

III. Ueber Raute, Prisma und Kegel in akrometrischer Beziehung.

Von

Joseph Riedl v. Leuenstern.

Mitgetheilt am 16. August 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Die Spitzen prismatischer Körper wurden (Naturwiss. Abh. III. Bd. 2. Abth. S. 87.) als nächstfolgender Gegenstand bezeichnet.

Zwischen den beiden Klassen der Pyramiden und Prismen aber, steht noch als nicht zu überspringendes Mittelglied, die Raute (*Rhombus solidus*).

Die Pyramiden sind nämlich: Tetrakro-Tetraeder, Pentakro-Pentaeder, Hexakro-Hexaeder u. s. f.; oder, die Zahlen ihrer Spitzen und ihrer Flächen sind einander gleich.

Die Prismen, welche die Ordnungen: Hexakro-Pentaeder, Oktakro-Hexaeder, Dekakro-Heptaeder u. s. f. enthalten, geben die Zahl der Spitzen fortschreitend um 1, 2, 3, ... grösser als die der Flächen.

Den Uebergang machen die Rauten, als: Pentakro-Hexaeder, Hexakro-Oktaeder, Heptakro-Dekaeder u. s. f., bei welchen die Zahl der Spitzen um 1, 2, 3... minder als jene der Flächen ist.

Sie bestehen aus zwei Pyramiden, während ein Prisma drei derselben in sich begreift, und sollen eben so wenig darum schweigend übergangen werden, weil sie nur Doppelpyramiden, als man unterlassen dürfte die Vierecke in eine besondere Classe zu bringen, weil sie nur Doppeldreiecke sind. Und um so mehr gebührt ihnen ein eigenes Fach, als in der ersten und dritten ihrer hier genannten Ordnungen sich Regelkörper dritten Ranges, in der zweiten aber einer der fünf reinen Regelkörper befindet.

Es werden also hier zuerst Rauten, dann Prismen vorgenommen, insoferne ihre Eigenschaften sich von jenen der Pyramiden unterscheiden; endlich wird das allgemeine, vergleichende Mass auf die Spitzen der konischen Körper in Anwendung gebracht, worauf noch eine Tabelle berechneter Beispiele folgt.

Die Abtheilung: Ueber die Summen der Körperwinkel an Pyramiden enthielt in den Paragraphen 36 bis 38: Allgemeine Bestimmungen und Eintheilung der Pyramiden,

in den Paragraphen 39 bis 52: Lehrsätze und Rechnungsformeln,
 53 „ 60: Erläuterungen der Tabellen, und
 61 „ 70: Aufgaben zeichnender Darstellung.

71. Fünf Punkte im Raume, deren zwei die Pole einer senkrechten oder schiefen, die Ebene der drei andern durchschneidenden Axe sind, bestimmen zehn Linien, und zwar, von der Axe abgesehen: neun Kanten, sechs Dreiecke, fünf Spitzen, wovon zwei mit dreiseitigen, drei mit vierseitigen Körperwinkeln, und bilden so die einfachste Raute (Rhombus Pentakro-Hexaedrum).

Kommt ein neuer Punkt hinzu, der aber in jener durch drei festgestellten Ebene (Mittelfläche) liegen muss, so entsteht:

eine vierseitige Raute, mit zwölf Kanten, acht Dreiecken, sechs Spitzen;
 eben so eine fünfseitige, „ fünfzehn „ zehn „ sieben „
 und eine (n)seitige, „ (3n) „ (2n) „ (n+2) „

Von den Spitzen aber sind immer zwei (n)seitig, die übrigen vierseitig. Diese Classe übertrifft jene der Pyramiden noch an Reichthum der Gebilde; indem jede Pyramide mit jeder auf derselben Grundfläche möglichen andern verbunden seyn kann, und so die unendliche Mannigfaltigkeit sich unendlichfach steigert. Einige Summen symmetrischer (d. h. aus zwei ähnlichen Pyramiden bestehender), senkrechter und auf Regelmultiecken errichteter Rauten, sind aus den Tabellen A bis F der Pyramiden (III. Bd. 2. Abth.), durch Verdoppelung der Werthe zu erhalten.

72. Von der unmessbar grossen Länge der Axe beginnend, wo 360° die äusserste Grenze der Werthe ist, nehmen die Summen an symmetrischen, senkrechten Rauten mit gleichseitig dreieckiger Mittelfläche beständig ab, bis am Doppeltetraeder aus sechs gleichseitigen Dreiecken $ADBCE'$ (Fig. 30) das Minimum = $252^\circ. 41'. 26''$, 3... eintritt.

Dieser ist wegen seiner Eigenschaften: sechs congruente Regelflächen, eine siebente ebenfalls congruente als Mittelfläche, und einerlei Kanten; dann wegen der Mängel: zweierlei Spitzen und zwei umschriebene Kugeln — unter die Regelkörper dritten Ranges zu zählen.

Von hier aus wachsen die Summen bis ans Ende der Reihe, wo die Axe Null und das Maximum = 720° wird.

Andere Reihen dreiseitiger Rauten weichen mehr oder minder von diesem Gesetze ab. So ist (aus S. d. K. an Pyr. 58) bekannt, dass es Reihen von Pyramiden und folglich auch von Rauten gibt, in welchen die grössten Summen nicht mehr als hier die kleinste betragen, die kleinste derselben aber zu Nichts wird.

73. Das sphärische Pentakron $AEBCE'$ (Fig. 31) ist der nächste unvollkommene Regelkörper der oben besprochenen Reihe, in ihrem wieder zunehmenden Theile.

Der dritte Rang gebührt ihm, da er congruente Flächen hat und in einer Kugel eingeschrieben ist; dagegen sind seine Mängel: die sechs Dreiecke nur gleichschenkelig, folglich zweierlei Kanten und zweierlei Spitzen.

Seine Berechnung ist in der Tabelle A nicht aufgeführt und wird hier nachgetragen.

Die Bedingung, dass er zur Mittelfläche ein gleichseitiges Dreieck hat und ihm die Kugel umschrieben ist, gibt AE als Sehne eines Quadranten und AC als Sehne eines Drittelkreises; also den Kugelstrahl als Einheit genommen:

$$AE = 2\sin 45^\circ; \quad \frac{AC}{2} = \sin 60^\circ; \quad \text{und } \cos(EAC) = \frac{\sin 60^\circ}{2\sin 45^\circ},$$

oder in jedem der sechs Dreiecke die Winkel an der Grundlinie

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} &) = 52^\circ. 14'. 19'', 52\dots \\ & / = 52^\circ. 14'. 19,52\dots \end{aligned} \right\} \\ \text{am Scheitel} & \quad = \frac{75. 31. 20,95\dots}{180. 0. 0,0} \end{aligned}$$

woraus man (nach S. d. K. an Pyr. 44. 46) die Körperwinkel:

$$A = B = C = 50^\circ. 39'. 57'', 60\dots$$

$$E = E' = 55^\circ. 23'. 20,92\dots$$

$$\text{und die Summe} = 262^\circ. 46'. 43,68\dots \text{ erhält.}$$

74. Nun folgt die rechtwinkelige Raute, AFBCF' (Fig. 32), welche in den vierten Rang der Regelkörper gehört, indem sie zwar aus congruenten Halbquadraten besteht, dafür aber zweierlei Kanten, zweierlei Spitzen und zwei umschriebene Kugeln hat. Von diesem Körper ist zu erinnern, dass sein doppelter Körperinhalt, mehr dem Regeltetraeder seiner grössern Kante, gleich ist dem Kubus der kleinern Kante; denn es ist

$$AFBC + b'f'BC + a'f'CA + c'f'BA = 2AFBCF'$$

$$\text{und darum} \quad 2AFBCF' + A'f'BC = FBb'c'f'a'A'c'.$$

Die Körperwinkel sind (nach Tabelle A):

$$A = B = C = 38^\circ. 56'. 32'', 8\dots$$

$$F = F' = 90^\circ. 0'. 0,0$$

$$\text{und die Summe} = 296^\circ. 49'. 38,4\dots$$

75. Es seyen ein gleichseitiger Doppeltetraeder: ADBCD' (Fig. 30) und eine mit demselben auf einerlei Mittelfläche zu errichtende rechtwinkelige Raute: AfBCf' in ein identisches Kugelpaar einzuschreiben, wozu der Halbmesser R gegeben.

Ein Drittheil der Länge R wird auf einer Axe achtmal aufgetragen, so sind die äussern Pole D, D', als Scheitel des erstgenannten Körpers bestimmt; denn $Dm = mD' = \frac{1}{3}R$ ist bekanntlich die Höhe des eingeschriebenen Regeltetraeders. Bildet man dann mit dem Strahle R, aus den Theilungspunkten: 3, 5, zwei Kugelflächen und theilt den Kreis, in welchem sie sich schneiden, in drei gleiche Bogen, so ist

auch $AD = AD' = AB = BC$ u. s. f. Setzt man nun die Länge einer solchen Kante als Einheit, so ist der Durchmesser der umschriebenen Kugel:

$$Df' = D'f = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ und } Dm = mD' = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

In der Pyramide $AfCB$ aber müssen die zweierlei Kanten, wegen der in f rechten Scheitelwinkel sich verhalten:

$AC : Af = 1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$; und wenn $An = nC$, so muss auch

$nf' = \frac{1}{2}$; ferner, als Drittheil der Höhe des gleichseitigen Dreiecks:

$$nm = \sqrt{\frac{1}{12}}; \text{ folglich } mf' = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{1}{6}} \text{ seyn.}$$

Es ist also wieder: $Df' = Dm + mf' = \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$;

und die verlangten Scheitelpunkte f, f' , treffen mit den innern Polen beider Kugeln zusammen.

76. Die Summen vierseitiger Rauten (Hexakro-Oktaeder), haben als äusserste Grenzen an beiden Enden ihrer Reihen, den Werth der ganzen Kugelfläche, 720° .

In der gesammten Reihe der symmetrischen, senkrechten, mit einem Quadrat als Mittelfläche, erscheint (übereinstimmend mit Tabelle B) als Minimum der reine Regeloktaeder, der hier als Coryphaee aller Rauten an seinem Platze steht.

