II. Integration der elliptischen Functionen in geschlossener Form.

Von

Dr. Ferdinand Peche.

Mitgetheilt am 24. Jänner 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Bestimmung der Integrale

$$\int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

in geschlossenen Formen.

I.

Beweis der Lösbarkeit der Integrale $\int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$ und $\int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$ in geschlossenen Formen bei solcher hypothetischer Lösung irgend Eines derselben.

1. Die Lösung der Integrale $\int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$ und $\int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$, worin n eine ganze Zahl vorstellt, kann auf die der Integrale $\int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ zurückgeführt werden.

Zur Nachweisung dieser Behauptung wird es zunächst nöthig, das specielle Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$ durch ein allgemeineres Verfahren auf seine einfachste Gestalt $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ zu transformiren.

Setzt man nämlich $x = y + p$; so übergeht $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ in $k_0 + k_1 y + k_2 y^2 + k_3 y^3 + k_4 y^4$, wo k_0 den Ausdruck $A+Bp+Cp^2+Dp^3+Ep^4 = f(p)$ und k_1, k_2, k_3. k_4 die von k_0 genommenen in ihre bezüglichen Coefficienten multiplicirten

Ableitungen bedeuten; so dass folgende Gleichungen bestehen: $k_0 = f(p)$, $k_1 = f_1(p)$, $k_2 = \frac{1}{2}!\, f_2(p)$, $k_3 = \frac{1}{3}!\, f_3(p)$, $k_4 = \frac{1}{4}!\, f_4(p)$. Die einfache Form, in der sich die Wurzelfactoren eines Ausdrucks 4ten Grades $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$ ergeben, wenn in demselben x um eine Grösse p verringert wird, die folgender Gleichung genügt:

$$[8BE^2-4CDE+D^3]\,p^3+[16AE^2+2BDE+CD^2-4C^2E]\,p^2$$
$$+[8ADE+BD^2-4BCE]\,p+AD^2-B^2E=0$$

lässt auch hier eine einfachere Darstellung des irrationellen Nenners vermuthen. Es genüge also p dieser Bedingung, und man führe im Integral $\int\frac{dy}{\sqrt{k_0+k_1y+k_2y^2+k_3y^3+k_4y^4}}$

$$=\int\frac{dy}{y\sqrt{k_4y^2+\frac{k_0}{y^2}+k_3y+\frac{k_1}{y}+k_2}}$$ statt der einen veränderlichen x, zwei neue veränderliche Bögen φ und φ_1 der Art ein, dass folgende Bedingungen erfüllt seyen:

$$k_4y^2+\frac{k_0}{y^2}=2\sqrt{k_0k_4}\cos 2\varphi$$
$$k_3y+\frac{k_1}{y}=2\sqrt{k_1k_3}\cos\varphi_1.$$

Es wären nun die Werthe von φ und φ_1 anzugeben, um die Möglichkeit obiger Bedingung zu rechtfertigen; und bei ihrer Bestimmung wird sich zugleich ergeben, dass unter der Voraussetzung: dass p der erwähnten Gleichung genügt, $\varphi=\varphi_1$ sey. Sowohl $y=\pm\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}\,e^{\varphi\sqrt{-1}}$ als $y=\pm\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}\,e^{-\varphi\sqrt{-1}}$ sind Wurzeln der Gleichung $k_4y^2+\frac{k_0}{y^2}-2\sqrt{k_0k_4}\cos 2\varphi=0$; denn werden diese Werthe in die Gleichung substituirt, so reduciren sie dieselbe auf Null. Eben so ist $y=\sqrt{\frac{k_1}{k_3}}\,e^{\pm\varphi_1\sqrt{-1}}$ der Ausdruck der Wurzeln der Gleichung $k_3y+\frac{k_1}{y}=2\sqrt{k_1k_3}\cos\varphi_1$. Aus $y=\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}\,e^{\varphi\sqrt{-1}}$ und $y=\sqrt{\frac{k_1}{k_3}}\,e^{\varphi_1\sqrt{-1}}$ ergeben sich die Werthe $\varphi=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\lambda\left(\sqrt[4]{\frac{k_4}{k_0}}\,y\right)$.

$\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\lambda\left(\sqrt{\frac{k_3}{k_1}}\,y\right)$ (wo das Symbol λ den natürlichen Logarithmus bezeichnet), für welche gewiss die verlangte Eigenschaft erfüllt ist. Um überdiess zu zeigen, dass $\varphi=\varphi_1$ sey, addire man zur Gleichung

$$[8BE^2-4CDE+D^3]\,p^3+[16AE^2+2BDE+CD^2-4C^2E]\,p^2$$
$$+[8ADE+BD^2-4BCE]\,p+AD^2-B^2E=0$$

den der Nulle identischen Ausdruck

$$[9D^2E+16CE^3-(16CE^3+8D^2E+D^2E)]\,p^4+[24DE^2-(16DE^2+4DE^2)]\,p^5$$
$$+[16E^3-16E^3]\,p^6=0$$

wodurch ein Zerfällen in Factoren möglich wird, denn es ist sodann der Ausdruck anders geschrieben:

$$\begin{aligned}&B^2E+4BCEp+[4C^2E+6BDE]p^2+[8BE^2+12CDE]p^3\\&+[9D^2E+16CE^2]p^4+24DE^2p^5+16E^3p^6\\&-[AD^2+(8ADE+BD^2)p+(16AE^2+8BDE+CD^2)p^2\\&\quad+(16BE^2+8CDE+D^3)p^3+(16CE^2+8D^2E+D^2E)p^4\\&\quad+(16DE^2+8DE^2)p^5+16E^3p^6]=0\end{aligned}$$

und diese Ausdrücke in Factoren zerschlagen geben

$$E(B+2Cp+3Dp^2+4Ep^3)^2-(D+4Ep)^2(A+Bp+Cp^2+Dp^3+Ep^4)=0,$$

d. i. $k_4k_1^2=k_3^2k_0$. Diess Ergebniss in $\varphi=\sqrt{-1}\,\lambda\, y\sqrt[4]{\frac{k_4}{k_0}}$, $\varphi_1=\sqrt{-1}\,\lambda\, y\sqrt{\frac{k_3}{k_1}}$ substituirt, liefert die Bedingung $\varphi=\varphi_1$. Durch diese Bestimmung $y=\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}\,e^{\varphi\sqrt{-1}}$, übergeht das Integral in $\sqrt{-1}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\sqrt{k_0k_4}\cos 2\varphi+2\sqrt{k_1k_3}\cos\varphi+k_2}}$, oder wenn Kürze halber $e^{\varphi\sqrt{-1}}=z$, $\sqrt{\frac{k_1k_3}{k_0k_4}}=\alpha$, $\frac{k_2}{\sqrt{k_0k_4}}=\beta$ gesetzt wird, in

$$\frac{1}{\sqrt[4]{k_0k_4}}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2\left[\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)+\beta\right]}}.$$

Die Gleichung $z^2\left[z^2+\frac{1}{z^2}+\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)+\beta\right]=0$ ergibt sodann durch ihre Auflösung die 4 bestimmten Werthe von z. Es ist für $z+\frac{1}{z}=\rho$

$$\rho^2-2+\alpha\rho+\beta=0$$

$$\rho=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}.$$ Ferner folgt aus

$$z^2=z\rho-1\;,\quad z=\frac{\rho}{2}\pm\sqrt{\frac{\rho^2}{4}-1}$$

$$=-\frac{\alpha}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}\right)^2-1}$$

Somit ist $z^2\left(z^2+\frac{1}{z^2}+\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)+\beta\right)$ das Product folgender Wurzelfactoren:

$$\left[z+\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}-\sqrt{\frac{1}{4}\left(-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}\right)^2-1}\right]$$

$$\left[z+\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}-\sqrt{\frac{1}{4}\left(-\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}\right)^2-1}\right]$$

$$\left[z+\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}\right)^2-1}\right]$$

$$\left[z+\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(-\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}\right)^2-1}\right].$$

Das ist, wenn Kürze halber

$$\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)} = \mathfrak{Q},$$

$$\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)} = \mathfrak{R},$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left(-\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}\right)^2-1} = \mathfrak{S},$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left(-\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-(\beta-2)}\right)^2-1} = \mathfrak{T} \text{ gesetzt wird,}$$

$$z^2\left[\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)+\beta\right] = (z+\mathfrak{R}+\mathfrak{S})(z+\mathfrak{R}-\mathfrak{S})(z+\mathfrak{Q}+\mathfrak{T})(z+\mathfrak{Q}-\mathfrak{T}).$$

Das gegebene Integral übergeht nun in

$$\frac{1}{\sqrt[4]{k_0 k_4}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z+\mathfrak{R}+\mathfrak{S})(z+\mathfrak{R}-\mathfrak{S})(z+\mathfrak{Q}+\mathfrak{T})(z+\mathfrak{Q}-\mathfrak{T})}}$$

und für $z=\frac{\mathfrak{T}(1+u^2)}{1-u^2}-\mathfrak{Q}$, in

$$\frac{2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}}\int\frac{du}{\sqrt{[\mathfrak{T}(1+u^2)-(\mathfrak{Q}-\mathfrak{R})(1-u^2)]^2-\mathfrak{S}^2(1-u^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}}\int\frac{du}{\sqrt{\lambda u^4+2pu^2+v}}$$

worin Kürze halber
$$\lambda = (\mathfrak{T}+\mathfrak{Q}-\mathfrak{R})^2-\mathfrak{S}^2$$
$$p = \mathfrak{T}^2-(\mathfrak{Q}-\mathfrak{R})^2+\mathfrak{S}^2$$
$$v = (\mathfrak{T}-\mathfrak{Q}+\mathfrak{R})^2-\mathfrak{S}^2 \text{ gesetzt wurde.}$$

Die Wurzelfactoren des Nenners $\lambda u^4+2pu^2+v=0$ sind durch

$$u^2 = -\frac{p}{\lambda}\pm\sqrt{\frac{p^2}{\lambda^2}-\frac{v}{\lambda}}$$

bestimmt und werden dieselben durch ρ_1, ρ_2 vorgestellt; so ist das ursprüngliche Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

auf die gewünschte einfache Form

$$\frac{2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}}\int\frac{du}{\sqrt{(u^2-\rho_1)(u^2-\rho_2)}}$$

zurückgeführt.

2. Im Verlaufe der Transformation wurde

$$x=y+p,\quad y=\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}e^{\varphi\sqrt{-1}},\quad e^{\varphi\sqrt{-1}}=z,\quad z=\frac{\mathfrak{T}(1+u^2)}{1-u^2}-\mathfrak{Q}$$

gesetzt, somit ist

$$x = p + \sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}\left(\frac{\mathfrak{T}(1+u^2)}{1-u^2} - \mathfrak{Q}\right)$$

$$= \frac{p - \sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}(\mathfrak{Q}-\mathfrak{T}) + u^2\left[\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}(\mathfrak{T}+\mathfrak{Q})-p\right]}{1-u^2}$$

$$= \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}u^2}{1-u^2},$$ wenn Kürze halber

$$p-\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}(\mathfrak{Q}-\mathfrak{T}) = \mathfrak{A}$$

$$\sqrt[4]{\frac{k_0}{k_4}}(\mathfrak{T}+\mathfrak{Q})-p = \mathfrak{B}$$ gesetzt wird.

Das allgemeine Integral $\int \frac{x^{+n}\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$ übergeht bei diesem Werthe von x in

$$\frac{2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}} \int \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}u^2)^n\,du}{(1-u^2)^n\sqrt{(u^2-\rho_1)(u^2-\rho_2)}}$$

und für $u^2 = 1 - x_1^2$ in

$$\frac{-2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}} \int \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{B}x_1^2)\,x_1\,dx_1}{x_1^{2n}\sqrt{(1-x_1^2)\,(x_1^2-1+\rho_1)\,(x_1^2-1+\rho_2)}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}}\ \mathrm{S}\,(-1)^p\binom{n}{p}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^{n-p}\,\mathfrak{B}^p \int \frac{x_1^{2(p-n)}\,x_1\,dx_1}{\sqrt{(x_1^2-1+\rho_1)\,(x_1^2-1+\rho_2)\,(1-x_1^2)}}$$

wo sich das Summenzeichen S auf alle Werthe von p, von $p=0$ bis $p=n$ erstreckt. Da n grösser als p, mithin $p-n$ negativ ist, substituire man statt x_1, $\frac{1}{x_2}$; wodurch das Integral in

$$\frac{2}{\sqrt[4]{k_0 k_4}}\ \mathrm{S}\,(-1)^p\binom{n}{p}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^{n-p}\,\mathfrak{B}^p \int \frac{x_2^{2(n-p)}\,dx_2}{\sqrt{((\rho_1-1)\,x_2^2+1)\,((\rho_2-1)\,x_2^2+1)\,(x_2^2-1)}}$$

also auf Integrale von der Form

$$\int \frac{y^{2m}\,dy}{\sqrt{A+By^2+Cy^4+Dy^6}}$$

übergeht, welche, wie im Verlaufe der Untersuchung gezeigt wird, auf die Form $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)\,(x^2-\beta)}}$ zurückgeführt werden.

Es ist nämlich für $U = A + By^2 + Cy^4 + Dy^6$

$$y^n U^{\frac{1}{2}} = nA\int\frac{y^{n-1}\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} + (n+1)B\int\frac{y^{n+1}\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} + (n+2)C\int\frac{y^{n+3}\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} + (n+3)D\int\frac{y^{n+5}\,dy}{U^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = -1$

$$\frac{U^{\frac{1}{2}}}{y} = -A\int\frac{dy}{y^2U^{\frac{1}{2}}} + C\int\frac{y^2\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} + 2D\int\frac{y^4\,dy}{U^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = +1$

$$U^{\frac{1}{2}}\, y = A\int\frac{dy}{U^{\frac{1}{2}}} + 2B\int\frac{y^2\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} + 3C\int\frac{y^4\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} + 4D\int\frac{y^6\,dy}{U^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = 3$

$$U^{\frac{1}{2}}\, y^3 = 3A\int\frac{y^2\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} + 4B\int\frac{y^4\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} + 5C\int\frac{y^6\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} + 6D\int\frac{y^8\,dy}{U^{\frac{1}{2}}} \text{ u. s. f.}$$

Unter der Voraussetzung also, dass $\int\frac{dy}{y^2 U^{\frac{1}{2}}}$ und $\int\frac{y^2\,dy}{U^{\frac{1}{2}}}$ auf die erwähnte Form zurückführbar seyen; werden, da $\int\frac{dy}{U^{\frac{1}{2}}}$ für $y = \sqrt{x}$ die in Nr. 1 behandelte Form annimmt, alle Integrale $\int\frac{y^{2m}\,dy}{U^{\frac{1}{2}}}$, die durch dieselben ausgedrückt sind, jene Eigenschaft besitzen.

3. Für negative m kömmt man auf solche zurückführbare Integrale. Zu diesem Zweck sey $y = \frac{1}{\sqrt{v}}$; somit:

$$\int\frac{y^{-2m}\,dy}{\sqrt{A+By^2+Cy^4+Dy^6}} = -\tfrac{1}{2}\int\frac{v^m\,dv}{\sqrt{Av^3+Bv^2+Cv+D}}.$$

Um diess Integral einfacher zu stellen, setze man $v = y + q$

$$\begin{aligned}
f(q) &= Aq^3+Bq^2+Cq+D &&= a\\
f_1(q) &= 3Aq^2 + 2Bq + C &&= b\\
\tfrac{1}{2} f_2(q) &= 3Aq + B &&= c\\
\tfrac{1}{3!} f_3(q) &= A &&= d
\end{aligned}$$

worin das q durch folgende Gleichung bestimmt sey:

$$\begin{aligned}
AC^3-B^3D + (6ABC^2-9AB^2D-B^3C)q + (9A^2C^2+3AB^2C-27A^2BD-B^4)q^2\\
+ (9A^2BC-27A^3D-2AB^3)q^3 = 0
\end{aligned}$$

welche Gleichung sich auf die Form

$$A\,(C+2Bq+3Aq^2)^3 = (B+3Aq)^3\,(D+Cq+Bq^2+Aq^3)$$

d. i. auf $db^3 = c^3a$ bringen lässt.

Das fragliche Integral ist bisher unter der Form

$$-\tfrac{1}{2}\int\frac{y^m\,dy}{\sqrt{a+by+cy^2+dy^3}} = -\tfrac{1}{2}\int\frac{y^m\,dy}{y^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{a}{y^{\frac{3}{2}}} + dy^{\frac{3}{2}} + \frac{b}{y^{\frac{1}{2}}} + cy^{\frac{1}{2}}}}.$$

Man wähle nun weiter die Bögen φ und φ_1 der Art, dass

$$y = \sqrt[3]{\frac{a}{d}}\, e^{\pm\varphi\sqrt{-1}} = \frac{b}{c}\, e^{\pm\varphi_1\sqrt{-1}}$$

wodurch

$$dy^{\frac{3}{2}} + \frac{a}{y^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{ad}\cos\tfrac{3}{2}\varphi$$

$$cy^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{y^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{bc}\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1$$

gesetzt werden kann, und wo die Richtigkeit der Annahme so wie die Werthbestimmung von φ und φ_1 aus früheren ersichtlich ist. Zugleich ist wegen der Bedingung $db^3 = c^3 a$, $\varphi = \varphi_1$.

Somit übergeht das Integral in

$$-\tfrac{1}{2}\int \frac{y^m\,dy}{y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\sqrt{ad}\cos\frac{3}{2}\varphi + 2\sqrt{bc}\cos\frac{1}{2}\varphi}}$$

$$= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}-\frac{1}{4}}\int \frac{e^{(1+m)\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi}{e^{\frac{3}{4}\varphi\sqrt{-1}}\sqrt{\sqrt{ad}\left(e^{\frac{3}{2}\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\frac{3}{2}\varphi\sqrt{-1}}\right)+\sqrt{bc}\left(e^{\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}}\right)}}$$

und für $e^{\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}} = z$ in

$$-\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}-\frac{1}{4}}\int \frac{z^{1+2m}\,dz}{z^{\frac{3}{2}}\sqrt{\sqrt{ad}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\sqrt{bc}\left(z+\frac{1}{z}\right)}}$$

$$= -\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}-\frac{1}{4}}\int \frac{z^{2m+1}\,dz}{\sqrt{\sqrt{ad}(z^6+1)+\sqrt{bc}(z^4+z^2)}}.$$

Es ist zugleich $z^6+1 = (z^4-z^2+1)(z^2+1)$ und $z^4+z^2 = z^2(z^2+1)$, wodurch sich der obige Werth auf

$$-\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}-\frac{1}{4}}\int \frac{z^{2m}.\,z\,dz}{\sqrt{(z^2+1)\left(\sqrt{ad}\,(z^4-z^2+1)+\sqrt{bc}\,z^2\right)}}$$

und für $z^2 = x^2-1$ auf

$$-\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{m+1}{3}-\frac{1}{4}}\int \frac{(x^2-1)^m\,dx}{\sqrt{\sqrt{ad}\,[(x^2-1)^2-(x^2-1)+1]+\sqrt{bc}\,(x^2-1)}}$$

zurückführen lässt; auf eine Summe von Integralen, die in der Form

$\int \frac{x^{+n}\,dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ enthalten sind.

In dieser Durchführung ist zugleich gezeigt, dass sämmtliche Integrale $\int \frac{x^{+n}\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$ auf die von der Form $\int \frac{x^{+n}\,dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ zurückführbar seyen. Nach der eben entwickelten Untersuchung ist daher das Integral $\int \frac{dy}{y^2\,U^{\frac{1}{2}}}$ ein auf die gewünschte Form reducirbares, und es frägt sich nun, ob dasselbe auch vom Integral $\int \frac{y^2\,dy}{U^{\frac{1}{2}}}$ gelte.

4. Unter Voraussetzung der Zurückführbarkeit dieses letzt erwähnten Integrals auf die im Anfang statuirte Form, sind auch sämmtliche Integrale $\int \frac{v^{-m}\,dv}{\sqrt{Av^3+Bv^2+Cv+D}}$ unter der gewöhnlichen Form darstellbar.

Sey $Av^3 + Bv^2 + Cv + D = V$, mithin

$$v^n V^{\frac{1}{2}} = (n+\tfrac{3}{2})A\int\frac{v^{n+2}dv}{V^{\frac{1}{2}}} + (n+1)B\int\frac{v^{n+1}dv}{V^{\frac{1}{2}}} + (n+\tfrac{1}{2})C\int\frac{v^n dv}{V^{\frac{1}{2}}} + nD\int\frac{v^{n-1}dv}{V^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = -1$ ist

$$\frac{V^{\frac{1}{2}}}{v} = \tfrac{1}{2}A\int\frac{v\,dv}{V^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{1}{2}C\int\frac{dv}{vV^{\frac{1}{2}}} - D\int\frac{dv}{v^2V^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = -2$

$$\frac{V^{\frac{1}{2}}}{v^2} = -\tfrac{1}{2}A\int\frac{dv}{V^{\frac{1}{2}}} - B\int\frac{dv}{vV^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{3}{2}C\int\frac{dv}{v^2V^{\frac{1}{2}}} - 2D\int\frac{dv}{v^3V^{\frac{1}{2}}};$$

$n = -3$

$$\frac{V^{\frac{1}{2}}}{v^3} = -\tfrac{3}{2}A\int\frac{dv}{vV^{\frac{1}{2}}} - 2B\int\frac{dv}{v^2V^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{5}{2}C\int\frac{dv}{v^3V^{\frac{1}{2}}} - 3D\int\frac{dv}{v^4V^{\frac{1}{2}}} \text{ u. s. f.}$$

Da das Integral $\int\frac{v\,dv}{V^{\frac{1}{2}}}$ als ein auf die erwähnte Form zurückführbares Integral nachgewiesen wurde, so werden somit alle Integrale $\int\frac{v^{-m}dv}{V^{\frac{1}{2}}}$ die erwähnte Eigenschaft besitzen, sobald dieselbe vom Integral $\int\frac{dv}{vV^{\frac{1}{2}}}$ erwiesen ist. Allein das letzte ist mit $-2\int\frac{y^2dy}{U^{\frac{1}{2}}}$ identisch, sobald im ebengenannten Integral statt y, $\frac{1}{\sqrt{v}}$ gesetzt wird.

5. Unter der Voraussetzung einer nachgewiesenen Zurückführung des letztgenannten Integrals findet dieselbe auch bei allen Integralen $\int\frac{dx}{x^{+n}\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$ statt. Ein solches Integral ist gleichbedeutend mit dem Integral

$$\frac{2}{\sqrt[4]{k_0k_4}}\int\frac{(1-u^2)^n\,du}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}u^2)^n\sqrt{(u^2-\rho_1)(u^2-\rho_2)}}$$

d. i. für $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}u^2 = z^2$ mit

$$\frac{2}{\mathfrak{B}\sqrt[4]{k_0k_4}}\int\frac{\left(1-\frac{z^2-\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right)^n z\,dz}{z^{2n}\sqrt{\left(\frac{z^2-\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right)\left(\frac{z^2-\mathfrak{A}-\rho_1\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\right)\left(\frac{z^2-\mathfrak{A}-\rho_2\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\right)}}$$

$$= 2\sqrt[4]{\frac{\mathfrak{B}^4}{k_0k_4}}\,S(-1)^p\binom{n}{p}\left(\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right)^{n-p}\frac{1}{\mathfrak{B}^p}\int\frac{z^{2(p-n)}\,z\,dz}{\sqrt{(z^2-\mathfrak{A})(z^2-\mathfrak{A}-\rho_1\mathfrak{B})(z^2-\mathfrak{A}-\rho_2\mathfrak{B})}}.$$

Für $z^2 = v$ übergeht

$$\int\frac{z^{2(p-n)}\,z\,dz}{\sqrt{(z^2-\mathfrak{A})(z^2-\mathfrak{A}-\rho_1\mathfrak{B})(z^2-\mathfrak{A}-\rho_2\mathfrak{B})}}$$

in

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{v^{p-n}\,dv}{\sqrt{(v-\mathfrak{A})(v-\mathfrak{A}-\rho_1\mathfrak{B})(v-\mathfrak{A}-\rho_2\mathfrak{B})}}.$$

Da p — n eine negative Zahl ist, so sind diese Integrale nach Nr. 4 unter der Bedingung der Zurückführbarkeit von $\int \frac{dv}{v\,V^{\frac{1}{2}}}$ auf die verlangte Form reducirbar.

6. Was endlich das Integral $\int \frac{y^2\,dy}{U^{\frac{1}{2}}}$ betrifft; so übergeht es bei der Substitution $y^2 = \frac{1+u}{1+\rho u}$, wenn w_1, w_2, w_3 die 3 Wurzeln von y_2 des Ausdrucks U vorstellen, in

$$\frac{1-\rho}{2}\int \frac{1+u}{1+\rho u}\,\frac{du}{\sqrt{(1+u)(1+u-w_1(1+\rho u))(1+u-w_2(1+\rho u))(1+u-w_3(1+\rho u))}}.$$

Es ist $\frac{1+u}{1+\rho u} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1+\rho u}{1+\rho u} + \frac{\rho-1}{1+\rho u}\right]$, welches ins Integral eingeführt dasselbe in zwei Theile zerfällt; in

$$\frac{1-\rho}{2\rho}\int \frac{du}{\sqrt{(1+u)(1+u-w_1(1+\rho u))(1+u-w_2(1+\rho u))(1+u-w_3(1+\rho u))}},$$

welches auf die Form $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ reducirbar ist, und in den Theil

$$-\frac{(1-\rho)^2}{2\rho}\int \frac{du}{(1+\rho u)\sqrt{(1+u)(1+u-w_1(1+\rho u))(1+u-w_2(1+\rho u))(1+u-w^3(1+\rho u))}}.$$

Man setze ferner $1+\rho u = \frac{1}{\gamma+t}$, wodurch das letztere Integral in

$$\frac{1}{2}\,\frac{(1-\rho)^2}{\rho}\int \frac{(t+\gamma)\,dt}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(t+\gamma)+\frac{1}{\rho}\right]\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(t+\gamma)-w_1\right]\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(t+\gamma)-w_2\right]\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(t+\gamma)-w_3\right]}}$$

übergeht. Man wähle überdiess γ, so wie das früher eingeführte ρ auf die Weise, dass wenn $p_0 = \left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\gamma+\frac{1}{\rho}\right]\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\gamma - w_1\right]\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\gamma - w_2\right]\left[\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\gamma-w_3\right]$, $f(\gamma)$ vorstellt, $p_1 = f_1(\gamma)$ und $p_3 = \frac{1}{3}!\,f_3(\gamma)$ beide zugleich in Null übergehen. Dadurch ist zugleich die Bedingung $p_4 p_1^2 = p_3^2 p_0$ erfüllt und es übergehen die in Nr. 1) gebrauchten Bezeichnungen α und β in $\alpha = 0$, $\beta = \frac{p_2}{\sqrt{p_0 p_4}}$.

Der Nenner ist alsdann die Quadratwurzel aus dem Producte folgender Wurzelfactoren:

$$\left[\sqrt[4]{\frac{p_4}{p_0}}\,t - \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\beta} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-(2+\beta)}\right]$$
$$\left[\sqrt[4]{\frac{p_4}{p_0}}\,t - \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\beta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-(2+\beta)}\right]$$
$$\left[\sqrt[4]{\frac{p_4}{p_0}}\,t + \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\beta} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-(2+\beta)}\right]$$
$$\left[\sqrt[4]{\frac{p_4}{p_0}}\,t + \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\beta} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-(2+\beta)}\right]$$
$$= \left[\sqrt{\frac{p_4}{p_0}}\,t^2+1+\sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}}\right]\left[\sqrt{\frac{p_4}{p_0}}\,t^2+1-\sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}}\right],$$

und das Integral aus zwei Theilen zusammengesetzt, deren letzterer die Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$$

besitzt, während der erstere ein bereits geschlossen integrirtes Integrale ist.

7). 7. Nachdem die Reduction sämmtlicher Integrale

$$\int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

auf Integrale von der Form

$$\int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$$

nachgewiesen wurde; wird zunächst folgender Satz zu erweisen seyn:

Sämmtliche Integrale $\int \frac{x^{\pm n}\, dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ sind in geschlossenen Ausdrücken integrirbar, sobald dasselbe von den Integralen $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\rho_1)(x^2-\rho_2)}}$ und $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(x^2-\rho_1)(x^2-\rho_2)}}$ gilt.

Diess leistet ganz einfach die schon öfters angewandte Betrachtung, ein Integral durch andere auszudrücken. Sey also

$$\mathfrak{U} = u^4 - (\rho_1+\rho_2)\, u^2 + \rho_1 \rho_2$$

der im Nenner vorkommende Ausdruck, alsdann gilt nach der gemachten Bemerkung die Gleichung:

$$u^n \mathfrak{U}^{\frac{1}{2}} = (n+2)\int \frac{u^{n+3}\, du}{\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}}} - (\rho_1+\rho_2)(n+1)\int \frac{u^{n+1}\, du}{\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}}} + n\rho_1\rho_2 \int \frac{u^{n-1}\, du}{\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}}};$$

d. i. wenn man die Integrale durch Symbole bezeichnet und

$$\mathfrak{U}_0 = \int \frac{du}{\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathfrak{U}_1 = \int \frac{u\, du}{\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathfrak{U}_2 = \int \frac{u^2\, du}{\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}}} \text{ u. s. f.}$$

setzt, für $n = 0, 1, 2 \ldots.$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}} &= 2\mathfrak{U}_3 - (\rho_1+\rho_2)\,\mathfrak{U}_1 \\
u\,\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}} &= 3\mathfrak{U}_4 - 2(\rho_1+\rho_2)\,\mathfrak{U}_2 + \rho_1\rho_2\,\mathfrak{U}_0 \\
u^2\,\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}} &= 4\mathfrak{U}_5 - 3(\rho_1+\rho_2)\,\mathfrak{U}_3 + 2\rho_1\rho_2\,\mathfrak{U}_1 \\
u^3\,\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}} &= 5\mathfrak{U}_6 - 4(\rho_2+\rho_2)\,\mathfrak{U}_4 + 3\rho_1\rho_2\,\mathfrak{U}_2
\end{aligned}$$

u. s. f. Ist daher $\mathfrak{U}_1$ bekannt, so sind es $\mathfrak{U}_3$, $\mathfrak{U}_5$, $\mathfrak{U}_7 \ldots$ und wären $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_2$ geschlossen integrirt; so liessen sich die folgenden $\mathfrak{U}_4$, $\mathfrak{U}_6, \ldots$ durch dieselben bestimmen.

Nun ist $\mathfrak{U}_1$ für $u^2 = \omega$ der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2-(\rho_1+\rho_2)\omega+\rho_1\rho_2}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{d\omega}{\sqrt{\left(\omega-\frac{(\rho_1+\rho_2)}{2}\right)^2+\rho_1\rho_2-\frac{(\rho_1+\rho_2)^2}{2}}},$$

welcher nach bekannten Regeln das Integral

$$= \tfrac{1}{2}\lambda\left[\omega - \frac{(\rho_1+\rho_2)}{2} + \sqrt{\omega^2-(\rho_1+\rho_2)\omega+\rho_1\rho_2}\right]$$

ergibt. Es ist daher unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}_2$ geschlossen bekannt seyen, jedes Integral $\mathfrak{U}_n$ für ein $+n$ geschlossen bestimmbar. Ueberdiess ist

$$\frac{\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}}}{u} = \mathfrak{U}_1 - \rho_1\rho_2\,\mathfrak{U}_{-1}$$

$$\frac{\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}}}{u^2} = (\rho_1+\rho_2)\,\mathfrak{U}_{-1} - 2\rho_1\rho_2\,\mathfrak{U}_{-3}$$

$$\frac{\mathfrak{U}^{\frac{1}{2}}}{u^3} = -\mathfrak{U}_0 + 2(\rho_1+\rho_2)\,\mathfrak{U}_{-2} - 4\rho_1\rho_2\,\mathfrak{U}_{-4}$$

u. s. f. Sind somit $\mathfrak{U}_{-1}$, $\mathfrak{U}_{-2}$ geschlossen integrirt; so gilt dasselbe von den weitern Integralen $\mathfrak{U}_{-3}$, $\mathfrak{U}_{-4}\ldots$ u. s. f. Es ist

$$\mathfrak{U}_{-1} = \int\frac{du}{u\sqrt{(u^2-\rho_1)(u^2-\rho_2)}}$$

ein Ausdruck, der aus

$$-\int\frac{u\,du}{\sqrt{(1-u^2\rho_1)(1-u^2\rho_2)}}$$

entsteht, wenn statt u, $\frac{1}{u}$ gesetzt wird, und welches letztere Integral aus $\mathfrak{U}_1$ bestimmt werden kann, und man findet auf diese Weise

$$\mathfrak{U}_{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{\rho_1\rho_2}}\,\lambda\left[\frac{1}{u^2} - \frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_1\rho_2} + \sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - \frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_1\rho_2}\right)^2 + \frac{1}{\rho_1\rho_2} - \left(\frac{\rho_1+\rho_2}{2\rho_1\rho_2}\right)^2}\,\right].$$

Analog lässt sich das Integral $\int\frac{du}{u^2\sqrt{(u^2-\rho_1)(u^2-\rho_2)}}$ durch $\mathfrak{U}_2$ bestimmen, wenn statt u, $\frac{1}{u}$ gesetzt wird. Es übergeht dadurch in $-\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{(1-\rho_1u^2)(1-\rho_2u^2)}}$, ein der Form nach mit $\mathfrak{U}_2$ übereinstimmendes Integral. Und so wären alle Integrale $\mathfrak{U}_{\pm n}$ und mittelst ihrer die Integrale

$$\int\frac{x^{\pm n}\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}} \quad \text{und} \quad \int\frac{x^{\pm n}\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

geschlossen integrirbar, sobald man die erwähnte Eigenschaft von $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_2$ nachzuweisen vermöchte.

