umgänge ist es erklärbar, dass das Fig. 2 abgebildete Exemplar bei einer in Sehnen gemessenen Länge der Axe von 1 Zoll $\frac{3}{4}$ Linien und bei einer Anzahl von nur 28 Zoll. eine Höhe von 7 Lin. zeigt. Die auffallend in die Länge gezogene Axe lässt auch dann *Grapt. armatus* mit Leichtigkeit erkennen, wenn die Zellen, wie es oft der Fall ist, nur in der Gestalt eines glänzenden Streifens erhalten sind.

Bis jetzt nur in Kuchelbad bei Prag aufgefunden.

17. *Graptolithus Proteus* BARR.

Grapt. Boh. pag. 58. taf. 4. fig. 12—15.

Tab. IX. fig. 3.

Die Axe, in höchstens 4 oder 5 Windungen um einen Kegel gerollt, tritt am jüngeren Ende schon in einiger Entfernung von dem Scheitel dieses Kegels aus der konischen Ebene heraus, ohne weiter einer constanten Richtung zu folgen und durch zufällige Beugungen in die verschiedenartigsten Lagen gebracht. Dieses jüngere Ende fehlt oft und ist dann das Exemplar in der Richtung der verticalen Axe des Kegels niedergedrückt worden, so lässt es sich nur schwer von *Grapt. convolutus* unterscheiden. Um die Art der konischen Aufrollung näher zu bezeichnen, mögen folgende, einem guten Exemplare entnommene Daten angeführt werden: Ganze Länge 3 Zoll 1 Linie. Höhe der Axe des Kegels 10 Linien. Anzahl der Zellen 81.

Länge der 1. halben Windung (in kleinen Sehnen gemessen)	.	11 Linien
„ „ 2. „ „	.	8 „
„ „ 3. „ „	.	$6\frac{1}{2}$ „
„ „ 4. „ „	.	4 „
„ „ 5. „ „	.	$2\frac{3}{4}$ „
		2 Zoll $8\frac{1}{4}$ Lin.
Bewegliches, jüngeres Ende		— $4\frac{3}{4}$ „
		3 Zoll 1 Lin.

Die Zellen laufen in der Form eines glänzenden Bandes von Schwefelkies an der oberen Seite der Axe fort, und trennen sich gegenseitig durch nichts, als durch die röhrenförmige Verlängerung, mit welcher jede einzelne Zellenmündung versehen ist. Durch diese Verlängerungen, deren Querschnitt in einzelnen, verdrückten Stücken nicht kreisrund sondern vielmehr breitgedrückt erscheint, läuft von der äussersten Spitze an eine Furche, die sich bis in das Innere der Zelle fortsetzt (Fig. 3, c), jedoch schon in grosser Entfernung von der Axe endigt und lebhaft an eine entsprechende Erscheinung bei *Grapt. convolutus* erinnert. Diese Furche, deren Spitze so wie die Spitze der sie umhüllenden Verlängerung, meist stark zurückgebogen ist, neigt sich unter einem Winkel, der zwischen 40° und 60° schwankt, gegen die Axe. Die Zellsäcke oder die eigentlichen Zellen nehmen gegen das jüngere Ende zu weit schneller an Höhe ab, als die Ansätze an den Zellenmündungen; so dass sie an der Stelle, wo die Axe die konische Ebene verlässt, nur mehr sehr schmale Spuren zurücklassen, während man am äussersten Ende nur die den Zellenmündungen entsprechenden Ansätze haften sieht. Merkwürdiger Weise verringert sich mit der Höhe des Zellsackes keineswegs seine Länge, so dass also bei etwaiger weiterer Ausbildung keine Verlängerung des der Zelle zukommenden Axentheiles nöthig wäre; ja es hat sogar oft den Anschein, als ständen am äussersten Ende die Ansätze der Zellenmündungen in Entfernungen, die die Breite der ausgebildeten Zelle übertreffen; man darf jedoch hiebei nicht übersehen, dass jene ausgebildeten Zellen aus der konischen Ebene niedergedrückt und in allen Breitendimensionen gedrängt, eben hiedurch ein anderes Bild zeigen als jene Theile, welche, an einer biegsamen Axe haftend, sich der Richtung des Druckes fügen konnten (Fig. 8, d). Durch die geringere Ausbildung der Höhe des Zellsackes erklärt sich eben so die Fig. 4, c gegebene Zeichnung der jüngeren Zellsäcke des *Grapt. Becki*.

In einzelnen Exemplaren scheint es zuweilen, als spalte sich die Axe, und lasse aus irgend einer Stelle eine neue mit Zellen besetzte Axe hervortreten (Fig. 3, a); solche Erscheinungen sind besonders dann auffallend, wenn von dem Punkte an, wo die neue Axe hervortritt, sie einen Einfluss auf die Curve der älteren Axe ausgeübt zu haben scheint, z. B. durch Vergrösserung der Verticalentfernungen der einzelnen Umgänge. Nie ist es aber bisher noch gelungen, die Stelle selbst, in der beide Axen sich vereinigen, deutlich zu sehen; die Feststellung dieser Thatsache muss also bis zur Auffindung besserer Exemplare verschoben werden. Das vorgelegte Stück zeigt eine 3 Zoll $1\frac{1}{4}$ Linien lange, mit 86 Zellen besetzte Axe, aus deren 66 (?) Zelle eine zweite Axe hervortritt, die $2\frac{1}{2}$ Linien lang ist und 6 Zellen trägt. Es geschieht diess im 5ten halben Umgange, und der nächstfolgende 6te halbe Umgang erreicht dieselbe Länge wie dieser, statt sich zur Bildung des Kegels zu verkürzen.

Durch die leichte Biegsamkeit der Axe, so wie insbesondere durch die verkümmerten Zellsäcke und die in entsprechenden Entfernungen haftenden Ansätze, die man am jüngeren Ende von *Grapt. Proteus* wahrnimmt, reiht sich diese Art entschieden an

die dritte Abtheilung der Graptolithen, und zeigt zugleich, auf welche Weise die einzelnen Theile dieser merkwürdigen Formen mit denen der bisher beschriebenen Abtheilungen correspondiren.

Grapt. Proteus findet sich in grosser Menge besonders in Lilohlaw.