Jede seiner Spitzen misst: $77^\circ.53'.5''$, $56\dots$ und die Summe:

$$467.18.33.36\dots$$

Hierher gehört das merkwürdige Geschlecht der mehr oder minder verschobenen Oktaeder mit congruenten Gegendreiecken (S. d. K. an Pyr. 64 bis 68; Fig. 23), welche auf rhomboidischer Mittelfläche: $eghk$, aus zwei gleichen und ähnlichen Pyramiden: $efghk = hiekg$ bestehen. Ihre Abstammung aus den Tetraederpyramiden, deren Kerne sie bilden, ist dort hinreichend besprochen; eben so ihre sonstigen Eigenheiten und die Ermittlung ihrer Körperwinkel aus der Stammpyramide.

77. Aus der Tabelle C ergibt sich auf dieselbe Weise, die Reihe der symmetrischen, senkrechten, auf Regelvielecken errichteten Heptakro-Dekaeder, mit äusserster Grenze des Werthes bei 1080° , von wo die Summen abnehmen bis $631^\circ.20'.26''.6\dots$ und dann wieder zunehmen bis 720° . Jene kleinste Summe gehört dem Regeldekaeder (Fig. 33), aus zehn gleichseitigen Dreiecken und fünfzehn gleichen Kanten. Die Mängel dieser Raute, welche nicht gestatten, selbe in einen höhern als den dritten Rang zu bringen, sind, dass sie in keine Kugel passt und zweierlei Werthe der Spitzen hat; nämlich zwei zu:

$$150^\circ.56'.53''.75\dots \text{ am Scheitel, und fünf zu:}$$

$$65.53.19,82\dots \text{ an der Mittelfläche.}$$

Einer umschriebenen Kugel entbehrend, hat dieser Dekaeder gleichwohl einigen Ersatz darin, dass seine sieben Spitzen der Oberfläche eines ausgezeichneten Rotationskörpers angehören.

Es sey in einem Sphaeroid, dessen Axe zum Durchmesser des Aequators im aufsteigenden äussern und mittlern Verhältnisse steht, ein Kör-

per eingeschrieben, den fünf gleichweit abstehende Punkte im Aequator und zwei in den Polen bestimmen; so werden die zehn Seitenkanten aus beiden Scheiteln, den fünf Mittelkanten gleich, und es wird der erwähnte Dekaeder dargestellt seyn. Denn es ist

$$\begin{aligned} R &= Cr, \text{ der Halbmesser des Aequators oder die halbe grosse Axe;} \\ z &= db = CD, \text{ die Höhe des Scheitels über die Mittelfläche oder die halbe kleine Axe.} \\ &\text{der Zehneckseite gleich, wegen des gegebenen Verhältnisses;} \\ f &= AB = ab, \text{ die Fünfeckseite oder eine der fünf Mittelkanten;} \\ k &= DA = Dr, \text{ eine der zehn Seitenkanten; folglich} \\ &f^2 = R^2 + z^2; \end{aligned}$$

Es ist aber auch $(Dr)^2 = (Cr)^2 + CD^2 = R^2 + z^2 = k^2$; und daher alle Kanten gleich:
 $f = k = (AB) = (DA)$.

78. Symmetrische, senkrechte Rauten aller mehr als fünfseitigen Regelvielecke (vergl. S. d. K. an Pyr. 51 und die Tabellen D, E) können, da mehr als zehn gleichseitige Dreiecke in einer Raute nicht möglich sind, in ihren Reihen keine Wendepunkte haben. Ihre kleinste Summe ist demnach allgemein bei der kürzesten Axe, und = 8 rechten Winkeln. Die grösste aber,

$$\begin{aligned} \text{für sechsseitige} &= 16 \text{ rechten Winkeln} \\ \text{„ siebenseitige} &= 20 \text{ „ „} \\ \text{„ (n) seitige} &= 4(n-2) \text{ „ „} \end{aligned}$$

79. Wenn man auf jeder Dreiecksfläche einer Raute nach Willkühr einen Punkt bestimmt, und diese alle durch gerade verbindet, so entsteht ein Prisma; durch dasselbe Verfahren wird auch dem Prisma eine Raute eingeschrieben. Dabei tauschen Spitzen und Seiten immer ihre Zahlen gegeneinander aus: Dem Pentakro-Hexaeder ist ein Hexakro-Pentaeder, dem Hexakro-Oktaeder ein Oktakro-Hexaeder eingeschrieben und umschrieben; Heptakro-Dekaeder erzeugen Dekakro-Heptaeder und umgekehrt u. s. w.

Unter den möglichen eingeschriebenen Prismen ist aber eines in jeder Raute, das ihren eigentlichen Kern bildet und jedenfalls parallele Kanten und Grundebenen erhält, die Raute mag wie immer schief und unsymmetrisch seyn. Die beiden Grundflächen desselben sind unter sich congruent und der Mittelfläche der Raute ähnlich, nur in gewendeter Stellung.

Der Körperinhalt dieses Kernes ist ein Neuntel seiner Raute.

Es sey dem schiefen Pentakro-Hexaeder: $SABC\Sigma$ (Fig. 34) das Prisma einzuschreiben, welches den genannten Forderungen entspricht.

Wenn $d, e, g, \delta, \varepsilon, \gamma$, als Schwerpunkte der sechs begrenzenden Dreiecke ermittelt sind, so werden die senkrechten Höhen von d, e, g , über die Mittelebene (ABC) einander gleich und betragen ein Drittheil (= Mm) der Höhe des Scheitels S über dieselbe Ebene, und gleichmässig sind $\delta, \varepsilon, \gamma$, in der Gegenrichtung, in unter sich gleicher Tiefe, welche auch ein Drittheil (= $M\mu$) des Höhenunterschiedes zwischen der Ebene (ABC) und dem Scheitel Σ ist. Denn ein ebenes Dreieck mag wie immer geneigt seyn, so bleibt sein Schwerpunkt auf $\frac{1}{3}$ der Erhöhung seines Scheitels über eine

durch die Grundlinie geführte Ebene. Die Ebenen (deg), ($\delta\epsilon\gamma$) sind folglich mit (ABC) und unter sich parallel.

Nun aber geben die Schwerlinien: Sd , Se , Sg , $\Sigma\delta$, $\Sigma\epsilon$, $\Sigma\gamma$, indem sie ihrer Darstellung zufolge die Grundlinien in D , E , G , halbiren, wodurch zugleich:

$$\text{DE} = \frac{1}{2}\text{AC}; \quad \text{EG} = \frac{1}{2}\text{AB}; \quad \text{GD} = \frac{1}{2}\text{BC}$$

wird, in den Dreiecken:

$$\text{SDE}, \text{SEG}, \text{SGD}, \Sigma\text{DE}, \Sigma\text{EG}, \Sigma\text{GD},$$

ihrem Gesetze nach, die Verhältnisse:

$$\text{Sd}:\text{SD} = \text{Se}:\text{SE} = \text{Sg}:\text{SG} = \Sigma\delta:\Sigma\text{D} = \Sigma\epsilon:\Sigma\text{E} = \Sigma\gamma:\Sigma\text{G} = 2:3; \quad \text{ferner:}$$

$$\text{de}:\text{DE} = \text{eg}:\text{EG} = \text{gd}:\text{GD} = 2:3; \quad \text{und}$$

$$\delta\epsilon:\text{DE} = \epsilon\gamma:\text{EG} = \gamma\delta:\text{GD} = 2:3; \quad \text{woraus folgt:}$$

$$\text{de} = \delta\epsilon = \frac{1}{3}\text{AC}; \quad \text{eg} = \epsilon\gamma = \frac{1}{3}\text{AB}; \quad \text{gd} = \gamma\delta = \frac{1}{3}\text{BC}.$$

Erstens sind also die Dreiecke: $\text{deg} = \delta\epsilon\gamma$, congruent und parallel; daher die

Kanten: $\text{d}\delta = \text{e}\epsilon = \text{g}\gamma$, gleich und parallel;

Zweitens: jedes dieser beiden Dreiecke ist ein Neuntel des Mitteldreiecks ABC .

Endlich ist, wie oben gezeigt: $\text{Mm} + \text{M}\mu = \frac{1}{3}(\text{MS}' + \text{M}\Sigma) = \frac{1}{3}\text{S}'\Sigma$; oder die Höhe des Prisma gleich einem Drittel der Höhe der Raute, und demnach ist das verlangte Kernprisma an Körperinhalt gleich einem Neuntel der Raute, und wird durch die Schwerpunkte der einschliessenden Dreiecke bestimmt.

Im umgekehrten Falle ist noch leichter zu beweisen, dass eine durch die Schwerpunkte der Seiten des Prisma erzeugte Kernraute ein Zwölftel seines Körpermasses, folglich in der zweiten Abstammung $= \frac{1}{12}$ der ursprünglichen Raute ist.

80. Die Classe der prismatischen Körper, zu deren Feststellung im Raume mindestens drei Paar Punkte erfordert werden, von welchen nicht drei in einer geraden liegen dürfen; zerfällt der Lage der Kanten nach, in parallele, convergente und anomale.

An den ersten sind die beiden Grundflächen entweder congruent und gleichlaufend, oder unähnlich und geneigt: (Ordnung 1, 2.)

Die convergenten Prismen (gemeinhin gekürzte oder Rumpf-Pyramiden genannt), haben gleichfalls, nach der parallelen oder schiefen Lage der Ebenen, entweder ähnliche oder verschobene Grundflächen: (Ordnung 3, 4.)

Es kommen daher vier Ordnungen von Prismen, in Hinsicht auf das Mass ihrer Körperwinkel zu beachten; denn mit der fünften, welche die anomalen, von nicht übereinstimmenden Kanten, und daher nicht von Ebenen, sondern ganz oder zum Theile von Konoidflächen geformten Spitzen begreift, haben wir hier nichts zu thun, weil gekrümmte *) oder verdrehte Flächen keine messbaren Winkel einschliessen.

*) Die einzige Ausnahme unter allen krummen Flächen macht der Mantel des Kegels, dessen weiterhin gedacht wird.

81. In Folge der prismatischen Gestalt tritt unterscheidend die Eigenschaft hervor, dass nur dreikantige Spitzen vorkommen können, und dass jeder Tangentenwinkel (vergl. Mass II. Bd. 9) nicht mehr und nicht weniger als zweimal in der Summe erscheint, so dass allgemein bei (n) Seitenkanten und (2n) Grundkanten, statt zweier Tangentenwinkel einen Dieder gesetzt,

die Summe aller (2n) Spitzen, gleich der Summe der (3n) Dieder, weniger (4n) rechten Winkeln ist.

