III. Allgemeine Auflösung der Gleichungen dritten Grades

mit Vermeidung

imaginärer Formen im irreducibeln Fall.

Von

F. Peche.

Zu den bemerkenswerthen Eigenschaften einer cubischen Gleichung bei ihrer mannigfachen Transformation gehört auch die Unveränderlichkeit desjenigen Werthes, der in der CARDAN'schen Formel gerade da die imaginäre Form annimmt, wo die Gleichung sämmtlich reelle Wurzeln besitzt. Ist nämlich $C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$ die Gleichung und man setzt

$$\frac{3C_0 C_2 - C_1^2}{3C_0^2} = P, \quad \frac{2C_1^3 - 9C_0 C_1 C_2 + 27C_0^2 C_3}{27C_0^3} = Q \text{ und } \sqrt{Q^2 + \tfrac{4}{27} P^3} = K;$$

so ist diese erwähnte Eigenschaft von K für sich einleuchtend, wenn y um eine Grösse vergrössert oder verringert wird, weil alsdann die Werthe von P und Q dieselben bleiben; und dasselbe gilt auch von der verhältnissmässigen cubischen Aenderung von K, $K' = \alpha^3 K$ bei der einfachen Aenderung von y, $y' = \alpha y$.

Es gibt jedoch noch einen anderen Fall, in welchem sich K und P zugleich im gleichen Verhältniss ändern, und die Betrachtung desselben scheint mir in der Lehre der Gleichungen genug wichtig zu seyn, um durch denselben einen Fortschritt in der Lösung sowohl numerischer als algebraischer Gleichungen zu gewinnen.

Zu einer Hilfsgleichung mit der erwähnten Eigenschaft von P und K gelangt man durch die Einführung zweier Hilfsbögen φ und φ_1 und durch die Annahme einer Hilfsgrösse q von solcher Beschaffenheit, dass wenn $y = q + z$ gesetzt wird, $\varphi_1 = \varphi$ wird; eine Methode, der ich mich schon zu einem bestimmten Zwecke bei Gelegenheit der Durchführung algebraischer Gleichungen 4ten Grades in einer im 4ten Bande, 3 Abth. eingereihten Abhandlung bediente und daselbst durchführte. Da jedoch diese Eigenschaft in der angeführten Durchführung nicht erwähnt wurde; so finde ich mich veranlasst, die Deduction zu wiederholen.

Bringt man die Gleichung $C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$ auf die Form

$$C_0 y^{\frac{3}{2}} + C_3 y^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{C_0 C_3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi$$

$$C_1 y^{\frac{1}{2}} + C_2 y^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{C_1 C_2}\cos\frac{\varphi_1}{2}$$

wobei wegen $y = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}}e^{\varphi i} = \frac{C_2}{C_1}e^{\varphi_1 i}$ die Gleichungen

$$\varphi i + \tfrac{1}{3}\lambda\frac{C_3}{C_0} = \varphi_1 i + \lambda\frac{C_2}{C_1} \quad \text{und}$$

$$\sqrt{C_0 C_3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi + \sqrt{C_1 C_2}\cos\frac{\varphi_1}{2} = 0$$

resultiren, so kann immerhin in $y = q + z$, q so gewählt werden, dass für

$$C_0 = \mathfrak{A}_0$$
$$3C_0 q + C_1 = \mathfrak{A}_1$$
$$3C_0 q^2 + 2C_1 q + C_2 = \mathfrak{A}_2$$
$$C_0 q^3 + C_1 q^2 + C_2 q + C_3 = \mathfrak{A}_3$$

die Bedingung $\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} = \left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}\right)^3$ erfüllt sey, wodurch $\frac{1}{3}\lambda\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} = \lambda\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}$ und somit $\varphi_1 = \varphi$ wird, und

zugleich die zweite Bedingungsgleichung für φ in $\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3}\cos\frac{3}{2}\varphi + \sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0$

übergeht. Die Gleichung $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1^3 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2^3$ führt zu der cubischen Hilfsgleichung:

$$(2C_0 C_1^3 - 9C_0^2 C_1 C_2 + 27C_0^3 C_3)q^3 + (C_1^4 - 3C_0 C_1^2 C_2 - 9C_0^2 C_2^2 + 27C_0^2 C_1 C_3)q^2$$
$$+ (9C_0 C_1^2 C_3 - 6C_0 C_1 C_2^2 + C_1^3 C_2)q + C_1^3 C_3 - C_0 C_2^3 = 0,$$

oder wenn die Coefficienten mit $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_5$, $\mathfrak{D}_6$ bezeichnet werden zur Gleichung

$$\mathfrak{D}_3 q^3 + \mathfrak{D}_4 q^2 + \mathfrak{D}_5 q + \mathfrak{D}_6 = 0.$$

Diese Gleichung ist es von der in der Folge die angeführte Eigenschaft erwiesen werden soll, zuvor will ich noch die Werthe der Wurzeln, so wie einige Eigenthümlichkeiten der Coefficienten $\mathfrak{D}$ betrachten.

Die Gleichung $\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3}\cos\frac{3}{2}\varphi + \sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0$

$$\text{d. i.}\quad \cos\frac{\varphi}{2}\left[4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 3\right]\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3} + \sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

liefert für $\cos\frac{\varphi}{2}$, drei Werthe:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{-\sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2} + 3\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3}}{4\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3}}}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{\frac{-\sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2} + 3\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3}}{4\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3}}}$$

d. i. vermöge der Gleichung $\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} = \left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}\right)^3$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}}$$

wovon jeder Werth von φ in $z = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\varphi i}$ gesetzt zu einer Wurzel der Gleichung

$C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$ führt, denn es ist

$$z^3 + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} z^2 + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0} z + \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} : z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\varphi i}$$

$$= z^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\varphi i}\right) z + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\varphi i} + \sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2} e^{2\varphi i}$$

wobei der Rest

$$r = \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\varphi i} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2} e^{2\varphi i} + \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} e^{3\varphi i}$$

$$\text{d. i. } \mathfrak{A}_0 e^{-\frac{3}{2}\varphi i} r = 2\mathfrak{A}_3 \cos\tfrac{3}{2}\varphi + 2\mathfrak{A}_2 \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\left[2\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi + 2\sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}\cos\frac{\varphi}{2}\right]$$

für die angegebenen Werthe von φ wirklich zu 0 wird. Die rückbleibenden Wurzeln nach dieser Division sind somit:

$$z_2 = -\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\varphi i} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1^2 - 4\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2} - \frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\varphi i} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2} e^{2\varphi i}}$$

$$z_3 = -\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\varphi i} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1^2 - 4\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2} - \frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\varphi i} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2} e^{2\varphi i}}.$$

Durch die Form $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\pm i \arccos \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}\right)}$

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{4\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0^2} - 2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\cdot\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}}$$

und durch den obigen Werth von $\varphi_1 = \pi$ nehmen alsdann die Wurzeln das compendiösere Aussehen an und sind

$$y_1 = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\pi i}$$

$$y_1 = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{i \arccos \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}\right)}$$

$$y_3 = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{-i \arccos \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}\right)}.$$

Was die Relationen der Coefficienten $\mathfrak{D}$ betrifft; so sind immer zwei derselben durch die anderen und die ersten drei Coefficienten der Hauptgleichung C_0, C_1, C_2 bestimmt, denn sie erfüllen folgende Gleichungen:

$$3C_0^2\mathfrak{D}_5 = 2C_0C_1\mathfrak{D}_4 - C_1^2\mathfrak{D}_3$$
$$9C_0^3\mathfrak{D}_6 = C_0^2C_1\mathfrak{D}_5 + C_0^2C_2\mathfrak{D}_4 - C_0C_1C_2\mathfrak{D}_3$$

oder auch

$$27C_0^3\mathfrak{D}_6 = C_0(2C_1^2 + 3C_0C_2)\mathfrak{D}_4 - C_1(C_1^2 + 3C_0C_2)\mathfrak{D}_3$$
$$9C_0C_1\mathfrak{D}_6 = (3C_0C_2 + C_1^2)\mathfrak{D}_5 - C_1C_2\mathfrak{D}_4.$$