DRITTE ABTHEILUNG. *Rastrites* BARR. Wie bei *Grapt. Proteus* erwähnt wurde, entstehen die höchst sonderbaren Formen, welche diese Abtheilung umfasst, dadurch, dass der Zellensack nicht eine seiner Länge (oder Breite) entsprechende Höhe erreicht. Sind nun, wie bei allen diesen Arten, die Mündungen der Zellen mit grossen röhrenförmigen Ansätzen versehen: so sieht man diese Ansätze in Entfernungen, welche der Länge der Zelle entsprechen, von jener schwachen Linie emporragen, die bei starker Vergrösserung an dem entgegengesetzten Saume die sehr zarte, oft nur in Bruchstücken vorhandene Axe zeigt. Man irrt, wenn man diese ganze Linie als die Axe betrachtet, die daran haftenden Ansätze aber für die Zellen hält; denn abgesehen davon, dass man bei genügender Vergrösserung in allen guten Exemplaren die Axe wirklich auffinden kann, ist auch nur durch die oben erwähnte Anschauungsweise das Daseyn eines Canales wie bei den andern Graptolithen ermöglicht, und die grosse, regelmässige Entfernung zwischen den einzelnen Ansätzen erklärbar. Ebenso ist zur Bestärkung dieser Ansicht die Thatsache zu berücksichtigen, dass bei allen jenen ausgezeichneten Arten mit grossen, gerade abstehenden Ansätzen, wie besonders *Grapt. Linnæi*, diese Ansätze sich von ihrer Basis erweitern, welche Erweiterung auf den Uebergang in die Hülle des Zellensackes hindeutet.

Bei einer solchen Bildung der Zellen können sie sich nie überlagern; dieses Nicht-Überlagern der Zellen, welches als Kennzeichen zur Begränzung dieser Abtheilung benutzt wurde, bringt jedoch auch Uebergangsformen hieher, welche noch eine ausgesprochenere Zellenbildung besitzen, wie z. B. *Grapt. Barraudei*.

Die Axe ist bei den Graptolithen dieser Abtheilung, wegen ihrer eigenen Schwäche und wegen der geringen Höhe der Zellen in den meisten Fällen leicht biegsam und nach keiner bestimmten Linie, in keiner bestimmten Ebene gekrümmt, auch hierin an das jüngere Ende von *Grapt. Proteus* erinnernd. Nur selten ist die Axe eine steife, leicht gekrümmte Linie; bei einer einzigen Art rollt sich die Spitze spiralförmig zusammen, welche Spirale jedoch zuweilen nur einen halben, zuweilen 4 und mehr Umgänge zählt.

Bei einzelnen Arten, wie besonders bei den eben erwähnten Uebergangsformen kennt man das jüngere Ende nicht; bei jenen Arten mit geraden, steifen Ansätzen zeichnet es sich durch eine noch grössere Beweglichkeit der Axe, durch ein Verkürzen dieser Ansätze und der zwischen ihnen liegenden Distanzen aus. Bei diesen Arten ist der Winkel, den die Ansätze mit der Axe bilden, sehr gross, bei *Grapt. Linnæi* sogar ein stumpfer, ohne dass man nothwendigerweise auf eine im Sinne der bisher beschriebenen Arten, verkehrte Zellenbildung daraus schliessen müsste.

Arten dieser Abtheilung finden sich ausser in Böhmen auch in Grossbritannien; vielleicht gehört auch *Grapt. gracilis* HALL. hieher.

18. *Graptolithus Barrandei* SSS.

Tab. IX fig. 12.

Diese Art, wahrscheinlich identisch mit der von BARRANDE *Grapt. Boh.* pag. 58, Taf. 4, Fig. 12—15 beschriebenen *Var. plana* von *Grapt. Proteus*, bildet durch die grosse Aehnlichkeit ihrer Zellen mit denen des jüngeren Endes von *Grapt. Proteus* den Uebergang zu der vorhergehenden Abtheilung. Der eben genannten Art lässt sie sich jedoch nicht beifügen, denn die Axe rollt sich nicht in konischer Spirale und die Zellen erreichen nie einen ähnlichen Grad der Ausbildung. Sie liegen unter einem sehr spitzen Winkel an der wenig gekrümmten Axe, und sind an ihrer Spitze leicht zurückgebogen; denkt man sich diesen spitzen Winkel noch mehr verkleinert, so erhellt hieraus die Aehnlichkeit dieser Form mit der nachfolgenden. Die zurückgebogene Spitze ist als der Ansatz oder die Verlängerung der Mündung der Zelle zu betrachten. Die untere Begrenzung der Zelle, die nahe senkrecht auf die obere Begrenzungslinie steht, zeigt zuweilen in ihrer Mitte eine Einkerbung (Fig. 12, b), welche vielleicht die Trennung des Ansatzes an der Zellenmündung von dem Zellensacke selbst andeutet.

Die ungünstige Erhaltungsweise liess keine weiteren Theile auffinden; von *Grapt. Proteus* unterscheidet sich diese Art auch noch dadurch, dass sie bis jetzt nur in Zelkowitz gefunden wurde. — Vielleicht gehören als Varietäten noch jene zahllosen und noch kleineren, undeutlichen Formen hieher, welche in einzelnen Gruppen sich in den Schieferen von Kuchelbad finden. — Verwandt scheint ferner noch der mir nicht vorliegende *Rastrites gemmatum* BARR. *Grapt. Boh.* pag. 68. taf. 4, fig. 5 zu seyn. Seine Ansätze stehen schon in ganz auffallenden Entfernungen und sind stark gekrümmt; die Axe leicht gebogen.

Wenn auch wegen der im höchsten Grade vereinigten Eigenthümlichkeiten die nachfolgende Art vielleicht an das Ende dieser Reihe zu setzen wäre: mag sie dennoch schon hier ihren Platz finden, theils weil sie bei verhältnissmässig grösseren Dimensionen eine tiefere Einsicht in die inneren Theile zuließ, theils auch, weil vielleicht die beiden nachfolgenden Arten durch weitere Untersuchungen sich als blosser Abarten erweisen dürften.

19. *Graptolithus Linnaei* BARR.*Rastrites Linnaei* BARR. *Grapt. Boh.* pag. 65, taf. 4, fig. 2—4.

Tab. IX fig. 14.