82. An Prismen mit parallelen Grundebenen: (Ordnung 1, 3.), gleichviel ob sie auf ihren Seitenkanten recht oder schief stehen, ergänzen sich die (2n) Dieder der Grundkanten gegenseitig auf (n) Halbkugeln oder (4n) rechte Winkel; dadurch wird (vergl. Mass, 10 bis 13):

die Summe der Spitzen gleich dem Werthe der (n) Dieder der Seitenkanten. Sind nun auch die Seitenkanten parallel: (Ordnung 1) und folglich die Dieder derselben zusammen $2(n-2)$ Viertelkugeln gleich, so erhält man die Summe der Körperwinkel, (welche im ganzen Reiche der Körper sonst nirgends als hier beständig ist):

für ein dreiseitiges Prisma 1. Ordnung: gleich vier rechten Winkeln;
für die Parallelepipeden und trapezischen

Prismen	„	acht	„	„
für ein Prisma aus (n) Parallelogrammen	„	$4(n-2)$	„	„

83. Der Regelpentaeder, Fig. 35, aus drei Quadraten (abcd), zwei gleichseitigen Dreiecken (efg = aby), neun gleichen Kanten und sechs congruenten Spitzen, jede zu 60° ; ist hinreichend als Beispiel für das erste der genannten Geschlechter. Dieses einfachste aller Prismen gehört zu den Regelkörpern dritten Ranges, und steht unter diesen dem zweiten Range fast am nächsten, indem ihm dazu nur die symmetrische Theilung der Kugelfläche mangelt, welche ihm umschrieben ist.

Wird seine Kante: $ab = bd = ef$, als Einheit genommen, so geben die Coordinaten $i\gamma = \frac{1}{2}$, und $\gamma k = if = \sqrt{\frac{1}{3}}$, den Kugelstrahl als Hypothenuse = $ik = \sqrt{\frac{7}{12}} = 0,763762\dots$

84. Aus dem zweiten Geschlechte, welches alle recht- und schiefwinkligen Oktaero-Hexaeder mit parallelen Seiten- und Grundflächen begreift, und deren acht Spitzen immer zusammen dem Mass der ganzen Kugel = 720° entsprechen, sey hier der Kubus, der vollkommenste aller geradlinigen Körper, die Einheit des Körpermasses, vorzugsweise genannt.

Unter den schiefwinkligen zeichnet sich aus:

Die Familie der Rhombal-Hexaeder (Fig. 36, 37), mit zwölf gleichen Kanten, sechs congruenten Rhomben, zwei scharfen und vier stumpfen Spitzen. Eine Art derselben ist der Rhombal-Kubus, aus Rhomben, deren jeder aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht; (Fig. 36) ein Regelkörper vierten Ranges, der dadurch anziehend wird, dass er eine einfache, klare Probe der allgemeinen Summe liefert. Denn wenn

er nach zwei seiner kleinern (den Kanten gleichen) Diagonalen, z. B: AC, EF, in parallelen Richtungen nach den Spitzen B und D, durch die Ebenen ACD, BEF, zerschnitten wird, so entfallen:

zwei Regeltetraeder	{	ADCG, mit der Summe = 126°. 20'. 43'',...	und es bleibt:
	}	EBFH, „ „ = 126. 20. 43,...	
ein Regeloktaeder ABCDEF	„	„	woraus sich
die Gesamtsumme des Rhombal-Kubus		= 720. 0. 0.	

85. Von allen mehrseitigen Prismen mit parallelen Kanten und Grundflächen, die man insgesamt kürzer Parallelprismen nennen dürfte, gilt das (82) ausgesprochene Gesetz, ohne Ausnahme, ob das Vieleck (Stammfläche), worauf sie gegründet sind, auch schiefwinkelig und ungleichseitig sey. Einzelner Beispiele bedarf es hier nicht weiter. Die Zahlen ihrer Elemente und Summen der Körperwinkel schreiten fort wie folgt:

Zahl der Seitenflächen:	n =	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...
„ „ Ebenen:	n + 2 =	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...
„ „ Spitzen:	2n =	6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...
„ „ Kanten:	3n =	9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ...
Summen in rechten Winkeln: $4(n-2) =$ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...		

86. Für jene Prismen, deren Seitenkanten parallel, deren Grundebenen aber gegeneinander geneigt sind (schiefabgeschnittene Prismen; Ordnung 2), gilt obiges Gesetz als Mittelmaass, von dem sie wachsend oder abnehmend, mehr oder minder beträchtlich abweichen. Je gleicher die Winkel und Seiten der Stammfläche, desto geringer, je spitziger ihr kleinster Winkel und je länger seine Schenkel, desto grösser wird diese Abweichung.

Es sey abc (Fig. 38) das Stammdreieck, ad, be, cf, die Seitenkanten eines Pentaeders, und abM eine seiner Grundflächen, deren dritte Spitze M, nach der Richtung cm in unbestimmter Ferne liegt; ich sage nun: Das Maximum der Summe der drei Körperwinkel a, b, M, findet statt, wenn die Seitenwinkel dam', ebm', so nahe als möglich an 180° sind, wodurch M in der Verlängerung von cm endlos weit gerückt wird, und wenn zugleich der Winkel bca beinahe Null ist.

Der mittlere Werth: $a + b + M = 180^\circ$, müsste sich ergeben, wenn M in c läge, wodurch abc selbst zur Grundfläche würde. Je mehr aber die Winkel dac, ebc, wachsen und je grösser cm wird, um so stumpfer ist die Neigung an der Kante ab; je kleiner man zugleich bca und damit die Neigung an der Kante fm annimmt, desto unveränderter bleiben die Neigungen an den Kanten am', bm', so dass die Summe bis 360° wächst, wenn die sechs Tangentenwinkel, von deren Werthe sie abhängt:

$$\left. \begin{array}{l} t_{(ad)} = 90^\circ \\ t_{(ab)} = 180 \\ t_{(am^1)} = 90 \\ t_{(bm^2)} = 90 \\ t_{(bc)} = 90 \\ t_{(fm)} = 0 \end{array} \right\} \text{haben, und folglich die Spitzen} \left\{ \begin{array}{l} a = t_{(ad)} + t_{(ab)} + t_{(am^1)} - 180^\circ = 180^\circ; \\ b = t_{(bc)} + t_{(ab)} + t_{(bm^2)} - 180^\circ = 180^\circ; \\ M = t_{(am^1)} + t_{(bm^2)} + t_{(fm)} - 180^\circ = 0^\circ; \\ \text{zusammen} = 360^\circ. \end{array} \right.$$

Ist nun derselbe Fall an der Gegenfläche deN, wenn nämlich fn, dn', en' unbestimmbar gross gedacht werden; so erreicht auch die Summe d + e + N das äusserste Mass von 360°; und das Grösste für das ganze Prisma ist = 720°.

Um auch die Bedingung für das Minimum darzustellen, denke man die Kante ab mit dem Dreieck abM als nicht bestehend; dagegen dμ¹, eμ², als ununterbrochene Seitenkanten weithin verlängert, indessen durch einen Schnitt von c gegen μ, äusserst wenig nach innen von der Richtung m abweichend, mit einer masslos entfernten neuen Kante μ¹μ² = ab das neue, in c unendlich spitzige Grunddreieck cμ¹μ² erzeugt wird.

Das Ende des Körpers, welches sich an seinem wahren Orte nicht darstellen lässt, versinnliche man sich, indem man das Ganze verkehrt, ab für μ¹μ² nimmt; so dass m¹a, m²b, als Schenkel des jetzt in der Ferne liegenden Winkels c erscheinen, und man wird finden, dass die Summe an der Grundfläche cμ¹μ² auf Null herabsinkt.

Denn die Neigung an der Kante ab (oder der damit gemeinten: μ¹μ²) wird unbestimmbar klein, im äussersten Falle Null; eben so jene an der Kante fc und deren Verlängerung, wegen des spitzigen Stammdreiecks efd, die übrigen aber bleiben unverändert, wie oben, und es werden die sechs Tangentenwinkel, wenn man die Figur wieder in ihre wahre, vorige Lage wendet:

$$\left. \begin{array}{l} t_{(\mu^1 d)} = 90^\circ \\ t_{(\mu^1 \mu^2)} = 0 \\ t_{(\mu^1 c)} = 90 \\ t_{(\mu^2 c)} = 90 \\ t_{(\mu^2 e)} = 90 \\ t_{(cf)} = 0 \end{array} \right\} \text{und durch sie die Spitzen} \left\{ \begin{array}{l} \mu^1 = t_{(\mu^1 \mu^2)} + t_{(\mu^1 d)} + t_{(\mu^1 c)} - 180 = 0; \\ \mu^2 = t_{(\mu^1 \mu^2)} + t_{(\mu^2 c)} + t_{(\mu^2 e)} - 180 = 0; \\ c = t_{(cf)} + t_{(\mu^2 c)} + t_{(\mu^1 c)} - 180 = 0; \\ \text{zusammen} = 0. \end{array} \right.$$

Nimmt man hierauf dieselben Verhältnisse für die Gegenfläche an, so wird auch dort die Summe f + n' + n'' = 0; und das Kleinste für die ganze Summe der Prismen dieser Ordnung: gleich Null. Das Grösste aber ist: das doppelte Mittelmass.

So unbeschränkt die Möglichkeit ist, dass sich diese Summen gegen das Grösste oder Kleinste wenden, eben so häufig müssen auch die Fälle seyn, wo sich die Neigungen der Ebenen gegenseitig so ausgleichen, dass sich das Ergebniss dem Mittelmass nähert.

87. Prismen mit convergenten Seitenkanten und parallelen Grundebenen (Ordnung 3) können auch als horizontal abgeschnittene Pyramiden behandelt werden, wobei das ergänzende Stück eine der ergänzten ähnliche Pyramide ist.

Die Summe ihrer Körperwinkel ist (nach 82) gleich der Summe ihrer Seitendieder. Sie ist aber nicht eine beständige, wie bei den aus Parallelogrammen gebildeten (Ordnung 1.); sondern: die für jene erwiesenen, allgemeinen Summenwerthe sind für diese ein Minimum. Im äussersten Falle nämlich, wo der Convergenzwinkel unbestimmbar klein ist, kehren sie zum Gesetze der Parallelpyramiden zurück; in allen übrigen Fällen sind sie grösser und nähern sich dem Maximum, welches dort eintritt, wo die Höhe Null und jeder Seitendieder gleich vier rechten Winkeln wird. Die äusserste Grenze ist also, da von $(2n)$ Spitzen die Hälfte gleich Null wird, für die Summe der übrigen: (n) Halbkugeln.