8. Das Integral $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-\rho_1)(x^2-\rho_2)}}$ lässt sich geschlossen bestimmen, sobald man dasselbe mit dem Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-\rho_1)(x^2-\rho_2)}}$ vermag. Was diese Zurückführung betrifft, so wurde bereits in Nr. 3) die Transformation des Integrals

$$\int\frac{v\,dv}{\sqrt{Av^3+Bv^2+Cv+D}}$$

auf die Form

$$\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\int\frac{(x^2-1)\,dx}{\sqrt{\sqrt{ad}\,[(x^2-1)^2-(x^2-1)+1]+\sqrt{bc}\,(x^2-1)}}$$

erwiesen, wo die Bedeutung der eingeführten Grössen aus frühern ersichtlich ist. Das Problem kömmt also darauf hinaus, statt des letztern Integrals das einfachere $\int \frac{v\,dv}{\sqrt{Av^3+Bv^2+Cv+D}}$ zu betrachten. Dieses übergeht für $v=\frac{1+au}{b+u}$, wo a und b vorläufig noch zu bestimmende Grössen seyn mögen, in

$$(ab-1)\int \frac{(1+au)\,du}{(b+u)\sqrt{A(1+au)^3(b+u)+B(1+au)^2(b+u)^2+C(1+au)(u+b)^3+D(b+u)^4}},$$

oder wenn Kürze halber in der Entwicklung des Nenners

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_4 &= Ab+Bb^2+Cb^3+Db^4\\
\mathfrak{B}_3 &= (1+3ab)A+2b(1+ab)B+b^2(3+ab)C+4b^3D\\
\mathfrak{B}_2 &= 3a(1+ab)A+(1+4ab+a^2b^2)B+3b(1+ab)C+6b^2D\\
\mathfrak{B}_1 &= a^2(3+ab)A+2a(1+ab)B+(1+3ab)C+4bD\\
\mathfrak{B}_0 &= a^3A+a^2B+aC+D
\end{aligned}$$

gesetzt wird, in

$$(ab-1)\int \frac{(1+au)\,du}{(b+u)\sqrt{\mathfrak{B}_0u^4+\mathfrak{B}_1u^3+\mathfrak{B}_2u^2+\mathfrak{B}_3u+\mathfrak{B}_4}}.$$

Obgleich es am ersten Anblick scheinen könnte, dass mehrere Annahmen für die Grössen a nnd b eine Reduction auf bereits bekannte Integrale oder auf die Form $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha)(x^2-\beta)}}$ zulassen; so wird man doch im Verlaufe der Behandlung, die zugleich eine geänderte Behandlung des Problems Nr. 6) ist, zur Einsicht gelangen; dass nur eine einzige Wahl der Bedingungsgleichungen eine solche Reduction einleite. Man statuire zur Bestimmung von a und b die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{B}_1^3}{\mathfrak{B}_0}-4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2+8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_3=0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}=b;$$

und setze $u=y+p$; wo für p vor der Hand ein Werth angenommen werde, welcher der Gleichung:

$$(\mathfrak{B}_1^3-4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2+8\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_3)p^3+(\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2+2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3+16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_4-4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2^2)p^2$$
$$+(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3+8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4-4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3)p-\mathfrak{B}_3^2\mathfrak{B}_0+\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_4=0$$

genügt. damit wenn

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_0 &= D_0\\
4\mathfrak{B}_0p+\mathfrak{B}_1 &= D_1\\
6\mathfrak{B}_0p^2+3\mathfrak{B}_1p+\mathfrak{B}_2 &= D_2\\
4\mathfrak{B}_0p^3+3\mathfrak{B}_1p^2+2\mathfrak{B}_2p+p^3 &= D_3\\
\mathfrak{B}_0p^4+\mathfrak{B}_1p^3+\mathfrak{B}_2p^2+\mathfrak{B}_3p+\mathfrak{B}_4 &= D_4
\end{aligned}$$

gesetzt wird; die Bedingung $\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2=\frac{D_4}{D_0}$ erfüllt sey.

Durch obige Substitution übergeht die Gleichung

$$\mathfrak{B}_0u^4+\mathfrak{B}_1u^3+\mathfrak{B}_2u^2+\mathfrak{B}_3u+\mathfrak{B}_4=0 \quad \text{in}$$
$$D_0y^4+D_1y^3+D_2y^2+D_3y+D_4=0$$

und vermöge der zur Bestimmung von a und b aufgestellten Bedingung ist zugleich die Gleichung

$$8 D_0^2 D_3 - 4 D_0 D_1 D_2 + D_1^3 = 0$$

erfüllt, welche nach Substitution der für D angegebenen Werthe auf die Bedingung $\frac{\mathfrak{B}_1^3}{\mathfrak{B}_0} - 4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_3 = 0$ führt. Jene Relation ist aber das Criterium, dass die Gleichung $D_0 y^4 + D_1 y^3 + D_2 y^2 + D_3 y + D_4 = 0$ Wurzeln liefert, deren Werthe nach Absonderung eines allen gemeinsamen Theiles sich bezüglich des Zeichens unterscheiden. Es seyen nämlich $-A+\alpha$, $-A-\alpha$, $-A+\beta$, $-A-\beta$ die 4 Wurzeln der Gleichung

$$D_0 y^4 + D_1 y^3 + D_2 y^2 + D_3 y + D_4 = 0, \text{ mithin auch}$$
$$(y+A)^4 - (\alpha^2+\beta^2)(y+A)^2 + \alpha^2\beta^2 = 0, \text{ und daher}$$
$$4A = \frac{D_1}{D_0}$$
$$6A^2 - (\alpha^2+\beta^2) = \frac{D_2}{D_0}$$
$$4A^3 - 2A(\alpha^2+\beta^2) = \frac{D_3}{D_0} = \frac{4A}{2}[2A^2 - (\alpha^2+\beta^2)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\frac{D_1}{D_0}\left[\frac{D_2}{D_0} - \frac{D_1^2}{4D_0^2}\right] = \tfrac{1}{2}\frac{D_1}{D_0}\left[\frac{4D_0D_2 - D_1^2}{4D_0^2}\right].$$

Mithin ist $8D_0^2D_3 = 4D_0D_1D_2 - D_1^3$ als die obige Gleichung das Criterium der erwähnten Eigenschaft. Zur Bestimmung von A, α, β dienen die Gleichungen:

$$A = \frac{D_1}{4D_0}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{3D_1^2 - 8D_0D_2}{8D_0^2}$$
$$\alpha^2\beta^2 = \frac{16D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}{16^2 D_0^4},$$

und folglich sind:

$$\alpha = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0D_2 \pm \sqrt{16^2D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^2}}$$
$$\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0D_2 \mp \sqrt{16^2D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^2}}$$
$$\beta = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0D_2 \pm \sqrt{16^2D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^2}}$$
$$\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3D_1^2 - 8D_0D_2 \mp \sqrt{16^2D_0^3D_4 + 5D_1^4 - 16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^2}}.$$

Es vereinfachen sich jedoch diese Grössen, so wie die angeführten Gleichungen, wie sich durch folgende Betrachtung der Werthe von p, die der angeführten Gleichung genügen, nachweisen lässt. Es übergeht nämlich die cubische Gleichung für p wegen der Bedingung $\frac{\mathfrak{B}_1^3}{\mathfrak{B}_0} - 4\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_3 = 0$ in eine quadratische, von der sich nachweisen lässt, dass $-\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}$ eine entsprechende Wurzel sey. Wird nämlich in derselben dieser Werth gesetzt; so übergeht sie in

$$\frac{\mathfrak{B}_1^4\mathfrak{B}_2}{16\mathfrak{B}_0^3} - \frac{\mathfrak{B}_1^3\mathfrak{B}_3}{8\mathfrak{B}_0^2} - \frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2^2}{4\mathfrak{B}_0^2} + \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{B}_0} - \mathfrak{B}_3^2 = 0,$$

und nach Substitution für $\mathfrak{B}_3 = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_0} - \frac{\mathfrak{B}_1^3}{8\mathfrak{B}_0^2}$ ergibt der letzte Ausdruck wie erforderlich die Nulle. Man kann sich überdiess versichern, dass $p = -\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}$ eine repetirte Wurzel sey; so dass kein zweiter Werth eine Vieldeutigkeit der Grössen für D, α, β, A und mithin der Bedingungsgleichungen die a und b liefern, zulässt. Es ist nämlich der Coefficient

$$\frac{\frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{B}_0} + 8\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 - 4\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3}{\frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_0} + 2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_4 - 4\mathfrak{B}_2^2}$$

die Summe der negativen Wurzeln, deren eine $-\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}$ bestimmt ist. Somit ist die andere x durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0} - \frac{(\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_3 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3)}{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_4 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2^2} \\ &= \frac{\mathfrak{B}_1^3\mathfrak{B}_2 - 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_3 - 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2^2 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3}{4\mathfrak{B}_0[\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_4 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2^2]}, \end{aligned}$$

und wenn im letzten Theil des Zählers statt $\mathfrak{B}_3$ sein Werth aus der aufgestellten Bedingungsgleichung gesetzt wird

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0} \cdot \frac{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_4 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2^2}{\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_4 - 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2^2} \\ &= -\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}. \end{aligned}$$

Für diesen Werth von p ist aber sowohl D_1 als D_3 der Nulle gleich, A wird zu Null, α und β erhalten die Werthe:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-D_2 \pm 2\sqrt{D_0D_4}}{D_0}} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-D_2 \mp 2\sqrt{D_0D_4}}{D_0}} \\ \beta &= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-D_2 \pm 2\sqrt{D_0D_4}}{D_0}} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-D_2 \mp 2\sqrt{D_0D_4}}{D_0}}, \end{aligned}$$

wo entweder zugleich die obern oder untern Zeichen gelten, wodurch für α und β zusammen vier Werthe erhalten werden. Der Werth von D_2 ist für

$$p = -\frac{\mathfrak{B}_1}{4\mathfrak{B}_0}, \quad D_2 = -\frac{3\mathfrak{B}_1^2 + 8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2}{8\mathfrak{B}_0},$$

und eben so

$$D_4 = \frac{-3\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^4 + 16\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 - 64\,\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 256\,\mathfrak{B}_0^4\mathfrak{B}_4}{16^3\mathfrak{B}_0^4}$$

wird darin für $\mathfrak{B}_3$ sein Werth substituirt, so ergibt sich als Endresultat:

$$D_4 = \frac{5\,\mathfrak{B}_1^4 - 16\,\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 256\,\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_4}{16^2\,\mathfrak{B}_0^3}.$$

Der Werth von α und β lässt sich noch unter eine andere Form bringen, nämlich:

$$\begin{aligned}\alpha = \pm\frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{B}_0}}\Bigg[&\sqrt{-\frac{D_2}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} \pm \sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}}\\ &+ \sqrt{-\frac{D_2}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} \mp \sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}}\Bigg]\\ = \pm\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}_0}}&\sqrt{-\frac{D^2}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}},\end{aligned}$$

und analog der Werth von β,

$$\begin{aligned}\beta = \pm\frac{1}{2\sqrt{\mathfrak{B}_0}}\Bigg[&\sqrt{-\frac{D_2}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} \pm \sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}}\\ &- \sqrt{-\frac{D_3}{2} + \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}} \pm \sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}}\Bigg]\\ = \pm\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}_0}}&\sqrt{-\frac{D_2}{2} - \sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4}}.\end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4 = \frac{4\mathfrak{B}_1^4 - 2.16\,\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1^2\mathfrak{B}_2 + 64\,\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{B}_2^2 - 256\,\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_4}{16^2\,\mathfrak{B}_0^2},$$

somit

$$\sqrt{\frac{D_2^2}{4} - D_0 D_4} = \frac{\sqrt{(2\,\mathfrak{B}_1^2 - 8\,\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2)^2 - 16^2\,\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_4}}{16\,\mathfrak{B}_0},$$

und da

$$-\frac{D_2}{2} = \frac{-8\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2 + 3\mathfrak{B}_1^2}{16\,\mathfrak{B}_0};$$

ergeben sich für α und β die Werthe

$$\alpha = \pm\frac{1}{4\mathfrak{B}_0}\sqrt{-8\,\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2 + 3\,\mathfrak{B}_1^2 + \sqrt{(2\,\mathfrak{B}_1^2 - 8\,\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2)^2 - 16^2\,\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_4}}$$

$$\beta = \pm\frac{1}{4\mathfrak{B}_0}\sqrt{-8\,\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2 + 3\,\mathfrak{B}_1^2 - \sqrt{(2\,\mathfrak{B}_1^2 - 8\,\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_2)^2 - 16^2\,\mathfrak{B}_0^3\mathfrak{B}_4}}.$$

Das fragliche Integral ist somit

$$(ab-1)\int\left(\frac{1+au}{u+b}\right)\frac{du}{\sqrt{[(u+b)^2 - \alpha^2]\,[(u+b)^2 - \beta^2]}}$$

$$= a(ab-1)\int\frac{du}{\sqrt{[(u+b)^2-\alpha^2][(u+b)^2-\beta^2]}} - (ab-1)^2\int\frac{du}{(u+b)\sqrt{[(u+b)^2-\alpha^2]\,[(u+b)^2-\beta^2]}}.$$

Wird im letzteren Integral statt $u+b$, $\frac{1}{z}$ gesetzt; so übergeht es in

$$(ab-1)^2 \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-\alpha^2 z^2)(1-\beta^2 z^2)}}$$

in ein nach bekannten Regeln bestimmbares Integral.

9. Nachdem bewiesen wurde, dass die elliptischen Integrale von der Form

$$\int \frac{x^{\pm n}\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{\pm n}\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}},$$

worin n eine ganze Zahl vorstellt, geschlossen integrirbar seyen, sobald nur Eines derselben die erwähnte Eigenschaft besitzt, möge das einfachste, auf welches die andern zurückgeführt wurden, nämlich $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$ zum Gegenstand der weitern Untersuchung dienen. Es lässt sich überdiess wie aus Nr. 3) ersichtlich ist, das Integral $\int \frac{dv}{\sqrt{A+Bv+Cv^2+Dv^3}}$, für welches $m=0$ ist, auf die Form $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$ bringen; welches Integral eine analoge Behandlung zulässt. Es lässt sich ferner beweisen, dass dass erwähnte Integral durch die Annahme $x=\frac{a+by}{c+dy}$, wo a, b, c, d gehörig zu bestimmende Grössen vorstellen, auf kein bereits gelöstes zurückführbar sey; und es wäre zu abschweifend, dasselbe aus der Betrachtung der zur Bestimmung von a, b, c, d aufstellbaren Bedingungsgleichungen nachzuweisen, um somehr als vorangegangene und nachfolgende Betrachtungen zur Einsicht führen werden.

Ich schreite desshalb zur Bestimmung des Integrals bei der Substitution

$$x = \rho + \frac{1+my+ny^2}{1+m_1 y+n_1 y^2},$$

worin ρ, m, n, m_1, n_1 unbestimmte Grössen vorstellen. Es übergeht dadurch in

$$\int \frac{[m-m_1+2(n-n_1)y+(nm_1-mn_1)y^2]\,dy}{\sqrt{[1+m_1y+n_1y^2][1+my+ny^2+(\rho-w_1)(1+m_1y+n_1y^2)][1+my+ny^2+(\rho-w_2)(1+m_1y+n_1y^2)]}},$$
$$[1-my+ny^2+(\rho-w_3)(1+m_1y+n_1y^2)]$$

wenn w_1, w_2, w_3 die drei Wurzeln der Gleichung $A+Bx+Cx_2+Dx^3=0$ vorstellen. Es müssen nun die fünf unbestimmten Grössen so gewählt werden, damit sich das Integral auf ein bekanntes zurückführen lässt. Um jedoch die verschiedenen Weisen kennen zu lernen, bei denen, falls es der Fall ist, diess erzielt werden kann; wird es zuerst nöthig seyn, Ausdrücke von 4ter Abmessung, deren zwei im Nenner vorkommen, als:

$$(1+m_1y+n_1y^2)(1+my+ny^2+(\rho-w_1)(1+m_1y+n_1y^2)) \quad \text{und}$$
$$(1+my+ny^2+(\rho-w_2)(1+m_1y+n_1y^2))(1+my+ny^2+(\rho-w_3)(1+m_1y+n_1y^2))$$

näher zu betrachten, um sodann zugleich die Bedingungsgleichungen zu kennen, bei denen diese Ausdrücke gewissen, die Lösung vermittelnden, Bedingungen genügen.

II.

Bestimmung der Wurzelfactoren eines Ausdrucks vierter Abmessung.

1. Der allgemeine Ausdruck einer Gleichung vierten Grades

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

kann durch Einführung zweier Hilfsbögen φ und φ_1 auf die Form

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2\left(\sqrt{B_0 B_4}\cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3}\cos\varphi_1\right) y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

gebracht werden, wofern nur zwischen den Hilfsbögen und den Coefficienten die Relation

$$B_2 = -\,2\sqrt{B_0 B_4}\cos 2\varphi - 2\sqrt{B_1 B_3}\cos\varphi_1 \quad .$$

statuirt wird. In dieser Voraussetzung ist φ_1 eine willkührliche Function des Bogens φ, und dieser durch die Coefficienten bestimmt. Der Ausdruck

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2\left[\sqrt{B_0 B_4}\cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3}\cos\varphi_1\right] y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

ist die Summe der beiden Theile

$$B_0 y^4 - 2\sqrt{B_0 B_4}\cos 2\varphi\, y^2 + B_4 \quad \text{und}$$
$$y\left[B_1 y^2 - 2\sqrt{B_1 B_3}\cos\varphi_1\, y + B_3\right].$$

Der erste Theil davon ergibt durch Zerfallen in seine Wurzelfactoren, wenn $\sqrt{-1}$ durch i vorgestellt wird, wie leicht zu ersehen:

$$B_0 y^4 - 2\sqrt{B_0 B_4}\cos 2\varphi\, y^2 + B_4$$
$$= B_0\left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\,e^{\varphi i}\right]\left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\,e^{-\varphi i}\right]\left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\,e^{\varphi i}\right]\left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\,e^{-\varphi i}\right],$$

und der zweite analog

$$y\left[B_1 y^2 - 2\sqrt{B_1 B_3}\cos\varphi_1 + B_3\right] = B_1 y\left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\,e^{\varphi_1 i}\right]\left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\,e^{-\varphi_1 i}\right].$$

Es ist somit

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 - 2\left[\sqrt{B_0 B_4}\cos 2\varphi + \sqrt{B_1 B_3}\cos\varphi_1\right] y^2 + B_3 y + B_4$$
$$= B_0\left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\,e^{\varphi i}\right]\left[y - \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\,e^{-\varphi i}\right]\left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\,e^{\varphi}\right]\left[y + \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\,e^{-\varphi i}\right]$$
$$+ B_1 y\left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\,e^{\varphi_1 i}\right]\left[y - \sqrt{\frac{B_3}{B_1}}\,e^{-\varphi_1 i}\right].$$

Weil φ_1 als beliebige Function von φ gewählt werden kann; so sey

$$\varphi_1 i = \varphi i + \tfrac{1}{4}\lambda\frac{B_4}{B_0} - \tfrac{1}{2}\lambda\frac{B_3}{B_0}$$

(wo das Symbol λ den natürlichen Logarithmus bezeichnet), oder für

$$\tfrac{1}{4}\lambda\frac{B_4}{B_0} - \tfrac{1}{2}\lambda\frac{B_3}{B_1} = \alpha i\,, \quad \varphi_1 i = \varphi i + \alpha i.$$

Durch diese Substitution übergeht der obige Ausdruck in

$$B_0\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{\varphi i}\right]\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{-\varphi i}\right]\left[y+\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{\varphi i}\right]\left[y+\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{-\varphi i}\right]$$
$$+B_1 y\left[y-\sqrt{\frac{B_3}{B_1}}e^{\varphi i+\alpha i}\right]\left[y-\sqrt{\frac{B_3}{B_1}}e^{-(\varphi i+\alpha i)}\right];$$

und nach der Bedeutung von α in

$$B_0\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{\varphi i}\right]\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{-\varphi i}\right]\left[y+\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{\varphi i}\right]\left[y+\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{-\varphi i}\right]$$
$$+B_1 y\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{\varphi i}\right]\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{-\varphi i}\right].$$

Nach der frühern Voraussetzung ist

$$B_2 = -2\sqrt{B_0B_4}\cos 2\varphi - 2\sqrt{B_1B_3}\cos(\varphi+\alpha),$$

und für den Fall, dass $\alpha = 0$ wäre, ist $\cos\varphi$ durch eine quadratische Gleichung bestimmbar; für andere Werthe jedoch ist diese Gleichung vom vierten Grad. Man kann indessen jede Gleichung vierten Grades in eine andere transformiren, für welche $\alpha = 0$. Setzt man nämlich in der gegebenen Gleichung

$$B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0, \quad y = p + z,$$

wodurch dieselbe, wenn Kürze halber

$$\begin{aligned}
B_0 &= D_0\\
4B_0p + B_1 &= D_1\\
6B_0p^2 + 3B_1p + B_2 &= D_2\\
4B_0p^3 + 3B_1p^2 + 2B_2p + B_3 &= D_3\\
B_0p^4 + B_1p^3 + B_2p^2 + B_3p + B_4 &= D_4
\end{aligned}$$

gesetzt wird, in $D_0z^4 + D_1z^3 + D_2z^2 + D_3z + D_4 = 0$ übergeht: so kann immer p aus einer Gleichung des dritten Grades so bestimmt werden, dass die Relation $\frac{D_4}{D_0} = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2$ erfüllt sey, wodurch zugleich die Gleichnng $D_0z^4 + D_1z^3 + D_2z^3 + D_3z + D_4 = 0$ die Eigenschaft erlangt, dass in ihr $\alpha = 0$ ist. Diese Bedingung $\frac{D_4}{D_0} = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2$ gibt

$$\frac{B_0p^4 + B_1p^3 + B_2p^3 + B_3p + B_4}{B_0} = \left(\frac{4B_0p^3 + 3B_1p^2 + 2B_2p + B_3}{4B_0p + B_1}\right)^2,$$

und diesen Ausdruck entwickelnd, erhält man

$$16B_0^2p^6 + \left.\begin{matrix}8B_0B_1\\ +16B_0B_1\end{matrix}\right] p^5 + \left.\begin{matrix}B_1^2\\ +\ 8B_1^2\\ +16B_0B_2\end{matrix}\right] p_4 + \left.\begin{matrix}\frac{B_1^3}{B_0}\\ +\ 8B_1B_2\\ +16B_0B_3\end{matrix}\right] p^3$$
$$+\left.\begin{matrix}\frac{B_1^2B_2}{B_0}\\ +\ 8B_1B_3\\ +16B_0B_4\end{matrix}\right] p^2 + \left.\begin{matrix}\frac{B_1B_3}{B_0}\\ +8B_1B_4\end{matrix}\right] p + \frac{B_1^2B_4}{B_0}$$
$$= 16B_0^2p^6 + 24B_0B_1p^5 + \left.\begin{matrix}9B_1^2\\ +16B_0B_2\end{matrix}\right] p^4 + \left.\begin{matrix}12B_1B_2\\ +\ 8B_0B_3\end{matrix}\right] p^3$$
$$+\left.\begin{matrix}4B^2\\ +6B_1B_3\end{matrix}\right] p^2 + 4B_2B_3p + B_3^2,$$

d. i. für p folgende Gleichung 3ten Grades:

$$\left(\frac{B_1^3}{B_0} - 4B_1B_2 + 8B_0B_3\right)p^3 + \left(\frac{B_1^2B_2}{B_0} + 2B_1B_3 + 16B_0B_4 - 4B_2^2\right)p^2$$
$$+ \left(\frac{B_1^2B_3}{B_0} + 8B_1B_4 - 4B_2B_3\right)p + \frac{B_1^2B_4}{B_0} - B_3^2 = 0.$$

Da nun in der Gleichung $D_0z^4 + D_1z^3 + D_2z^2 + D_3z + D_4 = 0$ die Relation besteht

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} = \sqrt{\frac{D_3}{D_1}} \quad \text{d. i.} \quad \tfrac{1}{4}\lambda\frac{D_4}{D_0} - \tfrac{1}{2}\lambda\frac{D_3}{D_1} = \alpha = 0;$$

so übergeht dieselbe in

$$D_0\left[z-\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{\varphi i}\right]\left[z-\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{-\varphi i}\right]\left[z+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{\varphi i}\right]\left[z+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{-\varphi i}\right]$$
$$+ D_1z\left[z-\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{\varphi i}\right]\left[z-\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{-\varphi i}\right] = 0.$$

Somit sind $z_1 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{\varphi i}$ und $z_2 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{-\varphi i}$ zwei Wurzeln der letzten Gleichung und es sind zugleich zwei Werthe von y bekannt, nämlich

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{\varphi i}$$
$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{-\varphi i}.$$

Die zwei andern Werthe von z ergeben sich aus der noch übrigen quadratischen Gleichung, die man erhält, wenn die Gleichung durch die bereits bestimmten Wurzelfactoren getheilt wird. Man erhält nach Weglassung dieser Factoren

$$D_0\left[z+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{\varphi i}\right]\left[z+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}e^{-\varphi i}\right] + D_1z = 0 \quad \text{d. i.}$$
$$D_0z^2 + (2\sqrt[4]{D_0^3D_4}\cos\varphi + D_1)z + \sqrt{D_0D_4} = 0$$

und somit
$$z_3 = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

$$z_4 = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}.$$

Es sind daher die zwei andern Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$y_3 = p - \tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

$$y_4 = p - \tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}.$$

2.) Es erübrigt nur noch den Werth von φ als Function der Coefficienten zu bestimmen. Dieser Werth ergibt sich aus einer Gleichung zweiten Grades; daher gibt es zwei Werthe von φ und acht Werthe von z. Man kann sich nämlich durch wirkliche Substitution überzeugen, dass sowohl die z für den einen Werth von φ als für den andern der Gleichung $D_0 z^4 + D_1 z^3 + D^2 z_2 + D_3 z + D_4 = 0$ genügen. Der Werth von φ ist aus der Gleichung

$$2\sqrt{D_0 D_4}\cos 2\varphi + \sqrt{D_1 D_3}\cos\varphi = -D_2$$

zu bestimmen, d. i. aus

$$4\sqrt{D_0 D_4}\cos^2\varphi + 2\sqrt{D_1 D_3}\cos\varphi + D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4} = 0$$

und ist

$$\cos\varphi = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}.$$

Seyen die Werthe von z für den ersten Werth von $\cos\varphi = \cos\varphi_1$ durch kleine und die für den zweiten Werth von $\cos\varphi = \cos\varphi_2$ durch grosse Buchstaben bezeichnet, so sind (wenn zur Abkürzung

$$\lambda = 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1 + \frac{D_1}{D_0}$$

$$\mu = \sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1 + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}\quad \text{gesetzt wird}),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{\varphi_1 i}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-\varphi_1 i}$$

$$z_3 = -\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu$$

$z_4 = -\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\mu$ die vier ersteren Wurzeln der Gleichung, und diese Wurzeln genügen den nöthigen Bedingungen: es ist

$$-(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = -2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1 + 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1 + \frac{D_1}{D_0}$$

$$= \frac{D_1}{D_0}.$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 =$$

$$\begin{aligned} = \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} &+ \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\right)e^{\varphi_1 i} \\ &+ \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\mu\right)e^{\varphi_1 i} \\ &+ \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\right)e^{-\varphi_1 i} \\ &+ \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\mu\right)e^{-\varphi_1 i} + \sqrt{\frac{D_4}{D_0}} \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} - 2\cos\varphi_1 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cdot\lambda$$

$$= 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} - 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}(\cos 2\varphi_1 + 1) - 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cdot\frac{D_1}{D_0}\cos\varphi_1$$

$$= -2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}\cos 2\varphi_1 - 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cdot\frac{D_1}{D_0}\cos\varphi_1$$

$$= -2\sqrt{\frac{D_0 D_4}{D_0^2}}\cos 2\varphi_1 - 2\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0^2}}\cos\varphi_1$$

$$= -\frac{1}{D_0}(2\sqrt{D_0 D_4}\cos 2\varphi_1 + 2\sqrt{D_1 D_3}\cos\varphi_1) = \frac{D_2}{D_0}.$$

$$-(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4)$$

$$= -\Big[\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}(-\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu)$$
$$+\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}(-\tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\mu)$$
$$+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(\tfrac{1}{4}\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\mu^2)\, e^{\varphi_1 i}$$
$$+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(\tfrac{1}{4}\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\mu^2)\, e^{-\varphi_1 i}\Big]$$

$$= -\Big[-\lambda\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} + 2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(\tfrac{1}{4}\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\mu^2)\cos\varphi_1\Big]$$

$$= -\Big[-\lambda\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} + 2\sqrt[\frac{4}{3}]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi_1\Big] = \frac{D_1}{D_0}\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} = \frac{D_3}{D_0}.$$

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}(\lambda^2 - \mu^2) = \frac{D_4}{D_0}.$$

Aber auch die Wurzeln Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 genügen der Gleichung; denn es ist, da sich die vorigen Reductionen ohne Substitution des Werthes von φ ergaben, analog

$$-(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4) = \frac{D_1}{D_0}$$

$$Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4 = \frac{D_2}{D_0}$$

$$-(Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4) = \frac{D_3}{D_0}$$

$$Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 = \frac{D_4}{D_0}.$$

3.) Diess lässt vermuthen, dass die vier letzten Werthe von Z mit denen von z identisch sind, und wirklich lässt sich erweisen, dass

$$z_1 = Z_3$$
$$z_2 = Z_4$$
$$z_3 = Z_1$$
$$z_4 = Z_2.$$

Es ist, für $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} = a$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = b$$

$$Z_1 = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a - b + i\sqrt{1-(a+b)^2})$$

$$z_3 = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a+b) + \frac{D_1}{D_0}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a+b) + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}.$$

Nun ist nach frühern $\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cdot\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} = \frac{D_1}{D_0}$, mithin

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,a - \tfrac{1}{2}\frac{D_1}{D_0} = -\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,a \quad \text{und folglich}$$

$$(-a-b)\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a+b) + \frac{D_1}{D_0}\right).$$

Durch diese Bedingung wird $Z_1 = z_3$, so wie

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}[(-a-b) - i\sqrt{1-(a+b)^2}] = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a+b) + \frac{D_1}{D_0}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a+b) + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}},$$

d. i. $Z_2 = z_4$.

Eben so besteht die Beziehung $-\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,a = \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,a - \tfrac{1}{2}\frac{D_1}{D_0}$, d. h.

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a+b) = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a-b) + \frac{D_1}{D_0}\right),$$

woraus folgt: dass

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}[(-a+b) + i\sqrt{1-(a-b)^2}] = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a-b) + \frac{D_1}{D_0}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a-b) + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

und $\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}[(-a+b) - i\sqrt{1-(a-b)^2}] = -\tfrac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a-b) + \frac{D_1}{D_0}\right)$

$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}(-a-b) + \frac{D_1}{D_0}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}}$$

d. i. $Z_3 = z_1$, $Z_4 = z_2$.

4.) Hiedurch lassen sich die vier Wurzeln einer biquadratischen Gleichung unter einer viel bequemern Form darstellen. Ist nämlich die gegebene Gleichung durch

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

vorgestellt. und man bestimmt p mittelst der Gleichung:

$$\left(\frac{B_1^3}{B_0} - 4B_1B_2 + 8B_0B_3\right)p^3 + \left(\frac{B_1^2B_2}{B_0} + 2B_1B_3 + 16B_0B_4 - 4B_2^2\right)p^2$$

$$+ \left(\frac{B_1^2B_3}{B_0} + 8B_1B_4 - 4B_2B_3\right)p + \frac{B_1^2B_4}{B_0} - B_3^2 = 0,$$

bildet sodann folgende Grössen:

$$\begin{aligned}
D_0 &= B_0\\
D_1 &= 4B_0p + B_1\\
D_2 &= 6B_0p^2 + 3B_1p + B_2\\
D_3 &= 4B_0p^3 + 3B_1p^2 + 2B_2 + B_3\\
D_4 &= B_0p^4 + B_1p^3 + B_2p^2 + B_3p + B_4,
\end{aligned}$$

so sind die vier Wurzeln durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}\right]}$$

$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}\right]}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}\right]}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}\right]}.$$

5.) Da der Werth von p durch eine cubische Gleichung bestimmt wird; so entsteht die Unbestimmtheit, ob nicht verschiedene Werthe von p auch verschiedene Werthe von y liefern; so dass die Wurzeln je nach den Werthen von p a) die Lösungen verschiedener, etwa in Einzelheiten differenter Gleichungen ergeben, oder b) ob der Werth von y, je nach verschiedenen Werthen von p, ein anderer wird, der Art: dass für ein bestimmtes p Ein y identisch wird mit einem andern y für einen andern Werth von p, oder c) ob für sämmtliche Werthe von p dasselbe y stets denselben Werth behält. Um zu erfahren, in welchem Fall letztere Eigenthümlichkeit stattfindet, wird es nöthig die Anzahl der Werthe von p zu suchen, für die y stets denselben Werth erhalten kann.