Die Hauptaxe nimmt am älteren Ende ungefähr den vierten Theil jenes glänzenden Streifens von Schwefelkies ein, an dem die Ansätze haften. Sie lässt sich wegen ihrer grossen Zartheit nur sehr selten an den jüngeren Stellen nachweisen; diese sind sehr biegsam und daher oft (Fig. 14, a) durch seitlichen Druck in eine andere Ebene gebracht; selbst am untersten Ende scheint die Festigkeit dieses glänzenden Streifens nicht gross zu seyn, da nicht selten jeder der zwischen den einzelnen Ansätzen lie-

gende Theile desselben stark nach rückwärts gekrümmt ist und die Ansätze selbst nach vorne gezogen zu seyn scheinen. — Die Ansätze sind sehr lang und steif und neigen sich gegen die Axe unter einem Winkel von 130° bis 150°; sie sind gerade oder nur wenig concav nach oben. An ihrem unteren Ende erweitern sie sich auffallend, besonders nach der unteren Seite. Durch die ganze Länge dieser Ansätze laufen scharfe aber zarte Streifen, die zugleich mit der Erweiterung der Ansätze selbst sich nach und nach verstärken und, wo sich die Ansätze mit dem erwähnten an der Axe haftenden Streifen vereinigen, in einem kleinen Bläschen endigen, das jedoch nie bis an die Hauptaxe reicht (Fig. 13, b). Man mag nun entweder dieses Bläschen für den ganzen Zellenack halten und den zwischen demselben und der Axe liegenden Raum mit dem ganzen, längs der Axe fortlaufenden Streifen als den „Canal“ betrachten. — oder auch, wie in diesem Bläschen, nur einen jenem festeren Organe an den Zellenmündungen von *Graptol. testis* entsprechenden Theil sehen: so bleibt doch in jedem Falle das Daseyn einer inneren Verbindung der Zellen, eines dem entsprechenden Theile bei den Arten der vorhergehenden Abtheilungen ähnlichen „Canales“ unbestritten. Für die zweite der beiden hier ausgesprochenen Ansichten ist vorzüglich der Umstand günstig, dass denn doch der grössere Theil des Bläschens meist ausserhalb des an der Axe haftenden Streifens liegt. Auch ist wohl zu bemerken, dass an der der Axe zugekehrten Seite dieses Bläschens noch keine Oeffnung beobachtet wurde. Ja man sieht, der zweiten gewiss besser begründeten Ansicht nachhängend, recht deutlich wie die vorliegenden Formen bestimmt seyn, die Reihe der Graptolithen zu schliessen. In Uebereinstimmung mit den später vorzuführenden zoologischen Vergleichen, so wie mit der in Bezug auf das Subgenus *Monoprion* ausgesprochenen Ansicht des Herrn BARRANDE muss man sich den „Canal“ als die fleischige Axe denken, aus welcher die, die einzelnen Zellenstücke erfüllenden Theile entspringen. Es wurde schon bei mehreren Arten der vorhergehenden Abtheilungen, und insbesondere bei *Graptol. Proteus* gezeigt, wie auch dort die Zellen in ihrer Jugend in einiger Entfernung stehen und erst bei fortschreitendem Wachstume zu gegenseitiger Berührung kommen, vielleicht eben dadurch der Axe ihre grössere Widerstandsfähigkeit verleihend: und es ist daher weniger zu verwundern, wenn bei den niedrigst stehenden Arten der Gattung *Graptolithus* (im Sinne, wie sie hier aufgefasst wurde) viele Erscheinungen, welche höher stehende Arten erst im Alter zeigen, nicht erscheinen. — Jede Vereinigung oder Verwechslung der röhrenförmigen „Hauptaxe“ mit der im „Canale“ liegenden fleischigen Axe würde zu einem gänzlichen Missgriffe in Bezug auf die Classificirung dieser Formen führen.

Grapt. Linnaei findet sich besonders in Zelkowitz, meist in Bruchstücken. Um das Verhältniss der Länge der Ansätze zu ihren Zwischenräumen näher zu bezeichnen, mag der Erfolg einer Messung eines unteren Endes folgen: Herabhängendes Ende: 1·2 Linien;

erster Ansatz: 2·7 Lin.; Zwischenraum: 1·1 Lin.; zweiter Ansatz ebenfalls: 2·7 Lin.; Zwischenraum: 1 Lin.; dritter Ansatz: 2·5 Lin.; Zwischenraum: 0·9 Lin.; vierter Ansatz: 2 Lin.; Zwischenraum: 0·7 Lin. u. s. w. Ausgezeichnete Exemplare zählen zuweilen gegen 20 solcher Ansätze.

20. *Graptolithus fugax* BARR.

Rastrites fugax BARR. Grapt. Boh. pag. 66, taf. 4. fig. 1.

Die Axe und der Canal (die sich wegen undeutlicher Erhaltung bei den vorliegenden Exemplaren nicht deutlich trennen liessen), scheinen grössere Widerstandsfähigkeit zu besitzen als bei *Grapt. Linnæi*, denn trotz ihrer weit grösseren Zartheit behaupten sie beinahe immer die gerade Linie, oder eine stetige, leicht gekrümmte Curve. Die Zellenansätze sind kürzer, nehmen jedoch gegen ihre Basis eben so auffallend an Stärke zu; eine scharfe Linie durchläuft sie ihrer ganzen Länge nach; das Bläschen war nicht aufzufinden. Der Winkel, den sie gegen die Axe bilden; mag derselbe seyn, wie bei der vorhergehenden Art. — Die Räume zwischen den einzelnen Ansätzen sind grösser als an denjenigen jüngeren Theilen von *Grapt. Linnæi*, welche in Bezug auf die Länge der Ansätze und Stärke der Axe dem Canale entsprechen dürften. Hierauf, so wie auf den Umstand, dass oft 5—7 gleich lange Zwischenräume mit gleich langen Ansätzen an dem unteren Ende einzelner Exemplare sich finden, die folglich die Form für eine völlig ausgebildete ansehen lassen, muss der Unterschied zwischen diesen beiden Arten begründet werden.