Andere Eigenthümlichkeiten stellen sich heraus bei der Einführung folgender Hilfsgrössen

$$\alpha = C_1^2 - 3C_0C_2$$
$$\beta = 3C_1C_3 - C_2^2$$
$$\gamma = 9C_0C_3 - C_1C_2$$

welche Grössen ich, des grösseren Einflusses wegen, die Bestimmungsstücke der Gleichung nennen will. Es lassen sich die Coefficienten $\mathfrak{D}$ durch dieselben und durch C_0, C_1, C_2 folgends bestimmen

$$\mathfrak{D}_3 = 2C_0C_1\alpha + 3C_0^2\gamma$$
$$\mathfrak{D}_4 = C_1^2\alpha + 9C_0^2\beta$$
$$\mathfrak{D}_5 = C_1C_2\alpha + 3C_0C_1\beta$$
$$3\mathfrak{D}_6 = C_2^2\alpha + C_1^2\beta$$

und sie selbst sind noch durch die Gleichung

$$C_1\gamma = 3C_0\beta - C_2\alpha$$

untereinander verknüpft. Eine fernere Gleichung ist

$$C_1\mathfrak{D}_3 = C_0\alpha^2 + C_0C_1^2\alpha + 9C_0^3\beta = C_0\alpha^2 + C_0\mathfrak{D}_4$$

woraus sich eine später vorkommende Grösse

$$\frac{\mathfrak{D}_4}{3\mathfrak{D}_3} = \frac{C_1}{3C_0} - \frac{\alpha^2}{3\mathfrak{D}_3}$$

und daher die Bemerkung ergibt: der Werth der Verminderung der Unbekannten, für den der Coefficient bei y^2 der Hauptgleichung verschwindet, muss um das Quadrat des ersten Bestimmungsstückes getheilt durch den dreifachen ersten Coefficienten verringert werden, um dasselbe dann bei der Hilfsgleichung zu leisten.

Von mindern Belang und für specielle Fälle in Anwendung treten dann die weitern Gleichungen ein:

$$\mathfrak{D}_4 + 2\mathfrak{D}_5 + 3\mathfrak{D}_6 = (C_1 + C_2)^2\alpha + (3C_0 + C_1)^2\beta$$
$$C_1\mathfrak{D}_5 - C_2\mathfrak{D}_4 = 3C_0\alpha\beta.$$

Aber auch die Coefficienten der transformirten Hauptgleichung

$$\left(y + \frac{C_1}{3C_0}\right)^3 + P\left(y + \frac{C_1}{3C_0}\right) + Q = 0$$

nämlich

$$P = \frac{3C_0C_2 - C_1^2}{3C_0^2} \quad \text{und} \quad Q = \frac{2C_1^3 - 9C_0C_1C_2 + 27C_0^2C_3}{27C_0^3}$$

so wie auch $K^2 = Q^2 + \frac{4}{27}P^3$ lassen sich bequem durch die Bestimmenden ausdrücken.

Es ist $\quad P = \frac{-\alpha}{3C_0^2}, \qquad Q = \frac{2C_1\alpha + 3C_0\gamma}{27C_0^3}$

$$K^2 = \frac{4P^3}{27} + Q^2 = \frac{1}{27^2 C_0^6}[4C_1^2\alpha^2 + 16C_0C_1\alpha\gamma + 9C_0^2\gamma^2 - 4\alpha^3]$$
$$= \frac{1}{27^2 C_0^6}[4(C_1^2 - 3C_0C_2)\alpha^2 - 4\alpha^3 + 12C_0\alpha(C_1\gamma + C_2\alpha) + 9C_0^2\gamma^2]$$
$$= \frac{1}{27^2 C_0^6}[3.12C_0^2\alpha\beta + 9C_0^2\gamma^2] = \frac{1}{9^2 C_0^4}[4\alpha\beta + \gamma^2].$$

Die Bestimmenden der Hilfsgleichung lassen sich einfach durch die der Hauptgleichung finden, sie sind analog

$$\alpha_1 = \mathfrak{D}_4^2 - 3\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_5$$
$$\beta_1 = 3\mathfrak{D}_4\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_5^2$$
$$\gamma_1 = 9\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_4\mathfrak{D}_5.$$

Vermöge der Eigenschaft der Coefficienten $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_5$ die Gleichung

$$\mathfrak{D}_4^2 - 3\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_5 = \left(\frac{C_0\mathfrak{D}_4 - C_1\mathfrak{D}_3}{C_0}\right)^2$$

zu erfüllen, ist

$$\alpha_1 = \left(\frac{C_0\mathfrak{D}_4 - C_1\mathfrak{D}_3}{C_0}\right)^2 = (-C_1^2\alpha + 9C_0^2\beta - 3C_0C_1\gamma)^2$$
$$= (-\alpha(C_1^2 - 3C_0C_2) + 3C_0(3C_0\beta - C_1\gamma) - 3C_0C_2\alpha)^2$$

und vermöge $\qquad 3C_0\beta - C_1\gamma = C_2\alpha, \quad C_1^2 - 3C_0C_2 = \alpha$

wird $\qquad \alpha_1 = (-\alpha^2)^2.$

Auch ist $\beta_1 = 3\mathfrak{D}_4\mathfrak{D}_6 - \mathfrak{D}_5^2 = 9C_0^2C_2^2\alpha\beta + C_1^4\alpha\beta - 6C_0C_1^2C_2\alpha\beta$

$$= \alpha\beta[C_1^2(C_1^2 - 3C_0C_2) - 3C_0C_2(C_1^2 - 3C_0C_2)]$$
$$= \alpha^3\beta$$

und ferner $\qquad \mathfrak{D}_4\gamma_1 = 3\mathfrak{D}_3\beta_1 - \mathfrak{D}_5\alpha_1$

nach den gefundenen Werthen

$$= \alpha^3[3\mathfrak{D}_3\beta - \alpha\mathfrak{D}_5]$$
$$= \alpha^3[3C_0C_1\alpha\beta + 9C_0^2\beta\gamma - C_1C_2\alpha^2]$$
$$= \alpha^3(9C_0^2\beta\gamma + C_1^2\alpha\gamma) = \alpha^3\gamma(9C_0^2\beta + C_1^2\alpha)$$

und da $\qquad 9C_0^2\beta + C_1^2\alpha = \mathfrak{D}_4$ ist,

$$\gamma_1 = \alpha^3\gamma.$$

Es stehen daher die Bestimmenden der Hilfsgleichung im gleichen Verhältniss, wie die der Hauptgleichung und werden erhalten indem man die der Hauptgleichung mit dem Cubus der ersten Bestimmenden multiplicirt. Die Werthe von P_1, K_1 für die Hilfsgleichung sind

$$P_1 = \frac{-\alpha^4}{3\mathfrak{D}_3^2}, \quad K_1 = \frac{\alpha^3}{9\mathfrak{D}_3^2}\sqrt{4\alpha\beta + \gamma^2}$$

und ändern sich wegen

$$P_1 = P.\alpha^3\left(\frac{C_0}{\mathfrak{D}_3}\right)^2, \quad K^1 = K\alpha^3\left(\frac{C_0}{\mathfrak{D}_3}\right)^2$$

im selben Verhältniss.

Der Coefficient $\mathfrak{D}_3$ lässt sich bequem durch Q ausdrücken und dadurch das Verhältniss der Aenderung von P, Q und K darstellen. Es ist

$$\mathfrak{D}_3 = 27 C_0^4 Q, \quad \alpha^3 = -27 C_0^6 P^3$$

und somit das Verhältniss der Aenderung

$$\alpha^3 \left(\frac{C_0}{\mathfrak{D}_3}\right)^2 = \rho = -\frac{P^3}{27 Q^2}.$$

Anders ist die Aenderung von Q, denn dasselbe übergeht in

$$Q_1^2 = K_1^2 - \frac{4}{27} P_1^3 = K^2 \rho^2 - \frac{4}{27} P^3 \rho^3$$

$$= \rho^2 \left[Q^2 + \frac{4}{27}(1-\rho) P^3\right]$$

$$= \rho^2 \left[Q^2 + \frac{4}{27} P^3 + \frac{4}{27^2} \frac{P^6}{Q^2}\right]$$

$$= \rho^2 \left[Q + \frac{2}{27} \frac{P^3}{Q}\right]^2 = \rho^2 [1-2\rho]^2 Q^2;$$

und ändert sich daher nicht bloss im Verhältniss von ρ, sondern zugleich im Verhältniss von $(1-2\rho)$.