Der allgemeine Werth von y ist nach früheren

$$y = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - \frac{4D_2}{\sqrt{D_0D_4}} + 8}\right]$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{8}\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - \frac{1}{4}\frac{D_2}{\sqrt{D_0D_4}} - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{8}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}}\cdot\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - \frac{4D_2}{\sqrt{D_0D_4}} + 8}}.$$

Vermöge der Bedingung $\sqrt{D_0 D_4} = \frac{D_0 D_3}{D_1}$ ist

$$\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} = \frac{D_1}{D_0}\sqrt[4]{\frac{D_0}{D_4}}$$

$$\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - \frac{4 D_2}{\sqrt{D_0 D_4}} + 8} = \sqrt{\frac{D_1^2}{D_0^2}\sqrt{\frac{D_0}{D_4}} - \frac{4 D_1 D_2}{D_0 D_1}\sqrt{\frac{D_0}{D_4}} + \frac{8 D_3}{D_1}\sqrt{\frac{D_0}{D_4}}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\sqrt{\frac{D_1^3 - 4 D_0 D_1 D_2 + 8 D_0^2 D_3}{D_0^2 D_1}}.$$

Es ist $D_1^3 = 64 B_0^3 p^3 + 3.16 B_0^2 B_1 p^3 + 3.4 B_0 B_1^2 p + B_1^3$

$$-4 D_0 D_1 D_2 = -6.16 B_0^3 p^3 - 8.9 B_0^2 B_1 p^2 - (3.4 B_0 B_1^2 + 16 B_0^2 B_2) p - 4 B_0 B_1 B_2$$

$$8 D_0^2 D_3 = 32 B_0^3 p^3 + 24 B_0^2 B_1 p^2 + 16 B_0^2 B_2 p + 8 B_0 B_3$$

somit $D_1^3 - 4 D_0 D_1 D_2 + 8 D_0^2 D_3 = B_1^3 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3$

und dieser Ausdruck ist der erste Coefficient in der cubischen Gleichung für p; der der Kürze halber durch A_3 vorgestellt sey. Dadurch übergeht

$$\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - \frac{4 D_2}{\sqrt{D_0 D_4}} + 8} \quad \text{in} \quad \sqrt[4]{\frac{D_0}{D_4}}\sqrt{\frac{A_3}{D_0^2 D_1}},$$

und somit ist

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi = -\frac{1}{4}\frac{D_1}{D_0} \pm \frac{1}{4 D_0}\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} = \frac{1}{4 D_0}\left[\pm\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1\right],$$

$$\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}\cos^2\varphi = \frac{1}{16 D_0^2}\left(D_1^2 \mp 2 D_1\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + \frac{A_3}{D_1}\right)$$

$$\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}\sin^2\varphi = \frac{1}{16 D_0^2}\left(\frac{16 D_0^2 D_3}{D_1} - D_1^2 \pm 2\sqrt{A_3 D_1} - \frac{A_3}{D_1}\right)$$

$$= \frac{1}{16 D_0^2 D_1}\left[16 D_0^2 D_3 - D_1^3 \pm 2\sqrt{A_3 D_1}\, D_1 - A_3\right].$$

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\sin\varphi\sqrt{-1} = \frac{1}{4 D_0\sqrt{D_1}}\sqrt{D_1^3 - 16 D_0^2 D_3 \mp 2\sqrt{A_3 D_1}\, D_1 + A_3}$$

und es ist zugleich nach früheren

$$D_1^3 - 16 D_0^2 D_3 + A_3 = 4(3 B_0 B_1^2 - 8 B_0^2 B_2) p + 2(B_1^3 - 4 B_0^2 B_3 - 2 B_0 B_1 B_2).$$

Durch diese Werthe übergeht der allgemeine Ausdruck der Wurzeln in

$$y = -\frac{B_1}{4 B_0} \pm \frac{1}{4 B_0}\sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$$

$$\pm \frac{1}{4 B_0}\sqrt{\frac{4(3 B_0 B_1^2 - 8 B_0^2 B_2) p + 2(B_1^3 - 4 B_0^2 B_3 - 2 B_0 B_1 B_2) \mp 2 D_1\sqrt{A_3 D_1}}{D_1}}.$$

Sey der Werth von y für einen zweiten Werth von p z. B. $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{y}$ vorgestellt, und es werde Kürze halber

$$\sqrt{A_3} \pm \sqrt{4(3 B_0 B_1^2 - 8 B_0^2 B_2)\mathfrak{p} + 2(B_1^3 - 4 B_0^2 B_3 - 2 B_0 B_1 B_2) \mp 2(4 B_0\mathfrak{p} + B_1)\sqrt{A_3(4 B_0\mathfrak{p} + B_1)}} = \mathfrak{P}$$

gesetzt; alsdann ist

$$\mathfrak{g} = \frac{-B_1 \pm \dfrac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p} + B_1}}}{4B_0}$$

$$4B_0(y-\mathfrak{g}) = \pm\frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{4B_0 p + B_1}} \mp \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p} + B_1}}$$

$$\pm\sqrt{\frac{4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)p + 2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) \mp \sqrt{A_3(4B_0p + B_1)^3}}{4B_0p + B_1}}.$$

Man nehme nun an, $\mathfrak{p}$ sey eine Wurzel der Gleichung:

$$(B_1^3 - 4B_0B_1B_2 + 8B_0^2B_3)p^3 + (B_1^2B_2 + 2B_0B_1B_3 + 16B_0^2B_4 - 4B_0B_2^2)p^2$$
$$+ (B_1^2B_3 + 8B_0B_1B_4 - 4B_0B_2B_3)p + B_1^2B_4 - B_0B_3^2 = 0,$$

mithin $\mathfrak{g}$ eine Wurzel der Gleichung

$$B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0$$

und es sey $y = \mathfrak{g}$; alsdann liefert

$$\mathfrak{P}^2(4B_0p + B_1) = [4B_0\mathfrak{p} + B_1][\pm\sqrt{A_3}$$
$$\pm\sqrt{4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)p + 2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) \mp 2(4B_0p + B_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{A_3}}]^2$$

diejenigen Werthe von p für die die Wurzeln dieselben Werthe behalten.

6.) Zuvörderst leuchtet ein, dass im Werthe von y_1, so wie in dem von y_2, y_3, y_4 p stets ein und dasselbe bleibt; es sey ferner Kürze halber

$$4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2) = \alpha$$
$$2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) = \beta$$
$$4B_0y + B_1 = z;$$

alsdann ist bei nachfolgendem Gang der Operationen p durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt, und ändert nicht seinen Werth, wenn z seine vier verschiedenen Werthe annimmt. Es ist nämlich:

$$(z\sqrt{D_1} \mp \sqrt{A_3})^2 = \alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3D_1}$$
$$\pm 2\sqrt{A_3D_1}(D_1 - z) = \alpha p + \beta - z^2D_1 - A_3$$
$$4A_3(16B_0^2p^2 + 8B_0B_1p + B_1^2 - 8B_0zp - 2B_1z + z^2)(4B_0p + B_1)$$
$$= (\alpha p + \beta - 4z^2B_0p - z^2B_1 - A_3)^2.$$
$$16^2A_3B_0^3p^3 + (192A_3B_0^2B_1 - 128A_3B_0^2z - (\alpha - 4B_0z^2)^2)p^2$$
$$+ (32A_3B_0B_1(B_1 - z) + 16A_3B_0(B_1 - z)^2 - 2(\alpha - 4B_0z^2)\,.$$
$$.\,(\beta - z^2B_1 - A_3)]\,p + 4A_3B_1(B_1 - z)^2 - (\beta - A_3 - z^2B_1)^2 = 0.$$

Sey $\mathfrak{p}$ ein solcher Werth von p, für welchen y_1, y_2, y_3, y_4 Wurzeln der Gleichung

$$B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0$$

vorstellen, alsdann darf sich der Werth von p nicht ändern, wenn statt z einer der folgenden Werthe:

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p} + B_1}} = \frac{+\sqrt{A_3} + \sqrt{\alpha\mathfrak{p} + \beta - 2(4B_0\mathfrak{p} + B_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{A_3}}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p} + B_1}}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_2}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}} = \frac{+\sqrt{A_3}-\sqrt{\alpha\mathfrak{p}+\beta-2(4B_0\mathfrak{p}+B_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{A_3}}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_3}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}} = \frac{-\sqrt{A_3}+\sqrt{\alpha\mathfrak{p}+\beta+2(4B_0\mathfrak{p}+B_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{A_3}}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_4}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}} = \frac{-\sqrt{A_3}-\sqrt{\alpha\mathfrak{p}+\beta+2(4B_0\mathfrak{p}+B_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{A_3}}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}}$$

gesetzt wird. Aber der Werth von p stellt bei dieser Substitution diejenigen Werthe vor, für welche $y-\mathfrak{g}$ zu Null wird; d. i. Werthe, für die sich der Werth der Wurzeln nicht ändert. Zugleich zeigt die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \Big[192 A_3 B_0^2 B_1 - 128 A_3 \frac{B_0^2 \mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}} \\
&-\Big(\alpha - \frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\Big)^2\Big] p^2 + \Big[32 A_3 B_0 B_1 \Big(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}}\Big) \\
&+ 16 A_3 B_0 \Big(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}}\Big)^2 - 2\Big(\alpha - \frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\Big)\Big(\beta - A_3\frac{-B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\Big)\Big] p \\
&+ 4 A_3 B_1 \Big(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}}\Big)^2 - \Big(\beta - A_3\frac{-B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\Big)^2 = 0,
\end{aligned}$$

dass diese Werthe blos bezüglich der verschiedenen $\mathfrak{P}$ variiren könnten, welche Verschiedenheit nach frühern nicht besteht; d. h. dass die drei Werthe von p für alle Wurzeln dieselben bleiben. Somit ist der Beweis geführt, dass die Wurzeln für jeden Werth von p aus der bestimmten Hilfsgleichung dieselben Werthe behalten; denn da jeder Werth der obigen Gleichung der Hilfsgleichung entsprechen muss, diese aber nur drei Werthe liefert, so muss die gefundene Gleichung mit der Hilfsgleichung identisch seyn.

7.) Man kann jedoch gegen die vorige Deduction einige Zweifel erheben, indem man bei einer andern Entwicklung leicht zu einer Gleichung sechsten Grades oder gar des zwölften gelangt. So gibt folgende Entwicklung eine Gleichung sechsten Grades:

$$z\sqrt{D_1} = \pm\sqrt{A_3} \pm \sqrt{\alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3 D_1}}$$

$$\begin{aligned}
z_2 D_1 = {} & A_3 + \alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3 D_1} \\
& \pm 2\sqrt{A_3(\alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3 D_1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4B_0 z^2 - \alpha)p + B_1 z^2 - \beta - A_3 \pm 2D_1\sqrt{A_3 D_1} = {} \\
\pm 2\sqrt{A_3(\alpha p + \beta \mp 2D_1\sqrt{A_3 D_1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(4B_0 z^2 - \alpha)^2 p^2 + 2(4B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3)p \\
&+ (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 \pm 4[(4B_0 z^2 - \alpha)p + B_1 z^2 - \beta + A_3]\,[4B_0 p + B_1]\sqrt{A_3 D_1} \\
&+ 4^4 R_0^3 A_3 p^3 + 3.4^3 B_0^2 B_1 A_3 p^2 + 3.4^2 B_0 B_1^2 A_3 p + 4 B_1^3 A_3 \\
&\qquad = 4A_3(\alpha p + \beta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&4^4 B_0^3 A_3 p^3 + [3.4^3 B_0^2 B_1 A_3 + (4B_0 z^2 - \alpha)^2]\, p^2 \\
&+ [3.4^2 B_0 B_1^2 A_3 + 2(4B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) - 4\alpha A_3]\, p \\
&+ 4B_1^3 A_3 + (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 - 4A_3\beta = \mp 4D_1 \sqrt{A_3 D_1}\, [(4B_0 z^2 - \alpha)p + B_1 z^2 - \beta + A_3].
\end{aligned}
$$

Das Quadrat der so angeschriebenen Theile ist:

$$
\begin{aligned}
&4^6 B_0^6 A_3^2 p^6 + [2.4^4 B_0^3 A_3 (3.4^3 B_0^2 B_1 A_3 + (4B_0 z^2 - \alpha)^2) \\
&- 4^5 B_0^3 A_3 (4B_0 z^2 - \alpha)^2]\, p^5 + [2.4^4 B_0^3 A_3 (3.4^2 B_0 B_1^2 A_3 \\
&+ 2(4B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) - 4\alpha A_3) + (3.4^3 B_0^2 B_1 A_3 + (4B_0 z^2 - \alpha)^2)^2 \\
&- 2.4^5 B_0^3 A_3 (4B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta + A_3) - 3.4^5 B_0^2 B_1 A_3 (4B_0 z^2 - \alpha)^2]\, p^4 \\
&+ [2.4^4 B_0^3 A_3 (4B_1^3 A_3 + (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 - 4A_3\beta) + 2(3.4^3 B_0^2 B_1 A_3 \\
&+ (4B_0 z^2 - \alpha)^2)(3.4^2 B_0 B_1^2 A_3 + 2(4B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) - 4\alpha A_3) \\
&- 4^5 B_0^3 A_3 (B_1 z^2 - \beta + A_3)^2 - 6.4^4 B_0^2 B_1 A_3 (4B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta + A_3) \\
&- 3.4^3 B_0 B_1^2 A_3 (4B_0 z^2 - \alpha)^2]\, p^3 + [2(3.4^3 B_0^2 B_1 A_3 + (4B_0 z^2 - \alpha)^2)\,. \\
&.\,(4B_1^3 A_3 + (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 - 4A_3\beta) + (3.4^2 B_0 B_1^2 A_3 + 2(4B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) \\
&- 4\alpha A_3)^2 - 3.4^4 B_0^2 B_1 A_3 (B_1 z^2 - \beta + A_3)^2 - 6.4^3 B_0 B_1^2 A_3 (4B_0 z^2 - \alpha)\,. \\
&(B_1 z^2 - \beta + A_3) - 4^2 B_1^3 A_3 (4B_0 z^2 - \alpha)^2]\, p^2 + [2(3.4^2 B_0 B_1^2 A_3 \\
&+ 2(4B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta - A_3) - 4\alpha A_3)(4B_1^3 A_3 + (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 \\
&- 4A_3\beta) - 3.4^3 B_0 B_1^2 A_3 (B_1 z^2 - \beta + A_3)^2 \\
&- 2.4^2 B_1^3 A_3 (4B_0 z^2 - \alpha)(B_1 z^2 - \beta + A_3)]\, p + (4B_1^3 A_3 \\
&+ (B_1 z^2 - \beta - A_3)^2 - 4A_3\beta)^2 - 4^2 B_1^3 A_3 (B_1 z^2 - \beta + A_3)^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Es wäre nun da leicht möglich, dass unter den sechs Werthen von p, für welche die Wurzeln dieselben Werthe erhalten, die dreie der Hilfsgleichung vorkommen, dass aber die früher entwickelte cubische Gleichung nicht sämmtlich dieselben Werthe mit der Hilfsgleichung besitzt. Allein zerfällt man die gefundene Gleichung sechsten Grades in ihre beiden Factoren, so überzeugt man sich, dass dieselbe aus nachstehenden Ausdrücken besteht:

$$
\begin{aligned}
&\Big(16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \Big[192 A_3 B_0^2 B_1 - 128 \frac{A_3 B_0^2 \mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 p + B_1}} \\
&- \left(\alpha - \frac{4B_0 \mathfrak{P}^2}{4B_0 p + B_1}\right)^2\Big]\, p^2 + \Big[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 p + B_1}}\right) \\
&+ 16 A_3 B_0 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 p + B_1}}\right)^2 - 2\left(\alpha - \frac{4B_0 \mathfrak{P}^2}{4B_0 p + B_1}\right)\left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4B_0 p + B_1}\right)\Big]\, p \\
&+ 4A_3 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 p + B_1}}\right)^2 - \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4B_0 p + B_1}\right)^2\Big) \\
&\Big(16^2 A_3 B_0^3 p^3 + \Big[192 A_3 B_0^2 B_1 + 128 \frac{A_3 B_0^2 \mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 p + B_1}} \\
&- \left(\alpha - \frac{4B_0 \mathfrak{P}^2}{4B_0 p + B_1}\right)^2\Big]\, p^2 + \Big[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 + \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 p + B_1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$+16A_3B_0\left(B_1+\frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2-2\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0p+B_1}\right)\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0p+B_1}\right)\Bigg]p$$
$$+4A_3B_1\left(B_1+\frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2-\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0p+B_1}\right)^2\Bigg);$$

also aus drei paar gleichen Wurzeln, da dieselben bloss durch die Verschiedenheit von $\mathfrak{P}$, d. i. von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_4$ variren, welche Verschiedenheit nur scheinbar ist.

Eben so könnte man leicht eine Gleichung zwölften Grades deduciren und fände analog nachstehende Factoren:

$$\Bigg(16^2A_3B_0^3p^3+\Bigg[192A_3B_0^2B_1-128\frac{A_3B_0^2\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4B_0p+B_1}}$$
$$-\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}_1^2}{4B_0p+B_1}\right)^2\Bigg]p^2+\Bigg[32A_3B_0B_1\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)$$
$$+16A_3B_0\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2-2\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}_1^2}{4B_0p+B_1}\right)\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}_1^2}{4B_0p+B_1}\right)\Bigg]p$$
$$+4A_3B_1\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_1}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2-\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}_1^2}{4B_0p+B_1}\right)^2\Bigg)$$

$$\Bigg(16^2A_3B_0^3p^3+\Bigg[192A_3B_0^2B_1-128\frac{A_3B_0^2\mathfrak{P}_2}{\sqrt{4B_0p+B_1}}$$
$$-\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}_2^2}{4B_0p+B_1}\right)^2\Bigg]p^2+\Bigg[32A_3B_0B_1\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_2}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)$$
$$+16A_3B_0\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_2}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2-2\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}_2^2}{4B_0p+B_1}\right)\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}_2^2}{4B_0p+B_1}\right)\Bigg]p$$
$$+4A_3B_1\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_2}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2-\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}_2^2}{4B_0p+B_1}\right)^2\Bigg)$$

$$\Bigg(16^2A_3B_0^3p^3+\Bigg[192A_3B_0^2B_1-128\frac{A_3B_0^2\mathfrak{P}_3}{\sqrt{4B_0p+B_1}}$$
$$-\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}_3^2}{4B_0p+B_1}\right)^2\Bigg]p^2+\Bigg[32A_3B_0B_1\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_3}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)$$
$$+16A_3B_0\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_3}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2$$
$$-2\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}_3^2}{4B_0p+B_1}\right)\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}_3^2}{4B_0p+B_1}\right)\Bigg]p$$
$$+4A_3B_1\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_3}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2-\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}_3^2}{4B_0p+B_1}\right)^2\Bigg)$$

$$\Bigg(16^2A_3B_0^3p^3+\Bigg[192A_3B_0^2B_1-128\frac{A_3B_0^2\mathfrak{P}_4}{\sqrt{4B_0p+B_1}}$$
$$-\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}_4^2}{4B_0p+B_1}\right)^2\Bigg]p^2+\Bigg[32A_3B_0B_1\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_4}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)$$

$$+16A_3B_0\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_4}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2-2\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}_4^2}{4B_0p+B_1}\right)\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}_4^2}{4B_0p+B_1}\right)\Big]p$$

$$+4A_3B_1\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}_4}{\sqrt{4B_0p+B_1}}\right)^2-\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}_4^2}{4B_0p+B_1}\right)^2\Big)=0,$$

also abermals vier Gruppen von drei verschiedenen Werthen, welche Gruppen einander gleich sind und wodurch viceversa der Beweis ersichtlich wäre; dass verschiedene Werthe von $\mathfrak{P}$ den Werth von p nicht ändern, wenn man wie natürlich voraussetzt, dass jeder der verschiedenen Werthe von p auch ein möglicher Werth der Hilfsgleichung sey und daher in derselben erscheinen müsse.

III.

Betrachtung repetirter Wurzelfactoren.

1. Im frühern wurden die Wurzeln der Gleichung

$$B_0y^4+B_1y^3+B_2y^2+B_3y+B_4=0$$

unter der allgemeinen Form

$$y=p+\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,e^{\pm i\arccos\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}}\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}-4\frac{(D_2-2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}\right]}$$

bestimmt, und darin ist p durch die Gleichung

$$\left(\frac{B_1^3}{B_0}-4B_1B_2+8B_0B_3\right)p^3+\left(\frac{B_1^2B_2}{B_0}+2B_1B_3+16B_0B_4-4B_2^2\right)p^2$$

$$+\left(\frac{B_1^2B_3}{B_0}+8B_1B_4-4B_2B_3\right)p+\frac{B_1^2B_4}{B_0}-B_3^2=0$$

und die Grössen D durch die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
D_0&=B_0\\
D_1&=4B_0p+B_1\\
D_2&=6B_0p^2+3B_1p+B_2\\
D_3&=4B_0p^3+3B_1p^2+2B_2p+B_3\\
D_4&=B_0p^4+B_1p^3+B_2p^2+B_3p+B_4
\end{aligned}$$

gegeben. Es erübrigt noch die Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten anzugeben, wenn die Wurzeln gewisse Bedingungen erfüllen sollen. Es sey zunächst die Bedingung: dass die Gleichung zwei gleiche Wurzeln enthalte.

Die gegebene Gleichung überging für

$$B_2=-2\left(\sqrt{B_0B_4}\cos 2\varphi+\sqrt{B_1B_3}\cos\varphi_1\right),\quad \text{wenn darin}$$

$$\varphi_1=\varphi+\tfrac{i}{4}\lambda\frac{B_4}{B_0}-\tfrac{i}{2}\lambda\frac{B_3}{B_1}=\varphi+\varkappa\quad\text{gesetzt wird in}$$

$$B_0y^4+B_1y^3-2\left(\sqrt{B_0B_4}\cos 2\varphi+\sqrt{B_1B_3}\cos(\varphi+\varkappa)\right)y^2+B_3y+B_4=0$$

$$=B_0\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{\varphi i}\right]\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{-\varphi i}\right]\left[y+\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{\varphi i}\right]\left[y+\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{-\varphi i}\right]$$

$$+B_1y\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{\varphi i}\right]\left[y-\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}e^{-\varphi i}\right].$$

Sollen nun zwei Wurzeln dieser Gleichung einander gleich seyn; so findet diess statt, für

$$\text{a)}\quad \varphi = 0$$

oder b) $\varphi = \pi$. Der Werth von φ ist durch die Gleichung

$$\cos\varphi = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}$$

bestimmt, und man hat daher für den ersten Werth von

$$\varphi,\quad 1 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D^0 D_4}}}$$

und für den zweiten

$$-1 = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}$$

welche Gleichungen wegen der Bedingung

$2\sqrt{D_0 D_4}\cos 2\varphi + 2\sqrt{D_1 D_3}\cos\varphi + D_2 = 0$ in der Form

$2\sqrt{D_0 D_4} \pm 2\sqrt{D_1 D_3} + D_2 = 0$ repräsentirt sind.

Auf dasselbe Resultat führt die allgemeine Form der Wurzeln, die für die vier Fälle

$$\text{a)}\quad -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_0} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

$$\text{b)}\quad -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = -1$$

$$\text{c)}\quad -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

$$\text{d)}\quad -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = -1$$

zwei gleiche Wurzeln liefert. Jede dieser vier Bedingungen führt auf dieselbe Gleichung zur Bestimmung von p; denn es ergibt sich aus

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = \pm 1$$

nach gewöhnlichen Operationen

$$1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \tfrac{1}{16}\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} = \tfrac{1}{16}\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - \tfrac{1}{4}\frac{D_2}{\sqrt{D_0 D_4}} + \tfrac{1}{4}$$

$$2\sqrt{D_0 D_4} \pm 2\sqrt{D_1 D_3} + D_2 = 0$$

$$4 D_0 D_4 + 4 D_1 D_3 \pm 8\sqrt{D_0 D_1 D_3 D_4} = D_2^2$$

$$64 D_0 D_1 D_3 D_4 = D_2^4 + 16 D_0^2 D_4^2 + 16 D_1^2 D_3^2 - 8 D_0 D_2^2 D_4 - 8 D_1 D_2^2 D_3 + 32 D_0 D_1 D_3 D_4$$

$$8 D_1 D_3 [4 D_0 D_4 + D_2^2 - 2 D_1 D_3] = (D_2^2 - 4 D_0 D_4)^2.$$

Es ist $4\,D_0 D_4 = 4\,B_0^2 p^4 + 4\,B_0 B_1 p^3 + 4\,B_0 B_2 p^2 + 4\,B_0 B_3 p + 4\,B_0 B_4$

$$D_2^2 = 36\,B_0^2 p^4 + 36\,B_0 B_1 p^3 + (9\,B_1^2 + 12\,B_0 B_2)\,p^2 + 6\,B_1 B_2\, p + B_2^2$$

$$-2\,D_1 D_3 = -32\,B_0^2 p^4 - 32\,B_0 B_1 p^3 - 2\,(3\,B_1^2 + 8\,B_0 B_2)\,p^2 - 2\,(2\,B_1 B_2 + 4\,B_0 B_3)\,p - 2\,B_1 B_3.$$

$$4\,D_0 D_4 + D_2^2 - 2\,D_1 D_3 = 8\,B_0^2 p^4 + 8\,B_0 B_1 p^3 + 3\,B_1^2 p^2 + (2\,B_1 B_2 - 4\,B_0 B_3)\,p + 4\,B_0 B_4 + B_2^2 - 2\,B_1 B_3.$$

Zugleich ist $8\,D_1 D_3 = 8.16\,B_0^2 p^4 + 8.16\,B_0 B_1 p^3 + 8(3\,B_1^2 + 8\,B_0 B_2)\,p^2 + 8\,(2\,B_1 B_2 + 4\,B_0 B_3)\,p + 8\,B_1 B_3,$

mithin das Product

$$8\,D_1 D_3\,[4\,D_0 D_4 + D_2^2 - 2\,D_1 D_3] =$$

$$2.8^3\,B_0^4 p^8 + 4.8^3\,B_0^3 B_1\, p^7 + \left.\begin{array}{r} 6.8^2\,B_0^2 B_1^2 \\ 2\,8^3\,B_0^2 B_1^2 \\ 3.8^2\,B_0^2 B_1^2 \\ 8^3\,B_0^3 B_2 \end{array}\right]p^6$$

$$+\left.\begin{array}{r} 4.8^2\,B_0^2 B_1 B_2 \\ -\;8^3\,B_0^3 B_3 \\ 6.8^2\,B_0 B_1^3 \\ 3.8^2\,B_0 B_1^3 \\ 8^3\,B_0^2 B_1 B_2 \\ 2.8^2\,B_0^2 B_1 B_2 \\ 4.8^2\,B_0^3 B_3 \end{array}\right]p^5 + \left.\begin{array}{r} 8^3\,B_0^3 B_4 \\ 2.8^2\,B_0^2 B_2^2 \\ -\,4.8^2\,B_0^2 B_1 B_3 \\ 4.8^2\,B_0 B_1^2 B_2 \\ -\;8^3\,B_0^2 B_1 B_3 \\ 9.8\;B_1^4 \\ 3.8^2\,B_0 B_1^2 B_2 \\ 2.8^2\,B_0 B_1^2 B_2 \\ 4.8^2\,B_0^2 B_1 B_3 \\ 8^2\,B_0^2 B_1 B_3 \end{array}\right]p^4 + \left.\begin{array}{r} 8^3\,B_0^2 B_1 B_4 \\ 2.8^2\,B_0 B_1 B_2^2 \\ -\;4.8^2\,B_0 B_1^2 B_3 \\ 6.8\;B_1^3 B_2 \\ -\,3.4.8\,B_0 B_1^2 B_3 \\ 2.8^2\,B_0 B_1 B_2^2 \\ -\;4.8^2\,B_0^2 B_2 B_3 \\ 6.8\;B_1^3 B_2 \\ 3.4.8\,B_0 B_1^2 B_3 \\ 8^2\,B_0 B_1^2 B_3 \end{array}\right]p^3$$

$$+\left.\begin{array}{r} 3.4.8\,B_0 B_1^2 B_4 \\ 3.8\,B_1^2 B_2^2 \\ -\;6.8\,B_1^3 B_3 \\ 4.8^2\,B_0^2 B_2 B_4 \\ 8^2\,B_0 B_2^3 \\ -\;2.8^2\,B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 4.8\,B_1^2 B_2^2 \\ 8^2\,B_0 B_1 B_2 B_3 \\ -\;8^2\,B_0 B_1 B_2 B_3 \\ -\;2.8^2\,B_0^2 B_3^2 \\ 3.8\;B_1^3 B_3 \end{array}\right]p^2 + \left.\begin{array}{r} 8^2\;B_0 B_1 B_2 B_4 \\ 2.8\,B_1 B_2^3 \\ -4.8\,B_1^2 B_2 B_3 \\ 2.8^2\,B_0^2 B_3 B_4 \\ 4.8\,B_0 B_2^2 B_3 \\ -\;8^2\;B_0 B_1 B_3^2 \\ 2.8\,B_1^2 B_2 B_3 \\ -4.8\;B_0 B_1 B_3^2 \end{array}\right]p + \begin{array}{r} 4.8\,B_0 B_1 B_3 B_4 \\ 8\;\;B_1 B_2^2 B_3 \\ -\;2.8\,B_1^2 B_3^2 \end{array}$$

Ferner ist $D_2^2 - 4\,D_0 D_4 = 4.8\,B_0^2 p^4 + 4.8\,B_0 B_1 p^3 +$
$+ (9\,B_1^2 + 8\,B_0 B_2)\,p^2 + (6\,B_1 B_2 - 4\,B_0 B_3)\,p + B_2^2 - 4\,B_0 B_4$

$$(D^2 - 4\,D_0 D_4)^2 =$$

$$2.8^3\,B_0^4 p^8 + 4.8^3\,B_0^3 B_1\, p^7 + \left.\begin{array}{r} 2.8^3\,B_0^2 B_1^2 \\ 9.8^2\,B_0^2 B_1^2 \\ 8^3\,B_0^3 B_2 \end{array}\right]p^6$$

$$\left.\begin{array}{r} +\,6.8^2\,B_0^2 B_1 B_2 \\ -\,4.8^2\,B_0^3 B_3 \\ 9.8^2\,B_0 B_1^3 \\ 8^3\,B_0^2 B_1 B_2 \end{array}\right]
p^5 + \left.\begin{array}{r} 9^2\;B_1^4 \\ 8^2\;B_0^2 B_2^2 \\ 2.9.8\,B_0 B_1^2 B_2 \\ 6.8^2\,B_0 B_1^2 B_2 \\ -\,4.8^2\,B_0^2 B_1 B_3 \\ 8^2\;B_0^2 B_2^2 \\ -\,4.8^2\,B_0^3 B_4 \end{array}\right]
p^4 + \left.\begin{array}{r} 8^2\;B_0 B_1 B_2^2 \\ -\,4.8^2\,B_0^2 B_1 B_4 \\ 2.6.9\,B_1^3 B_2 \\ -\,9.8\,B_0 B_1^2 B_3 \\ 2.6.8\,B_0 B_1 B_2^2 \\ -\;8^2\;B_0^2 B_2 B_3 \end{array}\right] p^3$$

$$\left.\begin{array}{r} +\,2.9\,B_1^2 B_2^2 \\ -\,9.8\,B_0 B_1^2 B_4 \\ 2.8\,B_0 B_2^3 \\ -\;8^2\;B_0^2 B_2 B_4 \\ 6^2\;B_1^2 B_2^2 \\ -\,6.8\,B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 2.8\,B_0^2 B_3^2 \end{array}\right]
p^2 + \left.\begin{array}{r} 2.6\,B_1 B_2^3 \\ -\,6.8\,B_0 B_1 B_2 B_4 \\ -\;8\;B_0 B_2^2 B_3 \\ 4.8\,B_0^2 B_3 B_4 \end{array}\right]
p + \begin{array}{r} B_2^4 \\ -\,8\,B_0 B_2^2 B_4 \\ 16\,B_0^2 B_4^2 \end{array}$$

Mithin besteht im vorliegenden Fall die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(768\,B_0^3 B_4 - 192\,B_0^2 B_1 B_3 + 48\,B_0 B_1^2 B_2 - 9\,B_1^4)\,p^4 \\
&+ (768\,B_0^2 B_1 B_4 + 96\,B_0 B_1 B_2^2 - 120\,B_0 B_1^2 B_3 - 12\,B_1^3 B_2 - 192\,B_0^2 B_2 B_3)\,p^3 \\
&+ (320\,B_0^2 B_2 B_4 - 144\,B_0^2 B_3^2 + 168\,B_0 B_1^2 B_4 + 48\,B_0 B_2^3 \\
&\quad - 80\,B_0 B_1 B_2 B_3 + 2\,B_1^2 B_2^2 - 24\,B_1^3 B_3)\,p^2 + (96\,B_0^2 B_3 B_4 \\
&\quad + 112\,B_0 B_1 B_2 B_4 + 40\,B_0 B_2^2 B_3)\,p - 16\,B_0^2 B_4^2 + 32\,B_0 B_1 B_3 B_4 \\
&\quad + 8\,B_1 B_2^2 B_3 - 16\,B_1^2 B_3^2 - B_2^4 = 0.
\end{aligned}$$

Es sey zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
&768\,B_0^3 B_4 - 192\,B_0^2 B_1 B_3 + 48\,B_0 B_1^2 B_2 - 9\,B_1^4 = E_4 \\
&768\,B_0^2 B_1 B_4 + 96\,B_0 B_1 B_2^2 - 120\,B_0 B_1^2 B_3 - 12\,B_1^3 B_2 \\
&- 192\,B_0^2 B_2 B_3 = E_5 \\
&320\,B_0^2 B_2 B_4 - 144\,B_0^2 B_3^2 + 168\,B_0 B_1^2 B_4 + 48\,B_0 B_2^3 \\
&- 80\,B_0 B_1 B_2 B_3 + 2\,B_1^2 B_2^2 - 24\,B_1^3 B_3 = E_6 \\
&96\,B_0^2 B_3 B_4 + 112\,B_0 B_1 B_2 B_4 + 40\,B_0 B_2^2 B_3 - 96\,B_0 B_1 B_3^2 \\
&+ 4\,B_1 B_2^3 - 16\,B_1^2 B_2 B_3 = E_7 \\
&-16\,B_0^2 B_4^2 + 32\,B_0 B_1 B_3 B_4 + 8\,B_0 B_2^2 B_4 + 8\,B_1 B_2^2 B_3 \\
&- 16\,B_1^2 B_3^2 - B_2^4 = E_8
\end{aligned}$$

und man hat somit als die gefundene Bedingungsgleichung:

$$E_4\,p^4 + E_5\,p^3 + E_6\,p^2 + E_7\,p + E_8 = 0.$$

Setzt man überdiess in der frühern Gleichung für p der Kürze halber

$$\begin{aligned}
B_1^3 - 4\,B_0 B_1 B_2 + 8\,B_0^2 B_3 &= A_3 \\
B_1^2 B_2 + 2\,B_0 B_1 B_3 + 16\,B_0^2 B_4 - 4\,B_0 B_2^2 &= A_4 \\
B_1^2 B_3 + 8\,B_0 B_1 B_4 - 4\,B_0 B_2 B_3 &= A_5 \\
B_1^2 B_4 - B_0 B_3^2 &= A_6
\end{aligned}$$

somit $A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$; so hat man bereits zwei Gleichungen für p, die mindestens durch Einen gleichen Werth erfüllt werden müssen; daher zwischen den Coefficienten eine Relation stattfinden muss.