Graptol. fugax tritt mit *Graptol. Linnæi* in Zelkowitz auf, wird jedoch ebenfalls selten von bedeutender Länge gefunden; 7—8 Zellen an derselben Axe kommen nur in wenigen Exemplaren vor. Die Länge eines ausgebildeten Ansatzes ist 0·8 Lin. und des zugehörigen Zwischenraumes 1·3 Lin.

21. *Graptolithus peregrinus* BARR.

Rastrites peregrinus BARR. Grapt. Boh. pag. 67, taf. 4, fig. 6.

» » » HARKNESS. Grapt. Dumfr. pag. 97, taf. 1. fig. 1.

Tab. IX. fig. 13.

Aehnlich vielen Arten der ersten Abtheilung windet sich hier am jüngeren Ende die Axe spiralförmig ein, bei den böhmischen Exemplaren in $\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{2}$ Umgängen, bei dem von HARKNESS aus Dumfrieshire abgebildeten Stücke in 4—5 Umgängen. Die Beugung der Axe nimmt gegen das ältere Ende zu allmähig ab, und ist nicht wie bei den Arten der ersten Abtheilung, immer dieselbe, sondern zuweilen stark, zuweilen sehr unbedeutend, je nach der Einrollung des jüngeren Endes. Das letzte Stück dieses Theiles scheint, ähnlich dem entsprechenden Stücke an den Arten der zweiten Abtheilung, sich nicht streng an die Krümmung der Axe zu binden; auffallender als an den böhmischen Stücken zeigt sich diess an den Abbildungen von HARKNESS. — Die An-

sätze sind lang und stehen wie bei den beiden vorhergehenden Arten in grossen Zwischenräumen. Ihr Neigungswinkel gegen die Axe ist in der Regel ein rechter, da sie sich in die Richtung des jedesmaligen Krümmungshalbmessers stellen. Einige Abänderungen zeigen einen Neigungswinkel von 100° — 110° . — Auch hier erweitern sich diese Ansätze sehr stark gegen ihre Basis; in ihrem Innern sieht man jene scharfe Linie, die an ihrem unteren Ende oft eine stärkere Vertiefung zeigt, entsprechend dem Bläschen bei *Graptol. Linnæi*. Am ausgewachsenen Ende misst gewöhnlich der Ansatz 1:1 Linien und der Zwischenraum 0.5 Lin. Vollständige Exemplare, wie sie in Zelkowitz mit *Graptol. Linnæi* und *Graptol. fugax* gefunden werden, zählen bis 20 Ansätze. Die stark eingewundenen Stücke aus Grossbritannien zählen deren noch weit mehr.

Die Gattung „*Graptolithus*“ ist daher in Böhmen durch 24 Arten vertreten, deren 16 wir der ersten, 3 der zweiten und 5 der dritten Abtheilung beizählen. Nach den besonders in Bezug auf die dritte Abtheilung gegebenen Erörterungen ist es wohl erlaubt, für sämtliche in dieser Gattung vereinigte Arten eine röhrenförmige Axe zu beanspruchen, welche mit einer einfachen Reihe von Zellen besetzt ist, die, im Inneren durch ihre nicht bis an die Axe reichenden Querwände unter sich eine Verbindung gestatten und auf der der Axe entgegengesetzten Seite mit einer Oeffnung versehen sind.

Nach der Aufzählung dieser Thatsachen, welche zum grössten Theile vor der Veröffentlichung der jüngeren Arbeiten über diesen Gegenstand gewonnen waren, erübrigt noch die Betrachtung und Würdigung der verschiedenen Ansichten, welche in eben diesen Arbeiten ausgedrückt worden sind.

In der Schrift: „*Graptolites de Bohême*“, so wie in den persönlichen Zusammenkünften, welche der geehrte Verfasser Herr BARRANDE mir verstattete, glaubte derselbe in den Retioliten jene Theile wieder zu finden, welche bei der Beschreibung des Baues der Graptolithen im engern Sinne als bezeichnend hervorgehoben worden sind. Die Axe wäre zu beiden Seiten mit Zellen besetzt, deren Wandungen genetzt wären; die Nebenäste wären als Querwände zu betrachten. — Sucht man mit dieser Ansicht die auf der ersten Tafel gegebenen Zeichnungen in Einklang zu bringen, so findet man, dass das, bei den als „Anomalien“ bezeichneten Bildungen durch die nahe horizontal liegenden verstärkten Stücke und durch die Wand des Umrisses hervorgehobene Viereck, der Zellenmündung entsprechen müsste, und dass die in diesem Raume über dem nachfolgenden Aste liegenden Zellen als die innere Fläche der verdeckten, zweiten Zellenwandung zu betrachten wären. Die Einkerbungen an den Spitzen der Aeste würden dann nicht auf die Auflagerung zweier Aeste, sondern zweier Zellenquerwände hindeuten, und es ist auch nach den hier gegebenen Betrachtungen über die Functionen der Aeste nicht zu läugnen, dass wirklich jeder der von ihnen eingeschlossenen ein-