Nimmt man $\frac{C_1}{3 C_0} = \mu$, ferner P und Q als Bestimmungsstücke an; so lassen sich die Bestimmenden als auch die Coefficienten der Hilfsgleichung einfach durch dieselben darstellen. Es ist nämlich

$$\frac{C_2}{3 C_0} = \frac{C_1^2}{9 C_0^2} - \frac{\alpha}{9 C_0^2} = \mu^2 - \frac{\alpha}{9 C_0^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{C_1}{3 C_0} \gamma = \beta - \frac{\alpha C_2}{3 C_0} \quad \text{d. i.}$$

$$\mu\gamma = \beta - \alpha\mu^2 + \frac{\alpha^2}{9 C_0^2} = \beta - \alpha\mu^2 + C_0^2 P^2.$$

Aus den drei Gleichungen:

$$\alpha\mu^2 - \beta + \mu\gamma = C_0^2 P^2$$

$$2\mu\alpha + \gamma = 9 C_0^2 Q$$

$$\alpha = -3 C_0^2 P \quad \text{folgt}$$

$$\alpha = -3 C_0^2 P$$

$$\beta = C_0^2(-P^2 + 3 P \mu^2 + 9 \mu Q)$$

$$\gamma = 3 C_0^2 (2 P \mu + 3 Q) \quad \text{und ferner aus}$$

$$C_1 \mathfrak{D}_5 - C_2 \mathfrak{D}_4 = 3 C_0 \alpha \beta \quad \text{und}$$

$$27 C_0^3 \mathfrak{D}_6 = C_0 (2 C_1^2 + 3 C_0 C_2) \mathfrak{D}_4 - C_1 (C_1^2 + 3 C_0 C_2) \mathfrak{D}_3,$$

$$\mu \mathfrak{D}_5 = \left(\mu^2 + \frac{P}{3}\right) \mathfrak{D}_4 + \frac{1}{9} \frac{P}{Q} (P^2 - 3 P \mu^2 - 9 \mu Q)$$

$$= 3 \left(\mu - \frac{P^2}{9Q}\right) \left(p^2 + \frac{P}{3}\right) + \frac{P}{9Q} (P^2 - 3 P \mu^2 - 9 \mu Q)$$

$$\frac{\mathfrak{D}_5}{\mathfrak{D}_3} = 3\mu\left(\mu - \tfrac{2}{9}\frac{P^2}{Q}\right)$$

$$\frac{\mathfrak{D}_6}{\mathfrak{D}_3} = \tfrac{1}{3}\left(3\mu^2 + \frac{P}{3}\right)\frac{\mathfrak{D}_5}{\mathfrak{D}_3} - \mu\left(2\mu^2 + \frac{P}{3}\right)$$

$$= \left(3\mu^2 + \frac{P}{3}\right)\left(\mu - \frac{P^2}{9Q}\right) - \mu\left(2\mu^2 + \frac{P}{3}\right)$$

$$= \mu^3 - \frac{P^2\mu^2}{3Q} - \frac{P^3}{27Q}$$

und die Hilfsgleichung übergeht dadurch in

$$q^3 + 3\left(\mu - \frac{P^2}{9Q}\right)q^2 + 3\mu\left(\mu - \tfrac{2}{9}\frac{P^2}{Q}\right)q + \mu^3 - \frac{P^2\mu^2}{3Q} - \frac{P^3}{27Q} = 0$$

$$\text{d. i. in } (q+\mu)^3 - \frac{P^2}{3Q}(q+\mu)^2 - \frac{P^3}{27Q} = 0$$

eine Gleichung, aus der sich auch sehr leicht die frühern Bemerkungen über P, Q und K deduciren lassen. Wird also die ursprüngliche Gleichung auf

$$\left(y + \frac{C_1}{3C_0}\right)^3 + P\left(y + \frac{C_1}{3C_0}\right) + Q = 0$$

transformirt, so muss

$$q^3 - \frac{P^2}{3Q}q^2 - \frac{P^3}{27Q} = 0$$

die Hilfsgleichung seyn.

Diese gemachten Betrachtungen könnte man benützen, die Wurzeln der cubischen Gleichung in Form eines Kettenbruchs darzustellen und dadurch mancherlei Vortheile gewinnen, wenn derselbe nicht divergirte oder wenigstens nicht convergirte, wesshalb ich diese Untersuchung als vergeblich übergehe.

Wenn gleich auf diesem Weg keine Ausbeute zu erringen ist; so lässt sich doch ein anderer einschlagen, der zur geschlossnen reellen Form selbst im casu irreducibili führt. Sey also die ursprüngliche Gleichung:

$$C_0y^3 + C_1y^2 + C_2y + C_3 = 0 \quad \text{durch} \quad y = -\frac{C_1}{3C_0} + z$$

auf die Form $z^3 + Pz + Q = 0$ gebracht, und die auf gleiche Weise reducirte Hilfsgleichung der ursprünglichen, ist mithin ebenfalls

$$\mathfrak{z}_1^3 + P\rho\,\mathfrak{z}_1 + Q\rho(1-2\rho) = 0; \quad \rho = \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}{Q^2}$$

gesetzt, oder für $\mathfrak{z}_1 = \sqrt{\rho}\,.\,\zeta_1$

$$\zeta_1^3 + P\zeta_1 + \frac{Q\rho(1-2\rho)}{\rho\sqrt{\rho}} = 0.$$

Wird $z = n\,\mathrm{Sin}\,\varphi$

$\zeta_1 = n'\,\mathrm{Sin}\,\psi$ gesetzt, wodurch wegen $\mathrm{Sin}^3\varphi = \frac{3}{4}\mathrm{Sin}\,\varphi - \frac{\mathrm{Sin}\,3\varphi}{4}$

die Gleichung für z die Form

$$z^3 - \tfrac{3}{4} n^2 z + \frac{n^3}{4} \operatorname{Sin} 3\varphi = 0$$

und die für ζ_1 die Form

$$\zeta_1^3 - \tfrac{3}{4} n'^2 \zeta + \frac{n'^3}{4} \operatorname{Sin} 3\psi = 0$$

annehmen; so zeigt der weitere Vergleich wegen

$$n = \sqrt{-\frac{4P}{3}}, \quad n' = \sqrt{-\frac{4P}{3}}, \quad \operatorname{Sin} 3\varphi = \frac{Q}{2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\operatorname{Sin} 3\psi = \frac{Q(1-2\rho)}{2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho}},$$

nicht bloss die Gleichheit der Radien n, sondern auch ein bestimmbares Verhältniss von $\operatorname{Sin}\psi$ zu $\operatorname{Sin}\varphi$; gegeben durch das Verhältniss von $\operatorname{Sin} 3\psi$ zu $\operatorname{Sin} 3\varphi$. Wegen

$$\rho = \frac{1}{4\operatorname{Sin}^2 3\varphi} \quad \text{ist} \quad \frac{\operatorname{Sin} 3\psi}{\operatorname{Sin} 3\varphi} = \frac{1-2\rho}{\sqrt{\rho}} = \frac{1 - \frac{1}{2\operatorname{Sin}^2 3\varphi}}{\frac{1}{2\operatorname{Sin} 3\varphi}} = \frac{-\cos 6\varphi}{\operatorname{Sin} 3\varphi}$$

$$\text{d. h.} \quad \operatorname{Sin} 3\psi = \cos(\pi - 6\varphi) = \operatorname{Sin}\left(6\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{oder}$$

$$\psi = 2\varphi - \frac{\pi}{6}.$$

Ebenso kann man ferner zwei Winkel ω, τ annehmen, von der Beschaffenheit, dass:

$$\omega = 2\psi - \frac{\pi}{6}$$

$$\tau = 2\omega - \frac{\pi}{6},$$

die überdiess durch die Gleichungen zweier weiterer Operationen erhalten werden; aber auch ohnedem annehmbar sind. So gibt die Gleichung:

$$\zeta_1^3 + P\zeta_1 + \frac{Q(1-2\rho)}{\sqrt{\rho}} = 0 \quad \text{für} \quad \zeta_1 = n \operatorname{Sin}\psi$$

die transformirte Hilfsgleichung

$$\mathfrak{z}_2^3 + P\rho_1 \mathfrak{z}_2 + \frac{Q(1-2\rho)(1-2\rho_1)}{\sqrt{\rho}} = 0$$

und bei der weitern Transformation $\mathfrak{z}_2 = \sqrt{\rho_1}\,\zeta_2 = \sqrt{\rho_1}\, n \operatorname{Sin}\omega$ die Gleichung

$$\zeta_2^3 + P\zeta_2 + \frac{Q(1-2\rho)(1-2\rho_1)}{\sqrt{\rho\rho_1}} = 0$$

und darin ist

$$\rho_1 = \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}{Q^2} \frac{\rho}{(1-2\rho)^2} = \frac{\rho^2}{(1-2\rho)^2}.$$

Durch erstere Gleichung resultiren für die Sinusse der dreifachen Bögen die Werthe

$$\mathrm{Sin}\,3\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}, \quad \mathrm{Sin}\,3\psi = \frac{1-2\rho}{2\rho}$$ aus der letzten

$$\mathrm{Sin}\,3\psi = \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}} = \frac{1-2\rho}{2\rho},$$

$$\mathrm{Sin}\,3\omega = \frac{1-2\rho_1}{2\rho_1} = \frac{(1-2\rho)^2-2\rho^2}{2\rho^2} = 2\,\mathrm{Sin}^2 3\varphi - 1 = -\cos 6\psi;$$

daher ist $\omega = 2\psi - \frac{\pi}{6}$.