88. Die Prismen (Ordnung 4.) mit convergenten Seiten- und Grundebenen, geben für die Summe ihrer Spitzen (wie bei 81 allgemein) die Summe der Dieder aller Kanten, weniger (n) Halbkugeln.

Auch diese wachsen mit abnehmender Höhe, minderer Convergenz der Grundebenen und zunehmender Regelmässigkeit der Stammfläche, bis zum doppelten Mittelmaass, oder sinken bis Null herab, je mehr die Seitenkanten parallel, der Abschnitt schief und, (wie bei 86) der eine Winkel der Stammfläche äusserst klein wird.

89. Es sey zur Darstellung eines convergenten Prisma mit parallelen Grundebenen: $ABGDEabgde$, (Fig. 39) gegeben die Grundfläche $A'B'G'D'E'$, dann von zweien die Gegenfläche bildenden Punkten, z. B.: a, d , die Fusspunkte a', d' , auf der ersten Grundebene; endlich die vertikale Höhe Ff ;

zu finden alle Körperwinkel und Kanten.

Da die senkrecht auf die Grundebene fallende Axe der Convergenz ff' in einer Ebene mit den gleichlaufenden Höhenlinien aa', AA' liegen muss, so sind auch deren Fusspunkte in einer geraden: f, a', A' , und eben so f', d', D' , u. s. w.

Weil ferner die Vielecke beider Grundflächen, als parallele Durchschnitte convergenter Kanten ähnlich sind, und bei ähnlichen Flächen, wenn zwei oder mehr Linien der einen mit den gleichnamigen der andern parallel oder identisch sind, auch alle übrigen parallel seyn müssen; so sind auch die auf die Grundebene entworfenen Seiten der Gegenfläche: $a'b'g'd'e'$ parallel mit $A'B'G'D'E'$.

Auch wird jede auf eine Seitenfläche gezogene und eine Grundkante $A'B'$ mit der Gegenkante $a\beta'$ senkrecht verbindende $\alpha a''$ gleich der Hypothenuse des rechten Winkels seyn, welchen die Höhe ($a'a'' = Ff$) mit dem Abstände $a'a''$ zwischen beiden auf eine Ebene entworfenen Kanten $a'b'$ und $A'B'$ bildet.

Endlich ist jede Seitenkante Aa, Ee, \dots gleich der geraden $A'x, E'\varepsilon, \dots$ welche in der Entfaltungsebene, aus einem gegebenen Scheitel der Grundfläche A, E, \dots nach dem durch obige Hypothenuse bestimmten Punkte x, ε, \dots geführt wird.

Man trage also nach Angabe die Punkte $A', B', G', D', E', a', b'$, auf und bestimme durch die geraden $A'a', D'd'$, verlängert bis zu ihrem Durchschnitt f' , den Fusspunkt des Convergencescheitels; ziehe sodann $B'f', G'f', E'f'$, auf welchen die gleichlaufenden $e'd'$ zu $E'D'$, $g'd'$ zu $G'D'$, $a'b'$ zu $A'B'$, die übrigen Punkte e', g', b' , feststellen.

Auf jeder Seite der entworfenen Gegenfläche sind hierauf aus den beiden Ecken senkrechte von unbestimmter Länge $a'\alpha, a'\alpha', b'\beta, b'\beta', g'\gamma, g'\gamma', d'\delta, d'\delta', e'\epsilon, e'\epsilon'$, zu errichten, deren Durchschnitte auf den Seiten der ersten Grundfläche oder ihrer Verlängerung, die Punkte a'', b'', g'', d'', e'' bezeichnen.

Eben so werden die Punkte: $a''', b''', g''', d''', e'''$, auf den verlängerten Kanten der zweiten Grundfläche, durch $Ff = a'a''' = b'b''' = g'g''' = d'd''' = e'e'''$, (die gegebene Höhe) gefunden, und diese dienen wieder, um aus a'' mit $a''a'''$, aus b'' mit $b''b'''$, aus g'' mit $g''g'''$, aus d'' mit $d''d'''$, aus e'' mit $e''e'''$, durch die Bogen $a'''\alpha, b'''\beta, g'''\gamma, d'''\delta, e'''\epsilon$, die Höhen der Seitenflächen, und indem man $A'\alpha' = A'\alpha, B'\beta' = B'\beta, G'\gamma' = G'\gamma, D'\delta' = D'\delta, E'\epsilon' = E'\epsilon$ macht, die entfalteten Seitenkanten zu bestimmen.

Endlich bilden die Seitenwinkel: $\alpha A'B', B'A'E', E'A'\alpha'$, den Körperwinkel A ,
 „ „ $\beta B'G', G'B'A', A'B'\beta'$, „ „ B ,
 „ „ $\gamma G'D', D'G'B', B'G'\gamma'$, „ „ G ,
 „ „ $\delta D'E', E'D'G', G'D'\delta'$, „ „ D ,
 „ „ $\epsilon E'A', A'E'D', D'E'\epsilon'$, „ „ E ,
 „ „ $A'\alpha\beta', b'a'e', \epsilon\alpha'A'$, „ „ a ,
 „ „ $B'\beta\gamma', g'b'a', \alpha\beta'B'$, „ „ b ,
 „ „ $G'\gamma\delta', d'g'b', \beta\gamma'G'$, „ „ g ,
 „ „ $D'\delta\epsilon', e'd'g', \gamma\delta'D'$, „ „ d ,
 „ „ $E'\epsilon\alpha', a'e'd', \delta\epsilon'E'$, „ „ e .

90. Gegeben eine Ebene der Lage nach; dann zu drei, einer nicht bekannten Ebene angehörenden Punkten α, β, δ , die Fusspunkte A, B, D , auf jener erstern, und die senkrechten Höhen H_A, H_B, H_D , über dieselbe;

zu finden der Neigungswinkel φ des Durchschnittees beider Ebenen.

Man denke sich einen um die vertikalen Entwurfslinien Aa, Bb, Dd , beschriebenen Cylinder, von allen Seiten mit berührenden Ebenen umgeben, und die Punkte α, β, δ , der Reihe nach auf jeder dieser Ebenen entworfen, dabei beachte man den veränderlichen Entwurf der Winkel dieses Dreiecks, und man wird finden, dass der mittelste *) der Höhe nach (hier β) an zwei entgegengesetzten Punkten dieses Umkreises einen kleinsten Werth hat, dagegen an zwei andern, deren Richtung

*) Lügen zwei dieser Punkte gleich hoch, so dass sie sich in jenem Entwurfe in einen Punkt vereinigen; so wäre eben dadurch auch eine gerade Linie und der Neigungswinkel gegeben.

senkrecht auf der erstern steht, das Grösste mit 180° erreicht. Die beiden letztern parallelen Ebenen, auf welchen in Folge dessen $\alpha\beta\delta$ eine gerade Linie bildet, sind es, auf denen sich in der Verlängerung dieser geraden im Durchschnitte mit der Grundebene der gesuchte Neigungswinkel darstellt; und die Abstände (auf eben dieser Linie) verhalten sich wie ihre Höhenunterschiede.

Werden nun (Fig. 41) die gegebenen Höhen $H_A = Aa$, $H_B = Ah_1$, $H_C = Ah_2$. errichtet und die Grundebene ABD nach abd versetzt, ferner die entworfenene gerade ad so getheilt, dass sich

$$ap : ah_1 = ad : ah_2 = pd : h_1h_2$$

verhalte, wobei p den Ort des Punktes β auf derselben bezeichnet, und zu $p\beta$ in der Verlängerung nach β_2 als vertikale, die parallelen $d\delta_2$, $a\alpha_2$, wie auch (als Richtungslinie des Durchschnittes der Ebene, in welcher α_2 , β_2 , δ_2 , die besprochene gerade bilden sollen, mit der Grundebene) rechtwinkelig auf $d\delta$, die horizontal gedachte $d\varphi$, (auf welcher α_3 als neuer Fusspunkt erscheint) gezogen; so hat man nur noch die Höhen $H_A = Aa$, von α_3 nach α_2 , $H_D = Ah_2$, von d nach δ_2 aufzutragen und $\delta_2\alpha_2$ bis zum Durchschnitte mit $d\varphi$ zu führen, um in $\delta_2\varphi d$ die verlangte Zeichnung des Neigungswinkels zu erhalten.

Sind aber die Elemente des Dreiecks der Fusspunkte a , b , c , und ihre Höhen in Zahlen gegeben, so hat man aus dem Winkel bda , der Seite bd und der nach obigem Verhältnisse zu den Höhenunterschieden berechneten Seite pd , den Winkel:

$$pbd = bd\delta_2 \text{ und die Linie:}$$

$$\beta_3\delta_3 = (bd) \cdot \text{Sin}(pbd), \text{ endlich aus dieser:}$$

$$(\beta_3\delta_3) \text{ tang } \varphi = h_1h_2; \text{ oder } \text{tang } \varphi = \frac{h_1h_2}{\beta_3\delta_3}.$$

In vielen Fällen kann es bequemer seyn, den Winkel bad und die Seiten ab und ap zu benutzen, welche letztere sich aus

$$ah_2 : ah_1 = ad : ap \text{ ergibt; und so den Winkel:}$$

$$apb = ad\delta_2 \text{ zu bestimmen, woraus sich:}$$

$$\alpha_2\delta_3 = (da) \cdot \text{Sin}(ad\delta_2) \text{ endlich:}$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{ah_2}{\alpha_2\delta_3} \text{ findet.}$$

91. Gegeben zur Darstellung eines prismatischen Körpers: $ABGDEMNa b g d e m n$, (Fig. 40) mit convergenten Kanten und geneigten Grundebenen,

die eine Grundfläche: $A'B'G'D'E'M'N'$ vollständig, und von drei Spitzen der andern, die Fusspunkte: a' , b' , d' , mit ihren Höhen: H_a , H_b , H_d ; zu finden alle Winkel und Kanten.