zelen Räume eine gewisse Selbstständigkeit für sich in Anspruch zu nehmen scheint. — Man darf jedoch nicht übersehen, dass jeder dieser Vergleiche Zweifel entstehen lässt. Die Zellenmündung ist nur auf drei Seiten begrenzt, und eben jene Kante, welche am schärfsten gezeichnet seyn sollte (ein der Umrisswand paralleles Stück an den Enden der verstärkten, horizontalen Stücke), fehlt. Wenn die innere Fläche der seitlichen Zellenwandungen ebenfalls genetzt ist, wie man aus den Zellen, die in der Mündung sichtbar sind, ersieht, so ist nicht leicht zu erklären, warum bloss an dieser Stelle diese Innerfläche sichtbar sey, und warum man sie nicht auch zwischen den Maschen der oben liegenden Wandung hervorblicken sieht. Wie schwer wären endlich alle diese Beziehungen bei der hier beschriebenen neuen Art, *Retiol. grandis* aufzufinden. — Entscheidend für diese Frage muss der Querschnitt der Formen und das Daseyn oder Fehlen von jenen Theilen seyn, welche mit dem Namen „Canäle“ bezeichnet worden sind. Es ist wahr, dass alle hier mitgetheilten Beobachtungen an Exemplaren gemacht sind, die im Schiefer gefunden wurden und deren Querschnitt durch den Druck gelitten hat; aber nichtsdestoweniger waren deutlich bei den besseren Stücken in der Nähe der Axe vertical stehende Wände zu finden, welche den Grenzen der kleinen Zellen, die das Netzwerk an der Oberfläche bilden, zu entsprechen schienen. Gegen den Rand zu sind diese verticalen Wände nur selten und in zweifelhaften Resten zu finden. Nicht nur, dass diese Erscheinung mächtig für die Annahme eines einzigen Systems von solchen kleinen Zellen spricht, so tritt sie noch gerade an jener Stelle auf, wo man den „Canal“ zu suchen hätte. Nur wenn es gelingen würde, in diesen vertical stehenden Theilen ein dem Canale entsprechendes Organ zu finden, könnte man Retioliten mit den eigentlichen Graptolithen vergleichen, wenn auch freilich keine solche Form durch die Aehnlichkeit irgend einer bekannten Gestalt gestützt werden könnte (abgesehen von dem sonderbaren Querschnitte oder den verschiedenen Richtungen des Druckes, welche dazu erfordert werden, um die Mündungen der Zellen zu beiden Seiten der Axe als nach aufwärts gerichtet zu zeigen). — Man darf sich hiebei nicht irre führen lassen durch eine Art von unregelmässiger, netzförmiger Zeichnung, die man zuweilen auf der Oberfläche von *Graptol. priodon* und *Graptol. Bohemicus* trifft; es ist schon darauf hingewiesen worden, dass die meisten Stücke, welche im Kalke sich finden, als Steinkerne zu betrachten seyen, und vergrössert stellt sich diese unregelmässige Zeichnung einfach als das Product einer unvollkommenen Ausfüllung der Zellensäcke heraus.

Vergleicht man dieselben Formen mit *Pennatula*, so findet man wohl im äusseren Gerüste viel Aehnlichkeit, wenn auch hier die Aeste unter einem spitzen, dort unter einem stumpfen Winkel sich gegen die Axe neigen. Bei *Pennatula* zeichnen sich zwischen den einzelnen Aesten die vertical stehenden Theile aus, bei den Retioliten die horizontalen, und dann schliessen bei *Pennatula* auch diese verticalen Theile sich keineswegs an den nächstfolgenden Ast an, und stehen in doppelter Reihe. — Den Ser-

tularien zeigen sie sich jedoch verwandter, wenn auch ihre Zellen nach anderen Richtungen geordnet sind. und denselben die bezeichnende Spitze an ihrer Mündung abgeht.

Die Betrachtungen über dieses Genus müssen nothwendiger Weise auch von hohem Einflusse für das nachfolgende: *Petalolithus* seyn. Zu zart in ihren Resten, um eine tiefere Structur erkennen zu lassen, wurden auch diese Formen mit den eigentlichen Graptolithen vereinigt. Wenn auch wirklich die Umrisse zwischen den Nebenästen zarten Zellensäcken nicht unähnlich sind, wenn auch die hier mitgetheilte Verlängerung der Aeste bei *Petal. ovatus* sehr an Erscheinungen bei den Graptolithen erinnert und bei manchen ausländischen Arten man bei Betrachtung des Umrisses unwillkürlich an *Graptol. Becki* denkt: so ist doch bei keiner bekannten Art die innere Verbindung der Zellen, der „Canal“ mit Sicherheit festgestellt, der doch für die ganze Gruppe, welcher man die eigentlichen Graptolithen beizählen muss, von entscheidender Wichtigkeit ist. Würde selbst, sey es im Querschnitte der Axe oder zu beiden Seiten derselben, ein entsprechender Theil entdeckt werden, so würde doch die Verdopplung der Zellenreihe, der verschiedene Bau der Axe, ja vielleicht schon die verschiedenen Dimensionen hinreichen, um ihre Aufnahme in die nachfolgende Gattung zu verhindern.

Den Graptolithen im engeren Sinne, jenen deren einfache Reihe von Zellen im Inneren in Verbindung stehend, an einer röhrenförmigen Axe haftet, entspricht unter den lebenden Wesen wirklich eine Gestalt so genau in Bezug auf alle, als bezeichnend zu betrachtende Theile, dass man mit grosser Sicherheit sie als verwandt ansehen kann. — Vergleicht man die äussersten, dichotom getheilten Verästelungen, welche die Büschel am Stiele von *Virgularia mirabilis* bilden, mit dem kleinen *Graptol. sextans* (von dem in Böhmen nur zweifelhafte Reste zu finden waren, der jedoch in England und Nordamerika häufig zu seyn scheint), so muss man bald gestehen, dass diese Graptolithen als eine den Virgularien nahe verwandte, niedriger organisirte Gattung zu bezeichnen seyen, dass ihr systematischer Platz vor den Virgularien sey. Der „Canal“ ist bei den lebenden Thieren mit der fleischigen Masse erfüllt, welche auch alle Zellensäcke ausfüllt und bis an die Mündungen derselben vordringt. Man findet also auch hier die Formen der Vorzeit zwar weit zurück in Bezug auf ihre Organisation, jedoch riesig in ihren Abmessungen, und riesig muss man jene Arten nennen, welche viele Zolle lang, hunderte von Zellen tragen, in Bezug auf die lebenden entsprechenden Theile, welche gewöhnlich kaum eine Linie lang, zehn bis fünfzehn Zellen zählen *). — Nur nach einer gründlichen Untersuchung der Art der Veräste-

*) Diese Graptolithen zeigen bei wenig gründlicher Untersuchung viel Aehnlichkeit mit den Saugfäden einiger Acalephen, z. B. von *Diphyia campanulifera*, und ich hatte sie selbst lange damit verglichen.

lung und Zellenbildung bei den Virgularien wird man im Stande seyn, über die Lebensweise insbesondere der konisch aufgerollten Graptolithen und über die Art ihres Wachsthumes Aufklärung zu geben.