2. Um das Endresultat der Bestimmung dieser Relation und des Werthes p, der die Eigenschaft besitzt, zugleich beiden Gleichungen zu genügen (falls nicht etwa beiden Gleichungen dieselben Wurzeln entsprechen), einfacher zu finden, wird es vortheilhaft seyn, noch eine dritte Gleichung zur Bestimmung von p aufzusuchen, mit der jedoch die frühern Bedingungen vereinbar sind. Diese liefert nämlich die Bedingung, dass im Fall eine Gleichung gleiche Wurzeln hat, auch die erste Derivirte für den Werth der gleichen Wurzel zu Null wird. Man hat somit

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0 \text{ und zugleich}$$
$$4 B_0 y^3 + 3 B_1 y^2 + 2 B_2 y + B_3 = 0.$$

Die erste Gleichung mit 4, die zweite mit y multiplicirt und von der erstern subtrahirt, ergibt

$$B_1 y^3 + 2 B_2 y^2 + 3 B_3 y + 4 B_4 = 0.$$

Eben so findet man aus der Verbindung der zwei Gleichungen des dritten Grades

$$4 B_0 B_1 y^3 + 8 B_0 B_2 y^2 + 12 B_0 B_3 y + 16 B_0 B_4 = 0$$
$$4 B_0 B_1 y^3 + 3 B_1^2 y^2 + 2 B_1 B_2 y + B_1 B_3 = 0$$
$$\text{mithin } (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y^2 + (12 B_0 B_3 - 2 B_1 B_2) y + 16 B_0 B_4 - B_1 B_3 = 0.$$

Verbindet man diese Gleichung, nachdem sie mit $4 B_0 y$ multiplicirt wurde, mit der ersten cubischen Gleichung, die mit $8 B_0 B_2 - 3 B_1^2$ zu multipliciren ist; so ergeben analog

$$4 B_0 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y^3 + 3 B_1 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y^2$$
$$+ 2 B_2 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y + B_3 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) = 0 \text{ und}$$
$$4 B_0 (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y^3 + 4 B_0 (12 B_0 B_3 - 2 B_1 B_2) y^2$$
$$+ 4 B_0 (16 B_0 B_4 - B_1 B_3) y = 0 \text{ die quadratische Gleichung}$$
$$(- 48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) y^2 + (- 64 B_0^2 B_4 + 4 B_0 B_1 B_3$$
$$+ 16 B_0 B_2^2 - 6 B_1^2 B_2) y + 8 B_0 B_2 B_3 - 3 B_1^2 B_3 = 0.$$

Eben so ergibt die Behandlung der quadratischen Gleichungen

$$(8 B_0 B_2 - 3 B_1^2)(- 48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) y^2$$
$$+ (12 B_0 B_3 - 2 B_1 B_2)(- 48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) y$$
$$+ 16 B_0 B_4 - B_1 B_3)(- 48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) = 0 \text{ und}$$
$$(8 B_0 B_2 - 3 B_1^2)(- 48 B_0^2 B_3 + 32 B_0 B_1 B_2 - 9 B_1^3) y^2$$
$$+ (8 B_0 B_2 - 3 B_1^2)(- 64 B_0^2 B_4 + 4 B_0 B_1 B_3 + 16 B_0 B_2^2 - 6 B_1^2 B_2) y$$
$$+ 8 B_0 B_2 - 3 B_1^2)(8 B_0 B_2 B_1 - 3 B_1^2 B_3) = 0.$$

folgende des ersten Grades

$$[- 12.48 B_0^3 B_3^2 + 4.8.14 B_0^2 B_1 B_2 B_3 - 8.12 B_0 B_1^3 B_3$$
$$+ 4.8 B_0 B_1^2 B_2^2 + 8.64 B_0^3 B_2 B_4 - 8.16 B_0^2 B_2^3 - 3.64 B_0^2 B_1^2 B_4] y$$
$$- 16.48 B_0^3 B_3 B_4 + 16.32 B_0^2 B_1 B_2 B_4 - 9.16 B_0 B_1^3 B_4$$
$$+ 48 B_0^2 B_1 B_3^2 - 8.8 B_0^2 B_2^2 B_3 + 2.8 B_0 B_1^2 B_2 B_3 = 0.$$

Somit wäre der Werth von y, der die repetirte Wurzel vorstellt, durch die letzte Gleichung bestimmt:

$$(- 576 B_0^3 B_3^2 + 448 B_0^2 B_1 B_2 B_3 - 96 B_0 B_1^3 B_3 + 32 B_0 B_1^2 B_2^2$$
$$+ 512 B_0^3 B_2 B_4 - 128 B_0^2 B_2^3 - 192 B_0^2 B_1^2 B_4) y - 768 B_0^3 B_3 B_4$$

$$+512 B_0^2 B_1 B_2 B_4 - 144 B_0 B_1^3 B_4 + 48 B_0^2 B_1 B_3^2 + 16 B_0 B_1^2 B_2 B_3$$
$-64 B_0^2 B_2^2 B_3 = 0$ und wenn Kürze halber
$$-576 B_0^3 B_3^2 + 448 B_0^2 B_1 B_2 B_3 - 96 B_0 B_1^3 B_3 + 32 B_0 B_1^2 B_2^2$$
$$+512 B_0^3 B_2 B_4 - 128 B_0^2 B_2^3 - 192 B_0^2 B_1^2 B_4 = F_6$$
$$-768 B_0^3 B_3 B_4 + 512 B_0^2 B_1 B_2 B_4 - 144 B_0 B_1^3 B_4 + 48 B_0^2 B_1 B_3^2$$
$+16 B_0 B_1^2 B_2 B_3 - 64 B_0^2 B_2^2 B_3 = F_7$ gesetzt wird, durch
$$F_6 y + F_7 = 0.$$

3. Was die Bestimmung der gleichen Wurzel betrifft; so ist dieselbe einer der Ausdrücke unter den angeführten Wurzeln y und zwar, je nachdem eine der vier Annahmen

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = \pm 1$$

besteht, immer ein anderer. Es lässt sich jedoch nachweisen, dass bezüglich dieser Wahl keine Unbestimmtheit stattfinde. In der Annahme

$$\text{a)}\quad -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

sind die Wurzeln

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$
$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$
$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right)}$$
$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right)}$$

und bei der zweiten

$$\text{b)}\quad -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = -1$$

$$y_1 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$
$$y_2 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$
$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right)}$$
$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right)}$$

also Werthe, die sich nicht etwa, bloss der Ordnung nach unterscheiden. Beide Gruppen von Wurzeln genügen der Gleichung. So muss die Summe der vier Werthe $y_1 - p + y_2 - p + y_3 - p + y_4 - p$ nach der Eigenschaft der Gleichung

$$D_0(y-p)^4 + D_1(y-p)^3 + D_2(y-p)^2 + D_3(y-p) + D_4 = 0$$

den Werth $-\frac{D_1}{D_0}$ ergeben. Die Annahme, worin das obere Zeichen von ± 1 gilt, ergibt

$$2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right) = -\sqrt[4]{\frac{D_4 D_1^2 D_3^2}{D_0 D_0^2 D_4^2}}$$

und in Folge der Gleichung $\frac{D_4}{D_0} = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2$ ist dieser Werth $= -\frac{D_1}{D_0}$.

In der zweiten Voraussetzung hat man für diese Summe denselben Werth

$$2\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right) = -\frac{D_1}{D_0}.$$

Eben so sind

$$(y_1-p)(y_2-p) + (y_1-p)(y_3-p) + (y_1-p)(y_4-p) + (y_2-p)(y_3-p)(y_2-p)(y_4-p) \\ + (y_3-p)(y_4-p)$$

bezüglich beider Hypothesen

$$= 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}\left(1 \pm \left(-\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \mp 2\right)\right) = 2\sqrt{\frac{D^4}{D_0}}\left(-1 \mp \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}}\right)$$

und da für die erste Hypothese die Gleichung $\sqrt{D_0 D_4} + \sqrt{D_1 D_3} = -\frac{D_2}{2}$, für die zweite $\sqrt{D_0 D_4} - \sqrt{D_1 D_3} = -\frac{D_2}{2}$ besteht; so reduciren sich diese Werthe auf $\frac{D_2}{D_0}$.

Die Producte der Ternen

$$(y_1-p)(y_2-p)(y_3-p) + (y_1-p)(y_2-p)(y_4-p) + (y_1-p)(y_3-p)(y_4-p) \\ + (y_2-p)(y_3-p)(y_4-p)$$

sind in den beiden Hypothesen

$$= \sqrt[\frac{3}{4}]{\frac{D_4}{D_0}}\left(-\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \mp 2 \pm 2\right) = -\sqrt[4]{\frac{D_4 D_1^2 D_3^2}{D_0 D_0^4}}$$

und da die Bedingung besteht $\frac{D_4}{D_0} = \left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2$ in beiden Fällen $= -\frac{D_3}{D_0}$. Endlich ist das Product $(y_1-p)(y_2-p)(y_3-p)(y_4-p)$ für beide Annahmen $= \frac{D_4}{D_0}$; so dass man unschlüssig seyn könnte, welche der beiden Hypothesen zu wählen sey.

Werden die beiden Hypothesen

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = \pm 1$$

statuirt; so sind alsdann die Wurzeln in der ersten Hypothese für das obere Zeichen von ± 1

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right)$$

$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right)$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

und in der zweiten Hypothese:

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right)}$$

$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_4}{D_0 D_4}} + 1\right)}$$

$$y_3 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_4 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}.$$

also genau dieselben wie früher, daher diese Hypothesen keine besondere Rücksicht in der Bestimmung der Wurzeln erfordern. Diess folgt auch aus dem Umstand, dass im Ausdrucke von

$$\cos\varphi = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}}$$

bloss das obere Zeichen zu gelten hat, indem für das untere Zeichen die Wurzeln nur bezüglich ihrer Ordnung differiren.

Dieser Umstand behebt zugleich die vorige Unbestimmtheit, indem er den Anhaltspunkt verschafft, die Wahl der Bedingung so zu treffen; damit im Fall

1) $D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$ wäre, φ stumpf; im Fall

2) $D_2 < 2\sqrt{D_0 D_4}$, φ spitz ausfällt. Der

Fall endlich $D_2 = 2\sqrt{D_0 D_4}$ würde für den ersten Werth von $\cos\varphi$, die Null ergeben, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und es wären für diesen Fall keine zwei gleichen Wurzeln.

Es gelten also im Fall zweier gleicher Wurzeln falls

$D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$, die Werthe der Wurzeln:

$$y_1 = p - \sqrt[4]{\frac{D^4}{D_0}}$$

$$y_2 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right)}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right)}$$

und im Fall $D_2 < 2\sqrt{D_0 D_4}$

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right)}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right)}.$$

4. Die im frühern gefundene Bedingungsgleichung: $F_6 y + F_7 = 0$ ergibt durch die Einführung desjenigen Werthes von y, der die repetirte Wurzel vorstellt,

$$F_6\left(p \pm \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\right) + F_7 = 0$$

$$\pm F_6 \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} = -F_7 - F_6 p$$

$$F_6^4 \frac{D_4}{D_0} = F_7^4 + 4 F_6 F_7^3 p + 6 F_6^2 F_7^2 p^2 + 4 F_6^3 F_7 p^3 + F_6^4 p^4,$$

und es ist

$$B_0 F_6^4 p^4 + B_1 F_6^4 p^3 + B_2 F_6^4 p^2 + B_3 F_6^4 p + B_4 F_6^4$$
$$= B_0 F_7^4 + 4 B_0 F_6 F_7^3 p + 6 B_0 F_6^2 F_7^2 p^2 + 4 B_0 F_6^3 F_7 p^3 + B_0 F_6^4 p^4$$

d. i.

$$(B_1 F_6^4 - 4 B_0 F_6^3 F_7)\, p^3 + (B_2 F_6^4 - 6 B_0 F_6^2 F_7^2)\, p^2$$
$$+ (B_3 F_6^4 - 4 B_0 F_6 F_7^3)\, p + B_4 F_6^4 - B_0 F_7^4 = 0.$$

Diess ist die dritte Gleichung für p und sie ist stets dieselbe, es mag welche immer der vier Hypothesen

$$-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = \pm 1$$

statuirt werden. Es bestehen daher zur Bestimmung von p, zwei Gleichungen des dritten und eine des vierten Grades, nämlich:

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

$$(B_1 F_6^4 - 4 B_0 F_6^3 F_7)\, p^3 + (B_2 F_6^4 - 6 B_0 F_6^2 F_7^2)\, p^2$$
$$+ (B_3 F_6^4 - 4 B_0 F_6 F_7^3)\, p + B_4 F_6^4 - B_0 F_7^4 = 0$$

$$E_4 p^4 + E_5 p^3 + E_6 p^2 + E_7 p + E_8 = 0.$$

die alle durch ein und dasselbe p erfüllt sind. Es können jedoch einige oder alle Gleichungen mehrere oder alle Wurzeln gemein haben, welches ihre Behandlung verwickelt und die Anzahl der den Coefficienten eigenthümlichen Bedingungsgleichungen abändert.

Was zuförderst die Gleichung des vierten Grades betrifft; so kann sie, abgesehen von ihrer Eigenthümlichkeit, in Folge welcher sie durch ihre erste Ableitung ersetzt werden kann; noch durch eine andere cubische Gleichung ersetzt werden.

Der Ausdruck $-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = \pm 1$

drückt die Bedingung $\cos\varphi = \pm 1$ aus, welches mit $\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,\mathrm{Sin}\,\varphi = 0$ gleichbedeutend ist; und welcher letztere Ausdruck nach Nr. 5 II. die Form

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)p + 2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2 \mp 2(4B_0p + B_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{A_3}}{4B_0p + B_1}}$$

annimmt. Setzt man darin Kürze halber

$$4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2) = \alpha$$
$$2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) = \beta$$

und setzt man zugleich, um das Radicale der Nulle gleich zu bilden:

$$(\alpha p + \beta)^2 = (4B_0p + B_1)^3 A_3,$$

so gelangt man nach der Entwicklung und Wiederherstellung der Werthe bloss auf eine cubische Gleichung:

$$\begin{aligned} 64A_3B_0^3p^3 &+ [48A_3B_0^2B_1 - 4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)^2]\,p^2 \\ &+ [12A_3B_0B_1^2 - 4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2)]\,p \\ &+ A_3B_1^3 - (B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2)^2 = 0, \end{aligned}$$

d. i. wenn Kürze halber

$$64A_3B_0^3 = G_3$$
$$48A_3B_0^2B_1 - 4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)^2 = G_4$$
$$12A_3B_0B_1^2 - 4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) = G_5$$
$$A_3B_1^3 - (B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2)^2 = G_6$$

gesetzt wird, auf die Gleichung:

$$G_3p^3 + G_4p^2 + G_5p + G_6 = 0.$$

Diese Gleichung ist jedoch keineswegs mit der biquadratischen identisch: denn sollte letztere in eine cubische übergehen, so wäre diess schon eine Specialität. Auch folgt daraus nichts mehr, als dass: statt der biquadratischen Gleichung

$$E_4p^4 + E_5p^3 + E_6p^2 + E_7p + E_8 = 0$$

auch die cubische $\qquad G_3p^3 + G_4p^2 + G_5p + G_6 = 0$

statuirt werden könne, ohne dass diese beiden Gleichungen mehr als Eine gleiche Wurzel haben müssten. Es wird nämlich in der Folge erwiesen werden, dass die Gleichung $A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6 = 0$ nur Einen Werth liefere, für den die obige Bedingung $\varphi = 0$ realisirt ist, weil es nicht möglich ist, mehrere Werthe von p anzugeben, die zugleich den Bedingungen $\varphi = 0$ und $A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6 = 0$ genügen. Unter dieser Voraussetzung enthalten die beiden Gleichungen

$$E_4p^4 + E_5p^3 + E_6p^2 + E_7p + E_8 = 0 \quad \text{und}$$
$$G_3p^3 + G_4p^2 + G_5p + G_6 = 0$$

denjenigen Werth der beiden Bedingungen zugleich genügt; sie enthalten überdiess noch Werthe, die für die letztere Gleichung in dem Masse verschieden seyn müssen, als in sie durch Substitution Grössen eingeführt wurden, welche Bedingungen einschliessen, denen alle Werthe von p nicht genügen müssen.

5. Um die angeführte Eigenthümlichkeit der Gleichung

$$E_4 p^4 + E_5 p^3 + E_6 p^2 + E_7 p + E_8 = 0$$

durch ihre erste Ableitung ersetzbar zu seyn, so wie noch andere zu erweisen; wird es nöthig drei Gleichungen zu deduciren. Zur ersten gelangt man auf folgende Weise: Es sey

$$E_4 p^4 + E_5 p^3 + E_6 p^2 + E_7 p + E_8 = \Omega$$

mithin

$$E_5 p^3 + 2 E_6 p^2 + 3 E_7 p + 4 E_8 = 4\Omega - p D_p \Omega,$$

diese Gleichung mit $4 E_4$ multiplicirt und in Verbindung mit $E_5 D_p \Omega$ ergibt bei der Subtraction eine quadratische Gleichung, nämlich es ist:

$$4 E_4 E_5 p^3 + 8 E_4 E_6 p^2 + 12 E_4 E_7 p + 16 E_4 E_8 = (4\Omega - p D_p \Omega) 4 E_4$$

$$4 E_4 E_5 p^3 + 3 E_5^2 p^2 + 2 E_5 E_6 p + E_5 E_7 = E_5 D_p \Omega$$

$$(8 E_4 E_6 - 3 E_5^2) p^2 + (12 E_4 E_7 - 2 E_5 E_6) p + 16 E_4 E_8 - E_5 E_7$$
$$= 16 E_4 \Omega - (4 E_4 p + E_5) D_p \Omega.$$

Wird die gefundene Gleichung mit p multiplicirt und mit $D_p \Omega$ verknüpft, so ergibt sie die zweite quadratische Gleichung:

$$(32 E_4 E_5 E_6 - 9 E_5^3 - 48 E_4^2 E_7) p^2 + (16 E_4 E_6^2 - 6 E_5^2 E_6 - 64 E_4^2 E_8$$
$$+ 4 E_4 E_5 E_7) p + 8 E_4 E_6 E_7 - 3 E_5^2 E_7 = - 64 E_4^2 p \Omega$$
$$+ (8 E_4 E_6 - 3 E_5^2 + 4 E_4 E_5 p + 16 E_4^2 p^2) D_p \Omega.$$

Endlich, wird die erstere quadratische Gleichung mit $- E_5$ multiplicirt und zu ihr die andere addirt; so findet man

$$6 [4 E_4 E_5 E_6 - E_5^3 - 8 E_4^2 E_7] p^2 + 4 [- E_5^2 E_6 - 2 E_4 E_5 E_7$$
$$- 16 E_4^2 E_8 + 4 E_4 E_6^2] p + 2 [- E_5^2 E_7 - 8 E_4 E_5 E_8 + 4 E_4 E_6 E_7]$$
$$= - 16 E_4 (E_5 + E_4 p) \Omega + [8 E_4 E_6 - 2 E_5^2 + 8 E_4 E_5 p + 16 E_4^2 p^2] D_p \Omega.$$

Der vordere Theil ist die doppelte negative Ableitung der Hilfsgleichung $A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$ für den Fall, dass diese auf die Coefficienten der Gleichung Ω angewandt wird. Es sey somit

$$(E_5^3 - 4 E_4 E_5 E_6 + 8 E_4^2 E_7) p^3 + (E_5^2 E_6 + 2 E_4 E_5 E_7 + 16 E_4^2 E_8$$
$$- 4 E_4 E_6^2) p^2 + (E_5^2 E_7 + 8 E_4 E_5 E_3 - 4 E_4 E_6 E_7) p + E_5^2 E_8$$
$$- E_4 E_7^2 = \Psi,$$

alsdann ist die erste fragliche Gleichung

$$- 8 E_4 (E_5 + E_4 p) \Omega + (4 E_4 E_6 - E_5^2 + 4 E_4 E_5 p + 8 E_4^2 p^2) D_p \Omega$$
$$+ D_p \Psi = 0.$$

6. Die zweite Gleichung erhält man durch folgende Betrachtung:

Es ist

$$4 E_4 p^3 + 3 E_5 p^2 + 2 E_6 p + E_7 = D_p \Omega$$

$$3 M_{15} p^3 + 2 M_{16} p^2 + M_{17} p = p D_p \Psi$$

wenn Kürze halber

$$E_5^3 - 4 E_4 E_5 E_6 + 8 E_4^2 E_7 = M_{15}$$

$$E_5^2 E_6 + 2 E_4 E_5 E_7 + 16 E_4^2 E_8 - 4 E_4 E_6^2 = M_{16}$$

$$E_5^2 E_7 + 8 E_4 E_5 E_6 - 4 E_4 E_6 E_7 = M_{17}$$

$$E_5^2 E_8 - E_4 E_7^2 = M_{18}$$

gesetzt wird; mithin

$$(8E_4 M_{16} - 9E_5 M_{15})p^2 + (4E_4 M_{17} - 6E_6 M_{15})p$$
$$- 3E_7 M_{15} = 4E_4 p D_p \Psi - 3M_{15} D_p \Omega,$$

und diess mit $D_p \Psi$ verbunden, ergibt

$$(12E_4 M_{15} M_{17} - 18E_6 M_{15}^2 - 16E_4 M_{16}^2 + 18E_5 M_{15} M_{16})p$$
$$- 9E_7 M_{15}^2 - 8E_4 M_{16} M_{17} + 9E_5 M_{15} M_{17} = 12E_4 M_{15} p D_p \Psi$$
$$- 9M_{15}^2 D\Omega - (8E_4 M_{16} - 9E_4 M_{15}) D_p \Psi$$
$$= (16E_4 M_{15} p - 8E_4 M_{16} + 9E_4 M_{15}) D_p \Psi - 9M_{15}^2 D_p \Omega.$$

Vermöge der Eigenschaft der Coefficienten M_{15}, M_{16}, M_{17} die Gleichung

$$M_{16} E_5 - M_{15} E_6 = 2M_{17} E_4$$

zu erfüllen, lässt sich jene Gleichung auch folgends schreiben:

$$(24E_5 M_{15} M_{16} - 24E_6 M_{15}^2 - 16E_4 M_{16}^2)p - 9E_7 M_{15}^2 - 8E_4 M_{16} M_{17}$$
$$+ 9E_5 M_{15} M_{17} = (12E_4 M_{15} p - 8E_4 M_{16} + 9E_5 M_{15}) D_p \Psi$$
$$- 9M_{15}^2 D_p \Omega.$$

Ferner ist $$M_{16} p^2 + 2M_{17} p + 3M_{18} = 3\Psi - p D_p \Psi$$

welches mit $D_p \Psi$ verbunden

$$(2M_{16}^2 - 6M_{15} M_{17})p + M_{16} M_{17} - 9M_{15} M_{18} = M_{16} D_p \Psi$$
$$- 9M_{15} \Psi + 3M_{15} p D_p \Psi$$

ergibt. In Folge der Gleichung

$$8E_4 M_{18} = E_5 M_{17} - E_7 M_{15}$$ und der vorigen
$$2E_4 M_{17} = E_5 M_{16} - E_6 M_{15}$$ ist

$$2M_{16}^2 - 6M_{15} M_{17} = \frac{4E_4 M_{16}^2 - 6E_5 M_{15} M_{16} + 6E_6 M_{15}^2}{2E_4}$$

$$M_{16} M_{17} - 9M_{15} M_{18} = \frac{8E_4 M_{16} M_{17} - 9E_5 M_{15} M_{17} + 9E_7 M_{15}^2}{8E_4}$$

und somit $$(12E_4 M_{15} p - 8E_4 M_{16} + 9E_5 M_{15}) D_p \Psi - 9M_{15}^2 D_p \Omega$$
$$= - 8E_4 M_{16} D_p \Psi + 72E_4 M_{15} \Psi - 24E_4 M_{15} p D_p \Psi$$ d. i.
$$(36E_4 p + 9E_5) D_p \Psi - 72E_4 \Psi - 9M_{15} D_p \Omega = 0$$

als die gesuchte zweite Gleichung.

7. Was die dritte Gleichung betrifft, so kann immer eine Wahl der unbestimmten Coefficienten A, B, C, D, F so bestimmt werden: dass die Gleichung

$$(E_4 p^4 + E_5 p^3 + E_6 p^2 + E_7 p + E_8) A + (4E_4 p^3 + 3E_5 p^2 + 2E_6 p + E_7)(B + Cp)$$
$$= (A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6)(D + Fp)$$

für jeden Werth von p erfüllt sey. Man findet zur Bestimmung dieser Grössen die Bedingungsgleichungen:

$$E_4 A + 4E_4 C = A_3 F$$
$$E_5 A + 4E_4 B + 3E_5 C = A_3 D + A_4 F$$
$$E_6 A + 3E_5 B + 2E_6 C = A_4 D + A_5 F$$
$$E_7 A + 2E_6 B + E_7 C = A_5 D + A_6 F$$
$$E_8 A + E_7 B = A_6 D.$$

Wird die letzte Gleichung in die erste substituirt, so kömmt man auf einen Ausdruck für B

$$E_4 A_6 D - E_4 E_7 B + 4E_4 E_8 C = A_3 E_8 F$$

und dadurch auf die Werthe von A und B

$$A = \frac{-4E_4 E_7 C + A_3 E_7 F}{E_4 E_7}$$

$$B = \frac{4E_4 E_8 C + A_6 E_4 D - A_3 E_8 F}{E_4 E_7}.$$

Durch die Substitution dieser Grössen kömmt man auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten, nämlich:

$$(16 E_4^2 E_8 - E_4 E_5 E_7) C + (4 A_6 E_4^2 - A_3 E_4 E_7) D + (A_8 E_5 E_7 - 4 A_3 E_4 E_8$$
$$- A_4 E_4 E_7) F = 0$$

$$(12 E_4 E_5 E_3 - 2 E_4 E_6 E_7) C + (3 A_6 E_4 E_5 - A_4 E_4 E_7) D + (A_3 E_6 E_7$$
$$- 3 A_3 E_5 E_8 - A_5 E_4 E_7) F = 0$$

$$(8 E_4 E_6 E_3 - 3 E_4 E_7^2) C + (2 A_6 E_4 E_5 - A_5 E_4 E_7) D + (A_3 E_7^2 - 2 A_3 E_6 E_8$$
$$- A_6 E_4 E_7) F = 0.$$

Sey zur Abkürzung

$$16 E_4^2 E_3 - E_4 E_5 E_7 = a$$
$$4 A_6 E_4^2 - A_3 E_4 E_7 = b$$
$$A_3 E_5 E_7 - 4 A_3 E_4 E_3 - A_4 E_4 E_7 = c$$
$$12 E_4 E_5 E_3 - 2 E_4 E_5 E_7 = a'$$
$$3 A_6 E_4 E_5 - A_4 E_4 E_7 = b'$$
$$A_3 E_6 E_7 - 3 A_3 E_5 E_8 - A_5 E_4 E_7 = e'$$
$$8 E_4 E_6 E_8 - 3 E_4 E_7^2 = a''$$
$$2 A_6 E_4 E_6 - A_5 E_4 E_7 = b''$$
$$A_3 E_7^2 - 2 A_3 E_6 E_8 - A_6 E_4 E_7 = e'',$$

mithin sind die drei Gleichungen

$$a C + b D + c F = 0$$
$$a' C + b' D + c' F = 0$$
$$a'' C + b'' D + c'' F = 0.$$

Aus den beiden ersten folgt:

$$\frac{C}{bc' - b'c} = \frac{D}{ca' - c'a} = \frac{F}{ab' - a'b}$$

und wenn dieser Quotient $= E_4 E_7 U$ gesetzt wird

$$C = (bc' - b'c) E_4 E_7 U$$
$$D = (ca' - c'a) E_4 E_7 U$$
$$F = (ab' - a'b) E_4 E_7 U$$
$$A = [-4E_4 E_7 (bc' - b'c) + A_3 E_7 (ab' - a'b)] U$$
$$B = [4E_4 E_3 (bc' - b'c) + E_4 A_5 (ca' - c'a) - A_3 E_3 (ab' - a'b)] U.$$

Es übergeht die gesuchte Gleichung durch diese Werthe in den Ausdruck:

8 *

$$[-4E_4E_7(bc'-b'c)+A_3E_7(ab'-a'b)]\Omega+[4E_4E_3(bc'-b'c)+A_6E_4(ca'-c'a)$$
$$-A_3E_3(ab'-a'b)+E_4E_7(bc'-b'c)p]D_p\Omega$$
$$=[E_4E_7(ca'-c'a)+E_4E_7(ab'-a'b)p]\omega;$$

wenn für $A_8p^3+A_4p^2+A_5p+A_6$, ω gesetzt wird.

Eben so ergibt die Verbindung der ersten und dritten Gleichung

$$aC+bD+cF=0$$
$$a''C+b''D+c''F=0$$
$$A=[-4E_4E_7(bc''-b''c)+A_3E_7(ab''-a''b)]U_1$$
$$B=[4E_4E_3(bc''-b''c)+A_6E_4(ca''-c''a)-A_3E_3(ab''-a''b)]U_1$$
$$C=E_4E_7(bc''-b''c)U_1$$
$$D=E_4E_7(ca''-c''a)U_1$$
$$F=E_4E_7(ab''-a''b)U_1$$

wodurch die gesuchte Gleichung auch noch einen zweiten Ausdruck annimmt:

$$[-4E_4E_7(bc''-b''c)+A_3E_7(ab''-a''b)]\Omega+[4E_4E_8(bc''-b''c)$$
$$+A_6E_4(ca''-c''a)-A_3E_3(ab''-a''b)+E_4E_7(bc''-b''c)p]D_p\Omega$$
$$=[E_4E_7(ca''-c''a)+E_4E_7(ab''-a''b)p]\omega.$$

Endlich ergibt die Verbindung der zweiten und dritten Gleichung

$$a'C+b'D+c'F=0$$
$$a''C+b''D+c''F=0$$
$$A=[-4E_4E_7(b'c''-b''c')+A_3E_7(a'b''-a''b')]U_2$$
$$B=[4E_4E_8(b'c''-b''c')+A_6E_4(c'a''-c''a')-A_3E_3(a'b''-a''b')]U_2$$
$$C=E_4E_7(b'c''-b''c')U_2$$
$$D=E_4E_7(c'a''-c''a')U_2$$
$$F=E_4E_7(a'b''-a''b')U_2,$$

und als dritte Gleichung

$$[-4E_4E_7(b'c''-b''c')+A_3E_7(a'b''-a''b')]\Omega+[4E_4E_8(b'c''-b''c')$$
$$+A_6E_4(c'a''-c''a')-A_3E_8(a'b''-a''b')+E_4E_7(b'c''-b''c')p]D_p\Omega$$
$$=E_4E_7(c'a''-c''a')+E_4E_7(a'b''-a''b')p]\omega.$$

8. Nimmt man irgend eine der letztgefundenen Gleichungen; so zeigt dieselbe: dass wenn für irgend einen Werth $p=\alpha$, Ω und ω zu Null werden, wie es wirklich der Fall ist, weil Ein Werth p beiden Gleichungen genügen muss, auch $D_p\Omega$ Null sey. Daraus folgt die früher erwähnte Eigenschaft von Ω durch $D_p\Omega$ ersetzbar zu seyn. Die Verbindung jener Gleichungen mit den früher in Nr. 6, 7 gefundenen

$$-8E_4(E_5+E_4p)\Omega+(4E_4E_6-E_5^2+4E_4E_5p+8E_4^2p^2)D_p\Omega$$
$$+D_p\Psi=0 \quad \text{und}$$
$$(36E_4p+9E_5)D_p\Psi-72E_4\Psi-9M_{15}D_p\Omega=0$$

lehrt überdiess eine Verknüpfung zwischen den Grössen Ω, $D_p\Omega$, Ψ, $D_p\Psi$ für den Werth $p=\alpha$. Ist nämlich für einen Werth von p, Ω und ω, $=0$ so zeigt die erste Gleichung $D_p\Omega=0$; die obere der letzten Gleichungen ergibt dann $D_p\Psi=0$ und die untere $\Psi = 0$. Somit ist der Werth $p = \alpha$, der den Gleichungen $\Omega = 0$ und $\omega = 0$ genügt, eine repetirte Wurzel sowohl von Ω als auch von Ψ.