Nachdem zuerst, wie bei 89, der Fusspunkt f der Convergenz, durch das Zusammentreffen der geraden $A'a'$, $B'b'$, $D'd'$, ermittelt ist, können durch diesen die fehlenden vier Fusspunkte nur gefunden werden, wenn die Richtung und der Neigungs-

winkel des Durchschnit­tes beider Grundebenen bekannt sind. Desswegen wird (der Deutlichkeit wegen, seitwärts: Fig. 41) das gegebene Dreieck $a'b'd'$ nach abd übertragen, um mittelst der Höhenunterschiede: $ah_2 = H_d - H_a$, $ah_1 = H_b - H_a$, und $h_1, h_2 = H_d - H_b$, durch das (in 90) gezeigte Verfahren erstens den Richtungswinkel $bd\varphi$ zu gewinnen, zu $d\varphi$ dann eine parallele $\varphi'F'$ (Fig. 40) durch den äussersten Punkt N' der gegebenen Grundfläche zu führen und den gleichfalls bestimmten Neigungswinkel so in φ' aufzutragen, dass $d'\delta$ auf $\varphi'F'$ senkrecht errichtet, der Punkt δ' und folglich auch die Punkte β' und α' über eben dieser Grundlinie $\varphi'F'$ auf ihren gegebenen Höhen H_d , H_b , H_a , (wie in Fig. 41: δ_2 , β_2 , α_2 , über der Linie $d\varphi$) stehen, und auch $\delta'\varphi' = \delta_2\varphi$ sey.

Auf der Grundlinie $\varphi'F'$ erscheinen vertikal entworfen, die Spitzen an der Grundfläche, in der Reihe: N' , A_2 , M_2 , E_2 , B_2 , D_2 , G_2 ; der Scheitel S der Convergenz kann daher durch drei sich daselbst schneidende Kantenlinien $A_2\alpha'$, $B_2\beta'$, $D_2\delta'$, schon genügend festgestellt, aus demselben aber sogleich die übrigen gezogen, und auf der Neigungslinie die Punkte ν' durch SN' , μ' durch SM_2 , ϵ' durch SE_2 , γ' durch SG_2 , bezeichnet werden.

Von diesen vier Punkten aus erhält man die vier noch unbekannt­en Fusspunkte:

n' durch die vertikale von ν' auf $N'f$ gezogen,
 m' „ „ „ μ' „ $M'f$ „
 e' „ „ „ ϵ' „ $E'f$ „
 g' „ „ „ γ' „ $G'f$ „ und es findet nun die

weitere Anwendung des Verfahrens (nach 89) statt, mit dem Unterschiede, dass dort nur eine gemeinschaftliche, hier aber wegen der schiefen Ebenen, verschiedene Höhen aufzutragen sind.

Die Punkte a' , b' , g' , d' , e' , m' , n' , durch gerade verbunden, bilden den Entwurf der zweiten Grundfläche auf der Ebene der ersten.

Ueber n' geht senkrecht auf die Richtung $M'N'$ die gerade n_2 nach n_1

„	n'	„	„	„	$N'A'$	„	n_5	„	n_7
„	a'	„	„	„	$N'A'$	„	a_2	„	a_4
„	a'	„	„	„	$A'B'$	„	a_5	„	a_7
„	b'	„	„	„	$A'B'$	„	b_2	„	b_4
„	b'	„	„	„	$B'G'$	„	b_5	„	b_7
„	g'	„	„	„	$B'G'$	„	g_2	„	g_4
„	g'	„	„	„	$G'D'$	„	g_5	„	g_7
„	d'	„	„	„	$G'D'$	„	d_2	„	d_4
„	d'	„	„	„	$D'E'$	„	d_5	„	d_7
„	e'	„	„	„	$D'E'$	„	e_2	„	e_4
„	e'	„	„	„	$E'M'$	„	e_5	„	e_7
„	m'	„	„	„	$E'M'$	„	m_2	„	m_4
„	m'	„	„	„	$M'N'$	„	m_5	„	m_7

Die senkrechten Höhen über die Grundlinie $\varphi' F'$ werden in der Richtung der Seiten der Grundfläche aufgetragen und zwar:

die Höhe: ν' in der Richtung: $N' M'$, von n_2 nach n_3 und in d. Richt. $N' A'$, von n_5 nach n_6

„	α'	„	$A' N'$,	„	a_2	„	a_3	„	$A' B'$,	„	a_5	„	a_6
„	β'	„	$B' A'$,	„	b_2	„	b_3	„	$B' G'$,	„	b_5	„	b_6
„	γ'	„	$G' B'$,	„	g_2	„	g_3	„	$G' D'$,	„	g_5	„	g_6
„	δ'	„	$D' G'$,	„	d_2	„	d_3	„	$D' E'$,	„	d_5	„	d_6
„	ε'	„	$E' D'$,	„	e_2	„	e_3	„	$E' M'$,	„	e_5	„	e_6
„	μ'	„	$M' E'$,	„	m_2	„	m_3	„	$M' N'$,	„	m_5	„	m_6

Dann wird: $n_2 n_4 = n' n_3$, dann $n_5 n_7 = n' n_6$, und die Kante: $N' n_4 = N' n_7$

$a_2 a_4 = a' a_3$,	„	$a_5 a_7 = a' a_6$,	„	$A' a_4 = A' a_7$
$b_2 b_4 = b' b_3$,	„	$b_5 b_7 = b' b_6$,	„	$B' b_4 = B' b_7$
$g_2 g_4 = g' g_3$,	„	$g_5 g_7 = g' g_6$,	„	$G' g_4 = G' g_7$
$d_2 d_4 = d' d_3$,	„	$d_5 d_7 = d' d_6$,	„	$D' d_4 = D' d_7$
$e_2 e_4 = e' e_3$,	„	$e_5 e_7 = e' e_6$,	„	$E' e_4 = E' e_7$
$m_2 m_4 = m' m_3$,	„	$m_5 m_7 = m' m_6$,	„	$M' m_4 = M' m_7$

Es bleibt nun noch die wahre Gestalt der obern Grundfläche darzustellen, wozu die zwar richtig bestimmten Kanten in der Entfaltung:

$$a_4 n_7, b_4 a_7, g_4 b_7, d_4 g_7, e_4 d_7, m_4 e_7, n_4 m_7,$$

doch nicht hinreichend sind. Wir haben aber in der gehörig geneigten Linie $\varphi' \gamma' = \varphi' \gamma_2$ (Fig. 40. 41.) die Abscissen schon gefunden und können auf der Richtungslinie $\varphi' F'$ senkrechte Ordinaten nach den Fusspunkten ziehen und messen; es ergibt sich demnach die Lage der Punkte:

γ	durch die Abscisse:	$\varphi \gamma_2$	und Ordinate:	$g' = \gamma_2 \gamma$
δ	„	$\varphi \delta_2$	„	$d' = \delta_2 \delta$
β	„	$\varphi \beta_2$	„	$b' = \beta_2 \beta$
e	„	$\varphi \varepsilon_2$	„	$e' = \varepsilon_2 e$
μ	„	$\varphi \mu_2$	„	$m' = \mu_2 \mu$
α	„	$\varphi \alpha_2$	„	$a' = \alpha_2 \alpha$
ν	„	$\varphi \nu_2$	„	$n' = \nu_2 \nu$

und endlich die Bestimmung aller vierzehn Körperwinkel:

A	„	„	durch die Seitenwinkel:	$a_4 A' N'$,	$a_7 A' B'$,	$N' A' B'$,
B	„	„	„	$b_4 B' A'$,	$b_7 B' G'$,	$A' B' G'$,
G	„	„	„	$g_4 G' B'$,	$g_7 G' D'$,	$B' G' D'$,
D	„	„	„	$d_4 D' G'$,	$d_7 D' E'$,	$G' D' E'$,
E	„	„	„	$e_4 E' D'$,	$e_7 E' M'$,	$D' E' M'$,
M	„	„	„	$m_4 M' E'$,	$m_7 M' N'$,	$E' M' N'$,
N	„	„	„	$n_4 N' M'$,	$n_7 N' A'$,	$M' N' A'$,

a	durch die	Seitenwinkel:	$n; a_6 A', b_6 a_7 A', \gamma \alpha \beta,$
b	„	„	$a_7 b_6 B', g_6 b_7 B', \alpha \beta \gamma.$
g	„	„	$b_7 g_6 G', d_6 g_7 G', \beta \gamma \delta,$
d	„	„	$g_7 d_6 D', e_6 d_7 D', \gamma \delta \varepsilon,$
e	„	„	$d_7 e_6 E', m_6 e_7 E', \delta \varepsilon \mu,$
m	„	„	$e_7 m_6 M', n_6 m_7 M', \varepsilon \mu \nu,$
n	„	„	$m_7 n_6 N', a_6 n_7 N', \mu \nu \alpha.$

92. Ein ebener Flächenraum, gebildet von sich schneidenden krummen Linien, oder auch von geraden mit krummen wechselnd, hat allerdings auch Ecken; aber diese sind nicht messbar, folglich keine Winkel. Denn sie bleiben nicht, wie Winkel aus zwei geraden: beständig sich ähnlich als Kreisabschnitte, bei veränderlichem Halbmesser. Einige Alte meinten zwar: Der Winkel aus Bogen und Tangente wäre kleiner als der kleinste messbare Winkel und doch grösser als Null; der Winkel aus Bogen und Durchmesser grösser als der grösste spitzige und doch noch kein rechter u. s. w. Aber damit ist nicht viel mehr gesagt, als wenn man einfach gestehen will, das vergleichende Mass der ebenen Winkel sey auf solche Ecken nicht anwendbar. Auch die Annahme, der Winkel zweier Bogen auf der Ebene, sey dem Winkel ihrer Tangenten gleich, führt auf die bekannten Widersprüche der Wechselwinkel, wovon der eine mit auswärts strebenden Bogen nicht grösser seyn soll, als der andere mit sich immer nähernden, nach innen gekrümmten. Selbst auf der Sphäre werden nur die Winkel grosser Kreise, nicht aber die Durchschnitte von Bogen der kleinen Kreise durch ihre Tangentenwinkel richtig vertreten.

Mit gleichem Rechte gilt von der Spitze eines Körpers, dass sie nur dann als Winkel messbar ist, wenn der durch sie bestimmte Abschnitt der Kugel sich bei jedem möglichen Halbmesser ähnlich bleibt.

Daher sind alle Spitzen, welche von Theilen der Kugelfläche, von ellipsoidischen, paraboloidischen, konoidischen oder unregelmässigen krummen Flächen, (auch von ebenen mit solchen krummen Seitenflächen in Verbindung) gebildet werden, in dem hier ausgesprochenen Sinne keine Körperwinkel.