Zum Schlusse bleibt noch die merkwürdige Trennung der Arten in den einzelnen Fundorten zu berücksichtigen. Betrachtet man vorzüglich zwei solche Fundorte, welche, an verschiedenen Enden des Beckens gelegen, durch die grosse Masse dieser Versteinerungen bemerkenswerth sind, nämlich Kuchelbad bei Prag. und Litohlaw bei Königshof, so kann man für jeden Ort eine abgesonderte Fauna beanspruchen, die nur durch sehr wenige Formen zusammenhängt. Besonders bezeichnend ist für Kuchelbad *Retiol. grandis*, das Fehlen aller Petalolithen, *Graptol. dubius, colonus, armatus*; für Litohlaw *Petal. palmeus, parallele-costatus, Graptol. Becki, turriculatus*. — *Retiol. Gemitzanus* ist in Kuchelbad sehr häufig, in Litohlaw sehr selten, *Graptol. Proteus* umgekehrt. — Das Vorkommen aller Formen der dritten Abtheilung, so wie auch von *Graptol. testis, Sedgwicki, ferrugineus* ist ein sehr beschränktes. Es mögen diese Thatsachen vorzüglich darum hier Platz finden, weil auch an anderen Orten (vergl. HARKNESS) sich eine gleiche Trennung auszusprechen scheint, auffallend besonders durch das gegenseitige Ausscheiden von Retioliten und Petalolithen.

N a c h s c h r i f t.

In den letzten Tagen wurde die Literatur der Graptolithen um zwei Arbeiten vermehrt, die nicht verfehlen werden, auf die verschiedenen, über diesen Gegenstand aufgestellten Meinungen Einfluss zu üben. Die erste derselben ist in Prof. M'COY'S: „*Synopsis of the Classification of the British Palaeozoic Rocks*“ enthalten, die andere ist eine von Prof. BOECK in Christiania herausgegebene Schrift: „*Bemærkninger angaaende Graptolitherne.*“

Prof. M'COY hat, wie in seinen früheren Arbeiten, von den eigentlichen Graptolithen alle Formen mit mittelständiger Axe, d. i. *Retiolites* und *Petalolithus* als Subgenus unter dem Namen *Diptograpsus* abgeschieden. Einige von mir als neu hervorgehobene Arten finden sich auch in dieser Arbeit beschrieben, so z. B. *Graptolithus fulx*; von besonderem Werthe aber ist gewiss die Nachricht von wahren, in den Graptolithenschichten gefundenen Virgularien: *Protovirgularia dichotoma* M'COY gibt nicht nur einen neuen Beweis für die Verwandtschaft der Virgularien, sondern sie erlaubt uns auch, jene sonderbar verzweigten Formen, die sich in einzelnen früheren Arbeiten finden, in der Gattung *Protovirgularia* zu vereinigen.

Prof. BOECK hat in ausgezeichneten Längsschnitten Arten untersucht, die vielleicht den Petalolithen angehören, und glaubt nach seinen freundlichen, persönlichen Mittheilungen die Entstehung jener in Scandinavien häufigen Formen, die in einem Punkte zwei oder vier einzellige Graptolithen vereinigen, durch das Aufklappen solcher Petalolithen, sowohl in der Richtung der Breite, als der Höhe (wodurch erst zwei, dann vier Aeste entstünden), erklären zu dürfen. Zugleich wählt er als Beispiel zur Erklärung seiner Ansicht über das Aufklappen nach verschiedenen Richtungen die Pflanzenkapsel, ein Beispiel, aus dem zugleich die Möglichkeit der Entstehung von aufgerollten Aesten erhellt. — Es ist zuerst von Herrn BARRANDE darauf hingewiesen worden, dass das frei herabhängende Axenstück einzelner Petalolithen sich nicht selten in zwei und dann oft noch einmal, d. i. in vier Stränge trenne; eine Thatsache, die, wenn auch vielleicht ganz anderen Gründen zuzuschreiben, dennoch der Meinung des Herrn Prof. BOECK neue Stütze gewährt. Von den dichotomirenden Stücken aus Schweden liegen mir zu wenig Exemplare vor, um aus denselben ein Urtheil schöpfen zu können; diese Entstehungsweise allen Graptolithen zuschreiben zu wollen, scheint mir dennoch gewagt: nicht nur dass in Böhmen bei einer grossen Menge von aufgeklappten Formen noch gar keine unaufgeklappte gefunden wurde, ist ja schott

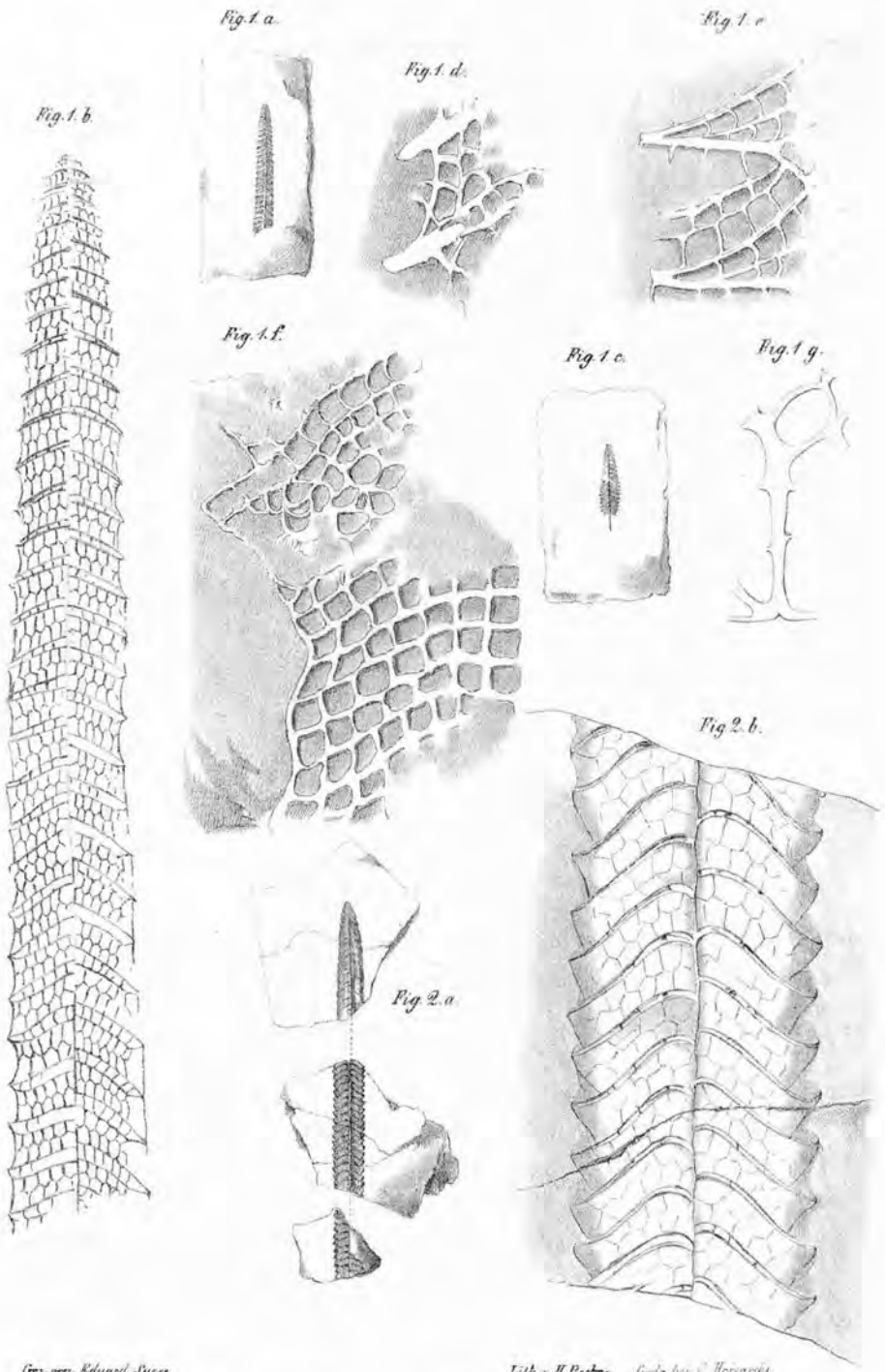
durch die Querschnitte von *Graptol. Priodon* und *Bohemicus* wenigstens bei diesen beiden Arten ein ähnlicher Vorgang undenkbar. — Uebrigens bleibt noch hinzuzufügen, dass diese Ansicht nur eine Modification jener von Prof. GEINITZ schon vor einer Reihe von Jahren ausgesprochenen scheint, nach welcher die Formen mit mittelständiger Axe durch ein Aufklappen von Formen mit seitlicher Axe entstehen sollten, welcher Ansicht jedoch, wie schon ausführlicher gesagt worden ist, die gewundenen Arten widersprechen.