9. Die Bedingung zweier gleicher Wurzeln führt nothwendig auf eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten. Es wurden im frühern für diese Eigenschaft die Giltigkeit der Gleichungen:

$$(8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y^2 + (12 B_0 B_3 - 2 B_1 B_2) y + 16 B_0 B_4 - \varpi_1 B_3 = 0$$

und $F_6 y + F_7 = 0$ gefunden; wird nun letztere Gleichnng mit $(8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) y$, erstere mit F_6 multiplicirt und beide dann von einander subtrahirt; so ergeben sie die fernere Gleichung

$$(8 B_0 B_2 F_7 - 3 B_1^2 F_7 - 12 B_0 B_3 F_6 + 2 B_1 B_2 F_6) y - 16 B_0 B_4 F_6 + B_1 B_3 F_6 = 0,$$

und somit ist, wenn Kürze halber

$$(8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) F_7 - 2 (6 B_0 B_3 - B_1 B_2) F_6 = H_9$$
$$(- 12 B_0 B_4 + B_1 B_3) F_6 = H_{10} \text{ gesetzt wird,}$$
$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{H_{10}}{H_9}.$$

Die Entwicklung ergibt für H_9 und H_{10}:

$$\begin{aligned}
H_9 = & - 3.16^3 B_0^4 B_2 B_3 B_4 && + 3.9.16^2 B_0^4 B_3^3 \\
& + 20.16^2 B_0^3 B_1 B_2^2 B_4 && - 24.16^2 B_0^3 B_1 B_2 B_3^2 \\
& + 4.16^2 B_0^3 B_2^3 B_3 && + 18.16^2 B_0^3 B_1^2 B_3 B_4 \\
& - 12.16^2 B_0^2 B_1^3 B_2 B_4 && + 52.16 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3 \\
& + 7.9.16 B_0^2 B_1^3 B_3^2 && - 16^2 B_0^2 B_1 B_2^4 \\
& + 3.9.16 B_0 B_1^5 B_4 && - 15.16 B_0 B_1^4 B_2 B_3 \\
& + 4.16 B_0 B_1^3 B_2^3 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{10} = & \ 4.9.16^2 B_0^4 B_3^2 B_4 && - 2.16^3 B_0^4 B_2 B_4^2 \\
& - 4.9.16 B_0^3 B_1 B_3^3 && - 26.16^2 B_0^3 B_1 B_2 B_3 B_4 \\
& + 8.16^2 B_0^3 B_2^3 B_4 && + 12.16^2 B_0^3 B_1^2 B_4^2 \\
& + 4.7.16 B_0^2 B_1^2 B_2 B_3^2 && - 8.16 B_0^2 B_1 B_2^3 B_3 \\
& + 4.21.16 B_0^2 B_1^3 B_3 B_4 && - 2.16^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_4 \\
& - 6.16 B_0 B_1^4 B_3^2 && + 2.16 B_0 B_1^3 B_2^2 B_3
\end{aligned}$$

und man findet bei der Entwicklung von $F_6 H_{10} - F_7 H_9 = 0$ für die Ausdrücke $F_6 H_{10}$ und $F_7 H_9$ die in folgenden zwei Reihen angesetzten Glieder

	$F_6 H_{10}$	$F_7 H_9$
$B_0^7 B_3^4 B_4$	$- 9^2 . 16^4$	$- 9^2 . 16^4$
$B_0^7 B_2 B_3^2 B_4^2$	$8 . 9 . 16^4$ $8 . 9 . 16^4$	$9 . 16^5$
$B_0^7 B_2^2 B_4^3$	$- 4 . 16^5$	
$B_0^6 B_1 B_3^5$	$9^2 . 16^3$	$9^2 . 16^3$

	$F_6\ H_{10}$	$F_7\ H_9$
$B_0^6\ B_1\ B_2\ B_3^3\ B_4$	$-8.9.16^3$ $4.9.26.16^3$ $7.9\ 16^4$	-9.16^4 $3.24.16^4$ $6.9.16^4$
$B_0^6\ B_1\ B_2^2\ B_3\ B_4^2$	$-2.26.16^4$ $-7.8.16^4$	-6.16^5 $-3.20.16^4$
$B_0^6\ B_2^3\ B_3^2\ B_4$	$-2.9.16^4$ $-2.9.16^4$	$3.4.16^4$ $-3.4.16^4$
$B_0^6\ B_1^2\ B_3^2\ B_4^2$	$-3.9.16^4$ $-3.9.16^4$	$-3.18.16^4$
$B_0^6\ B_2^4\ B_4^2$	16^5 16^5	
$B_0^6\ B_1^3\ B_2\ B_4^3$	$3.8.16^4$ $3.8.16^4$	
$B_0^6\ B_2^2\ B_3^4$		$-3.4.9.16^3$
$B_0^5\ B_1^2\ B_2\ B_3^4$	$-7.9.16^3$ $-7.9.16^3$	$-3.24.16^3$ $3.9.16^3$
$B_0^5\ B_1\ B_2^3\ B_3^3$	$2.9.16^3$ $2.9.16^3$	6.16^4 $3.4.16^3$
$B_0^5\ B_1^3\ B_3^3\ B_4$	$3.9.16^3$ $-9.21.16^3$ $-4.9.6.16^3$	$3.18.16^3$ $-3.7.9.16^3$ $-3.9^2.16^3$
$B_0^5\ B_1^2\ B_2^2\ B_3^2\ B_4$	$7.8.16^3$ $-4.7.26.16^3$ $8.9.16^3$ $8.9.16^3$	-3.16^4 $3.20.16^4$ $-2.24.16^4$ $-3.52.16^3$ $-4.18.16^3$
$B_0^5\ B_1\ B_2^4\ B_3\ B_4$	13.16^4 -16^4 $2.7.16^4$	$-4.20.16^3$ 8.16^4 3.16^4
$B_0^5\ B_1^3\ B_2\ B_3\ B_4^2$	$12.26.16^3$ $8.21.16^3$ 12.16^4 $3.7.16^4$	$3.9.16^4$ $4.9.16^4$ $2.18.16^4$

	$F_6\,H_{10}$	$F_7\,H_9$
$B_0^5\,B_1^2\,B_2^3\,B_4^2$	-4.16^4 -4.16^4 -6.16^4 -6.16^4	40.16^4
$B_0^5\,B_2^6\,B_4$	-4.16^4	
$B_0^5\,B_1^4\,B_4^2$	-9.16^4	
$B_0^5\,B_2^5\,B_3^2$		-16^4
$B_0^4\,B_1^4\,B_0^4$	$4.6.9.16^2$ $4.6.9.16^2$	$3.7.9.16^2$
$B_0^4\,B_1^3\,B_2^2\,B_3^3$	$-8.9.16^2$ 49.16^3 $-8.9.16^2$	-24.16^3 $3.52.16^3$ $-4.7.9.16^2$
$B_0^4\,B_1^2\,B_2^4\,B_3^2$	$-2.7.16^3$ $-2.7.16^3$	-13.16^3 4.16^3 -3.16^3
$B_0^4\,B_1^4\,B_2\,B_3^2\,B_4$	$-3.\ 7.16^3$ $-2.\ 6.16^3$ $6.26.16^3$ $7.21.16^3$	$-3.12.16^3$ $9.24.16^3$ 8.16^3 $2.7.9.16^3$ $3.15.16^3$
$B_0^4\,B_1^3\,B_2^3\,B_3\,B_4$	4.16^3 $-2.26.16^3$ 6.16^3 $-2.21.16^3$ $-7.\ 8.16^3$ -3.16^4	20.16^3 3.16^4 $2.52.16^3$ $-4.9.16^3$ $-3.4.16^3$
$B_0^4\,B_1\,B_2^6\,B_3$	4.16^3	4.16^3
$B_0^4\,B_1^5\,B_3\,B_4^2$	$-3.21.16^3$ $-6.12.16^3$	$-9.18.16^3$ -81.16^3
$B_0^4\,B_1^2\,B_2^5\,B_4$	16^4 16^4	-2.16^4
$B_0^4\,B_1^4\,B_2^2\,B_4^2$	$3.8.16^3$ $3.8.16^3$	$-9.20.16^3$ -24.16^4

	$F_6\ H_{10}$	$F_7\ H_9$
$B_0^3\ B_1^5\ B_2\ B_3^3$	$-4.6.7.16^2$ $-4.6.7.16^2$	$7.9.16^2$ $-3.15.16^2$
$B_0^3\ B_1^6\ B_3^2\ B_4$	$6.12.16^2$ $-4.6.21.16^2$	81.16^2 $-7.81.16^2$
$B_0^3\ B_1^4\ B_2^3\ B_3^2$	$7.8.16^2$ 3.16^3 $7.8.16^2$ 3.16^3	52.16^2 $4.15.16^2$ $3.4.16^2$
$B_0^3\ B_1^3\ B_2^5\ B_3$	-16^3 -16^3	-16^3 -16^3
$B_0^3\ B_1^5\ B_2^2\ B_3\ B_4$	$-3.8.16^2$ $8.21.16^2$ $2.6.16^3$	-12.16^3 $-9.52.16^2$ $-3.9.4.16^2$ $-2.15.16^3$
$B_0^3\ B_1^4\ B_2^4\ B_4$	-4.16^3	9.16^3
$B_0^3\ B_1^6\ B_2\ B_4^2$		$9.12.16^3$ $6.9.16^3$
$B_0^2\ B_1^7\ B_3^3$	$4.9.16^2$	
$B_0^2\ B_1^6\ B_2^2\ B_3^2$	$-2.6.16^2$ -12.16^2	-15.16^2
$B_0^2\ B_1^5\ B_2^4\ B_3$	4.16^2	4.16^2
$B_0^2\ B_1^6\ B_4^2$		$-3.81.16^2$
$B_0^2\ B_1^7\ B_2\ B_3\ B_4$		$3.9.16^2$ $9.15.16^2$
$B_0^2\ B_1^6\ B_2^3\ B_4$		$-4.9.16^2$

Diese Glieder zusammengezogen geben die verlangte Bedingungsgleichung, die jedoch später durch eine einfachere ersetzt wird. Jene ist:

$$
\begin{aligned}
&- 4.16^5 B_0^5 B_2^2 B_4^3 + 3.16^5 B_0^4 B_1 B_2^2 B_3 B_4^2 - 36.16^4 B_0^4 B_2^3 B_3^2 B_4 \\
&+ 2.16^5 B_0^4 B_1^4 B_4^2 + 3.16^5 B_0^4 B_1^2 B_2 B_4^3 + 9.12.16^3 B_0^4 B_2^2 B_3^4 \\
&- 81.16^3 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3^4 - 72.16^3 B_0^3 B_1 B_2^3 B_3^3 + 3.8.9.16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4 \\
&+ 20.16^4 B_0^3 B_1 B_2^4 B_3 B_4 - 36.16^4 B_0^3 B_1^3 B_2 B_3 B_4^2 - 60.16^4 B_0^3 B_1^2 B_2^3 B_4^2 \\
&- 4.16^4 B_0^3 B_1^6 B_4 - 9.16^4 B_0^3 B_1^4 B_4^3 + 16^4 B_0^3 B_2^5 B_3^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+3.81.16^2 B_0^2 B_1^4 B_3^4 + 70.16^3 B_0^2 B_1^3 B_2^2 B_3^3 - 16^4 B_0^2 B_1^2 B_2^4 B_3^2 \\
&-99.16^3 B_0^2 B_1^4 B_2 B_3^2 B_4 - 3.8.13.16^3 B_0^2 B_1^3 B_2^3 B_3 B_4 \\
&+9.12.16^3 B_0^2 B_1^5 B_3 B_4^2 + 4.16^4 B_0^2 B_1^2 B_2^5 B_4 + 4.9.17.16^3 B_0^2 B_1^4 B_2^2 B_4^2 \\
&-6.59.16^2 B_0 B_1^5 B_2 B_3^3 + 4.21.16^2 B_0 B_1^4 B_2^3 B_3^2 + 6.9.16^2 B_0 B_1^6 B_3^2 B_4 \\
&+9.11.16^3 B_0 B_1^5 B_2^2 B_3 B_4 - 21.16^3 B_0 B_1^4 B_2^4 B_4 - 2.81.16^3 B_0 B_1^6 B_2 B_4^2 \\
&+36.16^2 B_1^7 B_3^3 - 9.16^2 B_1^6 B_2^2 B_3^2 + 3.81.16^2 B_1^8 B_4^2 \\
&-2.81.16^2 B_1^7 B_2 B_3 B_4 + 36.16^2 B_1^6 B_2^3 B_4 = 0.
\end{aligned}
$$

10. Zur Auffindung dieser einfacheren Bedingungsgleichung als auch für fernere Folgerungen wird es nöthig, das Stattfinden gewisser Gleichungen für specielle Werthe zu erweisen. Setzt man

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = \Pi$$
$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = \omega;$$

so folgt aus der ersten Gleichung und aus $4B_0 y^3 + 3B_1 y^2 + 2B_2 y + B_3 = D_y \Pi$,

$$4\Pi - y D_y \Pi = B_1 y^3 + 2B_2 y^2 + 3B_3 y + 4B_4;$$

wird diese Gleichung mit $D_y \Pi$ abermals verbunden, so ergibt sie

$$
\begin{aligned}
4B_0(4\Pi - y D_y \Pi) - B_1 D_y \Pi = {} & (8B_0 B_2 - 3B_1^2) y^2 \\
& + (12B_0 B_3 - 2B_1 B_2) y + 16B_0 B_4 - B_1 B_3.
\end{aligned}
$$

Diess mit $4B_0 y$ multiplicirt und von $(8B_0 B_2 - 3B_1^2) D_y \Pi$ subtrahirt; ergibt

$$
\begin{aligned}
& 8B_0 B_2 - 3B_1^2) D_y \Pi - 4B_0 y [(4\Pi - y D_y \Pi) 4B_0 - B_1 D_y \Pi] \\
& = (-48B_0^2 B_3 + 32B_0 B_1 B_2 - 9B_1^3) y^2 + (-64B_0^2 B_4 + 4B_0 B_1 B_3 \\
& + 16B_0 B_2^2 - 6B_1^2 B_2) y + 8B_0 B_2 B_3 - 3B_1^2 B_3;
\end{aligned}
$$

welches für den speciellen Werth $y = -\frac{F_7}{F_6}$ mit dem Ausdrucke $2D_p \omega$ für $p = -\frac{F_7}{F_6}$ die Nulle ergibt, so dass die Gleichung:

$$(8B_0 B_2 - 3B_1^2) D_y \Pi - 4B_0 y [4B_0 (4\Pi - y D_y \Pi) - B_1 D_y \Pi] + 2D_p \omega = 0$$

für den speciellen Werth y und p gleich $\frac{-F_7}{F_6}$ besteht.

Der erste Theil der Gleichung liefert den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
& (-48B_0^2 B_3 + 32B_0 B_1 B_2 - 9B_1^3) F_7^2 - (-64B_0^2 B_4 + 4B_0 B_1 B_3 + 16B_0 B_2^2 \\
& - 6B_1^2 B_2) F_6 F_7 + (8B_0 B_2 B_3 - 3B_1^2 B_3) F_6^2
\end{aligned}
$$

und da nach frühern

$$
\begin{aligned}
F_7^2 = {} & 9.16^4 B_0^6 B_3^2 B_4^2 - 12.16^4 B_0^5 B_1 B_2 B_3 B_4^2 \\
& - 2.9.16^3 B_0^5 B_1 B_3^3 B_4 + 4.6.16^3 B_0^5 B_2^2 B_3^2 B_4 \\
& + 4.16^4 B_0^4 B_1^2 B_2^2 B_4^2 + 9.16^2 B_0^4 B_1^2 B_3^4 \\
& + 16^3 B_0^4 B_2^4 B_3^2 + 6.9.16^3 B_0^4 B_1^3 B_3 B_4^2 \\
& + 6.16^3 B_0^4 B_1^2 B_2 B_3^2 B_4 - 16^4 B_0^4 B_1 B_2^3 B_3 B_4 \\
& - 3.8.16^2 B_0^4 B_1 B_2^2 B_3^3 - 4.9.16^3 B_0^3 B_1^4 B_2 B_4^2 \\
& + 17.8.16^2 B_0^3 B_1^3 B_2^2 B_3 B_4 - 6.9.16^2 B_0^3 B_1^4 B_3^2 B_4 \\
& + 6.16^2 B_0^3 B_1^3 B_2 B_3^3 - 8.16^2 B_0^3 B_1^2 B_2^3 B_3^2
\end{aligned}
$$

$$+\,81\,.\,16^2 B_0^2 B_1^6 B_4^2 + 16^2 B_0^2 B_1^4 B_2^2 B_3^2$$
$$-\,2\,.\,9\,.\,16^2 B_0^2 B_1^5 B_2 B_3 B_4\,.$$

$$F_6\,F_7 = 3\,.\,4\,.\,9\,.\,16^3 B_0^6 B_3^3 B_4 - 6\,.\,16^4 B_0^6 B_2 B_3 B_4^2$$
$$-\,3\,.\,50\,.\,16^3 B_0^5 B_1 B_2 B_3^2 B_4 + 16^4 B_0^5 B_2^3 B_3 B_4$$
$$+\,36\,.\,16^3 B_0^5 B_1^2 B_3 B_4^2 + 4\,.\,16^4 B_0^5 B_1 B_2^2 B_4^2$$
$$-\,9\,.\,12\,.\,16^2 B_0^5 B_1 B_3^4 + 9\,.\,16^3 B_0^5 B_2^2 B_3^3$$
$$+\,36\,.\,16^3 B_0^4 B_1^3 B_3^2 B_4 + 55\,.\,16^3 B_0^4 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4$$
$$-\,16^4 B_0^4 B_1 B_2^4 B_4 - 42\,.\,16^3 B_0^4 B_1^3 B_2 B_4^2$$
$$+\,3\,.\,16^3 B_0^4 B_1^2 B_2 B_3^3 - 4\,.\,34\,.\,16^2 B_0^4 B_1 B_2^3 B_3^2$$
$$+\,2\,.\,16^3 B_0^4 B_2^5 B_3 - 4\,.\,114\,.\,16^2 B_0^3 B_1^4 B_2 B_3 B_4$$
$$+\,8\,.\,17\,.\,16^2 B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_4 + 9\,.\,12\,.\,16^2 B_0^3 B_1^5 B_4^2$$
$$-\,3\,.\,6\,.\,16^2 B_0^3 B_1^4 B_3^3 + 58\,.\,16^2 B_0^3 B_1^3 B_2^2 B_3^2$$
$$-\,16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^4 B_3 + 6\,.\,9\,.\,16^2 B_0^2 B_1^6 B_3 B_4$$
$$-\,18\,.\,16^2 B_0^2 B_1^5 B_2^2 B_4 - 6\,.\,16^2 B_0^2 B_1^5 B_2 B_3^2$$
$$+\,2\,.\,16^2 B_0^2 B_1^4 B_2^3 B_3\,.$$

$$F_6^2 = 81\,.\,16^3 B_0^6 B_3^4 + 4\,.\,16^4 B_0^6 B_2^2 B_4^2 - 9\,.\,16^4 B_0^6 B_2 B_3^2 B_4$$
$$-\,2\,.\,7\,.\,9\,.\,16^3 B_0^5 B_1 B_2 B_3^3 + 36\,.\,16^3 B_0^5 B_2^3 B_3^2$$
$$+\,6\,.\,9\,.\,16^3 B_0^5 B_1^2 B_3^2 B_4 + 7\,.\,16^4 B_0^5 B_1 B_2^2 B_3 B_4$$
$$-\,2\,.\,16^4 B_0^5 B_2^4 B_4 - 3\,.\,16^4 B_0^5 B_1^2 B_2 B_4^2 + 40\,.\,16^3 B_0^4 B_1^2 B_2^2 B_3^2$$
$$+\,4\,.\,16^3 B_0^4 B_2^6 + 9\,.\,16^3 B_0^4 B_1^4 B_4^2$$
$$+\,3\,.\,9\,.\,16^3 B_0^4 B_1^3 B_3^3 - 28\,.\,16^3 B_0^4 B_1 B_2^4 B_3$$
$$-\,6\,.\,11\,.\,16^3 B_0^4 B_1^3 B_2 B_3 B_4 + 20\,.\,16^3 B_0^4 B_1^2 B_2^3 B_4$$
$$-\,21\,.\,16^3 B_0^3 B_1^4 B_2 B_3^2 + 13\,.\,16^3 B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3$$
$$+\,9\,.\,16^3 B_0^3 B_1^5 B_3 B_4 - 2\,.\,16^3 B_0^3 B_1^2 B_2^5$$
$$-\,3\,.\,16^3 B_0^3 B_1^4 B_2^2 B_4 + 36\,.\,16^2 B_0^2 B_1^6 B_3^2$$
$$+\,4\,.\,16^2 B_0^2 B_1^4 B_2^4 - 3\,.\,8\,.\,16^2 B_0^2 B_1^5 B_2^2 B_3$$

ergibt die Multiplication in die bestehenden Factoren folgende Glieder, wie sie den drei Theilen beziehungsweise entsprechen:

$B_0^8 B_3^3 B_4^2$	$-3.9.16^5$	$3.9.16^5$	
$B_0^8 B_2 B_3 B_4^3$		$-4.6.16^5$	
$B_0^7 B_1 B_2 B_3^2 B_4^2$	$4.9.16^5$ $2.9.16^5$	$-3.4.50.16^4$ $3.8.16^4$	
$B_0^7 B_1 B_3^4 B_4$	$6.9.16^4$	$-3.9.16^4$ $-3.9.16^4$	
$B_0^7 B_2^2 B_3^3 B_4$	$-8.9.16^4$	$4.9.16^4$ $-3.4.9.16^4$	$-8.9.16^4$

$B_0^7 B_2 B_3^5$			$8.81.16^3$
$B_0^7 B_2^3 B_3 B_4^2$		4.16^5 6.16^5	2.16^5
$B_0^7 B_1^2 B_3 B_4^3$		9.16^5	
$B_0^7 B_1 B_2^2 B_4^3$		16^6	
$B_0^6 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2$	-12.16^5 -24.16^5	$4.55.16^4$ -16^5 $-4.9.16^4$ $-4.9.16^4$	$-3.8.16^4$ $-3.4.16^4$
$B_0^6 B_1^2 B_3^5$	$-3.9.16^3$	$3.9.16^3$	$-3.9^2.16^3$
$B_0^6 B_2^4 B_3^3$	-3.16^4	-9.16^4	8.16^4
$B_0^6 B_1^3 B_3^3 B_4^2$	$-2.81.16^4$ -81.16^4	9.16^5 -9.16^4	
$B_0^6 B_1^2 B_2 B_3^3 B_4$	$-2.9.16^4$ $-4.9.16^4$	$3.4.16^4$ $3.8.25.16^3$ $8.81.16^3$	$3.9.16^4$ $3.9.16^4$
$B_0^6 B_1 B_2^3 B_3^2 B_4$	3.16^5 3.16^5	-34.16^4 -4.16^4 $3.50.16^4$	$7.8.16^4$
$B_0^6 B_1 B_2^2 B_3^4$	$8.9.16^3$	$-4.9.16^3$ $9.12.16^3$	$-7.9.16^3$
$B_0^6 B_1 B_2^4 B_4^2$		-4.16^5 -4.16^5	
$B_0^6 B_1^3 B_2 B_4^3$		$-8.21.16^4$	
$B_0^6 B_2^5 B_3 B_4$		8.16^4 -16^5	-16^5
$B_0^5 B_1^4 B_2 B_3 B_4^2$	$3.4.9.16^4$ $3.4.9.16^4$ $3.4.9.16^4$	-114.16^4 $8.21.16^3$ $3.8.9.16^3$	$8.9.16^3$ 9.16^4
$B_0^5 B_1^3 B_2^2 B_3^2 B_4$	$-3.8.17.16^3$ $3.4.16^4$ $-3.8.9.16^3$	$8.29.16^3$ $-4.55.16^3$ $-4.9.16^4$ $-9.100.16^3$	$-3.11.16^4$ $-3.7.16^4$

$B_0^5 B_1^4 B_3^3 B_4$	$2.81.16^3$ $2.81.16^3$	$-8.9.16^3$ -9.16^4	$-2.81.16^3$
$B_0^5 B_1^3 B_2 B_3^4$	$-2.9.16^3$ $2.9.16^3$	$-3.4.16^3$ $-8.81.16^2$	$3.8.9.16^3$ $6.7.9.16^3$
$B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3^3$	$3.8.16^3$ -3.16^4	34.16^3 -3.16^4 $6.9.16^3$	20.16^4 $-3.36.16^3$
$B_0^5 B_1^3 B_2^3 B_4^2$	8.16^5	$2.17.16^4$ 42.16^4 24.16^4	
$B_0^5 B_2^7 B_3$		-2.16^4	2.16^4
$B_0^5 B_1 B_2^5 B_3^2$	2.16^4	-8.16^3 $4.34.16^3$	-14.16^4
$B_0^5 B_1^2 B_2^4 B_3 B_4$	-2.16^5	-4.16^4 4.16^4 -55.16^4 6.16^4	10.16^4 6.16^4
$B_0^5 B_1^5 B_4^3$		$3.9.16^4$	
$B_0^5 B_1 B_2^6 B_4$		16^5	
$B_0^4 B_1^6 B_3 B_4^2$	$-3.81.16^3$ $-6.81.16^3$	$3.8.9.16^3$ $-3.9.16^3$	$-3.9.16^3$
$B_0^4 B_1^4 B_2^2 B_3^3$	-3.16^3 $3.4.16^3$ $3.81.9.16^2$	$-8.29.16^2$ $3.6.16^3$ 18.16^3	$-8.21.16^3$ $-3.40.16^3$
$B_0^4 B_1^5 B_2 B_3^2 B_4$	$6.9.16^3$ $-3.4.9.16^3$ $-6.9.16^3$	$-3.8.16^3$ 114.16^3 $6.36.16^3$	$8.9.16^3$ $22.9.16^3$
$B_0^4 B_1^2 B_2^6 B_3$		16^4 12.16^3	-16^4 -12.16^3
$B_0^4 B_1^5 B_2^2 B_4^2$	$-8.9.16^4$ $-4.9.16^4$	$-8.9.16^3$ $-9.12.16^3$ $-42.6.16^3$	

$B_0^4 B_1^4 B_2^3 B_3 B_4$	17.16^4 9.16^4	8.16^3 $-2.17.16^3$ $4.114.16^3$ $6.55.16^3$	$-3.8.16^3$ -60.16^3
$B_0^4 B_1^3 B_2^4 B_3^2$	-16^4 -9.16^3	4.16^3 -58.16^3 $-3.17.16^3$	$8.13.16^3$ $3.28.16^3$
$B_0^4 B_1^5 B_3^4$	-81.16^2	$8.9.16^2$	-81.16^3
$B_0^4 B_1^3 B_2^5 B_4$		$-8.17.16^3$ -6.16^4	
$B_0^3 B_1^7 B_2 B_4^2$	$2.81.16^3$ $4.81.16^3$	$8.81.16^2$	
$B_0^3 B_1^5 B_2^3 B_3^2$	2.16^3 $8.9.16^2$	-8.16^2 6.16^3 $6.58.16^2$	-12.16^3 $-3.13.16^3$
$B_0^3 B_1^6 B_2^2 B_3 B_4$	$-4.9.16^3$ $-8.9.17.16^2$	$8.9.16^2$ $-6.9.16^3$ $-3.57.16^3$	9.16^3
$B_0^3 B_1^7 B_3^2 B_4$	$6.81.16^2$	$-3.8.9.16^2$	$-3.9.16^3$
$B_0^3 B_1^6 B_2 B_3^3$	$-6.9.16^2$	$3.8.16^2$ $-3.4.9.16^2$	18.16^3 $7.9.16^3$
$B_0^3 B_1^5 B_2^4 B_4$		18.16^3 $3.17.16^3$	
$B_0^3 B_1^4 B_2^5 B_3$		-2.16^3 -6.16^3	2.16^3 6.16^3
$B_0^2 B_1^8 B_2 B_3 B_4$	$2.81.16^2$	$4.81.16^2$	
$B_0^2 B_1^7 B_2^3 B_4$		$-6.18.16^2$	
$B_0^2 B_1^6 B_2^4 B_3$		12.16^2	-12.16^2
$B_0^2 B_1^8 B_3^3$			$-3.36.16^2$
$B_0^2 B_1^9 B_4^2$	$-9.81.16^2$		
$B_0^2 B_1^7 B_2^2 B_3^2$	-9.16^2	$-4.9.16^4$	$8.9.16^2$

Mithin ist dieser Theil $= - 4.6.16^5 B_0^8 B_2 B_3 B_4^3$

$+ 2.9.16^5 B_0^7 B_1 B_2 B_3^2 B_4^2 - 8.27.16^4 B_0^7 B_2^2 B_3^3 B_4$

$+ 8.81.16^3 B_0^7 B_2 B_3^5 + 12.16^5 B_0^7 B_2^3 B_3 B_4^2$

$+ 9.16^5 B_0^7 B_1^2 B_3 B_4^3 + 16^6 B_0^7 B_1 B_2^2 B_4^3$

$- 30.16^5 B_0^6 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2 - 3.81.16^3 B_0^6 B_1^2 B_3^5$

$+ 6.16^4 B_0^6 B_2^4 B_3^3 - 9.12.16^4 B_0^6 B_1^3 B_3^2 B_4^2$

$+ 90.16^4 B_0^6 B_1^2 B_2 B_3^3 B_4 + 8.33.16^4 B_0^6 B_1 B_2^3 B_3^2 B_4$

$- 6.9.16^4 B_0^6 B_1 B_2^2 B_3^4 - 8.16^5 B_0^6 B_1 B_2^4 B_4^2$

$- 8.21.16^4 B_0^6 B_1^3 B_2 B_4^3 - 24.16^4 B_0^6 B_2^5 B_3 B_4$

$+ 8.9.55.16^3 B_0^5 B_1^4 B_2 B_3 B_4^2 - 3.8.115.16^3 B_0^5 B_1^3 B_2^2 B_3^2 B_4$

$- 6.9.16^3 B_0^5 B_1^4 B_3^3 B_4 + 3.8.361.16^2 B_0^5 B_1^3 B_2 B_3^4$

$+ 3.4.19.16^3 B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3^3 + 3.4.19.16^4 B_0^5 B_1^3 B_2^3 B_4^2$

$- 4.16^4 B_0^5 B_1 B_2^5 B_3^2 - 65.16^4 B_0^5 B_1^2 B_2^4 B_3 B_4$

$+ 3.9.16^4 B_0^5 B_1^5 B_4^3 + 16^5 B_0^5 B_1 B_2^6 B_4$

$- 7.81.16^3 B_0^4 B_1^6 B_3 B_4^2 - 4.61.16^3 B_0^4 B_1^4 B_2^2 B_3^3$

$+ 4.9.13.16^3 B_0^4 B_1^5 B_2 B_3^2 B_4 - 9.15.16^4 B_0^4 B_1^5 B_2^2 B_4^2$

$+ 3.4.91.16^3 B_0^4 B_1^4 B_2^3 B_3 B_4 + 58.16^3 B_0^4 B_1^3 B_2^4 B_3^2$

$- 9.145.16^2 B_0^4 B_1^5 B_3^4 - 8.29.16^3 B_0^4 B_1^3 B_2^5 B_4$

$+ 8.13.81.16^2 B_0^3 B_1^7 B_2 B_4^2 - 12.23.16^2 B_0^3 B_1^5 B_2^3 B_3^2$

$- 4.81.16^3 B_0^3 B_1^6 B_2^2 B_3 B_4 - 2.81.16^2 B_0^3 B_1^7 B_3^2 B_4$

$+ 6.193.16^2 B_0^3 B_1^6 B_2 B_3^3 + 3.23.16^3 B_0^3 B_1^5 B_2^4 B_4$

$- 6.18.16^2 B_0^2 B_1^7 B_2^3 B_4 - 3.36.16^2 B_0^2 B_1^8 B_3^3$

$- 9.81.16^2 B_0^2 B_1^9 B_4^2 + 3.9.16^2 B_0^2 B_1^7 B_2^2 B_3^2 + 6.81.16^2 B_0^2 B_1^8 B_2 B_3 B_4.$

Eben so ergibt der zweite Ausdruck

$3 A_3 p^2 + 2 A_4 p + A_5 = D_p \omega$ die drei Theile $3 A_3 F_7^2 - 2 A_4 F_6 F_7 + A_5 F_6^2$

d. i. folgende Glieder der Entwicklung:

$B_0^8 B_3^3 B_4^2$	$3.8.9.16^4$	$-3.8.9.16^4$	
$B_0^8 B_2 B_3 B_4^3$		$3.4.16^5$	
$B_0^7 B_1 B_2 B_3^2 B_4^2$	$-3.4.9.16^4$ $-3.6.16^5$	$3.8.16^4$ $6.50.16^4$	$-8.9.16^4$
$B_0^7 B_1 B_3^4 B_4$	$-3.9.16^4$	$-3.9.16^4$ $3.8.9.16^3$	$8.81.16^3$
$B_0^7 B_2^2 B_3^3 B_4$	$4.9.16^4$	$-2.9.16^4$ $6.9.16^4$	$4.9.16^4$
$B_0^7 B_2 B_3^5$			$-4.81.16^3$

$B_0^7 B_2^3 B_3 B_4^2$		-2.16^5 -3.16^5	-16^5
$B_0^7 B_1^2 B_3 B_4^3$		$-8.9.16^4$	
$B_0^7 B_1 B_2^2 B_4^3$		-8.16^5	2.16^5
$B_0^6 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2$	9.16^5 6.16^5	12.16^4 -16^5 $-2.55.16^4$ 18.16^4	4.16^4 $7.8.16^4$ $3.4.16^4$
$B_0^6 B_1^2 B_3^5$	$3.8.9.16^3$	$3.9.16^3$	81.16^3
$B_0^6 B_2^4 B_3^3$	$3.8.16^3$	$8.9.16^3$	-9.16^4
$B_0^6 B_1^3 B_3^2 B_4^2$	$3.9.16^4$ 81.16^4	-9.16^4 $-8.9.16^4$	$3.9.16^4$
$B_0^6 B_1^2 B_2 B_3^3 B_4$	$3.8.9.16^3$ 9.16^4	$-3.8.9.16^3$ $3.8.25.16^3$ -6.16^4	-9.16^4 $-7.9.16^4$ $-3.8.9.16^3$
$B_0^6 B_1 B_2^3 B_3^2 B_4$	$-3.6.16^4$ $-3.8.16^4$	-4.16^4 17.16^4 $-3.25.16^4$	18.16^4 $-4.7.16^4$
$B_0^6 B_1 B_2^2 B_3^4$	$-4.9.16^3$	$-4.9.16^3$ $-6.9.16^3$	$7.8.9.16^3$
$B_0^6 B_1 B_2^4 B_4^2$		2.16^5 2.16^5	-16^5
$B_0^6 B_1^3 B_2 B_4^3$		$4.21.16^4$	$-3.8.16^4$
$B_0^6 B_2^5 B_3 B_4$		-4.16^4 8.16^4	8.16^4
$B_0^5 B_1^4 B_2 B_3 B_4^2$	$-4.9.16^4$ $-8.81.16^3$ $-6.9.16^4$	$-8.9.16^3$ $8.21.16^3$ 57.16^4	-3.16^5 $-3.11.16^4$ $-4.9.16^3$
$B_0^5 B_1^3 B_2^2 B_3^2 B_4$	$8.9.16^3$ $-8.9.16^3$ $3.4.17.16^3$	$6.50.16^3$ $-4.55.16^3$ $-4.29.16^3$ 18.16^4	7.16^4 20.16^4 $3.8.11.16^3$

$B_0^5 B_1^4 B_3^3 B_4$	$-6.9.16^3$ -81.16^3	-9.16^4 $4.9.16^3$	$6.9.16^3$ $3.8.9.16^3$
$B_0^5 B_1^3 B_2 B_3^4$	$-3.4.9.16^2$ 9.16^3	$3.8.9.16^2$ $-3.4.16^3$	$-2.7.9.16^3$ $-3.4.9.16^3$
$B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3^3$	$3.6.16^3$ $-3.4.16^3$	$-2.9.16^3$ 34.16^3 $3.8.16^3$	36.16^3 -10.16^4
$B_0^5 B_1^3 B_2^3 B_4^2$	-3.15^5	-8.16^4 -17.16^4 -21.16^4	10.16^4
$B_0^5 B_2^7 B_3$		16^4	-16^4
$B_0^5 B_1 B_2^5 B_3^2$	-12.16^3	-8.16^3 $-4.17.16^3$	7.16^4
$B_0^5 B_1^2 B_2^4 B_3 B_4$	12.16^4	-2.16^4 4.16^4 2.16^4 $8.55.16^3$	-2.16^4 -14.16^4 -5.16^4
$B_0^5 B_1^5 B_4^3$		$-3.8.9.16^3$	$8.9.16^3$
$B_0^5 B_1 B_2^6 B_4$		-8.16^4	2.16^4
$B_0^4 B_1^6 B_3 B_4^2$	$3.6.9.16^3$ $3.8.81.16^2$	$-3.9.16^3$ $-3.9.4.16^3$	9.16^3 $8.9.16^3$
$B_0^4 B_1^4 B_2^2 B_3^3$	$-8.9.16^2$ $-8.9.16^2$ $3.8.16^2$	-6.16^3 $-8.29.16^2$ -9.16^3	40.16^3 $4.21.16^3$
$B_0^4 B_1^5 B_2 B_3^2 B_4$	$3.6.16^3$ $8.81.16^2$ $-3.9.16^3$	$-8.9.16^3$ 114.16^3 $3.4.16^3$	$-6.11.16^3$ $-21.8.16^3$ $-4.9.16^3$
$B_0^4 B_1^2 B_2^6 B_3$		-4.16^3 -8.16^3	4.16^3 8.16^3
$B_0^4 B_1^5 B_2^2 B_4^2$	$3.4.16^4$ $3.9.16^4$	$4.21.16^3$ $4.9.16^3$ $6.9.16^3$	$-3.8.16^3$