Ferner ergibt

$$\zeta_2^3 + P\zeta_2 + \frac{Q(1-2\rho)(1-2\rho_1)}{\sqrt{\rho\rho_1}} = 0$$

die transformirte Hilfsgleichung

$$\mathfrak{z}_3^3 + P\rho_2\mathfrak{z}_3 + \frac{Q(1-2\rho)(1-2\rho_1)(1-2\rho_2)\rho_2}{\sqrt{\rho\rho_1}} = 0$$

und bei der weitern Transformation

$$\mathfrak{z}_3 = \zeta_3\sqrt{\rho_2} = n\sqrt{\rho_2}\,\mathrm{Sin}\,\tau$$

die Werthe von

$$\rho_2 = \frac{\rho_1^2}{(1-2\rho_1)^2}, \quad \mathrm{Sin}\,3\omega = \frac{1-2\rho_1}{2\rho_1} = \frac{1}{2\sqrt{\rho_2}},$$

$$\mathrm{Sin}\,3\tau = \frac{1-2\rho_2}{2\rho_2} = -\cos 6\omega$$

$$\tau = 2\omega - \frac{\pi}{6}$$

Aus den drei Gleichungen:

$$\psi = 2\varphi - \frac{\pi}{6}$$

$$\omega = 2\psi - \frac{\pi}{6}$$

$$\tau = 2\omega - \frac{\pi}{6}$$ folgt:

$$\tau = 4\psi - \frac{\pi}{2} = 8\varphi - 7\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}\,\tau &= \mathrm{Sin}(9\varphi + \tfrac{5}{6}\pi - \varphi)^{\cdot} \\ &= \mathrm{Sin}(9\varphi + \tfrac{5}{6}\pi)\cos\varphi - \cos(9\varphi + \tfrac{5}{6}\pi)\,\mathrm{Sin}\,\varphi\end{aligned}$$

$$\mathrm{Sin}\,\omega = \mathrm{Sin}\left(3\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi + \cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{Sin}\,\varphi$$

$$\mathrm{Sin}\,\psi = \mathrm{Sin}\left(3\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\cos\varphi - \cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{Sin}\,\varphi$$

oder wenn

$$\mathrm{Sin}(9\varphi + \tfrac{5}{6}\pi) = a, \quad -\cos(9\varphi + \tfrac{5}{6}\pi) = b$$

$$\mathrm{Sin}\left(3\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = a', \quad \cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = b'$$

$$\mathrm{Sin}\left(3\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = a'', \quad -\cos\left(3\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = b''$$

gesetzt werden

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin}\tau &= a\cos\varphi + b\operatorname{Sin}\varphi \\
\operatorname{Sin}\omega &= a'\cos\varphi + b'\operatorname{Sin}\varphi \\
\operatorname{Sin}\psi &= a''\cos\varphi + b''\operatorname{Sin}\varphi \quad \text{d. i.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a'\operatorname{Sin}\tau - a\operatorname{Sin}\omega &= (a'b - ab')\operatorname{Sin}\varphi = A\operatorname{Sin}\varphi \\
a''\operatorname{Sin}\omega - a'\operatorname{Sin}\psi &= (a''b' - a'b'')\operatorname{Sin}\varphi = B\operatorname{Sin}\varphi \\
a\operatorname{Sin}\psi - a''\operatorname{Sin}\tau &= (ab'' - a''b)\operatorname{Sin}\varphi = C\operatorname{Sin}\varphi.
\end{aligned}$$

Die Werthe der bezeichneten Grössen sind:

$$a = \frac{(\rho-1)\sqrt{4\rho-1} - \sqrt{3}(3\rho-1)}{4\rho\sqrt{\rho}}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}(\rho-1)\sqrt{4\rho-1} + (3\rho-1)}{4\rho\sqrt{\rho}}$$

$$a' = -\frac{\sqrt{4\rho-1}}{2\sqrt{\rho}}$$

$$b' = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}$$

$$a'' = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4\rho-1}}{4\sqrt{\rho}}$$

$$b'' = -\frac{(1+\sqrt{3(4\rho-1)})}{4\sqrt{\rho}}$$

$$A = \frac{(1-2\rho)\sqrt{4\rho-1} - \sqrt{3}\,[(1-2\rho)^2 - 2\rho^2]}{4\rho^2}$$

$$B = \frac{\sqrt{3}(1-2\rho) - \sqrt{4\rho-1}}{4\rho}$$

$$C = \frac{\sqrt{4\rho-1}}{2\rho}.$$

Um die Verhältnisse der Sinusse aus den obigen Gleichungen bestimmen zu können, braucht man nur die darin fehlenden Glieder zu ersetzen, indem man sie mit μ multiplicirt vorstellt, welches man nach der Berechnung dann verschwinden lässt.

$$\begin{aligned}
a'\operatorname{Sin}\tau - a\operatorname{Sin}\omega + \mu\operatorname{Sin}\psi &= A\operatorname{Sin}\varphi \\
\mu\operatorname{Sin}\tau + a''\operatorname{Sin}\omega - a'\operatorname{Sin}\psi &= B\operatorname{Sin}\varphi \\
-a''\operatorname{Sin}\tau + \mu\operatorname{Sin}\omega + a\operatorname{Sin}\psi &= C\operatorname{Sin}\varphi
\end{aligned}$$

ergibt für den gemeinsamen Nenner der unbekannten

$$N = \mu(a^2 + a'^2 + a''^2) + \mu^3;$$

der Zähler von $\operatorname{Sin}\tau$ ist

$$\begin{aligned}
Z_\tau &= \operatorname{Sin}\varphi\,[A a a'' + A a'\mu + B\mu^2 + B a^2 + C a a' - C''\mu] \\
&= \operatorname{Sin}\varphi\,[a(A a'' + B a + C a') + \mu(A a' - C a'') + B\mu^2].
\end{aligned}$$

Nun ist

$$A a'' + B a + C a' = (a'b - ab')a'' + (a''b' - a'b'')a + (ab'' - a''b)a' = 0$$

und mithin

$$\frac{\operatorname{Sin}\tau}{\operatorname{Sin}\varphi} = \frac{Aa' - Ca'' + B\mu}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \mu^2}$$

und wenn $\mu = 0$ gesetzt wird:

$$\mathrm{Sin}\,\tau = \frac{(A a' - C a'')\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{a^2 + a'^2 + a''^2}$$

$$\mathrm{Sin}\,\omega = \frac{(B a'' - A a)\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{a^2 + a'^2 + a''^2}$$

$$\mathrm{Sin}\,\psi = \frac{(C a - B a')\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{a^2 + a'^2 + a''^2}$$

$$= \left[b'' - \frac{(a b + a' b' + a'' b'')\,a''}{a^2 + a'^2 + a''^2}\right] \mathrm{Sin}\,\varphi = k\,\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Zugleich ist

$$C a - B a' = -\frac{\sqrt{4\rho - 1}}{8\rho^2\sqrt{\rho}}\left[\sqrt{4\rho - 1} - \sqrt{3}\,(1 - 2\rho - 2\rho^2)\right]$$

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = \frac{12\rho^3 + 8\rho^2 - 6\rho + 1 - \sqrt{3}\,(2\rho - 1)^2\sqrt{4\rho - 1}}{8\rho^3}$$

$$a b + a' b' + a'' b'' = \frac{1}{16\rho^3}\left[\sqrt{3}\,(4\rho^3 - 10\rho^2 + 6\rho - 1) - (6\rho^2 - 4\rho + 1)\sqrt{4\rho - 1}\,\right]$$

und daher

$$k = \frac{\sqrt{\rho(4\rho - 1)}\left[\sqrt{4\rho - 1} - \sqrt{3}\,(1 - 2\rho - 2\rho^2)\right]}{\sqrt{3(4\rho - 1)}\,(2\rho - 1)^2 - (12\rho^3 + 8\rho^2 - 6\rho + 1)}$$

worin mit dem Zeichen von φ, also mit dem Zeichen von Q, $\sqrt{\rho}$ sein Zeichen ändert.