Auch MILNE-EDWARDS hat in seinem grossen Werke über Polypen die Graptolithen zu den Virgularien gereiht. *Retiolites* würde nach dem oben Gesagten vielleicht zwischen *Pennatula* und *Renilla* zu setzen seyn, an *Virgularia* würden sich *Protovirgularia* und *Graptolithus* anschliessen; in wie weit *Petalolithus* und *Websteria* sich entsprechen, werden wohl weitere Untersuchungen dieser beiden gleich räthselhaften Gattungen zeigen.

Druckfehler-Verzeichniss.

Seite 97	Zeile 16	von unten	lies:	nur oft von —	statt:	nur von
„ 115	„ 18	„ „	„	<i>taenia</i>	„	<i>taenius</i>
„ 117	„ 3	„ „	„	<i>taenia</i>	„	<i>taenius</i>
„ 123	„ 16	„ oben	„	28 Zellen	„	28 Zoll
„ 101	„ 5	„ unten	fehlt:			

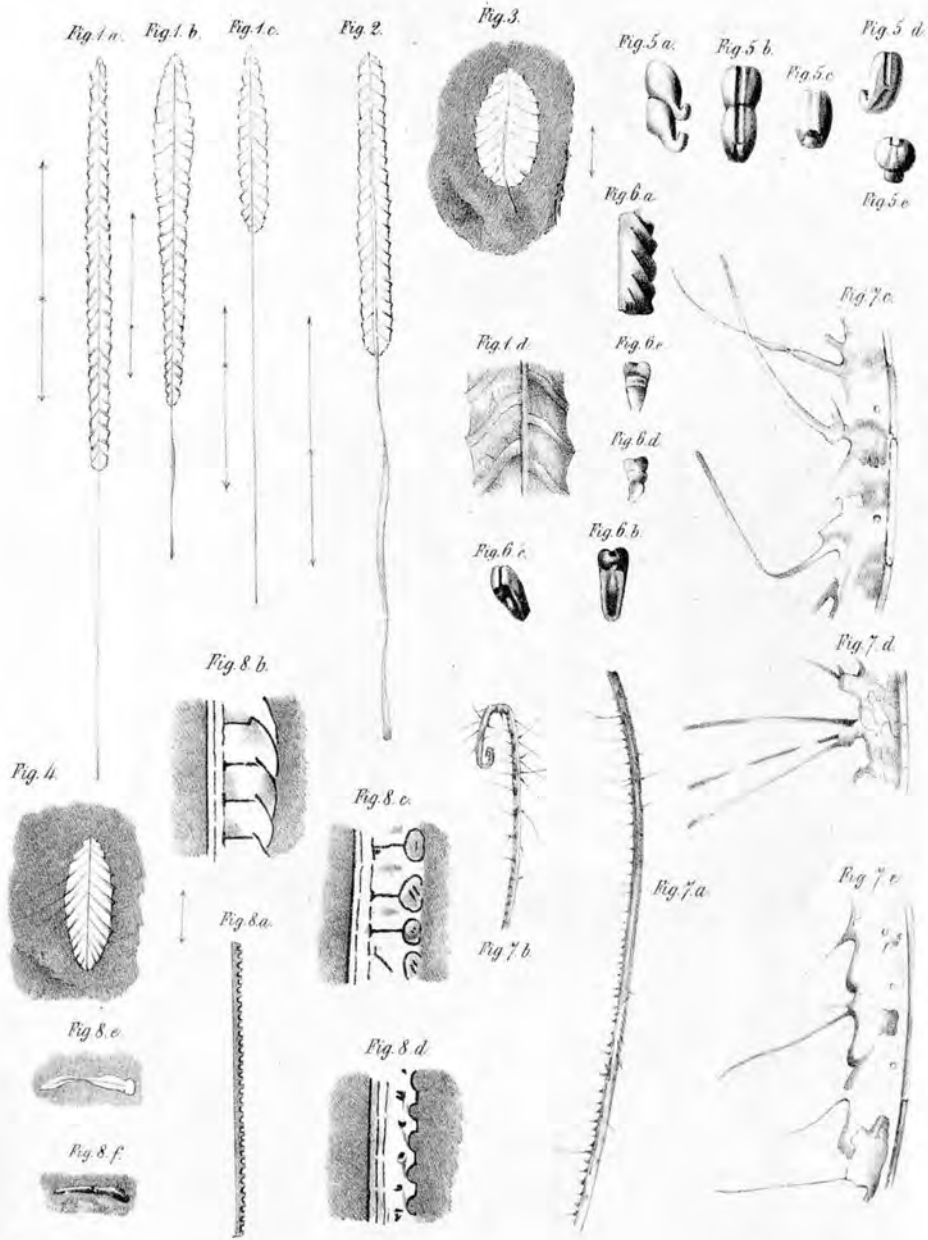
1 Zoll $1\frac{1}{2}$ Lin. hiervon tragend: $9\frac{1}{2}$ Lin. mit 25 Aesten bei geschweiftem Umriss.