93. Stellt man aber die Frage, wie die von einer krummen Fläche begrenzte Spitze bedingt seyn müsse, um mit unserm Masse gemessen zu werden — so antworten wir: Vom Scheitel mitten durch den innern Raum eine Ebene gelegt, soll diese in jeder Wendung um eine Axe, den gleichen, geradlinigen Durchschnittswinkel erzeugen; so dass, den Scheitel in den Mittelpunkt der Kugel gesetzt, jeder Strahl aus demselben nach der Oberfläche geführt, seiner ganzen Länge nach der krummen Fläche angehört und sie nirgend verlässt, und dass der eingeschlossene Raum, auch bei wachsender und abnehmender Kugel, ihr beständig sich ähnlicher, verhältnisslicher Theil bleibt.

Eine solche Fläche ist der Mantel des Kegels. Es können aber durch denselben dreierlei Formen messbarer Spitzen entstehen:

- 1.) eigentliche Kegelwinkel, ohne Kanten, nur vom Mantel gebildet;
- 2.) Kegeltheilwinkel, einerseits vom Mantel, andererseits von Ebenen begrenzt (Fig. 42.); diese sind entweder Einschnittwinkel: $EKA D r$, $DKAB m$, mit 3 Kanten, oder Abschnittwinkel: $BKD n$, BKE , mit 2 Kanten.
- 3.) Kegelhohlwinkel (Erfüllung des Zwischenraumes der Kegelwinkel, Fig. 43. 46.) durch drei oder mehr sich berührende Mäntel aus einem gemeinschaftlichen Scheitel so umschlossen, dass die Berührungslinien zu Kanten werden.

94. Für das Verhältniss des Körpermasses zweier durch Kegelmäntel gebildeter Ausschnitte A , a , einer Kugel deren Strahl = 1, die gegebenen Scheitelwinkel der Durchschnitte aber D , d , sind, finde ich nach bekannten Gesetzen den kürzesten Ausdruck:

$$A : a = \left(\sin^2 \frac{D}{4} \right) : \left(\sin^2 \frac{d}{4} \right).$$

Wie diese Ausschnitte, verhalten sich aber (nach 6. vergl. M. d. K.) auch die Körperwinkel, deren jeder in Sekunden:

$$K = 8R'' \cdot \sin^2 \frac{D}{4}$$

gleich dem Produkte des Sinusquadrats des Vierteldurchschnittes in die ganze Kugelfläche ist.

95. Es sey nun zur Darstellung des auf einer berührenden Ebene entfalteten Kegelmantels, gegeben der akrometrische Werth der Spitze K ; zu finden der Bogen des Kreisausschnittes M .

Den Winkel D des Durchschnittees als bekannt vorausgesetzt, wäre der gesuchte Bogen gleich dem Produkte aus dem Sinus des halben Durchschnittees in die Fläche der Halbkugel. Man hat also zuerst D zu suchen durch:

$$\sin \frac{D}{4} = \sqrt{\left(\frac{K}{8R''} \right)}; \text{ und dann ist}$$

$$M = 4R'' \cdot \sin \frac{D}{2}.$$

96. Zur Messung eines Kegeltheilwinkels: $DKAB m = K_t$, (Fig. 42) ist erstens erforderlich: Der Werth der Spitze des ganzen Kegels = K , oder auch weil einer aus dem andern leicht zu finden, der ebene Durchschnittswinkel $D = EKB$; zweitens, der Bogen DB des Kreises $EDBE$ als Mass des Einschnittes DCB . Da der gegebene ein Einschnittwinkel ist, so genügt das Verhältniss:

$$4R'' : DB'' = K : K_t.$$

Ist aber ein Abschnittwinkel: $BKD n = K_a$ zu bestimmen, so hat man von dem gefundenen Werthe des Einschnittes noch die Spitze der Pyramide $DKAB n = p$ abzuziehen, deren Mass die Seitenwinkel, oder grossen Kreisbogen: AB , BD , DA , geben.

$$K_a = K_t - p.$$

97. Um drei- oder mehrkantige Kegelhohlwinkel (Fig. 44. 43.) zu messen, muss man die Kegel, aus denen sie gebildet sind, und die Linien der Berührung: pa , pb , pd , pe , ... vollständig kennen. Sind diese gegeben, so sind es auch die Sehnen: ab , bd , da , de , ea , ...; und durch diese die Pyramiden: $apbd$, $apbde$, ...; ferner die Halbmesser der Kugelsegmente, welche zugleich Grundflächen der Kegel sind, die Bogen: ab , bd , da , ... zu den gleichnamigen Sehnen, die Höhen der Kegelaxen, die Ausschnittpyramiden, endlich die daraus zu findenden Einschnittwinkel und Abschnittswinkel.

Von der zuerst ermittelten Spitze der Stammpyramide p werden dann die umgebenden drei oder mehr Abschnittswinkel abgezogen. Der Rest ist der verlangte Werth des Hohlwinkels.

$$K_h = p - k_a - k'_a - k''_a - \dots$$

98. Die allseitige Gleichförmigkeit der Spitze eines geraden Kegels macht, dass sich dieselbe für den Augenschein besser als irgend eine zur allgemeinen Vergleichung der Körperwinkel eignet, indem man wie bei ebenen Winkeln, sogleich den grössern aus zweien erkennt, und die Täuschung wegfällt, welche bei Pyramiden und andern geradlinigen Körpern gewöhnlich ist. Es schien daher nicht zwecklos, die Zahlenwerthe einiger bemerkenswerthen Kegelspitzen aus der ganzen sie alle umfassenden Reihe von Null bis zur Halbkugel hervorzuheben, und sowohl unter sich, mit den ihnen angehörigen ebenen Winkeln am Scheitel des Durchschnittes und am entfalteten Mantel, als auch mit den gleich grossen, anderer Formen zusammenzustellen.

Das erste, was bei Eröffnung dieser Reihe auffällt, ist die ganz andere und viel richtigere Bezeichnung der Schärfe feiner Nadelspitzen nach akrometrischem Mass, als nach dem Durchschnitte. Jenes steigt im Anfang (von Fig. 45 bis Fig. 46) um das siebenzigfache, während Durchschnitt und Mantel sich nur zehnfach vermehren.

99. Folgende Spitzen senkrechter Pyramiden sind zur Vergleichung mit den entsprechenden Kegelwinkeln, den Tabellen A, B, C, (Summen d. K. III. Bd. 2. Abth.) entnommen und nebst dazu berechneten Durchschnitten und Mantelwinkeln hier eingereiht:

(Fig. 48.) Die Spitze des Regeltetraeders.

(Fig. 49.) Der Mittelpunktwinkel des Regelikosaeders, oder die Spitze einer der zwanzig Pyramiden, in welche dieser Körper von der Mitte aus theilbar ist.

(Fig. 51.) Der Mittelpunktwinkel des Regeldodekaeders, oder die Spitze einer seiner zwölf fünfseitigen Pyramiden.

(Fig. 54.) Die Spitze des Regeloktaeders.

(Fig. 55.) Die Spitze des Regelhexaeders (Kubus), und zugleich der Mittelpunktwinkel des Regeloktaeders, oder der rechte Körperwinkel. Dieser wird noch weiter unten besprochen.

(Fig. 59.) Der Mittelpunktwinkel des Kubus, oder die Spitze einer der sechs vier-

seitigen Pyramiden aus welchen er besteht; auch die Spitze einer der sechs dreiseitigen Centralpyramiden des sphärischen Pentakron.

(Fig. 60.) Die Spitze des Regelikosaeders; zugleich eine Polarspitze des Heptakro-
Dekaeders.

(Fig. 61.) Die Spitze des Regeldodekaeders.

(Fig. 62.) Der Mittelpunktwinkel des Regeltetraeders.

100. Der gleichseitige Kegel (Fig. 50) hat zum Mantel den Halbkreis und $48^{\circ}.13'.51''.04\dots$ ist sein akrometrisches Mass; er hält also ziemlich das Mittel zwischen den Centralpyramiden der beiden reinen Regelkörper (Fig. 49. 51).

101. Der rechtwinkelige Kegel ist eine Benennung, um die eine Streitfrage bestehen könnte, wenn man nicht von vorne herein mit der nöthigen Unterscheidung einschreiten und sich über die getrennten Begriffe durch Beinamen verständigen wollte. Nach dem vergleichenden Mass ist ein rechter Körperwinkel dem achten Theile der Kugel gleich; ein Kegel, dessen Spitze in die Mitte der Kugel gestellt, einen Ausschnitt bildet, dessen Körpermass achtmal in der Kugel ohne Rest enthalten ist (Fig. 55), kann daher ein akrometrisch rechter Kegel genannt werden, da er 90° misst, ob-
schon sein Scheitel im vertikalen Durchschnitte nur

$$D = 82^{\circ}.49'.9''.3\dots \text{ ist.}$$

Der Rechnung genügt die Bezeichnung, aber dem Auge widerspricht sie; auch lässt sich der Kugelraum überhaupt nicht mit Kegeln ausfüllen, und in diesem Sinne würde die Benennung nur auf die Spitzen des Regelhexaeders passen. Denn auch der zweite rechte Kegel, oder dem Alter nach der erste: der Kegel des Apollonius *) (Fig. 57) hätte keinen begründeten Anspruch auf dieselbe; will man für ihn geltend machen, dass er dem Auge rechtwinkelig erscheint, weil sein Durchschnitt 90° hat, so ist er dagegen als Körperwinkel schon bedeutend stumpf (um mehr als 15 Grade grösser als die Spitze des Kubus), nämlich:

$$K = 105^{\circ}.26'.29''.61\dots$$

und also noch weniger als sein Gegner, achtmal in der Kugel denkbar. Sechs solcher Kegel mit den acht dazwischen liegenden Hohlwinkeln erfüllen den sphärischen Raum genau (Fig. 44), und da die Summe der Kegelwinkel:

$$6K = 632^{\circ}.38'.57,66\dots \text{ ist, so bleibt für die Hohlwinkel:}$$

$$8K_h = 87.21.2,33\dots \text{ und für jeden derselben (apbd):}$$

$$K_h = 10.55.7,7\dots$$

102. Eine Eigenschaft des APOLLONIUS'schen Kegels kann ich mitzutheilen nicht unterlassen: Das Mass seiner Spitze in Kugelgraden, mehr dem Bogen seines Mantels in Kreisgraden ist dem Nennwerthe nach, der Halbkugel gleich. (Tab. G. Fig. 57.) Der Grund findet sich leicht aus 94, 95.