Mit Hilfe des so bestimmten Werthes k lassen sich die Wurzeln des irreducibeln Falles sehr bequem in reellen Grössen darstellen.

Die Werthe von y und q sind mit einander durch den Ausdruck

$$y = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\,e^{\pi i}$$

als den einfachsten verknüpft, d. i. vermöge der Bedeutung von $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ und der Gleichung

$$\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} \quad \text{durch} \quad y = \frac{-(C_1 q + C_2)}{3 C_0 q + C_1} = \frac{-\mu q \frac{-C_2}{3 C_0}}{q + \mu}$$

oder da nach frühern $\frac{C_2}{3 C_0} = \mu^2 + \frac{P}{3}$ gefunden wurde, durch

$$y = \frac{-\mu q - \mu^2 - \frac{P}{3}}{q + \mu}.$$

Zu dieser Gleichung kömmt dann noch eine zweite wegen des bekannten Verhältnisses von $\mathrm{Sin}\,\psi$ zu $\mathrm{Sin}\,\varphi$. In der Gleichung $z^3 + P z + Q = 0$ war $z = n\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, also $y + \mu = n\,\mathrm{Sin}\,\varphi$ und in der Hilfsgleichung

$$q = \frac{-\mathfrak{D}_4}{3\mathfrak{D}_3} + \delta_1 = \frac{-\mathfrak{D}_4}{3\mathfrak{D}_3} + \sqrt{\rho}\,.\,\zeta_1 = -\mu + \frac{P^2}{9Q} + \sqrt{\rho}\,.\,n\,\mathrm{Sin}\,\psi;$$

Daher ist $q + \mu - \frac{P^2}{9Q} = \sqrt{\rho}\,.\,n\,\mathrm{Sin}\,\psi$ die zweite Gleichung, deren Verbindung mit der erstern

$$\frac{y+\mu}{q+\mu-\frac{P^2}{9Q}} = \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\sqrt{\rho}.\operatorname{Sin}\psi} = \frac{1}{k\sqrt{\rho}} \quad \text{und somit}$$

$$q+\mu-\frac{P^2}{9Q} = k\sqrt{\rho}(y+\mu) \quad \text{ergibt.}$$

Eliminirt man eine der Unbekannten, z. B. $q+\mu$; so ist

$$(y+\mu)^2 + \frac{P^2}{9Qk\sqrt{\rho}}(y+\mu) = \frac{-\frac{P}{3}}{k\sqrt{\rho}}$$

oder wegen $Q\sqrt{\rho} = \left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$(y+\mu)^2 + \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}{k}(y+\mu) = \frac{Q}{k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{d. i.}$$

$$y+\mu = \frac{-\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^{3}+4Qk}}{2k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

wo im Radical bloss das obere Zeichen zu gelten hat, damit $y+p$, je nach dem Zeichen von Q, mit dem auch k zugleich sein Zeichen ändert, immer gleich gross positiv oder negativ werden könne. Unter ähnlichen solchen, nur in Doppelformen erscheinen dann die zwei andern Wurzeln; in Formen, die nicht anwendbar sind, wenn k reell wird, weil dann k als imaginär eine Form wie $\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}$ annimmt. Dennoch verbleibt die Gestalt der Wurzeln auch in den andern Fällen, wenn gleich der Werth von k varirt.

Um diess zu zeigen, sey in dem einen Fall P positiv; die transformirte Hauptgleichung $z^3+Pz+Q=0$ hat dann die Hilfsgleichung

$$q^3 - \frac{P^2}{3Q}q^2 - \frac{P^3}{27Q} = 0 \quad \text{oder wenn}$$

$$\left(\frac{P}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{Q^2} = \rho \quad \text{und} \quad q = \frac{P^2}{9Q}+\xi$$

gesetzt werden, die Hilfsgleichung

$$\xi^3 - P\rho\xi - Q\rho(1+2\rho) = 0$$

und in diesen Gleichungen ist z mit q durch die Bedingung $zq = -\frac{P}{3}$ verknüpft.

Wird $Q = \frac{2}{\operatorname{tg}\varphi}\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ gesetzt, so übergeht K, $Q+K$ und $Q-K$ in die Werthe

$$K = \frac{2}{\operatorname{Sin}\varphi}\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}},\quad Q+K = 2\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}\right),\quad Q-K = 2\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1-\cos\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}\right)$$

und daher der Werth von z nach der Cardanischen Formel in

$$z = \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\cot\frac{\varphi}{2}}\right]$$

oder nach der Bedeutung von $\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{\rho}$ in

$$z = \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\pm \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1+4\rho}-1}{2\sqrt{\rho}}} \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{\rho}}{\sqrt{1+4\rho}-1}}\right]$$

wo das Zeichen nach dem des Q bestimmt werden muss. In der transformirten Hilfsgleichung für ξ ist aber P negativ und da zugleich

$$4\left(\frac{P\rho}{3}\right)^3 \frac{1}{Q^2\rho^2(1+2\rho)^2} = \frac{4\rho^2}{(1+2\rho)^2}$$

kleiner als 1 ist, bleibt K reell und zugleich bis auf den Factor der hinzuzukommen hat, dasselbe. Wird daher in der Hilfsgleichung

$$\frac{2}{Q\rho(1+2\rho)} \left(\frac{P}{3}\rho\right)^{\frac{3}{2}} = \operatorname{Sin}\varphi_1$$

gesetzt; so ist der vorigen Bemerkungen wegen

$$\operatorname{Sin}\varphi_1 = \frac{2\rho}{1+2\rho} \quad \text{und} \quad K_1 = 2\left(\frac{P\rho}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cot\varphi_1$$

$$\xi = \left(\frac{P\rho}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}} + \sqrt[3]{\cot\frac{\varphi_1}{2}}\right]$$

$$= \left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \left[\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{1+4\rho}+1+2\rho}{2\rho}} + \sqrt{\frac{2\rho}{-\sqrt{1+4\rho}+1+2\rho}}\right]$$

wo das Radical negativ genommen wurde, weil der Winkel φ_1 als spitz unterlegt ist. Bezeichnet man daher das Verhältniss von $\frac{\xi}{\sqrt{\rho}}$ zu z durch $-k$

$$k = \frac{1}{\sqrt[6]{\rho}} \, \frac{\sqrt[3]{1+2\rho-\sqrt{1+4\rho}} + \sqrt[3]{1+2\rho+\sqrt{1+4\rho}}}{\sqrt[3]{\sqrt{1+4\rho}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{1+4\rho}-1}}$$

wodurch mit der Aenderung des Zeichens von $\sqrt[6]{\rho}$ mit Q, k mit Q sein Zeichen ändert; so stellt sich für $y+p$ ein dem frühern ähnlicher Ausdruck dar.

Die zwei Gleichungen $q - \frac{P^2}{9Q} = \xi$ und $qz = -\frac{P}{3}$ geben

$$\frac{\sqrt{\rho}\, z^2}{-\frac{P}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^2 \frac{z}{Q}} = -\frac{1}{k} \quad \text{und}$$

$$y + p = \frac{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^{3} + 4Qk}}{2\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}} k}.$$

Endlich ist im dritten Fall, worin P negativ aber $4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2$ ist, also worin

$\rho = \left(-\frac{P}{3}\right)^3 \frac{1}{Q^2}$ kleiner als $\frac{1}{4}$ ist; wenn man für

$$\frac{2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{Q} = 2\sqrt{\rho} = \operatorname{Sin}\varphi \text{ setzt,}$$

$$z = -\sqrt{-\frac{P}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} + \sqrt[3]{\cot\frac{\varphi}{2}}\right)$$

$$= -\sqrt{-\frac{P}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-4\rho}}{2\sqrt{\rho}}} + \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{1-4\rho}}{2\sqrt{\rho}}}\right)$$

wo das untere Zeichen gilt, weil der Sinus stets kleiner als der Cosinus seyn muss.