$B_0^4 B_1^4 B_2^3 B_3 B_4$	-3.16^4 $-6.17.16^3$	$-2.55.16^2$ $-2.17.16^3$ -4.16^3 $-4.57.16^3$	20.16^3 $8.13.16^3$ $3.4.16^3$
$B_0^5 B_1^3 B_2^4 B_3^2$	3.16^3 6.16^3	17.16^3 4.16^3 29.16^3	-28.16^3 $-4.13.16^3$
$B_0^4 B_1^5 B_3^4$	$3.9.16^2$	$8.9.16^2$	$3.9.16^3$
$B_0^4 B_1^3 B_2^5 B_4$		2.6^4 $4.17.16^3$	-16^4
$B_0^3 B_1^7 B_2 B_4^2$	$-3.4.9.16^3$ $-3.4.81.16^2$	$-3.8.9.16^2$	
$B_0^3 B_1^5 B_2^3 B_3^2$	$-3.8.16^2$ $-3.4.16^2$	$-29.4.16^2$ -8.16^2 -3.16^3	13.16^3 6.16^3
$B_0^3 B_1^6 B_2^2 B_3 B_4$	$3.8.17.16^2$ $3.8.9.16^2$	57.16^3 $8.9.16^2$ $3.9.16^3$	-3.16^3 $-3.4.16^3$
$B_0^3 B_1^7 B_3^2 B_4$	$-2.81.16^2$	$-3.8.9.16^2$	9.16^3 18.16^3
$B_0^3 B_1^6 B_2 B_3^3$	$2.9.16^2$	$4.9.16^2$ $3.8.16^2$	-21.16^3 -9.16^3
$B_0^3 B_1^5 B_2^4 B_4$		-17.16^3 -9.16^3	2.16^3
$B_0^3 B_1^4 B_2^5 B_3$		2.16^3 16^3	-2.16^3 -16^3
$B_0^2 B_1^8 B_2 B_3 B_4$	$-6.9.16^2$	$-3.4.9.16^2$	
$B_0^2 B_1^7 B_2^3 B_4$		$4.9.16^2$	
$B_0^2 B_1^6 B_2^4 B_3$		-4.16^2	4.16^3
$B_0^2 B_1^8 B_3^3$			36.16^2
$B_0^2 B_1^9 B_4^2$	$3.81.16^2$		
$B_0^2 B_1^7 B_2^2 B_3^2$	3.16^2	12.16^3	$-3.8.16^3$

Nach Zusammenziehung der Glieder erhält man folgendes Resultat:

$$3.4.16^5 B_0^8 B_2 B_3 B_4^3 - 9.16^5 B_0^7 B_1 B_2 B_3^2 B_4^2$$
$$+ 3.4.9.16^4 B_0^7 B_2^2 B_3^3 B_4 - 4.81.16^3 B_0^7 B_2 B_3^5$$
$$- 6.16^5 B_0^7 B_2^3 B_3 B_4^2 - 8.9.16^4 B_0^7 B_1^2 B_3 B_4^3$$
$$- 6.16^5 B_0^7 B_1 B_2^2 B_4^3 + 8.27.16^4 B_0^6 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2$$
$$+ 3\ 8.81.16^2 B_0^6 B_1^2 B_3^5 - 3.16^4 B_0^6 B_2^4 B_3^3$$
$$+ 6.9.16^4 B_0^6 B_1^3 B_3^2 B_4^2 + 45.16^4 B_0^6 B_1^2 B_2 B_3^3 B_4$$
$$- 6.19.16^4 B_0^6 B_1 B_2^3 B_3^2 B_4 + 6.7.9.16^3 B_0^6 B_1 B_2^2 B_3^4$$
$$+ 3.16^5 B_0^6 B_1 B_2^4 B_4^2 + 3.4.5.16^4 B_0^6 B_1^3 B_2 B_4^3$$
$$+ 12.16^4 B_0^6 B_2^5 B_3 B_4 - 4.9.47.16^3 B_0^5 B_1^4 B_2 B_3 B_4^2$$
$$+ 8.9.16^4 B_0^5 B_1^3 B_2^2 B_3^2 B_4 + 3.9.16^3 B_0^5 B_1^4 B_3^3 B_4$$
$$- 3.4.307.16^2 B_0^5 B_1^3 B_2 B_3^4 - 6.13.16^3 B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3^3$$
$$- 4.21.16^4 B_0^5 B_1^3 B_2^3 B_4^2 + 3.8.16^3 B_0^5 B_1 B_2^5 B_3^2$$
$$+ 5.8.9.16^3 B_0^5 B_1^2 B_2^4 B_3 B_4 - 9.16^4 B_0^5 B_1^5 B_4^3$$
$$- 6.16^4 B_0^5 B_1 B_2^6 B_4 + 3.8.9.17.16^2 B_0^4 B_1^6 B_3 B_4^2$$
$$+ 3.29.16^3 B_0^4 B_1^4 B_2^2 B_3^3 - 8.9.41.16^2 B_0^4 B_1^5 B_2 B_3^2 B_4$$
$$+ 2.9.43.16^3 B_0^4 B_1^5 B_2^2 B_4^2 - 6.65.16^3 B_0^4 B_1^4 B_2^3 B_3 B_4$$
$$- 31.16^5 B_0^4 B_1^3 B_2^4 B_3^2 + 9.59.16^2 B_0^4 B_1^5 B_3^4$$
$$+ 4.21.16^3 B_0^4 B_1^3 B_2^5 B_4 - 9.81.4.16^2 B_0^3 B_1^7 B_2 B_4^2$$
$$- 6.16^3 B_0^3 B_1^5 B_2^3 B_3^2 + 3.8.61.16^2 B_0^3 B_1^6 B_2^2 B_3 B_4$$
$$+ 6.9.16^2 B_0^3 B_1^7 B_3^2 B_4 - 6.67.16^2 B_0^3 B_1^6 B_2 B_3^3$$
$$- 3.8.16^3 B_0^3 B_1^5 B_2^4 B_4 - 2.81.16^2 B_0^2 B_1^8 B_2 B_3 B_4$$
$$+ 4.9.16^2 B_0^2 B_1^7 B_2^3 B_4 + 4.9.16^2 B_0^2 B_1^8 B_3^3$$
$$+ 3.81.16^2 B_0^2 B_1^9 B_4^2 - 9.16^2 B_0^2 B_1^7 B_2^2 B_3^2.$$

Somit ergibt $(8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) D_y \Pi$

$$- 4 B_0 y \left[4 B_0 (4 \Pi - y D_y \Pi) - B_1 D_y \Pi\right] + 2 D_p \omega$$

nachstehenden Ausdruck:

$$4.16^5 B_0^7 B_1 B_2^2 B_4^3 - 3.16^5 B_0^6 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4^2$$
$$+ 36.16^4 B_0^6 B_1 B_2^3 B_3^2 B_4 - 2.16^5 B_0^6 B_1 B_2^4 B_4^2$$
$$- 3.16^5 B_0^6 B_1^3 B_2 B_4^3 - 9.12.16^3 B_0^6 B_1 B_2^2 B_3^4$$
$$+ 81.16^3 B_0^5 B_1^3 B_2 B_3^4 + 72.16^3 B_0^5 B_1^2 B_2^3 B_3^3$$
$$- 3.8.19.16^3 B_0^5 B_1^3 B_2^2 B_3^2 B_4 - 20.16^4 B_0^5 B_1^2 B_2^4 B_3 B_4$$
$$+ 36.16^4 B_0^5 B_1^4 B_2 B_3 B_4^2 + 60.16^4 B_0^5 B_1^3 B_2^3 B_4^2$$
$$+ 4.16^4 B_0^5 B_1 B_2^6 B_4 + 9.16^4 B_0^5 B_1^5 B_4^3$$
$$- 16^4 B_0^5 B_1 B_2^5 B_3^2 - 3.81.16^2 B_0^4 B_1^5 B_3^4$$
$$- 70.16^3 B_0^4 B_1^4 B_2^2 B_3^3 + 16^4 B_0^4 B_1^3 B_2^4 B_3^2$$
$$+ 99.16^3 B_0^4 B_1^5 B_2 B_3^2 B_4 + 3.8.13.16^3 B_0^4 B_1^4 B_2^3 B_3 B_4$$
$$- 9.12.16^3 B_0^4 B_1^6 B_3 B_4^2 - 4.16^4 B_0^4 B_1^3 B_2^5 B_4$$
$$- 4.9.17.16^3 B_0^4 B_1^5 B_2^2 B_4^2 + 6.59.16^2 B_0^3 B_1^6 B_2 B_3^3$$

$$
\begin{aligned}
&- 4.21.16^2 B_0^3 B_1^5 B_2^3 B_3^2 - 6.9.16^2 B_0^3 B_1^7 B_3^2 B_4 \\
&- 9.11.16^3 B_0^3 B_1^6 B_2^2 B_3 B_4 + 21.16^3 B_0^3 B_1^5 B_2^4 B_4 \\
&+ 2.81.16^3 B_0^3 B_1^7 B_2 B_4^2 - 36.16^2 B_0^2 B_1^8 B_3^3 \\
&+ 9.16^2 B_0^3 B_1^7 B_2^2 B_3^2 - 3.81.16^2 B_0^2 B_1^9 B_4^2 \\
&+ 2.81.16^2 B_0^2 B_1^8 B_2 B_3 B_4 - 36.16^2 B_0^2 B_1^7 B_2^3 B_4
\end{aligned}
$$

d. i. nach Ausscheidung des Factors $-B_0^2 B_1$ einen früher gefundenen Ausdruck, der vermöge der Bedingung der repetirten Wurzeln zu Null wird, und wodurch die Richtigkeit der Gleichung

$$(8 B_0 B_2 - 3 B_1^2) D_y \Pi - 4 B_0 y [4 B_0 (4 \Pi - y D_y \Pi) - B_1 D_y \Pi] + 2 D_p \omega = 0$$

für den speciellen Werth erwiesen ist.

11) 11. Die zweite Gleichung, deren Nachweisung für die Folge wesentlich ist, erhält man durch folgende Betrachtung:

Es ist $\quad 4 B_0 p^3 + 3 B_1 p^2 + 2 B_2 p + B_3 = D_p \Pi$

$$3 A_3 p^3 + 2 A_4 p^2 + A_5 p = p D_p \omega$$

mithin

$$
\begin{aligned}
&(8 B_0 A_4 - 9 A_3 B_1) p^2 + (4 B_0 A_5 - 6 A_3 B_2) p \\
&- 2 A_3 B_3 = 4 B_0 p D_p \omega - 3 A_3 D_p \Pi
\end{aligned}
$$

und diess mit $D_p \omega$ verbunden, ergibt

$$
\begin{aligned}
&(12 B_0 A_3 A_5 - 18 A_3^2 B_2 - 16 B_0 A_4^2 + 18 A_3 A_4 B_1) p \\
&- 9 A_3^2 B_3 - 8 B_0 A_4 A_5 + 9 A_3 A_5 B_1 = 12 A_3 B_0 p D_p \omega \\
&- 9 A_3^2 D_p \Pi - (8 B_0 A_4 - 9 A_3 B_1) D_p \omega \\
&= (12 A_3 B_0 p - 8 A_4 B_0 + 9 A_3 B_1) D_p \omega - 9 A_3^2 D_p \Pi.
\end{aligned}
$$

Um vermöge der Eigenschaft der Coefficienten A_3, A_4, A_5 die Gleichung

$$A_4 B_1 - A_3 B_2 = 2 B_0 A_5$$

zu erfüllen, lässt sich jene Gleichung auch folgendermassen schreiben

$$
\begin{aligned}
&(24 A_3 A_4 B_1 - 24 A_3^2 B_2 - 16 B_0 A_4^2) p - 9 A_3^2 B_3 - 8 A_4 A_5 B_0 \\
&+ 9 A_3 A_5 B_1 = (12 A_3 B_0 p - 8 A_4 B_0 + 9 A_3 B_1) D_p \omega - 9 A_3^2 D_p \Pi.
\end{aligned}
$$

Ferner ist $A_4 p^2 + 2 A_5 p + 3 A_6 = 3 \omega - p D_p \omega$, welches mit $D_p \omega$ verbunden,

$$(2 A_4^2 - 6 A_3 A_5) p + A_4 A_5 - 9 A_3 A_6 = A_4 D_p \omega - 9 A_3 \omega + 3 A_3 p D_p \omega$$

ergibt. Vermöge den zweien zwischen den Coefficienten A_3, A_4, A_5, A_6 stattfindenden Relationen

$$2 B_0 A_5 = A_4 B_1 - A_3 B_2$$

$$8 B_0 A_6 = A_5 B_1 - A_3 B_3$$

übergeht letztere Gleichung nach der Multiplication in $-8 B_0$ in

$$-8 (2 B_0 A_4^2 - 3 A_3 A_4 B_1 + 3 A_3^2 B_2) p - 9 A_3^2 B_3 + 9 A_3 A_5 B_1 - 8 B_0 A_4 A_5,$$

so dass als zweite Gleichung für jeden Werth von p die Bedingung besteht:

$$
\begin{aligned}
&(12 A_3 B_0 p - 8 B_0 A_4 + 9 A_3 B_1) D_p \omega - 9 A_3^2 D_p \Pi \\
&= 8.9. B_0 A_3 \omega - 8 (3 B_0 A_3 p + B_0 A_4) D_p \omega, \quad \text{d. i.} \\
&(36 B_0 p + 9 B_1) D_p \omega = 72 B_0 \omega + 9 A_3 D_p \Pi.
\end{aligned}
$$

12. Aus dem Stattfinden der in voriger Nummer bewiesenen Gleichungen

$$-64 B_0^2 p \Pi + [8 B_0 B_2 - 3 B_1^2 + 4 B_0 B_1 p + 16 B_0^2 p^2] D_p \Pi + 2 D_p \omega = 0$$

$$(36 B_0 p + 9 B_1) D_p \omega - 72 B_0 \omega - 9 A_3 D_p \Pi = 0$$

für den speciellen Werth $p = -\frac{F_7}{F_6}$ lassen sich mehrere Folgerungen ziehen:

1. Da $y = -\frac{F_7}{F_6}$ eine repetirte Wurzel der Gleichung

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

ist; so folgt, dass Π und $D_p \Pi$ für diesen Werth zu Null werden; aus der ersten Gleichung folgt sodann, dass auch $D_p \omega$ für diesen Werth zu Null wird, und aus der zweiten wegen $D_p \Pi = 0$ und $D_p \omega = 0$, $\omega = 0$; mithin ist $-\frac{F_7}{F_6}$ auch eine repetirte Wurzel von

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0.$$

2. Aus der Gleichung:

$$(2 A_4^2 - 6 A_3 A_5) F_7 + (9 A_3 A_6 - A_4 A_5) F_6 = 9 A_3 F_6 \omega + (3 A_3 F_7 - A_4 F_6) D_p \omega$$

folgt ferner
$$(2 A_4^2 - 6 A_3 A_5) F_7 + (9 A_3 A_6 - A_4 A_5) F_6 = 0.$$

Nach der Bedeutung der darin vorkommenden Grössen ist

$$\begin{aligned}
2 A_4^2 - 6 A_3 A_5 = {} & 2.16^2 B_0^4 B_4^2 - 4.64 B_0^3 B_1 B_3 B_4 - 16 B_0^3 B_2^2 B_4 \\
& + 6.32. B_0^3 B_2 B_3^2 - 40 B_0^2 B_1^2 B_3^2 + 2.16 B_0^2 B_2^4 \\
& + 16^2. B_0^2 B_1^2 B_2 B_4 - 8.16 B_0^2 B_1 B_2^2 B_3 + 56 B_0 B_1^3 B_2 B_3 \\
& - 16 B_0 B_1^2 B_2^3 - 3.16 B_0 B_1^4 B_4 + 2 B_1^4 B_2^2 \\
& - 6 B_1^5 B_3 \quad \text{und}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 A_3 A_6 - A_4 A_5 = {} & -8.9 B_0^3 B_3^3 - 8.16 B_0^3 B_1 B_4^2 + 4.16 B_0^3 B_2 B_3 B_4 \\
& + 40 B_0^2 B_1^2 B_3 B_4 + 44 B_0 B_1 B_2 B_3^2 + 2.16 B_0^2 B_1 B_2^2 B_4 \\
& - 16 B_0^2 B_2^3 B_3 - 44 B_0 B_1^3 B_2 B_4 - 11 B_0 B_1^3 B_3^2 \\
& + 8 B_0 B_1^2 B_2^2 B_3 + 9 B_1^5 B_4 - B_1^4 B_2 B_3
\end{aligned}$$

welche Ausdrücke in ihre bezüglichen Factoren multiplicirt folgende zwei Gruppen von Gliedern ergeben:

$B_0^7 B_3 B_4^3$	$-2.3.16^4$	
$B_0^6 B_1 B_3^2 B_4^2$	3.16^4 6.16^3	$2.9.16^3$
$B_0^6 B_2^2 B_3 B_4^2$	3.16^4 -8.16^3	8.16^3
$B_0^6 B_2 B_3^3 B_4$	-36.16^3	-9.16^3 -9.16^3
$B_0^6 B_1 B_2 B_4^3$	4.16^4	-16^4

$B_0^6 B_3^5$		$2.81.16^2$
$B_0^5 B_1^2 B_3^3 B_4$	$3.40.16^2$ -3.16^3	-90.16^2 $6.9.16^2$
$B_0^5 B_2^4 B_3 B_4$	-6.16^3 4.16^3	-2.16^3 -2.16^3
$B_0^5 B_1^2 B_2 B_3 B_4^2$	-3.16^4 -2.16^4 2.16^3	-14.16^3 5.16^3 -3.16^3
$B_0^5 B_1 B_2^2 B_3^2 B_4$	$3.8.16^3$ $4.6.16^3$ -3.16^3 4.16^3	$-8.9.16^2$ 7.16^3 $8.11.16^2$
$B_0^5 B_1 B_2^3 B_4^2$	-2.16^4	4.16^3 4.16^3
$B_0^5 B_1^3 B_4^3$	$-2.9.16^3$	6.16^3
$B_0^5 B_1 B_2 B_3^4$	36.16^2	$-9.11.16^2$ $-9.14.16^2$
$B_0^5 B_2^3 B_3^3$	-3.16^3	$4.9.16^2$ $4.9.16^2$
$B_0^4 B_1^3 B_3^4$	$-3.40.16$	$4.9.11.16$ $6.8.9.16$
$B_0^4 B_1^3 B_2 B_3^2 B_4$	$-3.7.8.16^2$ $-2.40.16^2$ $-2.6.9.16^2$ 3.16^3 -16^3	$9.11.16^2$ $7.10.16^2$ $-4.6.16^2$ $-2.11.16^2$ $-3.11.16^2$
$B_0^4 B_1^2 B_2^3 B_3 B_4$	3.16^3 -16^4 -16^3 -4.16^3	$7.8.16^2$ 8.16^2 16^3 -20.16^3 $3.4.16^2$
$B_0^4 B_1^4 B_3 B_4^2$	9.16^3 9.16^3	$6.8.16^2$ -30.16^2
$B_0^4 B_1 B_2^5 B_4$	4.16^3	-16^3

$B_0^4 B_1^3 B_2^2 B_4^2$	2.16^4 9.16^3	-16^3 $-8.11.16^2$ $-4.6.16^2$
$B_0^4 B_1 B_2^4 B_3^2$	6.16^2 2.16^3	$-4.7.16^2$ -22.16^2
$B_0^4 B_1^2 B_2^2 B_3^3$	$-3.8.16^2$ 12.16^2 10.16^2	-9.16^2 $7.11.16^2$ $-2.9.16^2$
$B_0^4 B_2^6 B_3$	-8.16^3	8.16^2
$B_0^3 B_1^4 B_2^2 B_3 B_4$	$-2.3.16^2$ 7.16^3 $8.9.16^2$ 16^3 $3.4.16^2$	$-7.11.16^2$ $-3.4.16^2$ 80.16 -2.16^2 -6.16^2
$B_0^3 B_1^5 B_3^2 B_4$	$3.6.16^2$ $9.4.16$ -9.16^2	$-4.81.16$ $-6.40.16$ $3.4.11.16$
$B_0^3 B_1^3 B_2^4 B_4$	-2.16^3 $-2.9.16^2$	4.16^2 $2.11.16^2$
$B_0^3 B_1^5 B_2 B_4^2$	-6.16^3 -9.16^3	$2.9.16^2$ $3.11.16^2$
$B_0^3 B_1^4 B_2 B_3^3$	$3.7.8.16$ -40.16	$4.9.16$ $-4.7.11.16$ $-6.4.11.16$
$B_0^3 B_1^3 B_2^3 B_3^2$	-3.16^2 -8.16^2 -14.16^2	14.16^2 6.16^2 88.16 88.16
$B_0^3 B_1^2 B_2^5 B_3$	2.16^2 4.16^2	-2.16^2 -4.16^2
$B_0^2 B_1^5 B_2^3 B_4$	4.16^2 9.16^2	-88.16 $-8.9.16$
$B_0^2 B_1^6 B_2 B_3 B_4$	$-2.6.16^2$ $-7.8.9.16$ -3.16^2	$4.7.9.16$ $6.44.16$ $3.4.16$

$B_0^2 B_1^7 B_4^2$	$3.9.16^2$	$-3.4.9.16$
$B_0^2 B_1^5 B_2^2 B_3^2$	6.16 $7.8.16$ $4.6.16$	$-4.7.16$ $-6.8.16$ -22.16
$B_0^2 B_1^6 B_3^3$	$-3.6.16$	$6.11.16$
$B_0^2 B_1^4 B_2^4 B_3$	-16^2 -8.16	16^2 8.16
$B_0 B_1^7 B_2^2 B_4$	-18.16	$2.9.16$
$B_0 B_1^8 B_3 B_4$	$6.9.16$	$-6.9.16$
$B_0 B_1^6 B_2^3 B_3$	2.16	-2.16
$B_0 B_1^7 B_2 B_3^2$	-6.16	6.16

d. i. nach Ausscheidung des gemeinsamen Factors $16\,B_0$:

$$\begin{aligned}
&- 6.16^3 B_0^5 B_3 B_4^3 + 8.9.16^2 B_0^4 B_1 B_3^2 B_4^2 + 3.16^3 B_0^4 B_2^2 B_3 B_4^2 \\
&- 54.16^2 B_0^4 B_2 B_3^3 B_4 + 3.16^3 B_0^4 B_1 B_2 B_4^3 + 2.81.16\, B_0^4 B_3^5 \\
&+ 4.9.16\, B_0^4 B_1^2 B_3^3 B_4 - 6.16^2 B_0^3 B_2^4 B_3 B_4 - 90.16^2 B_0^3 B_1^2 B_2 B_3 B_4^2 \\
&+ 57.16^2 B_0^3 B_1 B_2^2 B_3^2 B_4 - 24.16^2 B_0^3 B_1 B_2^3 B_4^2 - 12.16^2 B_0^3 B_1^3 B_4^3 \\
&- 3.63.16\, B_0^3 B_1 B_2 B_3^4 + 24.16\, B_0^3 B_2^3 B_3^3 - 9.26.16\, B_0^2 B_1^3 B_2 B_3^2 B_4 \\
&- 2.90.16^2 B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3 B_4 + 9.34.16\, B_0^2 B_1^4 B_3 B_4^2 + 3.16^2 B_0^2 B_1 B_2^5 B_4 \\
&+ 33.16^3 B_0^2 B_1^3 B_2^2 B_4^2 + 3.4.59\, B_0^2 B_1^3 B_3^4 - 12.16\, B_0^2 B_1 B_2^4 B_3^2 \\
&+ 3.16\, B_0^2 B_1^2 B_2^2 B_3^3 + 6.19.16\, B_0^2 B_1^4 B_2^2 B_3 B_4 + 8.9\, B_0^2 B_1^5 B_3^2 B_4 \\
&- 2.12.16\, B_0 B_1^3 B_2^4 B_4 - 9.21.16\, B_0 B_1^5 B_2 B_4^2 - 12.34.\, B_0 B_1^4 B_2 B_3^3 \\
&+ 6.16\, B_0 B_1^3 B_2^3 B_3^2 - 3.16\, B_1^5 B_2^3 B_4 - 4.54\, B_1^6 B_2 B_3 B_4 \\
&+ 9.36\, B_1^7 B_4^2 - 12\, B_1^5 B_2^2 B_3^2 + 3.16\, B_1^6 B_3^3 = 0
\end{aligned}$$

als eine einfachere Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten für den Fall einer repetirten Wurzel.

3. Die Gleichung $(36\,B_0 p + 9\,B_1)\,D_p\,\omega - 72\,B_0\,\omega - 9\,A_3\,D_p\,\Pi = 0$ zeigt; dass wenn ω eine repetirte Wurzel besitzt und A_3 nicht etwa Null ist, vermöge der Bedingung $\frac{D_4}{D_0} = \frac{D_3^2}{D_1^2}$ entweder D_4 oder D_1 zu Null werden müssen.

Im Verlaufe wird ersichtlich: dass wenn $D_1 = 0$ nothwendig $A_3 = 0$ sey, und mithin auch $D_p\,\Pi$; so dass also folgendes Theorem besteht: Immer wenn ω eine repetirte Wurzel besitzt, hat $D_p\,\Pi$ dieselbe Wurzel; ist $A_3 = 0$, also $p = -\frac{B_1}{4B_0}$, so muss nicht nothwendig Π für diesen Werth zu Null werden; in allen andern Fällen ist $\Pi = 0$ durch dieselbe repetirte Wurzel wie $\omega = 0$ erfüllt.

4. Die Wurzel ω, für welche Ω, $D_p\Omega$, Ψ, $D_p\Psi$ zu Null werden, ist somit $p = -\frac{A_4}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$. Die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&[-4E_4E_7(bc'-b'c) + A_3E_7(ab'-a'b)]\Omega + [4E_4E_3(bc-b'c) \\
&\quad + A_6E_4(ca'-c'a) - A_3E_3(ab'-a'b) + E_4E_7(bc'-cb')p]D_p\Omega \\
&\quad = [E_4E_7(ca'-c'a) + E_4E_7(ab'-a'b)p]\omega \\
&[-4E_4E_7(bc''-b''c) + A_3E_7(ab''-a''b)]\Omega + [4E_4E_3(bc''-b''c) \\
&\quad + A_6E_4(ca''-c''a) - A_3E_3(ab''-a''b) + E_4E_7(bc''-cb'')p]D_p\Omega \\
&\quad = [E_4E_7(ca''-ac'') + E_4E_7(ab''-a''b)p]\omega \\
&[-4E_4E_7(b'c''-b''c') + A_3E_7(a'b''-a''b')]\Omega + [4E_4E_3(b'c''-b''c') \\
&\quad + A_6E_4(c'a''-c''a') - A_3E_3(a'b''-a'b') + E_4E_7(b'c''-b''c')p]D_p\omega \\
&\quad = [E_4E_7(c'a''-a'c'') + E_4E_7(a'b''-a''b']\omega,
\end{aligned}$$

die vermöge der Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{ca'-c'a}{bc'-cb'} = \frac{ca''-c''a}{bc''-cb''} = \frac{c'a''-c''a'}{b'c''-c'b''}$$

$$\frac{ab'-a'b}{bc'-b'c} = \frac{ab''-a''b}{bc''-b''c} = \frac{a'b''-a''b'}{b'c''-c'b''}$$

ein und dieselbe Gleichung sind, könnten auch noch zu einer von dem frühern verschiedenen Folgerung führen. Es könnte nämlich für $\Omega = 0$ und $\omega = 0$

$$p = -\left[\frac{4E_4E_3(bc''-b''c) + A_6E_4(ca''-c''a) - A_3E_3(ab''-a''b)}{E_4E_7(bc''-b''c)}\right]$$

seyn, wodurch die frühern Folgerungen $D_p\Omega = 0$, $\Psi = 0$, $D_p\Psi = 0$ ihre Giltigkeit verlören, und die Verbindung dieses Werthes von p mit $-\frac{A_4}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$ zu einer Bedingung zwischen den Coefficienten führen würde. Allein dass diess letztere nicht stattfinde, überzeugt man sich durch die Ungiltigkeit dieses Werthes von p für den speciellen Fall, dass $B_3 = 0$, $B_4 = 0$ ist; für welchen Fall $y = 0$ eine repetirte Wurzel von Π ist und ω in $(B_1^2 - 4B_0B_2)[B_1p + B_2] = 0$ oder p in $-\frac{B_2}{B_1}$ übergeht.

Es ist dann

$$\begin{aligned}
a'' &= (8E_6E_3 - 3E_7^2)E_4 \\
b'' &= 0 \\
c'' &= (E_7^2 - 2E_6E_3)A_3
\end{aligned}$$

also $p = -\frac{4E_3}{E_7}\left[1 + \frac{A_3}{4E_4}\frac{a''}{c''}\right]$ und da $\frac{4E_3}{E_7}$ für diesen Fall in $-\frac{B_2}{B_1}$ übergeht; so müsste

$$\frac{A_3}{4E_4}\frac{a''}{c''} = -2 \text{ seyn, d. i. } \frac{8E_6E_3 - 3E_7^2}{4(2E_6E_3 - E_7^2)} = 2$$

oder $8E_6E_3 = 5E_7^2$, d. i. nach den Werthen von E_6, E_7, E_3: $B_1^2 = -4B_0B_2$ eine Bedingung zwischen den Coefficienten, die für diesen Fall nicht nothwendig erfüllt seyn muss.

13. Aus der Bedingung $D_p\Pi = 0$ für $y = \frac{-F_7}{F_6}$, so wie aus $\omega = 0$ und $D_p\omega = 0$ für denselben Werth, folgt: dass es noch eine zweite Weise gebe, für welche die Werthe zweier Wurzeln gleich werden; nämlich für $y = p = \frac{-F_7}{F_6}$. Für diesen Fall ist

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\Big[-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}$$

$$\pm\sqrt{1 - \tfrac{1}{16}\Big[-\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} \pm \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}\Big]^2}\ \Big]$$

für eine bestimmte Wahl der Zeichen der Nulle gleich, oder es ist, weil dieser Werth wegen $D_3 = 0$, $D_4 = 0$ unbestimmt ist, nach der zweiten Ausdrucksweise:

$$\pm\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1 \pm \sqrt{\frac{D_1^2 - 16D_0^2D_3 \mp 2\sqrt{A_3}D_1 \,.\, D_1 + A_3}{D_1}} = 0,$$

mithin
$$\frac{A_3}{D_1} \mp 2\sqrt{A_3}D_1 + D_1^2 = D_1^2 - \frac{16D_0^2D_3}{D_1} \mp 2\sqrt{A_3}D_1 + \frac{A_3}{D_1},$$

d. i. $D_3 = 0$, welches sonach zu keiner neuen Bedingungsgleichung führt.

Der zweite Werth von p, der der Gleichung $\omega = 0$ genügt, ist nothwendig

$$p = -\frac{A_4}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6},$$

und ist derjenige Werth, den jene Gleichung mit den Gleichungen

$$G_3p^3 + G_4p^2 + G_5p + G_6 = 0 \quad \text{und}$$
$$E_4p^4 + E_5p^3 + E_6p^2 + E_7p + E_8 = 0$$

gemein hat. Im Ganzen können bezüglich der gleichen Wurzeln 6 Fälle vorkommen:

1. $y_1 = y_2$, die dem entsprechende Bedingung ist:

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}} = \pm 1$$

und p hat den Werth $p = -\frac{A_4}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$. Die Wurzeln sind sodann:

$$y_1 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_2 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i\arccos}\Big[-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} - 1\Big]$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i\arccos}\Big[-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} - 1\Big]$$

für $D_2 < 2\sqrt{D_0D_4}$, in welchem Fall die Bedingung

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

besteht, oder

$$y_1 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_2 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right)}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right)}.$$

Für den Fall $D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$, wofür

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = -1$$

die entsprechende Bedingung ist.

Man kann überdiess die Wurzeln auch noch unter folgender Form schreiben:

$$y_1 = -\frac{B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$$

$$y_2 = -\frac{B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$$

$$y_3 = -\frac{B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)p + 2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) + D_1\sqrt{A_3 D_1}}{D_1}}$$

$$y_4 = -\frac{B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{4(3B_0B_1^2 - 8B_0^2B_2)p + 2(B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2) + D_1\sqrt{A_3 D_1}}{D_1}}$$

2. $y_1 = y_3$. Die dem entsprechende Bedingung ist $D_3 = 0$, $D_4 = 0$ und $p = -\frac{F_7}{F_6}$. Das Radical in

$$y = p + \frac{1}{4B_0}\left[\pm\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1\right] \pm \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{D_1^2 \mp 2\sqrt{A_3 D_1}\,.\,D_1 + A_3}{D_1}}$$

muss mit bestimmten Zeichen und zwar für y_1, y_2 als $+D_1 - \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ und für y_3, y_4 als $+D_1 + \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ genommen werden. Die Wurzeln sind alsdann:

$$y_1 = p$$

$$y_2 = p + \frac{1}{2B_0}\left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1\right]$$

$$y_3 = p$$
$$y_4 = p - \frac{1}{2B_0}\left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + D_1\right].$$

3. $y_1 = y_4$. Die Bedingungen und der Werth von p sind wie im zweiten Fall; das Radical ist sodann für y_1 und y_2, $+D_1 - \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ und für y_3, y_4, $-D_1 - \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$. Die Wurzeln sind:

$$y_1 = p$$
$$y_2 = p + \frac{1}{2B_0}\left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1\right]$$
$$y_3 = p - \frac{1}{2B_0}\left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + D_1\right]$$
$$y_4 = p.$$

4. $y_2 = y_3$. Die Bedingungen so wie p sind dieselben wie im zweiten Fall, und das Radical $-D_1 + \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ für y_1 und y_2, und $D_1 + \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$ für y_3, y_4. Die Wurzeln sind:

$$y_1 = p + \frac{1}{2B_0}\left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1\right]$$
$$y_2 = p$$
$$y_3 = p$$
$$y_4 = p - \frac{1}{2B_0}\left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + D_1\right].$$

5. $y_2 = y_4$. Die Bedingungen und p wie im zweiten Fall, das Radical für y_1, y_2, $-D_1 + \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$; für y_3, y_4, $-D_1 - \sqrt{\frac{A_3}{D_1}}$; die Wurzeln sind:

$$y_1 = p + \frac{1}{2B_0}\left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} - D_1\right]$$
$$y_2 = p$$
$$y_3 = p - \frac{1}{2B_0}\left[\sqrt{\frac{A_3}{D_1}} + D_1\right]$$
$$y_4 = p.$$

6. $y_3 = y_4$. Die Bedingungsgleichung ist für den Fall

$$D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$$
$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = +1$$

$p = -\frac{A_4}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$ und das Radical $\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$ ist mit dem Zeichen — zu nehmen. Die Wurzeln sind dann:

$$y_1 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right]}$$
$$y_2 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos\left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - 1\right]}$$

$$y_3 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_4 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}.$$

Im Fall, dass $D_2 < 2\sqrt{D_0 D_4}$ für denselben Werth von p und die Bedingungsgleichung

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - 4\,\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} = -1$$

$$y_1 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right]}$$

$$y_2 = p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} + 1\right]}$$

$$y_3 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$$

$$y_4 = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}.$$

Der Fall 6 fällt mit dem 1 zusammen, ebenso sind die Fälle 2, 3, 4, 5 dieselben.