*) APOLLONIUS scheint sich vorzugsweise mit diesem Kegel beschäftigt zu haben, da er seine Parabel den rechtwinkelligen Schnitt nannte, was bei jedem andern Kegel unrichtig gewesen wäre.

Diese Wahrnehmung führte mich aber auf den Gedanken, dass es auch einen Kegel geben müsse, dessen Durchschnitt dem Bogen gleich ist, welcher den Mantelwinkel auf einen Umkreis ergünzt; so dass der aufgerichtete Kegel (Fig. 58) in den Kreisausschnitt des entfalteten Mantels, oder vielmehr der Mantel in zweifachem Sinne an den Kegel passt. Ich fand:

$$\begin{array}{r} D = 94^{\circ}. 51'. 56'', 1... \\ M = 265. 8. 3,8... \\ \hline 360. 0. 0,0 \end{array}$$

Eben so ermittelte ich den Kegel (Fig. 53), dessen Körperwinkel denselben Werth hat als sein Durchschnitt:

$$K = D = 75^{\circ}. 39'. 36'', 88...$$

die einzige Spitze im ganzen Umfange der Körperlehre, an welcher das gonometrische Mass mit dem akrometrischen gleichbedeutend ist.

Von der schärfsten Spitze (Tabelle G.) bis hierher bleibt der Körperwinkel kleiner als der Durchschnitt, und beide zusammen kleiner als der Mantel. Von hier an bis ans Ende der Reihe wird beständig K grösser als D, und endlich K = M.

103. Es seyen für den grössten in die Kugel einzuschreibenden Kegel, der Durchschnitt, der Körperwinkel und der Mantel zu finden.

Wenn der Durchmesser der Kugel = 1, und die Höhe des eingeschriebenen Kegels = 1 - x gesetzt wird, so ist das Körpermass desselben allgemein:

$$K = (x^3 - 2x^2 + x) \cdot \frac{\pi}{3}; \text{ daher:}$$

$$d(K) = 3x^2 dx - 4x dx + dx = 0; \text{ und:}$$

$$x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}; \text{ oder:}$$

$$x' = +1, \text{ für den kleinsten,}$$

$$x = +\frac{1}{3}, \text{ für den grössten Kegel; d. h.}$$

Die Höhe des grössten Kegels in der Kugel ist $\frac{2}{3}$ ihres Durchmessers (Fig. 52). Folglich ist:

$$r \cos D = \frac{r}{3}, \text{ und:}$$

$$D = 70^{\circ}. 31'. 56'', 3... \text{ woraus (nach 94. 95.)}$$

$$K = 66. 4. 3,5... \text{ und}$$

$$M = 207. 51. 20,3... \text{ gefunden wird.}$$

104. Es sey der krumme Ausschnitt eines gegebenen Kegelmantels, von dessen aufgerichtetem Kegel ein Stück durch den Parabelschnitt getrennt worden, in der Entfaltung darzustellen.

Wird der unendlich kleine Kegel mit der Spitze gleich Null, an der obersten Grenze der Reihe parabolisch geschnitten, so erscheint seine Parabel als Embryo und wiederholt sich genau so auf der kleinen Entfaltung, die Arme von der Mitte abge-

wendet nach aussen gerichtet. Der Kegel an der untersten Grenze aber, wo die Spitze die Halbkugel erfüllt, dagegen die Höhe Null wird, ist identisch mit dem entfalteten Mantel, folglich auch die Parabel, — kein Embryo, congruent mit dem Ausschnitte, dessen Arme in der Gegenrichtung der obigen, sich nach der Mitte und über diese hinaus nach dem Umkreise strecken.

Dieses genügt, um zu wissen, wie sich beim Fortschreiten nach einem Gesetze, die veränderliche Krümmung des gesuchten Ausschnittes innerhalb der Reihe gestalten muss. Unmittelbar nach jenem ersten Schnitte mit der imaginären Parabel, folgen in ununterbrochener Ordnung alle möglichen Hyperbeln zweiten Grades, mit dem Brennpunkte zwischen ihrem Scheitel und dem Rande der Entfaltung, vom spitzigsten Asymptotenwinkel immer zunehmend; bis mitten in der Reihe eine Wendung stattfindet, von wo aus alle dieselben Hyperbeln, mit dem Brennpunkte zwischen ihrem Scheitel und dem Mittelpunkte der Entfaltung, also negativ, in rückläufiger Ordnung mit abnehmenden Assymptotenwinkeln erscheinen, und die verkehrte imaginäre Parabel den Schluss macht.

An dem Orte der Wendung muss eine Hyperbel stehen, deren Brennpunkt und Scheitel eins sind, oder mit andern Worten: es muss dort einen Kegel geben, dessen parabolischer Mantelausschnitt in der Entfaltung eine gerade Linie ist.

Ich verlängere den Kegel ($ec'e'$) (Fig. 47) und seinen parabolischen Schnitt ($e..3..$) bis an den Kreis (ab), in dessen Mitte (m) sich die Axe des Kegels und die Ebene des Schnittes begegnen, damit der Punkt des Einschnittes (e) gleich weit von der Spitze des Kegels (c) und dem Rande seiner Grundfläche (a) abstehe. Mit dem Strahle $ca = cb$ ziehe ich den Bogen des entfalteten Mantels DE und stelle den Mantelwinkel nach Angabe, $M = DE$ mitten über die Axe. Durch dieses Verfahren habe ich schon drei Punkte der Hyperbel bestimmt; nämlich S , den Scheitel, indem $cS = ce$ auf der Axe abgeschnitten wird; dann A und B , nachdem der Bogen DE in vier gleiche getheilt und $DA + BE = AB$ gemacht worden. Denn DE ist dem Umkreise gleich, dessen Durchmesser ab , und der durch den Parabelschnitt in mm' halbirt ist. A und B entsprechen also dem Punkte (m) und seinem diametralen Gegenpunkte (m'), weil AB den Halbkreis in der Entfaltung vertritt. (Fig. 50. 63.)

Bis hierher ist fürs erste entschieden, dass der Ausschnitt ASB in dem Kegel (Fig. 47) eine spitzige, in dem Kegel (Fig. 50) eine stumpfe, bei (Fig. 63) aber eine überstumpfe oder negative Hyperbel ist, wodurch sich das oben vorläufig Ausgesprochene thätlich bestätigt. Nun kann man aber leicht so viele Punkte der Hyperbeln bestimmen, als man zur beschreibenden Darstellung wünscht, indem man den aufgerichteten Halbkreis der Grundfläche aob in beliebig viele gleiche Theile, den Bogen AB aber in eben so viele theilt; z. B. $a, 1, 2, 3, 0, 3, 2, 1, b$; und $A, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, B$; ferner von dem Halbkreise auf die Grundlinie die ihm entspricht, durch die senkrechten $11, 22, 33, 33, 22, 11$, diese Theilung überträgt; die geraden, und wie man

nicht vergessen darf, alle einander gleichen: $ca, c1, c2, c3, cm, c3, c2, c1, cb$, aus der Spitze an den Rand des aufgerichteten Mantels, auch eben so die ihnen entsprechenden Strahle: $cA, c3, c2, c1, c0, c1, c2, c3, cB$, nach dem Umkreis der Entfaltung führt; endlich von der Linie em , welche die Grenze des Ausschnittes vorstellt, die Durchschnittspunkte 1, 2, 3, an die Endpunkte der (parallele Kreise bedeutenden) Geraden 111, 222, 333, und von da weiter durch die Bogen 1, 2, 3, gleichförmig zu beiden Seiten bis zu deren Durchschnitten mit den gleichnamigen Strahlen der Entfaltung bringt. (Fig. 47.)

105. In Beziehung auf den vorhin erwähnten Wendepunkt in der Kegelreihe, bleibt noch die Frage zu erörtern: bei welchem Werthe des Mantelwinkels die zuerst gefundenen drei Punkte des Ausschnittes in einer geraden stehen? und dann, welchem Kegel dieser Mantel angehört?

Es ist aber, wie wir gesehen (Fig. 47. 50. 63) die Entfernung des hyperbolischen Scheitels vom Mittelpunkte des Kreises der Entfaltung, nach meinem Verfahren immer dem halben Strahle dieses Kreises gleich: $CS = \frac{1}{2} CB$; und eben so ist beständig der Bogen: $(BE) = \frac{1}{4} (DABE)$.

Die drei Punkte A, S, B... können daher nur dann sich in einer geraden befinden, und mit ihnen die ganze Hyperbel; wenn der Cosinus des vierten Theiles des Mantelwinkels dem halben Strahle gleich ist: $\cos(BCS) = \frac{1}{2}(BC)$. In diesem Falle aber ist

$(DABE) = M = 240^\circ. 0'. 0'',0$ und die Spitze des Kegels (Fig. 56):

$$K = 91.40.18,4\dots$$

$$D = 83.37.14,2\dots$$

Um den Stoff gänzlich zu erschöpfen, müssten auch die Körperwinkel der schiefen und elliptischen Kegel untersucht werden, welche obgleich an der Kugelfläche von Krümmen doppelter Krümmung begrenzt, doch nach den angenommenen Grundsätzen annähernd messbar sind und in so fern allerdings eine eigene Besprechung verdienen.

Tabelle G.

Vergleichung der Winkel am Kegel.