Die transformirte Gleichung ist

$$\xi^3 + P\rho\xi + Q\rho(1-2\rho) = 0$$

oder für $\xi = \sqrt{\rho}\,\xi_1$

$$\xi_1^3 + P\xi_1 + \frac{Q(1-2\rho)}{\sqrt{\rho}} = 0. \quad \text{Wegen}$$

$$\rho_1 = \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^3 \rho}{Q^2(1-2\rho)^2} = \frac{\rho^2}{(1-2\rho)^2}$$

ist die Wurzel analog mit der vorigen

$$\xi_1 = -\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{1-2\rho-\sqrt{1-4\rho}}{2\rho}} + \sqrt[3]{\frac{1-2\rho+\sqrt{1-4\rho}}{2\rho}}\right).$$

Wenn daher $k = \frac{1}{\sqrt[6]{\rho}} \frac{\sqrt[3]{1-2\rho-\sqrt{1-4\rho}} + \sqrt[3]{1-2\rho+\sqrt{1-4\rho}}}{\sqrt[3]{1-\sqrt{1-4\rho}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{1-4\rho}}}$

gesetzt wird, und aus den Gleichungen

$$zq = -\frac{P}{3}$$

$$q - \frac{P^2}{9Q} = \sqrt{\rho}\,.\,\xi_1 \quad \text{d. i. aus}$$

$$\frac{\sqrt{\rho}\,z^2}{-\frac{P}{3} - \left(\frac{P}{3}\right)^2 \frac{z}{Q}} = \frac{1}{k}, \quad z \text{ bestimmt wird;}$$

so ergibt sich für z ein dem frühern analoger Ausdruck

$$y + \mu = \frac{-\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{4}} - \sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + 4Qk}}{2k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Es ist merkwürdig, dass dieser Werth von k für jeden der speciellen Fälle, wo

entweder $P+$, oder $P-$ und $4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2$

oder endlich $P-$ und $4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 > Q^2$, immer anders gestaltet ist, und dass daher das Ausziehen der cubischen Wurzel im allgemeinen Ausdruck der Cardanischen Formel mit einer Aenderung der Form der Wurzel verbunden ist; eine Bemerkung, die, wie ich glaube, bei der Auflösung höherer Gleichungen von Einfluss seyn könnte.

Bezüglich des ersten Werthes von $y+\mu$ wäre noch zu bemerken, dass er sein Zeichen ändern muss, da der Cardanischen Formel zu Folge, für ein positives Q die Wurzeln negativ ausfallen müssen, welches darauf hinausläuft, den Radius $r = 2\sqrt{\frac{-P}{3}}$ negativ zu nehmen, wodurch der ganze Werth sein Zeichen wechselt. Es entsprechen wohl diesem Fall auch positive Wurzeln, allein das sind die zwei andern der Cardanischen Auflösung, während die erste negativ ist.

Und somit ist die erste Wurzel der Cardanischen Auflösung in den drei Fällen

1. $P-,\ 4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 > Q^2$

$$y+\mu = \frac{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{4}} - \sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + 4Qk}}{2k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

2. $P-,\ 4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2$

$$y+\mu = \frac{-\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{4}} - \sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + 4Qk}}{2k\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

und 3. $P+$,

$$y+\mu = \frac{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{4}} - \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + 4Qk}}{2k\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{1}{4}}},$$

worin aber k in jeder Formel einen verschiedenen Werth besitzt.

Ueber das Ausziehen der Cubikwurzel aus imaginären und irrationalen Binomen.

Das Ausziehen der Cubikwurzel aus imaginären Binomen hinderte bisher bloss die Schwierigkeit der Bestimmung von $\sin\varphi$ durch ein bekanntes $\sin 3\varphi$ mittelst der gewöhnlichen Methode, denn diese führt auf eine cubische Gleichung und zwar auf den Casus irreducibilis, also auf ein gleiches Problem. Dessenungeachtet lässt sich diese Bestimmung dennoch ausführen, wenn sie nur von einer andern, gewisse Eigenthümlichkeiten besitzenden Gleichung, abhängig gemacht wird.

Sey $\frac{A+Bi}{2}$ das Binom und $z(t+ui)$ die Cubikwurzel, also

$$\sqrt[3]{\frac{A+Bi}{2}} = z(t+ui).$$ Wegen

$$\frac{A+Bi}{2} = z^3(t^3+3t^2ui-3tu^2-u^3i)$$

muss man

$$\frac{A}{2} = (t^3-3tu^2)z^3$$

$$\frac{B}{2} = (3t^2u-u^3)z^3$$

setzen, woraus dann

$$\frac{A^2+B^2}{4} = (t^2+u^2)^3 z^6$$

folgt. Als dritte Bedingungsgleichung kann alsdann $t^2+u^2=1$ gewählt werden und daraus folgt der Werth von z

$$z = \sqrt[6]{\frac{A^2+B^2}{4}}.$$

Da u einen Sinus vorstellen kann und $\text{Sin}^3\varphi = \frac{3}{4}\text{Sin}\,\varphi - \frac{\text{Sin}\,3\varphi}{4}$ auch noch durch die Gleichung

$$\frac{B}{2z^3} = 3t^2u-u^3 = 3(1-u^2)u-u^3 = 3u-4u^3$$

bestimmbar ist; so weist das Bestehen beider Gleichungen auf den Werth von $\text{Sin}\,3\varphi$ nämlich auf $\text{Sin}\,3\varphi = \frac{B}{2z^3}$ hin. Betrachtet man nun die Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4}z^2x + \frac{B}{8} = 0,$$

so enthält sie den Werth zu als eine Wurzel und dabei ist z der Radius, u der Sinus von φ. Wird ferner aus der gegebenen Gleichung die Hilfsgleichung

$$q^3 - \frac{3z^4}{2B}q^2 + \frac{z^6}{8B} = 0$$

gebildet, wo q und x durch die Gleichung $4xq = z^2$ verknüpft sind, und in der letztern Gleichung $q = \frac{z^4}{2B} + \mathfrak{z}$ gesetzt, wodurch dieselbe in

$$\mathfrak{z}^3 - \frac{3}{4}z^2\rho\mathfrak{z} + \frac{B}{8}\rho(1-2\rho) = 0$$

übergeht, wenn darin $\rho = \frac{z^6}{B^2}$ gesetzt wird, oder in

$$\zeta^3 - \frac{3}{4}z^2\zeta + \frac{B}{8}\frac{(1-2\rho)}{\sqrt{\rho}} = 0$$

wenn überdiess $\mathfrak{z} = \sqrt{\rho}\,\zeta$ angenommen wird; so haben sowohl x als ζ die Form $r\,\text{Sin}\,\alpha$, in beiden Ausdrücken ist r dasselbe und zwischen ihren Bögen φ und ψ in $x = r\,\text{Sin}\,\varphi$ und $\zeta = r\,\text{Sin}\,\psi$ besteht eine Relation, die durch den Ausdruck

$$\frac{\operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Sin}\varphi} = k = \frac{\sqrt{\rho(4\rho-1)}\,[\sqrt{4\rho-1} - \sqrt{3}\,(1-2\rho-2\rho^2)]}{\sqrt{3}\,(4\rho-1)(2\rho-1)^2 - (12\rho^3+8\rho^2-6\rho+1)}$$

bestimmt ist.

Nach dem Werthe von $\rho = \frac{z^6}{B^2}$ ist

$$k = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}.A\,[8AB^3 - \sqrt{3}(3B^4-6A^2B^2-A^4)]}{4\sqrt{3}AB(A^2-B^2)^2-(3A^6+17A^4B^2+A^2B^4+3B^6)}$$

wo sich das Zeichen $\pm$ nach dem Zeichen von B richtet. Da zwei Gleichungen für q bestimmt wurden, nämlich

$$q = \frac{z^4}{2B} + \frac{z^3 n \operatorname{Sin}\psi}{B} \quad \text{und}$$

$$4nq\operatorname{Sin}\varphi = z^2,$$

so folgt durch Elimination der Bögen

$$q^2 - \frac{z^4}{2B}q - \frac{z^5 k}{4B} = 0$$

$$q = \frac{z^4}{4B}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{4Bk}{z^3}}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{A^2+B^2}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{8Bk}{\sqrt{A^2+B^2}}}\right)}{4B}.$$

q muss mit x zugleich positiv oder negativ seyn, d. h. mit B sein Zeichen ändern und gleich gross bleiben. Da im vorliegenden Fall x positiv ist, bestimmt diess das Zeichen des Radicals und daher ist

$$x = \frac{z^2}{4q} = \frac{B}{z^2}\frac{\left(1-\sqrt{1+\frac{4Bk}{z^3}}\right)}{-\frac{4Bk}{z^3}}$$

$$= \frac{-z}{4k}\left(1-\sqrt{1+\frac{4Bk}{z^3}}\right)$$

und daher

$$u = \frac{x}{z} = \frac{1}{4k}\left(\sqrt{1+\frac{8Bk}{\sqrt{A^2+B^2}}}-1\right).$$

Die Cubikwurzel wäre somit

$$\sqrt[3]{\frac{A\pm Bi}{2}} = \frac{1}{4k}\sqrt[6]{\frac{A^2+B^2}{4}}\left[\pm\left(\sqrt{1+\frac{8Bk}{\sqrt{A^2+B^2}}}-1\right)i + \sqrt{16k^2-\left(\sqrt{1+\frac{8Bk}{\sqrt{A^2+B^2}}}-1\right)^2}\right].$$