Gr. von Eduard Suess

Lith. H. Becker. Holz. bei C. Hergesick

Fig. 1 a. g. Retiolites Geinitzianus. Barr.
- 2. a. h. - grandis Suess

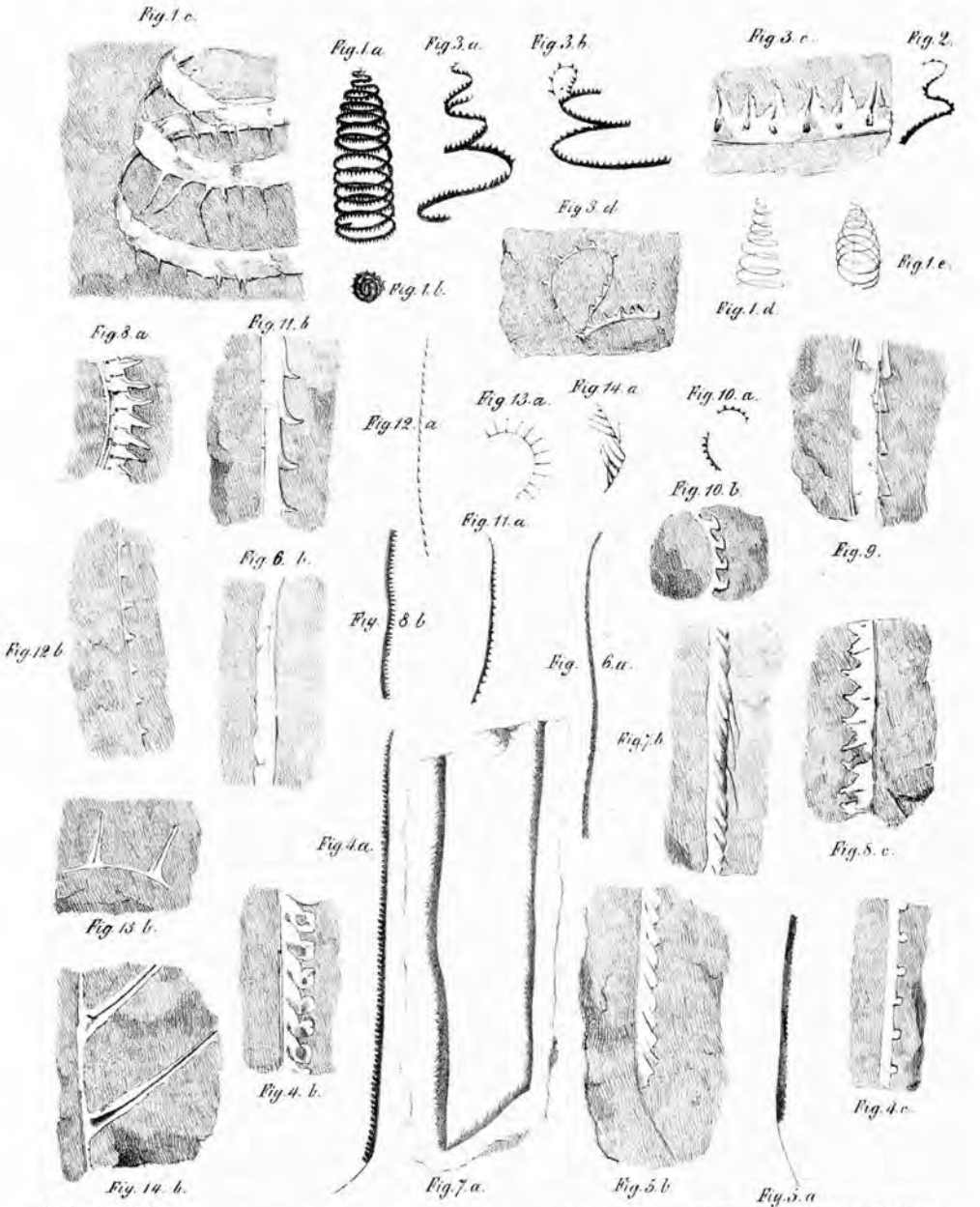


Gez. von Eduard Suess

1865

Fig. 1 *Petalolithus palmeus*. Suess
 Fig. 2 *parallelecostatus*. Suess.
 Fig. 3, 4 *ovatus*. Suess
 Fig. 5 *Graptolithus Prionon*. Gein

Fig. 6. *Graptolithus Bohemicus*. Barr
 Fig. 7 " *testis*. Barr.
 Fig. 8. " *colonus*. Barr



Benannt von Ed. Suess

Leit. von Becker. Gede. bei C. Horng. 43

Fig. 1. <i>Graptolithus turriculatus</i> . Barr.	Fig. 6. <i>Graptolithus laevis</i> . Hall.	Fig. 11. <i>Graptolithus Sedgwicki</i> Harkn.
2. " <i>armatus</i> . Suess.	7. " <i>ferrugineus</i> Suess.	12. " <i>Barrandei</i> . Suess.
3. " <i>Proteus</i> . Barr.	8. " <i>convolutus</i> . Hising.	13. " <i>peregrinus</i> . Barr.
4. " <i>Becki</i> . Barr.	9. " <i>Taenia</i> . Sow. Salt.	14. " <i>Linnaei</i> . Barr.
5. " <i>dubius</i> . Suess.	10. " <i>falx</i> . Suess.	