Körperwinkel :	Ebene Winkel		Nachweisung der Eigenschaften.
	am Scheitel des Durchschnittes :	am entfalteten Mantel :	
K =	M =	D =	
0°. 0'. 49",34..	1°. 0'. 0",0	3°. 8'. 29",59	(98. Fig. 45.)
0. 3. 17,38..	2. 0. 0,0	6. 16. 58,3..	
0. 7. 24,10..	3. 0. 0,0	9. 25. 25,3..	
0. 13. 9,48..	4. 0. 0,0	12. 33. 49,7..	
0. 20. 33,50..	5. 0. 0,0	15. 42. 10,7..	
0. 29. 36,12..	6. 0. 0,0	18. 50. 27,1..	
0. 40. 17,30..	7. 0. 0,0	21. 58. 38,9..	
0. 52. 36,99..	8. 0. 0,0	25. 6. 44,3..	
1. 0. 0,0	8. 32. 35,2..	26. 48. 50,9..	
1. 6. 35,13..	9. 0. 0,0	28. 14. 42,98..	
1. 22. 11,67..	10. 0. 0,0	31. 22. 33,8..	(98. Fig. 46.)
2. 0. 0,0	12. 5. 4,6	37. 53. 40,5..	
3. 0. 0,0	14. 48. 14,4	46. 22. 43,9..	
3. 4. 47,4..	15. 0. 0,0	46. 59. 21,9..	
4. 0. 0,0	17. 5. 53,3..	53. 30. 58,8..	
5. 0. 0,0	19. 7. 14,7..	59. 47. 28,6..	
5. 28. 9,1..	20. 0. 0,0	62. 30. 48,0..	
6. 0. 0,0	20. 57. 2,2..	65. 27. 8,1..	
7. 0. 0,0	22. 38. 4,3..	70. 38. 49,1..	
8. 0. 0,0	24. 12. 10,7..	75. 28. 18,5..	
8. 32. 0,3..	25. 0. 0,0	77. 55. 5,8..	
9. 0. 0,0	25. 40. 37,7..	79. 59. 37,5..	
10. 0. 0,0	27. 4. 16,1..	84. 15. 27,4..	
12. 16. 0,1..	30. 0. 0,0	93. 10. 29,5..	hyperbol. Ausschnitt (104. Fig. 47.)
15. 0. 0,0	33. 11. 44,4..	102. 50. 5,1..	
16. 39. 42,8..	35. 0. 0,0	108. 15. 24,7..	
20. 0. 0,0	38. 22. 34,5..	118. 19. 17,7..	
21. 42. 38,3..	40. 0. 0,0	123. 7. 38,2..	
25. 0. 0,0	42. 57. 24,5..	131. 48. 5,1..	
27. 24. 12,0..	45. 0. 0,0	137. 45. 57,7..	
30. 0. 0,0	47. 6. 46,5..	143. 52. 29,7..	
31. 35. 10,8..	48. 21. 39,0..	147. 27. 36,2..	Tetraeder (99. Fig. 48.)
33. 43. 45,1..	50. 0. 0,0	152. 8. 33,3..	
35. 0. 0,0	50. 56. 55,2..	154. 50. 18,5..	
36. 0. 0,0	51. 41. 1,9..	156. 55. 13,2..	
40. 0. 0,0	54. 31. 55,4..	164. 55. 27,1..	Ikosaeder (99. Fig. 49.)

K =	D =	M =	Nachweisung der Eigenschaften.
48°.13'.41"0..	60°. 0'. 0",0	180°. 0'. 0",0	gleichseit. Kegel u. hyperbolisch. Ausschnitt (100. Fig. 50.)
50. 0. 0,0	61. 7. 0,7..	183. 1.48,1..	Dodekaeder (99. F. 51.)
60. 0. 0,0	67. 6.52,6..	198.59.50,9..	
65. 6.18,9..	70. 0. 0,0	206.29.15,0..	Maximum (103. Fig. 52.)
66. 4. 3,5..	70.31.56,30..	207.51.20,3..	
70. 0. 0,0	72.40.19,5..	213.18.26,0..	K=D (102. Fig. 53.)
74.23.34,0..	75. 0. 0,0	219. 9.14,7..	
75.39.36,88..	75.39.36,88..	220.47.45,8..	Oktaeder (99. Fig. 54.)
77.53. 5,5..	76.48.25,7..	223.37.51,1..	
80. 0. 0,0	77.53. 5,5..	226.16.26,9..	K. rechtwink. (99. 101. Fig. 55.)
84.13.27,8..	80. 0. 0,0	231.24.12,6..	
90. 0. 0,0	82.49. 9,3..	238. 7. 3,3..	geradliniger Ausschnitt (105. Fig. 56.)
91.40.18,4..	83.37.14,2..	240. 0. 0,0	
100. 0. 0,0	87.31.24,4..	248.59.52,4..	K. d. Apollonius. K+M =360° (101. 102. Fig. 44. 57.)
105.26.29,61..	90. 0. 0,0	254.33.30,38..	
116.28.34,7..	94.51.56,1..	265. 8. 3,8..	D+M=360° (102. Fig. 58.)
120. 0. 0,0	96.22.45,7..	268.19.41,2..	Kubus, Centr. Pyr. (99. Fig. 59.)
121.52.56,6..	97.10.50,7..	270. 0. 0,0	(M=2K)
128.35.47,3..	100. 0. 0,0	175.46.33,6..	
144. 0. 0,0	106.15.36,7..	288. 0. 0,2..	Ikosaeder u. Dekaaeder (99. Fig. 60.)
150.56.54,0..	109. 0. 1,9..	293. 4.57,2..	
153.30.44,9..	110. 0. 0,0	294.53.41,0..	Dodekaeder (99. F. 61.)
169.41.42,6..	116.10.29,4..	305.35.17,0..	
180. 0. 0,0	120. 0. 0,0	311.46. 8,7..	Tetraeder (99. Fig. 62.)
207.51.26,7..	130. 0. 0,0	326.16.14,8..	
236.52.21,9..	140. 0. 0,0	338.17.21,6..	hyperbol. Ausschnitt negativ (104. 105. F. 63.)
240. 0. 0,0	141. 3.26,7..	339.24.39,8..	
266.49.30,4..	150. 0. 0,0	347.44. 0,0..	
270. 0. 0,0	151. 2.41,9..	348.34. 6,0..	
297.29.11,9..	160. 0. 0,0	354.31.50,9..	
328.37.25,9..	70. 0. 0,0	358.37.48,2..	
360. 0. 0,0	180. 0. 0,0	360. 0. 0,0	

Fig. 30.

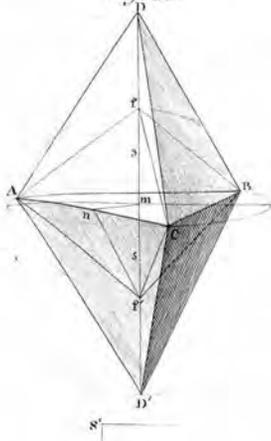


Fig. 31.

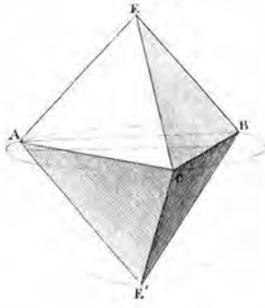


Fig. 35.

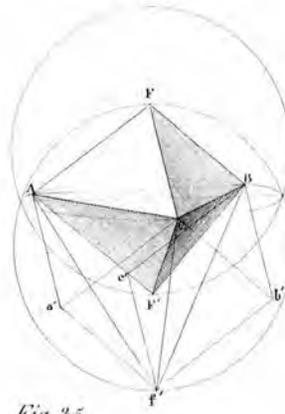


Fig. 33.

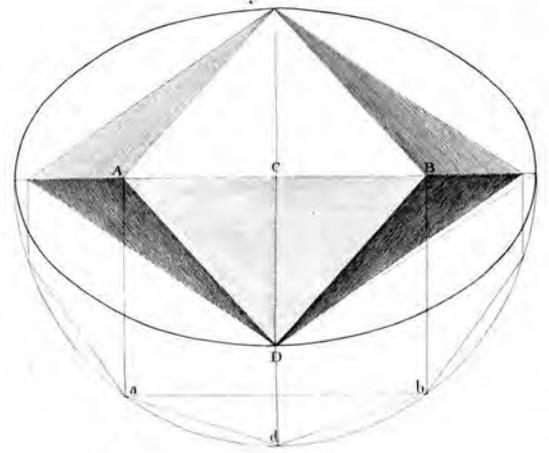


Fig. 34.

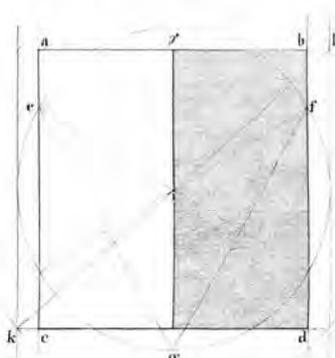
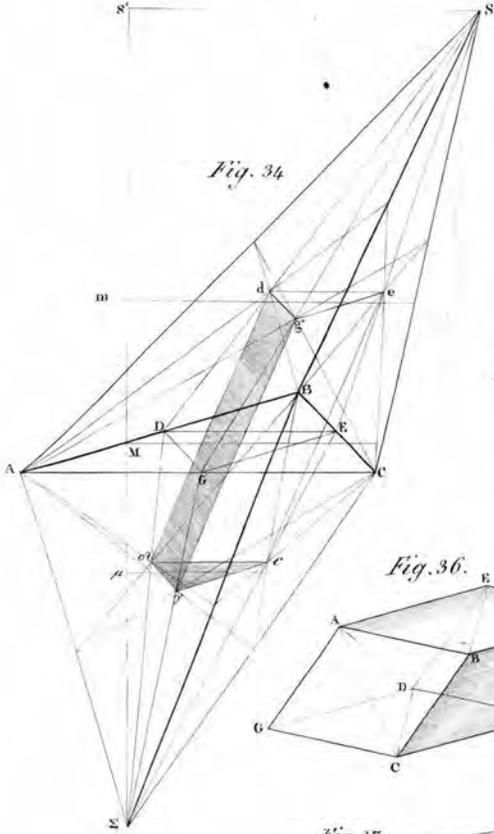


Fig. 39.

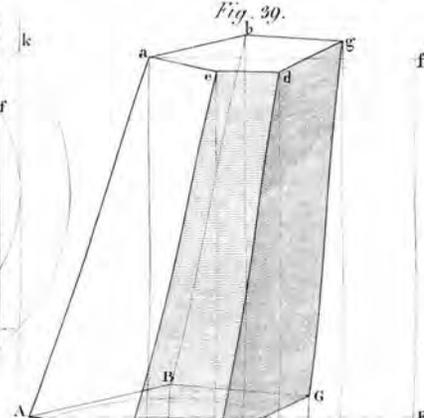


Fig. 36.

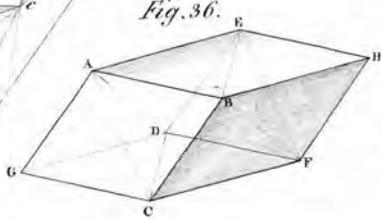


Fig. 37.

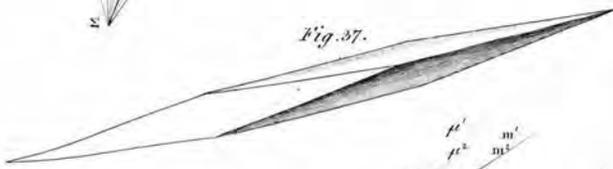


Fig. 38.