14. Nachdem im frühern die Identität der Gleichungen

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0 \quad \text{und}$$

$$16 A_3 B_0 p^3 + \left(192 A_3 B_0^2 B_1 - \frac{128 A_3 B_0 \mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 \mathfrak{p} + B_1}} - \left(\alpha - \frac{4 B_0 \mathfrak{P}^2}{4B_0 \mathfrak{p} + B_1}\right)^2\right) p^2$$
$$+ \left[32 A_3 B_0 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 \mathfrak{p} + B_1}}\right) + 16 A_3 B_0 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 \mathfrak{p} + B_1}}\right)^2\right.$$
$$\left. - 2\left(\alpha - \frac{4B_0 \mathfrak{P}^2}{4B_0 \mathfrak{p} + B_1}\right)\left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4B_0 \mathfrak{p} + B_1}\right)\right] p + 4 A_3 B_1 \left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0 \mathfrak{p} + B_1}}\right)^2$$
$$- \left(\beta - A_3 - \frac{B_1 \mathfrak{P}^2}{4B_0 \mathfrak{p} + B_1}\right)^2 = 0$$

bewiesen wurde, insofern beide gleiche Werthe von p liefern, erübrigt noch die letzte Gleichung

$$(B_1 F_6^4 - 4B_0 F_6^3 F_7) p^3 + (B_2 F_6^4 - 6 B_0 F_6^2 F_7^2) p^2 + (B_3 F_6^4 - 4 B_0 F_6 F_7^3) p$$
$$+ B_4 F_6^4 - B_0 F_7^4 = 0$$

zu besprechen. Auch von dieser Gleichung lässt sich mit Zuhilfenahme der zwischen den Coefficienten A_3, A_4, A_5, A_0 stattfindenden Bedingungen

$$A_4 B_1 - A_3 B_2 = 2 B_0 A_5 \quad \text{und}$$
$$A_5 B_1 - A_3 B_3 = 8 B_0 A_6$$

diese Identität nachweisen. Aus $D_p\omega$ für $p = -\frac{F_7}{F_6}$, welcher letztere Werth Kürze halber durch α bezeichnet sey, folgt:

$$3 A_3 \alpha^2 + 2 A_4 \alpha + A_5 = 0, \text{ d. i. mit Rücksicht auf}$$
$$2 B_0 A_5 = A_4 B_1 - B_2 A_3$$

$$6B_0A_3\alpha^2 + 4B_0A_4\alpha + A_4B_1 - B_2A_3 = 0 \text{ und}$$

$$\frac{B_2 - 6B_0\alpha^2}{B_1 + 4B_0\alpha} = \frac{A_4}{A_3},$$

d. i. nach Herstellung des Werthes von α,

$$\frac{B_2F_6^4 - 6B_0F_7^2F_6^2}{B_1F_6^4 - 4B_0F_6^3F_7} = \frac{A_4}{A_3}.$$

Es ist ferner $\quad 4B_0\alpha^3 + 3B_1\alpha^2 + 2B_2\alpha + B_3 = 0,$

und wie eben entwickelt wurde,

$$-6B_0A_3\alpha^2 - 4B_0A_4\alpha + B_2A_3 - B_1A_4 = 0, \quad \text{somit}$$

$$24B_0^2A_3\alpha^3 + 12B_0(B_2A_3 - B_1A_4)\alpha + 6B_0B_3A_3 + 3B_1(B_2A_3 - A_4B_1) = 0.$$

Vermöge der Gleichung $2B_0A_5 = A_4B_1 - B_2A_3$ ist dieser Ausdruck

$$24B_0^2A_3\alpha^3 - 24B_0^2A_5\alpha + 6B_0B_3A_3 - 6B_0B_1A_5 = 0, \text{ d. i.}$$

$$4B_0A_3\alpha^3 - 4B_0A_5\alpha + A_3B_3 - B_1A_5 = 0, \text{ mithin}$$

$$\frac{4B_0\alpha^3 + B_3}{4B_0\alpha + B_1} = \frac{A_5}{A_3},$$

und nach Herstellung des Werthes von α

$$\frac{B_3F_6^4 - 4B_0F_6F_7^3}{B_1F_6^4 - 4B_0F_7F_6^3} = \frac{A_5}{A_3}.$$

Ferner ist $\quad B_0A_3\alpha^4 + B_1A_3\alpha^3 + B_2A_3\alpha^2 + B_3A_3\alpha + B_4A_3 = 0$

und $\quad B_1A_3\alpha^3 + B_1A_4\alpha^2 + B_1A_5\alpha + B_1A_6 = 0$

daher $\quad B_0A_3\alpha^4 + (A_3B_2 - A_4B_1)\alpha^2 + (A_3B_3 - A_5B_1)\alpha + A_3B_4 - A_6B_1 = 0.$

Nach den zwischen den Coefficienten erwähnten Bedingungen ist dieser Ausdruck

$$B_0A_3\alpha^4 - 2B_0A_5\alpha^2 - 8B_0A_6\alpha + A_3B_4 - A_6B_1 = 0,$$

zugleich ist nach dem eben Bewiesenen

$$4B_0A_3\alpha^4 - 4B_0A_5\alpha^2 - 8B_0A_6\alpha = 0, \quad \text{mithin}$$

$$B_0A_3\alpha^4 - A_3B_4 + 4B_0A_6\alpha + B_1A_6 = 0,$$

wenn die erste Gleichung mit 2 multiplicirt von der letztern subtrahirt wird; oder

$$\frac{B_0\alpha^4 - B_4}{4B_0\alpha - B_1} = \frac{A_6}{A_3} \text{ d. i. } \frac{B_4F_6^4 - B_0F_7^4}{B_1F_6^4 - 4B_0F_6^3F_7} = \frac{A_6}{A_3}.$$

Durch diese Relationen ist somit die erwähnte Identität erwiesen.

IV.

Betrachtung mehrfach oder paarweise gleicher Wurzelfactoren.

1. Die Bedingung dreier gleicher Wurzeln ist $D_y\Pi = 0$, $D_y^2\Pi = 0$ für den Werth der dreifachen Wurzel. Daraus folgt sodann die Bedingung zwischen den Coefficienten. Es ist nämlich für den dreifachen Werth

$$B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0 \quad \text{und}$$

$$4B_0y^3 + 3B_1y^2 + 2B_2y + B_3 = 0$$

folglich hieraus

$$B_1 y^3 + 2B_2 y^2 + 3B_3 y + 4B_4 = 0.$$

Ferner folgt aus diesen letzten Gleichungen

$$(3B_1^2 - 8B_0B_2)y^2 + (2B_1B_2 - 12B_0B_3)y + B_1B_3 - 16B_0B_4 = 0,$$

und da überdiess $6B_0y^2 + 3B_1y + B_2 = 0$ ist;

$$[3B_1(3B_1^2-8B_0B_2) - 12B_0(B_1B_2-6B_0B_3)]y + (3B_1^2-8B_0B_2)B_2 - 6B_0(B_1B_3 - 16B_0B_4) = 0,$$

oder wenn Kürze halber

$$3B_1(3B_1^2 - 8B_0B_2) - 12B_0(B_1B_2 - 6B_0B_3) = \mathfrak{B}$$
$$(3B_1^2 - 8B_0B_2)B_2 - 6B_0(B_1B_3 - 16B_0B_4) = \mathfrak{C}$$

gesetzt wird $\mathfrak{B}y + \mathfrak{C} = 0.$

Die Verbindung dieser Gleichung $\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}y = 0$ mit der quadratischen

$$6B_0y^2 + 3B_1y + B_2 = 0$$

ergibt $(3B_1\mathfrak{B} - 6B_0\mathfrak{C})y + B_2\mathfrak{B} = 0,$

und für y seinen Werth gesetzt

$$B_2\mathfrak{B}^2 - 3B_1\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 6B_0\mathfrak{C}^2 = 0,$$

wofür nach Substitution von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ folgende Glieder resultiren:

$B_1^6 B_2$	9 -9^2
$B_0 B_1^4 B_2^2$	-8.9^2 4.9^2 $3.8.9$ 6.9
$B_0 B_1^5 B_3$	2.9^2
$B_0^2 B_1^2 B_2^3$	$9^2.16$ $-6.9.16$ $-2.9.16$
$B_0^2 B_1^3 B_2 B_3$	$9^2.16$ $-9^2.8$ $-9^2.8$ $-3.9.8$
$B_0^3 B_1 B_2^2 B_3$	$-9^2.4.16$ $3.4.9.16$ $4.9.16$
$B_0^3 B_1^2 B_3^2$	$9^2.16$ $3.9.8$
$B_0^3 B_1^4 B_4$	$-2.9^2.16$

$B_0^3 B_1^2 B_2 B_4$	$9^2.8.16$ $3.9.8.16$
$B_0^3 B_2^4$	$3.8.16$
$B_0^4 B_2 B_3^2$	$9^2.4.16$
$B_0^4 B_1 B_3 B_4$	$-9^2.16$ $-3.9.16$
$B_0^4 B_2^2 B_4$	$-4.9.16^2$
$B_0^5 B_4^2$	$3.8.9.16^2$

und somit die Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned}
&-6.9\,B_0 B_1^4 B_2^2 + 2.81\,B_0 B_1^5 B_3 + 9.16\,B_0^2 B_1^2 B_2^3 - 9.24\,B_0^2 B_1^3 B_2 B_3 \\
&-20.9.16\,B_0^3 B_1 B_2^2 B_3 + 8.21.9\,B_0^3 B_1^2 B_3^2 - 2.81.16\,B_0^3 B_1^4 B_4 \\
&+6.9.16^2\,B_0^3 B_1^2 B_2 B_4 + 3.8.16\,B_0^3 B_2^4 + 4.81.16\,B_0^4 B_2 B_3^2 \\
&-3.4.9.16^2\,B_0^4 B_1 B_3 B_4 - 4.9.16^2\,B_0^4 B_2^2 B_4 + 3.8.9.16^2\,B_0^5 B_4^2 = 0.
\end{aligned}$$

2. Um jedoch die einfachsten Bedingungen zu erhalten, sey die dreifache Wurzel durch α und die vierte durch β vorgestellt; die Bedingungen zwischen den Coefficienten sind alsdann:

$$-\frac{B_1}{B_0} = 3\alpha + \beta, \quad \beta = -\frac{B_1}{B_0} - 3\alpha$$

$$\frac{B_2}{B_0} = 3\alpha(\alpha+\beta) = -3\alpha\left(\frac{B_1}{B_0} + 2\alpha\right)$$

$$-\frac{B_3}{B_0} = \alpha^2(\alpha+3\beta) = -\alpha^2\left(\frac{3B_1}{B_0} + 8\alpha\right)$$

$$\frac{B_4}{B_0} = \alpha^3\beta = -\frac{B_1}{B_0}\alpha^3 - 3\alpha^4.$$ Hieraus folgt

$B_3 = 3B_1\alpha^2 + 8B_0\alpha^3$

$B_2\alpha = -3B_1\alpha^2 - 6B_0\alpha^3$ und daraus

$3B_3 + 4B_2\alpha = -3B_1\alpha^2$, welches mit

$B_2 + 3B_1\alpha = -6B_0\alpha^2$, die Gleichung:

$6B_0B_3 - B_1B_2 = (3B_1^2 - 8B_0B_2)\alpha$ ergibt.

Mithin ist $$\alpha = \frac{6B_0B_3 - B_1B_2}{3B_1^2 - 8B_0B_2} = -\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$$

$$= \frac{-3B_1^2B_2 + 8B_0B_2^2 + 6B_0B_1B_3 - 6.16\,B_0^2B_4}{9B_1^3 - 36B_0B_1B_2 + 72B_0^2B_3}$$

Somit wäre die Bedingung:

$$\begin{aligned}
&12\,B_0 B_1^2 B_2^2 - 4.9\,B_0 B_1^3 B_3 + 3.16^2\,B_0^3 B_2 B_4 - 18.16\,B_0^2 B_1^2 B_4 \\
&-6.72\,B_0^3 B_3^2 - 64\,B_0^2 B_2^3 + 15.16\,B_0^2 B_1 B_2 B_3 = 0,
\end{aligned}$$

die sich durch folgende Betrachtung noch vereinfachen lässt. Es lässt sich nämlich erweisen, dass folgende Gleichung

$$B_0 B_2^2 - 3 B_0 B_1 B_3 + 12 B_0^2 B_4 = 0$$

als erste Bedingung bestehe; denn setzt man statt B_1, B_2, B_3 ihre vorigen Werthe; so erfolgt der Ausdruck

$$9 B_0^3 \alpha^2 (\alpha+\beta)^2 - 3 B_0^3 (3\alpha+\beta) \alpha^2 (\alpha+3\beta) + 3.4.B_0^3 \alpha^3 \beta,$$

der sich auf Null reducirt. Wird dann die erste Bedingung in die obige substituirt; so enthält diese um zwei Glieder weniger und ist als zweite Bedingung:

$$9 B_1^2 B_2^2 - 27 B_1^3 B_3 - 32 B_0 B_2^3 + 4.27 B_0 B_1 B_2 B_3 - 6.18 B_0^2 B_3^2 = 0.$$

3. Diese Bedingungen zwischen den Coefficienten lassen eine Aenderung des Werthes α zu; denn wird die erste Gleichung zum Zähler von $\alpha = -\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$ addirt; so übergeht es in

$$\alpha = \frac{-3 B_1^2 B_2 + 12 B_0 B_2^2 - 6 B_0 B_1 B_3 - 3.16 B_0^2 B_4}{9 B_1^3 - 36 B_0 B_1 B_2 + 72 B_0^2 B_3},$$

und nach der Bedeutung von A_3, A_4 in

$$\alpha = -\frac{A_4}{3 A_3}.$$

Dadurch lässt sich erweisen, dass die Gleichung ω sämmtlich gleiche Wurzeln enthält. Denn da die Gleichung $\Pi = 0$ eine repetirte Wurzel besitzt, nämlich $-\frac{F_7}{F_6}$, so gilt nach frühern dasselbe von der Gleichung $\omega = 0$, deren dritte Wurzel $-\frac{A_4}{A_3} + \frac{2 F_7}{F_6}$ ist. Vermöge der Bedingung $\frac{A_4}{3 A_3} = \frac{F_7}{F_6}$ wird aber dieser dritte Werth zu $-\frac{F_7}{F_6}$.

4. Die erwähnte Eigenschaft der Gleichung $\omega = 0$ führt auf folgende Bedingungen

$$3\alpha = -\frac{A_4}{A_3}$$

$$3\alpha^2 = \frac{A_5}{A_3}$$

$$\alpha^3 = -\frac{A_6}{A_3} \quad \text{d. i.} \quad \frac{A_4^2}{3 A_3^2} = \frac{A_5}{A_3}, \quad \frac{A_4^3}{27 A_3^3} = \frac{A_6}{A_3},$$

welche in $D_1^3 = 4^3 B_0^3 p^3 + 3.4^2 B_0^2 B_1 p^2 + 3.4 B_0 B_1^2 p + B_1^3$

$$= -\frac{4^3}{27} \frac{B_0^3 A_4^3}{A_3^3} + \frac{3.4^2 B_0^2 B_1 A_4^2}{9 A_3^2} - \frac{4 B_0 B_1^2 A_4}{A_3} + B_1^3$$

substituirt, auf den Werth

$$D_1^3 = \frac{-4^3 B_0^3 A_6 + 4^2 B_0^2 B_1 A_5 - 4 B_0 B_1^2 A_4 + B_1^3 A_3}{A_3}$$

führen. Aus dem Zähler erhält man, wenn die Werthe für A_3, A_4, A_5, A_6 substituirt werden:

$$
\begin{aligned}
&- 4^3 B_0^3 B_1^2 B_4 + 4^3 B_0^4 B_3^2 + 4^2 B_0^2 B_1^3 B_3 + 8 . 4^2 B_0^3 B_1^2 B_4 \\
&- 4^3 B_0^3 B_1 B_2 B_3 - 4 B_0 B_1^4 B_2 - 8 B_0^2 B_1^3 B_3 - 4 . 16 B_0^3 B_1^2 B_4 \\
&+ 4^2 B_0^2 B_1^2 B_2^2 + B_1^6 - 4 B_0 B_1^4 B_2 + 8 B_0^2 B_1^3 B_3 = B_1^6 \\
&+ 16 B_0^2 B_1^2 B_2^2 + 8^2 B_0^4 B_3^2 - 8 B_0 B_1^4 B_2 + 16 B_0^2 B_0^3 B_3 - 64 B_0^3 B_1 B_2 B_3 \\
&= A_3^2 \quad \text{somit ist}
\end{aligned}
$$

$$D_1^3 = A_3 .$$

Diese Bedingung mit $D_2 = 0$, $D_3 = 0$, $D_4 = 0$ sind die Gleichungen, die mit der Bedingung der dreifachen Wurzel verknüpft sind. Die Wurzeln selbst sind:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= p \\
y_2 &= p \\
y_3 &= p \\
y_4 &= p - \frac{\sqrt[3]{A_3}}{B_0} .
\end{aligned}
$$

5. Sollten die Wurzeln paarweise gleich seyn, wobei der Ausdruck der Wurzeln im zweiten Theil des Binoms sein Zeichen wechselt; so ist die entsprechende aus

$$y = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}} e^{\pm i \arccos \left[-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4} - \frac{4 (D_2 - 2 \sqrt{D_0 D_4})}{\sqrt{D_0 D_4}}} \right]}$$

entlehnte Bedingung:

$$D_1 D_3 - 4 \sqrt{D_0 D_4} (D_2 - 2 \sqrt{D_0 D_4}) = 0$$

$$\text{d. i.} \quad D_1 D_3 + 8 D_0 D_4 = 4 D_2 \sqrt{D_0 D_4} \quad \text{oder}$$

$$D_1^2 D_3^2 + 16 D_0 D_1 D_3 D_4 + 64 D_0^2 D_4^2 = 16 D_0 D_2^2 D_4$$

$$D_1 D_3 [D_1 D_3 + 16 D_0 D_4] = 16 D_0 D_4 [D_2^2 - 4 D_0 D_4].$$

Bei der Entwicklung dieser Theile erhält man:

$$
\begin{aligned}
D_2^2 - 4 D_0 D_4 = {} & 32 B_0^2 p^4 + 32 B_0 B_1 p^3 + (8 B_0 B_2 + 9 B_1^2) p^2 \\
& + (6 B_1 B_2 - 4 B_0 B_3) p + B_2^2 - 4 B_0 B_4
\end{aligned}
$$

diess in $16 D_0 D_4$ multiplicirt, ergibt:

$$
\begin{aligned}
& (D_2^2 - 4 D_0 D_4) 16 D_0 D_4 = \\
& 2.16^2 B_0^4 p^8 + \left.\begin{array}{r} 2.16^2 B_0^3 B_1 \\ 2.16^2 B_0^3 B_1 \end{array}\right] p^7 + \left.\begin{array}{r} 8.16 B_0^3 B_2 \\ 9.16 B_0^2 B_1^2 \\ 32.16 B_0^3 B_2 \\ 32.16 B_0^2 B_1^2 \end{array}\right] p^6 + \left.\begin{array}{r} 6.16 B_0^2 B_1 B_2 \\ -4.16 B_0^3 B_3 \\ 8.16 B_0^2 B_1 B_2 \\ 9.16 B_0 B_1^3 \\ 32.16 B_0^2 B_1 B_2 \\ 32.16 B_0^3 B_3 \end{array}\right] p^5 \\
& + \left.\begin{array}{r} 16 B_0^2 B_2^2 \\ -4.16 B_0^3 B_4 \\ 6.16 B_0 B_1^2 B_1 \\ -4.16 B_0^2 B_1 B_3 \\ 8.16 B_0^2 B_2^2 \\ 9.16 B_0 B_1^2 B_2 \\ 32.16 B_0^2 B_1 B_3 \\ 32.16 B_0^3 B_4 \end{array}\right] p^4 + \left.\begin{array}{r} 16 B_0 B_1 B_2^2 \\ -4.16 B_0^2 B_1 B_4 \\ 6.16 B_0 B_1 B_2^2 \\ -4.16 B_0^2 B_2 B_3 \\ 8.16 B_0^2 B_2 B_3 \\ 9.16 B_0 B_1^2 B_3 \\ 32.16 B_0^2 B_1 B_4 \end{array}\right] p^3 + \left.\begin{array}{r} 16 B_0 B_2^3 \\ -4.16 B_0^2 B_2 B_4 \\ 6.16 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ -4.16 B_0^2 B_3^2 \\ 8.16 B_0^2 B_2 B_4 \\ 9.16 B_0 B_1^2 B_4 \end{array}\right] p^2
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{array}{r} + 16 B_0 B_2^2 B_3 \\ - 4.16 B_0^2 B_3 B_4 \\ 6.16 B_0 B_1 B_2 B_4 \\ - 4.16 B_0^2 B_3 B_4 \end{array}\right] p + \begin{array}{l} 16 B_0 B_2^2 B^4. \\ - 4.16 B_0^2 B_4^2 \end{array}$$

Eben so ist:

$$\begin{aligned} D_1 D_3 &= 16 B_0^2 p^4 + 16 B_0 B_1 p^3 + (3 B_1^2 + 8 B_0 B_2) p^2 \\ &\quad + (4 B_0 B_3 + 2 B_1 B_2) p + B_1 B_3 \\ D_1 D_3 + 16 D_0 D_4 &= 32 B_0^2 p^4 + 32 B_0 B_1 p^3 + (24 B_0 B_2 + 3 B_1^2) p_2 \\ &\quad + (20 B_0 B_3 + 2 B_1 B_2) p + 16 B_0 B_4 + B_1 B_3 \end{aligned}$$

und das Product dieser Grössen:

$$D_1 D_3 (D_1 D_3 + 16 D_0 D_4) =$$

$$2.16^2 B_0^4 p^8 + \left.\begin{array}{r} 2.16^2 B_0^3 B_1 \\ 2.16^2 B_0^3 B_1 \end{array}\right] p^7 + \left.\begin{array}{r} 3.32 B_0^2 B_1^2 \\ 8.32 B_0^3 B_2 \\ 2.16^2 B_0^2 B_1^2 \\ 24.16 B_0^3 B_2 \\ 3.16 B_0^2 B_1^2 \end{array}\right] p^6$$

$$+ \left.\begin{array}{r} 2.32 B_0^2 B_1 B_2 \\ 4.32 B_0^3 B_3 \\ 3.32 B_0 B_1^3 \\ 8.32 B_0^2 B_1 B_2 \\ 24.16 B_0^2 B_1 B_2 \\ 3.16 B_0 B_1^3 \\ 20.16 B_0^3 B_3 \\ 2.16 B_0^2 B_1 B_2 \end{array}\right] p^5 + \left.\begin{array}{r} 32 B_0^2 B_1 B_3 \\ 2.32 B_0 B_1^2 B_2 \\ 4.32 B_0^2 B_1 B_3 \\ 3.24 B_0 B_1^2 B_2 \\ 9 B_1^4 \\ 8.24 B_0^2 B_2^2 \\ 3.8 B_0 B_1^2 B_2 \\ 20.16 B_0^2 B_1 B_3 \\ 2.16 B_0 B_1^2 B_2 \\ 16^2 B_0^3 B_4 \\ 16 B_0^2 B_1 B_3 \end{array}\right] p^4 + \left.\begin{array}{r} 32 B_0 B_1^2 B_3 \\ 2.24 B_0 B_1 B_2^2 \\ 6 B_1^3 B_2 \\ 4.24 B_0^2 B_2 B_3 \\ 12 B_0 B_1^2 B_3 \\ 3.20 B^0 B_1^2 B_3 \\ 6 B_1^3 B_2 \\ 8.20 B_0^2 B_2 B_3 \\ 16 B_0 B_1 B_2^2 \\ 16^2 B_0^2 B_1 B_4 \\ 16 B_0 B_1^2 B_3 \end{array}\right] p^3$$

$$+ \left.\begin{array}{r} 24 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 3 B_1^3 B_3 \\ 2.20 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 4 B_1^2 B_2^2 \\ 4.20 B_0^2 B_3^2 \\ 8 B_0 B_1 B_2 B_3 \\ 3.16 B_0 B_1^2 B_4 \\ 3 B_1^3 B_3 \\ 8.16 B_0^2 B_2 B_4 \\ 8 B_0 B_1 B_2 B_3 \end{array}\right] p^2 + \left.\begin{array}{r} 20 B_0 B_1 B_3^2 \\ 2 B_1^2 B_2 B_3 \\ 2.16 B_0 B_1 B_2 B_4 \\ 2 B_1^2 B_2 B_3 \\ 4.16 B_0^2 B_3 B_4 \\ 4 B_0 B_1 B_3^2 \end{array}\right] p + \begin{array}{l} 16 B_0 B_1 B_3 B_4 \\ + B_1^2 B_3^2 \end{array}$$

Man erhält nach gehöriger Reduction dieser Theile die Gleichung:

$$\begin{aligned} &[12.16 B_0^3 B_4 - 3.16 B_0^2 B_2^2 + 3.16 B_0 B_1^2 B_2 - 3.16 B_0^2 B_1 B_3 - 9 B_1^4] p^4 \\ &+ [3.16 B_0 B_1 B_2^2 + 12.16 B_0^2 B_1 B_4 - 12.16 B_0^2 B_2 B_3 + 2.12 B_0 B_1^2 B_3 - 12 B_1^3 B_2] p^3 \\ &+ [16 B_0 B_2^3 - 4.16 B_0^2 B_2 B_4 + 16 B_0 B_1 B_2 B_3 - 9.16 B_0^2 B_3^2 + 6.16 B_0 B_1^2 B_4 \\ &\quad - 6 B_1^3 B_3 - 4 B_1^2 B_2^2] p^2 + [16 B_0 B_2^2 B_3 - 12.16 B_0^2 B_3 B_4 \\ &\quad + 4.16 B_0 B_1 B_2 B_4 - 24 B_0 B_1 B_3^2 - 4 B_1^2 B_2 B_3] p + 16 B_0 B_2^2 B_4 \\ &\quad - 4.16 B_0^2 B_4^2 - 16 B_0 B_1 B_3 B_4 - B_1^2 B_3^2 = 0. \end{aligned}$$

6. Diese Gleichung in Verbindung mit

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

dient zur Bestimmung von p. Allein folgende Betrachtung zeigt, dass beide Gleichungen unbestimmt sind; indem sämmtliche Coefficienten derselben, vermöge den zwischen den Coefficienten B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 stattfindenden Bedingungen zu Null werden.

Da die Form der Wurzeln durch $\alpha+\beta$, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ repräsentirt wird, bestehen folgende Gleichungen:

$$\frac{-B_1}{B_0} = 4\alpha$$

$$\frac{B_2}{B_0} = (\alpha+\beta)^2 + 4(\alpha^2-\beta^2) + (\alpha-\beta)^2 = 2(3\alpha^2-\beta^2)$$

somit $\alpha = \dfrac{-B_1}{4B_0}$, $\beta^2 = \dfrac{3B_1^2}{16B_0^2} - \dfrac{B_2}{2B_0}$. Ferner ist

$$\frac{-B_3}{B_0} = 2[(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta) + (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2] = 4\alpha(\alpha^2-\beta^2)$$

$$\frac{-B_3}{B_0} = \frac{B_1}{8B_0^3}(B_1^2-4B_0B_2) \quad \text{mithin}$$

$$B_1^3 - 4B_0B_1B_2 + 8B_0^2B_3 = 0$$

als erste Bedingungsgleichung. Weiter ist

$$\frac{B_4}{B_0} = (\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2 = \left(\frac{-2B_1}{16B_0^2} + 8\frac{B_0B_2}{16B_0^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64B_0^4}(4B_0B_2 - B_1^2)^2 \quad \text{somit die zweite Bedingung}$$

$$B_1^2B_4 = B_0B_3^2.$$

Die erste Bedingung ist nach früherer Bezeichnung $A_3 = 0$, die letztere $A_6 = 0$. Aus den Gleichungen $8B_0A_6 = A_5B_1 - A_3B_3$ und

$$2B_0A_5 = A_4B_1 - A_3B_2,$$

denen die Werthe A_3, A_4, A_5, A_6 genügen, folgt dann weiter

$$A_5 = 0, \quad A_4 = 0.$$

7. Da die Bedingung $\sqrt[4]{\dfrac{D_4}{D_0}} = \sqrt{\dfrac{D_3}{D_1}}$ vermöge der zweiten Bedingungsgleichung erfüllt ist; so ist zugleich ein Werth von p nämlich $p = 0$ gegeben, und da derselbe der einzige Werth ist, indem die Gleichung $A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6 = 0$ keinen andern ergibt; so muss derselbe auch der in N5 gefundenen Gleichung entsprechen. Daraus folgt, dass der letzte Coefficient der Nulle gleich sey.

$$16B_0B_2^2B_4 - 4.16B_0^2B_4^2 - 16B_0B_1B_3B_4 - B_1^2B_3^2 = 0.$$

Man ersieht es übrigens auch aus folgenden Transformationen. Es ist dieser Coefficient nach Substitution von $B_3^2 = \dfrac{B_1^2B_4}{B_0}$,

$$\frac{B_4}{B_0}(16B_0^2B_2^2-4.16B_0^3B_4-16B_0^2B_1B_3-B_1^4)$$

$$=\frac{B_4}{B_0}[-4B_0(-4B_0B_2^2+16B_0^2B_4+2B_0B_1B_3+B_1^2B_2)$$

$$-B_1(B_1^3-4B_0B_1B_2+8B_0^2B_3)]$$

$$=\frac{-B_4}{B_0}[4B_0A_4+B_1A_3]$$ somit weil A_3 und A_4 Null sind, der Nulle

gleich. Ferner ist der Coefficient von p

$$16B_0B_2^2B_3-12.16B_0^2B_3B_4+4.16B_0B_1B_2B_4-24B_0B_1B_3^2-4B_1^2B_2B_3$$

wenn statt B_4 sein Werth aus A_6 gesetzt wird:

$$=16B_0B_2^2B_3-12.16\frac{B_0^3B_3^3}{B_1^2}+4.16\frac{B_0^2B_1B_2B_3^2}{B_1^2}-24B_0B_1B_3^2-4B_1^2B_2B_3$$

$$=\frac{4B_3}{B_1^2}[4B_0B_1^2B_2^2-3.16B_0^3B_3^2+16B_0^2B_1B_2B_3-6B_0B_1^3B_3-B_1^4B_2]$$

$$=\frac{4B_3}{B_1^2}[(4B_0B_1B_2-B_1^3-8B_0^2B_3)B_1B_2-6B_0B_3(8B_0^2B_3-4B_0B_1B_2+B_1^3)]$$

$$=\frac{4B_3}{B_1^2}[-B_1^3+4B_0B_1B_2-8B_0^2B_3][B_1B_2+6B_0B_3]$$

$$=-4\frac{B_3A_3}{B_1^2}(B_1B_2+6B_0B_3)=0.$$

Dasselbe gilt vom Coefficienten von p^2; derselbe ist nach gleicher Behandlung:

$$16B_0B_2^3-4.16B_0^2B_2B_4+16B_0B_1B_2B_3-9.16B_0^2B_3^2$$

$$+6.16B_0B_1^2B_4-6B_1^3B_3-4B_1^2B_2^2=16B_0B_2^3-4.16\frac{B_0^3B_2B_3^2}{B_1^2}$$

$$+16B_0B_1B_2B_3-3.16B_0^2B_3^2-6B_1^3B_3-4B_1^2B_2^2$$

$$=\frac{8B_2}{B_1^2}\left[2B_0B_1^2B_2^2-8B_0^3B_3^2-\frac{B_1^4B_2}{2}\right]-6B_3[B_1^3-4B_0B_1B_2+8B_0^2B_3]$$

$$-8B_0B_1B_2B_3.=\frac{8B_2}{B_1^2}\left(2B_0B_1^2B_2^2-8B_0^3B_3^2-\frac{B_1^4B_2}{2}\right)$$

$$-6A_3B_3-8B_0B_1B_2B_3=\frac{8B_2}{B_1^2}\left[2B_0B_1^2B_2^2-8B_0^3B_3^2-\frac{B_1^4B_2}{2}\right.$$

$$\left.-B_0B_1^3B_3\right]=\frac{8B_2^2}{B_1^2}\left[2B_0B_1^2B_2-4B_0^2B_1B_3-\frac{B_1^4}{2}-\frac{B_0B_3A_3}{B_2}\right]$$

$$=\frac{4B_2^2}{B_1}[-B_1^3+4B_0B_1B_2-8B_0^2B_3]=-\frac{4B_2^2A_3}{B_1}=0.$$

Eben so ist der Coefficient von p^3 die Nulle. Es übergeht durch die analoge Behandlung

$$3.16B_0B_1B_2^2+12.16B_0^2B_1B_4-12.16B_0^2B_2B_3+2.12B_0B_1^2B_3$$

$$-12B_1^3B_2 \text{ in } 3.16B_0B_1B_2^2+12.16\frac{B_0^3B_1B_3^2}{B_1^2}-12.16B_0^2B_2B_3$$

$$+2.12B_0B_1^2B_3-12B_1^3B_2=-12B_2[B_1^3-4B_0B_1B_2+8B_0^2B_3]$$
$$+24\frac{B_0B_3}{B_1}[B_1^3-4B_0B_1B_2+8B_0^2B_3]=\frac{12}{B_1}(2B_0B_3-B_1B_2)A_3=0.$$

Endlich gilt dasselbe ebenfalls vom Coefficienten von p^4; denn derselbe ist

$$12.16B_0^3B_4-3.16B_0^2B_2^2+3.16B_0B_1^2B_2-3.16B_0^2B_1B_3-9B_1^4$$
$$=12B_0[16B_0^2B_4-4B_0B_2^2+2B_0B_1B_3+B_1^2B_2]$$
$$+9B_1[4B_0B_1B_2-8B_0^2B_3+B_1^3]=12B_0A_4-9B_1A_3=0.$$

Es ist überdiess natürlich, dass sich diese Eigenschaft für die letztbesprochenen Gleichungen ergibt; denn da die Bedingungsgleichungen der Coefficienten B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, anderweitig resultiren, so können diese Gleichungen nur auf jene führen oder durch dieselben unbestimmt werden.