Man kann sie jedoch auf eine bequemere Form bringen, indem man die zweite Gleichung zwischen A und t untersucht; d. i. indem man $\frac{A}{2} = (4t^3-3t)z^3$ vermittelst der Gleichung $y^3 - \frac{3}{4}z^2y - \frac{A}{8} = 0$ die zt als Wurzel enthält, betrachtet. Auch diese ist mit ihrer Hilfsgleichung $q_1^3 + \frac{3z^4}{2A} q_1^2 - \frac{z^6}{8A} = 0$ durch die Bedingung $4 q_1 y = z^2$ verknüpft und gibt bei der Transformation, wobei der erste Coefficient verschwindet,

$$\mathfrak{z}_1^3 - \tfrac{3}{4} z^2 \mathfrak{z}_1 - \frac{A}{8} \rho_1 (1 - 2\rho_1) = 0$$

wenn ρ_1 für $\frac{z^6}{A^2}$ gesetzt wird. Für $\mathfrak{z}_1 = \sqrt{\rho_1}\,\zeta_1$ ist

$$q_1 = -\frac{z^4}{2A} + \sqrt{\rho_1}\, n \operatorname{Sin}\psi = -\frac{z^4}{2A} - \frac{z^3}{A} n \operatorname{Sin}\psi$$

wo im zweiten Theil das negative Zeichen zu nehmen ist, da q_1 im Fall A negativ ist, lauter positive Glieder, wie aus früherm ersichtlich ist, liefern muss, daher nur bei diesem Zeichen seine numerische Grösse in beiden Fällen behalten könnte und weil überdiess $\sqrt{\rho_1}$ der Gleichung $\operatorname{Sin} 3\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}}$ zu Folge, des negativen A wegen, negativ zu nehmen ist. Da nun $q_1 = -\frac{z^4}{2A} - \frac{z^3}{A} n \operatorname{Sin}\psi$ und

$$4 n \operatorname{Sin}\varphi_1 q_1 = z^2$$

gefunden wurden, und so lange n in den Gleichungen für y und q positiv ist, φ_1 stumpf, ψ spitz ausfällt; so ist $\frac{\operatorname{Sin}\psi_1}{\operatorname{Sin}\varphi_1}$ negativ, also wenn $\frac{\operatorname{Sin}\psi_1}{\operatorname{Sin}\varphi_1} = -k_1$ gesetzt wird

$$k_1 = \frac{B\sqrt{A^2+B^2}\,(8BA^3 - \sqrt{3}(3A^4 - 6A^2B^2 - B^4))}{4\sqrt{3}AB(A^2-B^2)^2 - (3A^6 + A^4B^2 - 17A^2B^4 + 3B^6)}$$

$$q_1^2 + \frac{z^4 q_1}{2A} - \frac{k z^5}{4A} = 0 \quad \text{d. h.}$$

$$q_1 = \frac{z^4}{4A}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4Ak_1}{z^3}}\right)$$

und da q_1 negativ ist, gilt bloss das untere Zeichen des Radicals. Somit wäre

$$y = \frac{z^2}{4q_1} = \frac{-z}{4k_1}\left(\sqrt{1 + \frac{4Ak_1}{z^3}} - 1\right)$$

$$t = \frac{y}{z} = \frac{1}{4k}\left(\sqrt{1 + \frac{4Ak_1}{z^3}} + 1\right) \text{ und daher}$$

$$\sqrt[3]{\frac{A+Bi}{2}} = \tfrac{1}{4}\sqrt[6]{\frac{A^2+B^2}{4}}\left[\frac{\left(-\sqrt{1+\frac{8Ak_1}{\sqrt{A^2+B^2}}}+1\right)}{k_1} + i\,\frac{\left(\sqrt{1+\frac{8Bk}{\sqrt{A^2+B^2}}}-1\right)}{k}\right].$$

Das Zeichen im ersten Ausdruck scheint zu widersprechen, weil für $B = 0$, $\sqrt[3]{\frac{A}{2}}$ positiv werden muss, und auch wirklich wird für $k_1 = 0$, $\frac{\sqrt{1+8k_1}}{4k_1}$ zu 1, die Ursache liegt darin, dass die Gleichung $\frac{A}{2} = (t^3 - 3tu^2) z^3$ für ein negatives t, z^3 negativ ergibt, daher beim Ausziehen der Quadratwurzel das Radical noch negativ zu nehmen ist.

Es ist also der eigentliche Werth

$$\sqrt[3]{\frac{A+Bi}{2}} = \tfrac{1}{4}\sqrt[6]{\frac{A^2+B^2}{4}}\left[\left(\frac{\sqrt{1+\frac{8Ak_1}{\sqrt{A^2+B^2}}}-1}{k_1}\right)+i\left(\frac{\sqrt{1+\frac{8Bk}{\sqrt{A^2+B^2}}}-1}{k}\right)\right].$$

Hiedurch ist zugleich eine Weise gegeben, Gleichungen 3ten Grades vom casu irreducibili durch geschlossene reelle Ausdrücke aufzulösen, denn die Cardanische Formel führt auf die Summe oder Differenz zweier solcher durch diese Formel bestimmbarer Werthe. Diese sind

$$z_1 = -\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}}$$

$$z_2 = -\tfrac{1}{2}\left[-\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}}\right]+\frac{i\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}}\right]$$

$$z_3 = -\tfrac{1}{2}\left[-\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}}\right]-\frac{i\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{Q+K}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-Q+K}{2}}\right]$$

d. i.

$$z_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{Q^2+K^2}{4}}\left[\frac{\sqrt{1+\frac{8Qk_1}{\sqrt{Q^2+K^2}}}-1}{k_1}\right]$$

$$z_2 = \tfrac{1}{4}\sqrt[6]{\frac{Q^2+K^2}{4}}\left[\left(\frac{\sqrt{1+\frac{8Qk_1}{\sqrt{Q^2+K^2}}}-1}{k_1}\right)+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{8Kk}{\sqrt{Q^2+K^2}}}-1}{k}\right)\right]$$

$$z_3 = \tfrac{1}{4}\sqrt[6]{\frac{Q^2+K^2}{4}}\left[\left(\frac{\sqrt{1+\frac{8Qk_1}{\sqrt{Q^2+K^2}}}-1}{k_1}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{8Kk}{\sqrt{Q^2+K^2}}}-1}{k}\right)\right]$$

oder nach Herstellung der Werthe

$$y+p = -\frac{1}{2k_1}\sqrt{-\frac{P}{3}}\left[\sqrt{1+\frac{4Qk_1}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}-1\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{-\frac{P}{3}}\left[\frac{1}{k_1}\left(\sqrt{1+\frac{4Qk_1}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}-1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{k}\left(\sqrt{1+\frac{4\sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2k}}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}-1\right)\right].$$

Die Ausdrücke gestalten sich anders beim Ausziehen der Wurzel aus irrationalen Binomen. Sei also wieder

$$\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{2}} = z\,(t+\sqrt{u}) \quad \text{also}$$

$$\frac{A+\sqrt{B}}{2} = z^3(t^3+3t^2\sqrt{u}+3tu+u\sqrt{u}).$$

Für $\frac{A}{2} = z^3(t^3+3tu)$

$\frac{\sqrt{B}}{2} = z^3\sqrt{u}\,(3t^2+u)$ übergeht die Differenz der Quadrate in

$$\frac{A^2-B}{4} = z^6(t^6-3t^4u+3t^2u^2-u^3) = (t^2-u)^3z^6$$

und wenn als dritte Bedingung

$t^2-u^2=1$ angenommen wird, so folgt

$z = \sqrt[6]{\frac{A^2-B}{4}}$. Die Gleichungen

$$\frac{A}{2} = z^3(4t^3-3t)\,,\quad \frac{\sqrt{B}}{2} = \sqrt{u}\,z^3(3+4u)$$

übergehen durch Einführung des Werthes von z in

$$t^3-\frac{3t}{4}-\frac{A}{4\sqrt{A^2-B}} = 0 \quad \text{und}$$

$$(\sqrt{u})^3+\tfrac{3}{4}(\sqrt{u})-\frac{\sqrt{B}}{4\sqrt{A^2-B}} = 0.$$

Da in der ersten Gleichung $\frac{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}{Q^2} = \frac{A^2-B}{A^2} < 1$ ist, mithin das Radical der Cardanischen Formel reell wird und in der 2ten Gleichung dasselbe wegen des positiven P stattfindet, gestalten sich die Auflösungen dieser Gleichungen, wenn folgende Ausdrücke eingeführt werden:

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{A^2-B}}\;\frac{\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})^2}+\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})^2}}{\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[6]{A^2-B}}\;\frac{\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})^2}+\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})^2}}{\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}-\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}}$$

zu folgenden Ausdrücken

$$t = \frac{(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}+\sqrt{(\frac{1}{4})^3+\frac{4Ak_1}{8z^3}}}{2k_1(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4k_1}\left[1+\sqrt{1+\frac{8Ak_1}{\sqrt{A^2-B}}}\right]$$

und

$$\sqrt{u} = \frac{-(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}+\sqrt{(\frac{1}{4})^3+\frac{4Bk}{8z^3}}}{2(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}k}$$

$$= \frac{1}{4k}\left[\sqrt{1+\frac{8\sqrt{B}.k}{\sqrt{A^2-B}}}-1\right]$$

worin für k, k_1 negative Werthe genommen wurden, weil A und B negativ vorkommen. Somit ist

$$\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{2}} = \tfrac{1}{4}\sqrt[6]{\frac{A^2-B}{4}}\left[\left(\sqrt{1+\frac{8Ak_1}{\sqrt{A^2-B}}}+1\right)+\left(\sqrt{1+\frac{8k\sqrt{B}}{\sqrt{A^2-B}}}-1\right)\right].$$

Ist jedoch $A^2 < B$, so muss als dritte Bedingung $u^2-t^2=1$ genommen werden, z ist alsdann $\sqrt[6]{\frac{-A^2+B}{4}}$ und es bestehen die Gleichungen

$$\frac{A}{2} = z^3(4t^3+3t), \quad \frac{\sqrt{B}}{2} = \sqrt{u}\,z^3(4u-3).$$

Die Lösungen der Gleichungen

$$t^3+\tfrac{3}{4}t-\frac{A}{8z^3}=0, \quad (\sqrt{u})^3-\tfrac{3}{4}(\sqrt{u})-\frac{\sqrt{B}}{8z^3}=0$$

sind für

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{B-A^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{B}-A)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{B}+A)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{B}+A}-\sqrt[3]{\sqrt{B}-A}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[6]{B-A_2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{B}-A)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{B}+A)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{B}-A}+\sqrt[3]{\sqrt{B}+A}}$$

$$t = \frac{-(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+\sqrt{(\frac{1}{4})+\frac{Ak_1}{z^3}}}{2k_1} = \frac{1}{4k_1}\left[-1+\sqrt{1+\frac{8Ak_1}{\sqrt{B-A^2}}}\right]$$

$$\sqrt{u} = \frac{(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{B}}{z^3}k}}{2k} = \frac{1}{4k}\left[1+\sqrt{1+\frac{8\sqrt{B}k}{\sqrt{B-A^2}}}\right]$$

und somit

$$\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{2}} = \sqrt[6]{\frac{B-A^2}{4}}\left[\frac{1}{4k_1}\left(\sqrt{1+\frac{8Ak_1}{\sqrt{B-A^2}}}-1\right)+\frac{1}{4k}\left(\sqrt{1+\frac{8\sqrt{B}k}{\sqrt{B-A^2}}}+1\right)\right].$$

Dadurch gestalten sich die Wurzeln einer cubischen Gleichung im Fall P negativ und

$4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2$ zu

$$y+\mu = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-\frac{P}{3}}\,\frac{1}{k_1}\left(\sqrt{1+\frac{4Qk_1}{\sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}}+1\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{-\frac{P}{3}}\left[\frac{1}{k_1}\left(\sqrt{1+\frac{4Qk_1}{\sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}}+1\right)\pm\frac{\sqrt{-3}}{k}\left(1-\sqrt{1+\frac{4\sqrt{K}k}{\sqrt{\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}}\right)\right]$$

worin

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{-\frac{P}{3}}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(Q-\sqrt{K})^2}+\sqrt[3]{(Q+\sqrt{K})^2}}{\sqrt[3]{Q-\sqrt{K}}+\sqrt[3]{Q+\sqrt{K}}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{-\frac{P}{3}}} \, \frac{\sqrt[3]{(Q-\sqrt{K})^2}+\sqrt[3]{(Q+\sqrt{K})^2}}{\sqrt[3]{Q+\sqrt{K}}-\sqrt[3]{Q-\sqrt{K}}},$$

und im Falle P positiv ist

$$y+\mu = \frac{1}{2k_1}\sqrt{\frac{P}{3}}\left[1-\sqrt{1+\frac{4Qk_1}{\sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3}}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{P}{3}}\left[-\frac{1}{k_1}\left(1-\sqrt{1+\frac{4Qk_1}{\sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3}}}\right)\right.$$

$$\left.\pm\frac{\sqrt{-3}}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\sqrt{K}k}{\sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3}}}\right)\right]$$

$$\text{für} \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\frac{P}{3}}} \, \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{K}-Q)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{K}+Q)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{K}+Q}-\sqrt[3]{\sqrt{K}-Q}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\frac{P}{3}}} \, \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{K}-Q)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{K}+Q)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{K}+Q}+\sqrt[3]{\sqrt{K}-Q}}.$$

Um die Aenderung der Function ersichtlich zu machen, die dann eintritt, wenn in der Cardanischen Formel die Wurzeln gezogen werden, möge hiezu folgende Zusammenstellung dienen. Für

$$k_1 = \frac{2\sqrt{\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)\left(-\frac{P}{3}\right)^3}\left(8\sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2}\,Q^3-\sqrt{3}\left(3Q^4-6Q^2\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)-\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)^2\right)\right)}{64\sqrt{3}Q,-Q^2\sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2}\left(-\frac{P}{3}\right)^6-\left(3Q^6+Q^4\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)-17Q^2\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)^2+3\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)^3\right)}$$

$$k_2 = \frac{2\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{5}{2}}Q\left[8Q\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{3}\left(3\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)^2-6Q^2\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)-Q^4\right)\right]}{64\sqrt{3}Q\sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2}\left(-\frac{P}{3}\right)^6-\left(3Q^6+17Q^4\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)+Q^2\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)^2+3\left(4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2\right)^3\right)}$$

$$k_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{-\frac{P}{3}}} \, \frac{\sqrt[3]{\left(Q-\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(Q+\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}\right)^2}}{\sqrt[3]{Q-\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{Q+\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}}$$

$$k_4 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{-\frac{P}{3}}} \, \frac{\sqrt[3]{\left(Q-\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(Q+\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}\right)^2}}{\sqrt[3]{Q+\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{Q-\sqrt{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}}$$

$$k_5 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\frac{P}{2}}} \; \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}-Q\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}+Q\right)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}+Q} - \sqrt[3]{\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}-Q}}$$

$$k_6 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\frac{P}{3}}} \; \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}-Q\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}+Q\right)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}+Q} + \sqrt[3]{\sqrt{Q^2+4\left(\frac{P}{3}\right)^3}-Q}}$$

sind die Wurzeln einer cubischen Gleichung je nach den reellen Werthen von k

I im casu irreducibili:

für $-P$ und $4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 > Q^2$

$$y+\mu = -\frac{1}{2k_1}\sqrt{-\frac{P}{3}}\left(\sqrt{1+\frac{4Qk_1}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}-1\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{-\frac{P}{3}}\left[\frac{1}{k_1}\left(\sqrt{1+\frac{4Qk_1}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}-1\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{k_2}\left(\sqrt{1+\frac{4\sqrt{4\left(-\frac{P}{3}\right)^3-Q^2}\,k_2}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}-1\right)\right]$$

II für ein $-P$ und $4\left(-\frac{P}{3}\right)^3 < Q^2$

$$y+\mu = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{P}{3}}}{k_3}\left(\sqrt{1+\frac{4Qk_3}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}+1\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{-\frac{P}{3}}\left[\frac{1}{k_3}\left(\sqrt{1+\frac{4Qk_3}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}+1\right) + \frac{\sqrt{-3}}{k_4}\left(1-\sqrt{1+\frac{4\sqrt{Q^2-\frac{4P^3}{27}}\,k_4}{\left(-\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}\right)\right]$$

III für ein $+P$

$$y+\mu = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{3}}}{k_5}\left[1-\sqrt{1+\frac{4Qk_5}{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{P}{3}}\left[\frac{1}{k_5}\left(1-\sqrt{1+\frac{4Qk_5}{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}\right) \pm \frac{\sqrt{-3}}{k_6}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\sqrt{Q^2+\frac{4P^3}{27}}\,k_6}{\left(\frac{P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}\right)\right]$$