8. Die Wurzeln der Gleichung sind in diesem Fall wegen $p=0$

$$y_1=\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}}+\sqrt{\tfrac{1}{16}\frac{B_1B_3}{B_0B_4}-1}\right]$$
$$y_2=\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}}-\sqrt{\tfrac{1}{16}\frac{B_1B_3}{B_0B_4}-1}\right]$$
$$y_3=y_1$$
$$y_4=y_2$$

wo das Zeichen $\pm$ vor $\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}}$ desshalb beigesetzt ist, weil für den Fall, dass B_1 negativ wäre, das Zeichen der Wurzel $+$ genommen werden muss, indem widrigenfalls die Summe der Wurzeln nicht dem negativen ersten Coefficienten gleich seyn könnte.

Diese Auflösung gilt daher auch für eine zweite Gleichung, für

$$B_0y^4-B_1y^3+B_2y^2-B_3y+B_4=0.$$

Man braucht überdiess bloss die Wurzeln der ersten Gleichung um $\frac{-B_1}{2B_0}$ zu vermehren, um die Wurzeln der zweiten Gleichung zu erhalten. Dabei ändert sich der Werth von

$$\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\left[-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{16}\frac{B_1B_3}{B_0B_4}-1}\right]$$

nicht, obgleich derselbe in

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\left[-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{16}\frac{D_1D_3}{D_0D_4}-1}\right]$$

übergeht, denn es ist für diese Vermehrung

$$D_0=B_0$$
$$D_1=-B_1$$
$$D_2=\frac{6B_0B_1^2-6B_0B_1^2+4B_0^2B_2}{4B_0^2}=B_2$$

$$D_3 = \frac{-4B_0B_1^3 + 6B_1^3B_0 - 8B_0^2B_1B_2 + 4B_0B_1B_2 - B_0B_1^3}{8B_0^3}$$

$$= \frac{B_0B_1^3 - 4B_0^2B_1B_2}{8B_0^3} = \frac{A_3B_0 - 8B_0^3B_3}{8B_0^3} = -B_3$$

$$D_4 = \frac{B_0B_1^4 - 2B_0B_1^4 + 4B_0^2B_1^2B_2 - 4B_0^2B_1^2B_2 + B_0B_1^4}{16B_0^4} + B_4 = B_4;$$

somit sind die Radikale dieselben, die Gleichung ist sodann

$$B_0y^4 - B_1y^3 + B_2y^2 - B_3y + B_4 = 0 \text{ und die Wurzeln } \mathfrak{X} = y\frac{-B_1}{2B_0}.$$

Es kömmt diess daher, weil die Bedingung $B_1^2B_4 = B_0B_3^2$ besteht, denn die Gleichung

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}} + \sqrt{\tfrac{1}{16}\frac{B_1B_3}{B_0B_4} - 1}\ \frac{-B_1}{2B_0}\sqrt[4]{\frac{B_0}{B_4}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}}$$

$$+\sqrt{\tfrac{1}{16}\frac{B_1B_3}{B_0B_4} - 1} \text{ führt auf } -\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}} = \frac{B_1}{B_0}\sqrt[4]{\frac{B_0}{B_4}}$$

d. i. auf $B_0B_3^2 = B_1^2B_4$.

Es lassen sich die Wurzeln dieser und jener Gleichung auch noch folgends schreiben:

$$y_1 = \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{2\,[B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2]}{B_1}}$$

$$y_2 = \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{2\,[B_1^3 - 4B_0^2B_3 - 2B_0B_1B_2]}{B_1}}$$

$$y_3 = y_1$$

$$y_4 = y_2$$

wobei die Berücksichtigung des Zeichens von B_1 wegfällt und welcher Ausdruck sich auch folgends darstellt:

$$y = \frac{-B_1 \pm \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0}.$$

9. Im Fall alle vier Wurzeln gleich sind, entsprechen die Bedingungen

$$B_2 = \frac{6B_1^2}{16B_0},\quad B_3 = \frac{B_1^3}{16B_0^2},\quad B_4 = \frac{B_1^4}{16^2B_0^3};$$

die Grössen A_3, A_4, A_5, A_6 werden zu Null. Ein Werth von p ist Null, weil die Bedingung $\frac{B_4}{B_0} = \frac{B_3^2}{B_1^2}$ erfüllt ist. Ferner ist

$$\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - 4\frac{(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}} = 0,\quad \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} = 1 \text{ und somit}$$

$$y = -\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} = \frac{-B_1}{4B_0}.$$

Anmerkung. Die Gleichung

$$16^2A_3B_0p^3 + \left[192A_3B_0^2B_1 - \frac{128A_3B_0^2\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}} - \left(\alpha - \frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0p + B_1}\right)^2\right]p^2$$

$$+\left[32A_3B_0B_1\left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}}\right) + 16A_3B_0\left(B_1 - \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0p + B_1}}\right)^2\right.$$

$$-2\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\right)\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\right)\Big]\, p+4A_3B_1\left(B_1-\frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{4B_0\mathfrak{p}+B_1}}\right)^2$$
$$-\left(\beta-A_3-\frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\right)^2=0$$

übergeht für $A_3=0$ in eine quadratische, die nur einen Werth für p liefert. Man erhält nämlich

$$\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\right)^2 p^2+2\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\right)\left(\beta-\frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\right)p$$
$$+\left(\beta-\frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\right)^2=0 \quad \text{also} \quad \left[\left(\alpha-\frac{4B_0\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\right)p+\beta-\frac{B_1\mathfrak{P}^2}{4B_0\mathfrak{p}+B_1}\right]^2=0.$$

Im vorliegenden Fall ist $\mathfrak{P}=0$, weil $\alpha=0$, $\beta=0$ und es ist somit gleichgiltig, welchen Werth man dem p beilegt, wie man aus der zweiten Schreibweise der Wurzeln noch besser ersieht.

10. Es können überdiess A_3 und A_6 zu Null werden, ohne dass die Gleichung die in diesem Capitel behandelte Eigenschaft besitzt. Diess ist im Ausnahmsfall für

$$B_1=0 \quad \text{und} \quad B_3=0.$$

Es ist zwar in diesem Fall $A_3=0$, $A_5=0$, $A_6=0$, ohne dass jedoch nothwendig der Coefficient $A_4=16B_0^2B_4-4B_0B_2^2$ Null seyn müsste; und auch wirklich gehören sodann die Wurzeln nicht zu diesem besondern Fall; denn sie sind:

$$y_1=\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, e^{i \arccos \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{B_0B_4}-B_2}{\sqrt{B_0B_4}}}\right]}$$
$$y_2=\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, e^{-i \arccos \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{B_0B_4}-B_2}{\sqrt{B_0B_4}}}\right]}$$
$$y_3=\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, e^{i \arccos \left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{B_0B_4}-B_2}{\sqrt{B_0B_4}}}\right]}$$
$$y_4=\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, e^{-i \arccos \left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{B_0B_4}-B_2}{\sqrt{B_0B_4}}}\right]}.$$

V.

Betrachtung der biquadratischen Gleichung, die sich nach den Regeln einer quadratischen auflösen lässt.

1. Soll eine Gleichung vierten Grades die Eigenschaft besitzen; dass sie die Wurzeln direct oder mittelst einer Hilfsgleichung, also bis auf einen constanten Theil, durch eine Auflösung wie bei einer quadratischen ergibt; so muss entweder die Gleichung $D_0z^4+D_1z^3+D_2z^2+D_3z+D_4=0$ oder die ursprüngliche

$$B_0y^4+B_1y^3+B_2y^2+B_3y+B_4=0$$

die Form $[(z+A)^2-\alpha^2][(z+A)^2-\beta^2]=0$ annehmen, worin $-A$ den constanten Theil bezeichnet und für z im zweiten Fall y zu setzen wäre.

Es bestehen alsdann im zweiten Fall die Gleichungen:

$$4A = \frac{B_1}{B_0}$$

$$6A^2-(\alpha^2+\beta^2) = \frac{B_2}{B_0}$$

$$4A^3-2A(\alpha^2+\beta^2) = \frac{B_3}{B_0}$$

$$(A^2-\alpha^2)(A^2-\beta^2) = \frac{B_4}{B_0}$$

daher ist $$\frac{B_3}{B_0} = 2A[2A^2-(\alpha^2+\beta^2)] = \frac{B_1}{2B_0}\left[\frac{B_2}{B_0}-\frac{B_1^2}{4B_0^2}\right]$$

d. h. es besteht die Bedingungsgleichung:

$$B_1^3-4B_0B_1B_2+8B_0^2B_3=0.$$

Sollte jedoch die Hilfsgleichung

$$D_0z^4+D_1z^3+D_2z^2+D_3z+D_4=0$$

diese Eigenschaft erfüllend, vorausgesetzt werden; so wäre analog

$$D_1^3-4D_0D_1D_2+8D_0^2D_3=0.$$

Nach Substitution der Werthe von D erfolgt wie natürlich wiederum

$$B_1^3-4B_0B_1B_2+8B_0^2B_3=0.$$

Dieser Ausdruck ist aber der Coefficient A_3 in der Gleichung

$$A_3p^3+A_4p^2+A_5p+A_6=0$$

und somit führen beide Fälle auf die Bedingung $A_3=0$.

2. Für den Fall, dass $D_0z^4+D_1z^3+D_2z^2+D_3z+D_4=0$ die erwähnte Eigenschaft besitzen soll; ist

$$A = \frac{D_1}{4D_0} = p+\frac{B_1}{4B_0}$$

$$\alpha^2+\beta^2 = \frac{3D_1^2-8D_0D_2}{8D_0^2}$$

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{16^2D_0^3D_4+5D_1^4-16D_0D_1^2D_2}{16^2D_0^4}$$

mithin $$\alpha = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3D_1^2-8D_0D_2\pm\sqrt{16^2D_0^3D_4+5D_1^4-16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^2}}$$

$$+\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3D_1^2-8D_0D_2\mp\sqrt{16^2D_0^3D_4+5D_1^4-16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^2}}$$

$$\beta = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3D_1^2-8D_0D_2\pm\sqrt{16^2D_0^3D_4+5D_1^4-16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^2}}$$

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{3D_1^2-8D_0D_2\mp\sqrt{16^2D_0^3D_4+5D_1^4-16D_0D_1^2D_2}}{2D_0^2}}$$

Diese Grössen vereinfachen sich jedoch. Zuerst reducirt sich die cubische Gleichung für p, vermöge der Bedingung $A_3 = 0$ auf eine quadratische, die durch die Bedingung ihrer Coefficienten

$$A_5 = \frac{A_4 B_1 - A_3 B_2}{2 B_0}$$

$$A_6 = \frac{A_5 B_1 - A_3 B_3}{8 B_0} \text{ in den Ausdruck}$$

$$A_4 p^2 + \frac{A_4 B_1}{2 B_0} p + \frac{A_4 B_1^2}{16 B_0^2} = 0 \quad \text{d. i. in} \quad \left(p + \frac{B_1}{4 B_0}\right)^2 = 0$$

übergeht. Die cubische Gleichung hat somit die repetirte Wurzel $p = -\frac{B_1}{4 B_0}$ und die andere $p = 0$. Der erste Werth gibt für A die Nulle. Es werden ferner $D_1 = 0$ und der Bedingung $\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} = \frac{D_3}{D_1}$ zu Folge, $D_3 = 0$; welches auch aus der Substitution in

$$D_3 = 4 B_0 p^3 + 3 B_1 p^2 + 2 B_2 p + B_3$$

für den Werth von p erfolgt. Ferner ist

$$\frac{-D_2}{D_0} = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\sqrt{\frac{D_4}{D_0}} = \alpha\beta \text{ mithin}$$

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \frac{-D_2}{D_0} \pm 2\sqrt{\frac{D_4}{D_0}}.$$

Die Werthe von D_2 und D_4 sind

$$D_2 = \frac{-6 B_1^2 + 16 B_0 B_2}{16 B_0}$$

$$D_4 = \frac{-3 B_0 B_1^4 + 16 B_0^2 B_1^2 B_2 - 64 B_0^3 B_1 B_3 + 16^2 B_0^4 B_4}{16^2 B_0^4}$$

$$= \frac{16^2 B_0^4 B_4 + B_0 B_1^4 - 4 B_0 B_1 [B_1^3 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3]}{16^2 B_0^4}$$

$$- \frac{32 B_0^3 B_1 B_3}{16^2 B_0^4} = \frac{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}{16^2 B_0^3}.$$

Dadurch ergeben sich die Werthe von α, β

$$\alpha = \frac{1}{8 B_0}\sqrt{-16 B_0 B_2 + 6 B_1^2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$

$$+ \frac{1}{8 B_0}\sqrt{-16 B_0 B_2 + 6 B_1^2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$

$$\beta = \frac{1}{8 B_0}\sqrt{-16 B_0 B_2 + 6 B_1^2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$

$$- \frac{1}{8 B_0}\sqrt{-16 B_0 B_2 + 6 B_1^2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}.$$

Somit wären die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

$$y_1 = \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{8B_0}\sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$
$$+ \frac{1}{8B_0}\sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$

$$y_2 = \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{8B_0}\sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$
$$- \frac{1}{8B_0}\sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$

$$y_3 = \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{8B_0}\sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$
$$+ \frac{1}{8B_0}\sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$

$$y_4 = \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{8B_0}\sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$
$$- \frac{1}{8B_0}\sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 - 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}.$$

Es lassen sich überdiess diese Ausdrücke etwas einfacher stellen, weil

$$\sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 \pm \sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32 B_0^2 B_1 B_3}}$$
$$= \sqrt{\frac{-8B_0B_2 + 3B_1^2}{2} + \sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64 B_0^3 B_4}}$$
$$\pm \sqrt{\frac{-8B_0B_2 + 3B_1^2}{2} - \sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64 B_0^3 B_4}}.$$

Dadurch übergehen die Wurzeln in die einfachern Formen:

$$y_1 = \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 + 2\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64 B_0^3 B_4}}$$
$$y_2 = \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 - 2\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64 B_0^3 B_4}}$$
$$y_3 = \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0}\sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 - 2\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64 B_0^3 B_4}}$$
$$y_4 = \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0}\sqrt{-8B_0B_2 + 3B_1^2 + 2\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 64 B_0^3 B_4}}.$$

Im zweiten Fall des Werthes von p, nämlich $p = 0$ bleiben α, β und γ dieselben, ohne dass die Voraussetzung wegen anderer, vielleicht damit verknüpfter Bedingungen richtig seyn müsste. Diese können die Form verändern; so dass der Werth $p = 0$ einem speciellern Fall angehört.

3. Um diese Werthe aus der allgemeinen Form der Wurzeln

$$y = p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{\pm i \arccos\left[-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4}} \pm \sqrt{\frac{D_1D_3}{D_0D_4} - \frac{4(D_2 - 2\sqrt{D_0D_4})}{\sqrt{D_0D_4}}}\right]}$$

zu deduciren; so ist für den Werth $p = \frac{-B_1}{4B_0}$

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{D_0}}\left[-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{D_1^2 D_3^2}{D_0 D_4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{\sqrt{D_0 D_4}} - 4(D_2 - 2\sqrt{D_0 D_4})}\right]$$

und wegen $D_1 = 0$

$$\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\cos\varphi = \frac{1}{8B_0}\sqrt{6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2 B_0^3 B_4 + B_1^4 - 32B_0^2B_1B_3}}$$

Ferner ist

$$i\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\operatorname{Sin}\varphi = \sqrt{\frac{-64B_0\sqrt{D_0D_4} + 6B_1^2 - 16B_0B_2 + 2\sqrt{16^2B_0^3B_4 + B_1^4 - 32B_0^2B_1B_3}}{64B_0^2}}$$

$$= \frac{1}{8B_0}\sqrt{-4\sqrt{16^2B_0^3B_4 + B_1^4 - 32B_0^2B_1B_3} - 16B_0B_2 + 6B_1^2 + 2\sqrt{16^2B_0^3B_4 + B_1^4 - 32B_0^2B_1B_3}}$$

$$= \frac{1}{8B_0}\sqrt{-16B_0B_2 + 6B_1^2 - 2\sqrt{16^2B_0^3B_4 + B_1^4 - 32B_0^2B_1B_3}}$$

und somit wären die vier Wurzeln wie frühe

$$y_1 = \frac{-B_1}{4B_0} + \alpha$$

$$y_2 = \frac{-B_1}{4B_0} + \beta$$

$$y_3 = \frac{-B_1}{4B_0} - \beta$$

$$y_4 = \frac{-B_1}{4B_0} - \alpha.$$

Für den Werth $p = 0$ ist

$$y = \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\, e^{i\arccos}\left[-\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{B_1B_3}{B_0B_4} - \frac{4(B_2 - 2\sqrt{B_0B_4})}{\sqrt{B_0B_4}}}\right]$$

und zugleich $-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{B_1^2B_3^2}{B_0^3B_4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\sqrt{\frac{B_4}{B_0}}\cdot\left(\frac{B_1B_3}{B_0B_4} - \frac{4(B_2 - 2\sqrt{B_0B_4})}{\sqrt{B_0B_4}}\right)}$

$$= -\tfrac{1}{4}\frac{B_1}{B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{B_1B_3}{\sqrt{B_0B_4}} - 4B_2 + 8\sqrt{B_0B_4}}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\frac{B_1}{B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{B_1^2 - 4B_0B_2 + 8B_0\sqrt{B_0B_4}}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\frac{B_1}{B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{B_1^3 - 4B_0B_1B_2 + 8B_0^2B_3}{B_1}} = \frac{-B_1}{4B_0}.$$

Ferner ist $\operatorname{Sin}\varphi\, i\sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}} = \sqrt[4]{\frac{B_4}{B_0}}\sqrt{-1\frac{+B_1^2}{16B_0^2}\sqrt{\frac{B_0}{B_4}}}$

$$= \frac{1}{4B_0}\sqrt{-16B_0\sqrt{B_0B_4} + B_1^2} = \frac{1}{4B_0}\sqrt{\frac{B_1^3 - 16B_0^2B_3}{B_1}} = \frac{1}{4B_0}\sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}$$

mithin

$$y_1 = y_3 = \frac{-B_1}{4B_0} + \frac{1}{4B_0}\sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}$$

$$y_2 = y_4 = \frac{-B_1}{4B_0} - \frac{1}{4B_0}\sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}$$

also von den frühern verschiedene Werthe.

Zugleich finden in diesem Fall noch einige Gleichungen statt, denn es wird vermöge der Bedingungsgleichungen zwischen A_3, A_4, A_5, A_6 wegen $A_3 = 0$, $A_6 = 0$, A_4 und A_5 zur Nulle. Auch ist

$$(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 = \left(\frac{-8B_0^2B_3}{B_1}\right)^2 \text{ und somit das Radical}$$

$$\sqrt{(B_1^2 - 4B_0B_2)^2 - 8^2B_0^3B_4} = 8\sqrt{B_0^4\left(\frac{B_3^2}{B_1^2} - \frac{B_4}{B_0}\right)} = 0$$

wodurch die obige Formel die einfachere Form annimmt. Diese Deduction zeigt, dass der Werth $p = 0$ ein fremdartiger sey. Die Gleichung

$$A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6 = 0$$

reducirt sich daher auf eine quadratische und kann nicht durch eine cubische, deren eine Wurzel $p = 0$ ist, ersetzt werden.

4. Im Fall die Gleichung $B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0$ die angeführte Form besitzend vorausgesetzt wird; besteht nach frühern die Bedingung $A_3 = 0$ und die Werthe von p sind, der doppelte Werth $p = \frac{-B_1}{4B_0}$ und $p = 0$.

Da nach früher Erwiesenem für $p = 0$ die Gleichung $A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6$ nicht mehr eine cubische verbleibt, und überhaupt der Werth $p = 0$ mit dem repetirten $p = \frac{-B_1}{4B_0}$ nicht vereinbar ist; so bleibt er auch hier ein fremdartiger.

Die Wurzeln erhalten überdiess die in früherer Nummer gefundenen Werthe.

VI.

Bestimmung der einfachsten Bedingungsgleichung für den Fall einer repetirten Wurzel.

1. Für die Auffindung der einfachsten Bedingungsgleichung im Fall zweier gleicher Wurzeln wird es nöthig die Gleichung

$$A_3p^3 + A_4p^2 + A_5p + A_6 = 0$$

näher zu betrachten. Um zugleich diese Durchführung soweit allgemein zu führen, als nicht die Eigenthümlichkeit dieser Gleichung zu speciellen Betrachtungen nöthigt; sey

$$C_0y^3 + C_1y^2 + C_2y + C_3 = 0$$

die allgemeine Gleichung dritten Grades, die sich auch auf die Form

$$C_0y^{\frac{3}{2}} + C_3y^{-\frac{3}{2}} + C_1y^{\frac{1}{2}} + C_2y^{-\frac{1}{2}} = 0$$

bringen lässt. Man setze, indem man zwei neue Hilfsbögen einführt:

$$C_0 y^{\frac{3}{2}} + C_3 y^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{C_0 C_3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi$$

$$C_1 y^{\frac{1}{2}} + C_2 y^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{C_1 C_2}\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1$$

wodurch wegen
$$y = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}}\, e^{\varphi i},$$
$$y = \frac{C_2}{C_1}\, e^{\varphi_1 i}$$

zur Bestimmung von φ und φ_1 die Gleichungen

$$\sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}}\, e^{\varphi i} = \frac{C_2}{C_1}\, e^{\varphi_1 i} \quad \text{und}$$

$$\sqrt{C_0 C_3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi + \sqrt{C_1 C_2}\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1 = 0$$

resultiren. Setzt man $y = z + q$, wodurch für

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathfrak{A}_0 \\ 3C_0 q + C_1 &= \mathfrak{A}_1 \\ 3C_0 q^2 + 2C_1 q + C_2 &= \mathfrak{A}_2 \end{aligned}$$

die Gleichung in

$$C_0 q^3 + C_1 q^2 + C^2 q + C_3 = \mathfrak{A}_3$$

übergeht, und wählt q so, dass die Gleichung $\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} = \left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}\right)^3$ erfüllt sey, in welchem Fall

aus
$$\varphi i + \lambda\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} = \varphi_1 i + \tfrac{1}{3}\lambda\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0},$$
$$\varphi_1 = \varphi$$

folgt, so besteht alsdann nur noch die eine Bedingung

$$\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi + \sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Die Gleichung zur Bestimmung von q liefert

$$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1^3 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2^3.$$

Es ist nämlich nach der Bedeutung dieser Grössen und ihrer Entwicklung:

$$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1^3 = 3^3 C_0^4 q^6 + \left.\begin{array}{l} 3^3 C_0^3 C_1 \\ 3^3 C_0^3 C_1 \end{array}\right] q^5 + \left.\begin{array}{l} 3^3 C_0^3 C^2 \\ 3^3 C_0^2 C_1^2 \\ 3^3 C_0^2 C_1^2 \end{array}\right] q^4 + \left.\begin{array}{l} 3^3 C_0^3 C_3 \\ 3^3 C_0^2 C_1 C_2 \\ 3^2 C_0 C_1^3 \\ C_0 C_1^3 \end{array}\right] q^3$$

$$+ \left.\begin{array}{l} 3^3 C_0^2 C_1 C_3 \\ 3^2 C_0 C_1^2 C_2 \\ C_1^4 \end{array}\right] q^2 + \left.\begin{array}{l} 3^2 C_0 C_1^2 C_3 \\ C_1^3 C_2 \end{array}\right] q + C_3 C_1^3$$

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2^3 = 3^3 C_0^4 q^6 + 2\,.\,3^3 C_0^3 C_1 q^5 + \left.\begin{array}{l} 3^3 C_0^3 C_2 \\ 3^2.4\, C_0^2 C_1^2 \end{array}\right] q^4$$

$$+ \left.\begin{array}{l} 8\, C_0 C_1^3 \\ 6^2 C_0^2 C_1 C_2 \end{array}\right] q^3 + \left.\begin{array}{l} 3\,.\,4\, C_0 C_1^2 C_2 \\ 3^2 C_0^2 C_2^2 \end{array}\right] q^2 + 6\, C_0 C_1 C_2^2 q + C_0 C_2^3$$

und die zur Bestimmung von q erforderliche Gleichung:

$$(2C_0C_1^3 - 9C_0^2C_1C_2 + 27C_0^3C_3)\, q^3 + (C_1^4 - 3C_0C_1^2C_2 - 9C_0^2C_2^2$$
$$+ 27C_0^2C_1C_3)\, q^2 + (9C_0C_1^2C_3 - 6C_0C_1C_2^2 + C_1^3C_2)\, q + C_3C_1^3 - C_0C_2^3 = 0$$

oder wenn die Coefficienten mit $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_5$, $\mathfrak{D}_6$ bezeichnet werden:

$$\mathfrak{D}_3 q^3 + \mathfrak{D}_4 q^2 + \mathfrak{D}_5 q + \mathfrak{D}_6 = 0.$$

Diese Gleichung biethet mehrere Relationen zwischen den Coefficienten $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_5$, $\mathfrak{D}_6$; so bestehen folgende Gleichungen:

$$3 C_0^2 \mathfrak{D}_5 = 2 C_0 C_1 \mathfrak{D}_4 - C_1^2 \mathfrak{D}_3$$

$$9 C_0^3 \mathfrak{D}_6 = C_0^2 C_1 \mathfrak{D}_5 + C_0^2 C_2 \mathfrak{D}_4 - C_0 C_1 C_2 \mathfrak{D}_3$$

oder auch $$27 C_0^3 \mathfrak{D}_6 = C_0 (2 C_1^2 + 3 C_0 C_2) \mathfrak{D}_4 - C_1 (C_1^2 + 3 C_0 C_2) \mathfrak{D}_3$$

ferner $$9 C_0 C_1 \mathfrak{D}_6 = (3 C_0 C_2 + C_1^2) \mathfrak{D}_5 - C_1 C_2 \mathfrak{D}_4.$$

Die Gleichung $\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3} \cos \frac{3}{2} \varphi + \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} \cos \frac{\varphi}{2} = 0$ d. i.

$$\cos\frac{\varphi}{2} \left[4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 3\right] \sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3} + \cos\frac{\varphi}{2} \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} = 0$$

liefert für $\cos\frac{\varphi}{2}$ die Werthe

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{-\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} + 3\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3}}{4\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3}}}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{\frac{-\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} + 3\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3}}{4\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3}}};$$

daher sind die drei Werthe von $\cos\frac{\varphi}{2}$ wegen

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_3}} = \frac{\mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2} \quad \text{in Folge von} \quad \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0} = \frac{\mathfrak{A}_2^3}{\mathfrak{A}_1^3}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} \varphi_1 = 0$$

$$\cos \tfrac{1}{2} \varphi_2 = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} \varphi_3 = -\tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}}.$$

Wegen
$$3 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2 = 9 C_0^2 q^2 + 6 C_0 C_1 q + 3 C_0 C_2$$
$$- \mathfrak{A}_1^2 = -9 C_0^2 q^2 - 6 C_0 C_1 q - C_1^2$$

übergeht der Zähler $3 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2$ in $3 C_0 C_2 - C_1^2$ und daher ist

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{3 C_0 C_2 - C_1^2}{3 C_0^2 q^2 + 2 C_0 C_1 q + C_0 C_2}}$$

und
$$\operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2} = \tfrac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{(3 \mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2)}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{12 C_0^2 q^2 + 8 C_0 C_1 q + C_0 C_2 + C_1^2}{3 C_0^2 q^2 + 2 C_0 C_1 q + C_0 C_2}}.$$

2. Die Gleichung $\mathfrak{A}_0 z^3 + \mathfrak{A}_1 z^2 + \mathfrak{A}_2 z + \mathfrak{A}_3 = 0$ hat eine Wurzel

$$z = \sqrt[4]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} e^{\varphi i} \quad \text{denn es ist}$$

$$z^3+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}z^2+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0}z+\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}:z-\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}$$

$$=z^2+\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}+\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}\right)z+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}$$

und dabei bleibt der Rest k

$$k=\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}^3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}e^{2\varphi i}+\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}e^{3\varphi i}$$

oder $$\mathfrak{A}_0 e^{-\frac{3}{2}\varphi i}k = 2\mathfrak{A}_3\cos\tfrac{3}{2}\varphi+2\mathfrak{A}_2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}},$$

ferner ist wegen der angeführten Bedingung

$$\mathfrak{A}_2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\cdot\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_3}}=\mathfrak{A}_2\sqrt[6]{\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_3}}=\sqrt{\mathfrak{A}_2}\sqrt[6]{\frac{\mathfrak{A}_2^3\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_3}}=\sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$$

und daher $$\frac{\mathfrak{A}_0^{\frac{3}{2}}}{\mathfrak{A}_3^{\frac{1}{2}}}k\,e^{-\frac{3}{2}\varphi i} = 2\sqrt{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3}\cos\tfrac{3}{2}\varphi+2\sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Wenn also φ einen der angeführten Werthe besitzt; so ist $k=0$.

Die beiden andern Wurzeln sind

$$z_2 = -\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}$$

$$+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0^2}+2\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}+\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}e^{2\varphi i}-4\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0}-4\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}-4\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}e^{2\varphi i}}$$

$$=-\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1^2-4\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2}-\frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}-3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}e^{2\varphi i}}$$

$$z_3=-\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1^2-4\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2}-\frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\varphi i}-3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}e^{2\varphi i}}.$$

Weil nun diese Werthe auch für den Fall $\cos\frac{\varphi}{2}=0$ gelten, übergehen sie in

$$z_2=-\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1^2-4\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2}+\frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}-3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}}$$

$$z_3=-\frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1^2-4\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0^2}+\frac{2\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}-3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}}.$$

Zugleich ist $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pm i\arccos\frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}\right]}=$

$$\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\left[-\frac{\mathfrak{A}_1^2}{2\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}i\sqrt{\frac{3\mathfrak{A}_0^2\mathfrak{A}_2^2+2\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1^2\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_1^4}{\mathfrak{A}_0^2\mathfrak{A}_2^2}}\right]$$

$$=-\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\pm\frac{i}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}+2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}}\cdot\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}-\frac{\mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2} + \frac{2\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{4\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2}{\mathfrak{A}_0^2} - 2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\cdot\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}}$$

welches die obigen Werthe von z_2 und z_3 sind. Somit sind die drei Wurzeln der allgemeinen Gleichung

$$y_1 = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{\pi i}$$

$$y_2 = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{i \arc\cos \frac{1}{2}\frac{(\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2)}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}}$$

$$y_3 = q + \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}\, e^{-i \arc\cos \frac{1}{2}\frac{(\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1^2)}{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2}}.$$

3. Für den Fall zweier gleicher Wurzeln findet man sowohl die Bedingungsgleichung, als die, der jedesmaligen Weise dafür entsprechenden Werthe von q durch folgende Betrachtung. Es ist

$$\mathfrak{A}_0\left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pi i}\right)\left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pi(1+\frac{2}{3})i}\right)\left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pi(1+\frac{4}{3})i}\right) = \mathfrak{A}_0 z^3 + \mathfrak{A}_3$$

$$\mathfrak{A}_1 z\left(z - \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}e^{\pi i}\right) = \mathfrak{A}_1 z^2 + \mathfrak{A}_2 z$$

mithin weil
$$\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}$$

$$\mathfrak{A}_0\left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pi i}\right)\left[\left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pi(1+\frac{2}{3})i}\right)\left(z - \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pi(1+\frac{4}{3})i}\right) - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}z\right] = 0.$$

Die erste Wurzel ist daher $z = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pi i}$,

und falls die beiden andern gleich werden sollen, muss in

$$z^2 - \left[\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pi i}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}\right]z + \sqrt[3]{\left(\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}\right)^2}e^{4\pi i} = 0$$

die Bedingung bestehen:

$$2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{2\pi i} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}}e^{\pi i}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}$$

d. i.
$$2\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} - \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}$$

und diess reducirt gibt $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_1^3 = 0$ eine Gleichung dritten Grades, die sich vermöge der Bedingung $\sqrt[3]{\frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_0}} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}$ zu der quadratischen $\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} = 0$ gestaltet.

Nach früherm ist
$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 = 3C_0^2q^2 + 2C_0C_1q + C_0C_2$$
$$\mathfrak{A}_1^2 = 9C_0^2q^2 + 6C_0C_1q + C_1^2$$

also
$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1^2 = 12C_0^2q^2 + 8C_0C_1q + C_0C_2 + C_1^2 = 0$$

als die Gleichung für q, die denjenigen Werth liefert, für welchen zwei Wurzeln der ursprünglichen Gleichung einander gleich werden. Von diesen Werthen

$$q = -\tfrac{1}{3}\frac{C_1}{C_0} \pm \sqrt{\tfrac{1}{9}\frac{C_1^2}{C_0^2} - \frac{C_1^2}{12\,C_0^2} - \frac{C_2}{12\,C_0}}$$
$$= -\tfrac{1}{3}\frac{C_1}{C_0} \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{C_1^2 - 3\,C_0 C_2}{C_0^2}}$$

erfüllt einer und zwar der eigentlich brauchbare Werth die Gleichung

$$\mathfrak{D}_3 q^3 + \mathfrak{D}_4 q^2 + \mathfrak{D}_5 q + \mathfrak{D}_6 = 0.$$

4. Es gibt noch eine zweite Weise, für welche zwei Wurzeln der allgemeinen Gleichung einander gleich werden, wenn q so gewählt wird, dass $\mathfrak{A}_2 = 0$, d. i. für

$$q = -\frac{C_1}{3\,C_0} \pm \frac{1}{3\,C_0}\sqrt{C_1^2 - 3\,C_0 C_2},$$

wovon wiederum nur einer dieser Werthe der cubischen Gleichung für q genügt; und welcher eigentlich hier zu nehmen ist. Die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung sind alsdann:

$$y_1 = q$$
$$y_2 = q + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} e^{i \arccos \frac{-\mathfrak{A}_1^2}{2\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_2}} = q\frac{-\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} + \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{\mathfrak{A}_1^4 - 4\mathfrak{A}_0^2\mathfrak{A}_2^2}}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1}$$
$$= q\frac{-\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} + \frac{\mathfrak{A}_1}{2\mathfrak{A}_0} = q$$
$$y_3 = q\frac{-\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}.$$

5. Es lassen sich von der für q aufgestellten Gleichung mehrere Eigenschaften erweisen. Für jeden ihrer Werthe q sind die Ergebnisse y wirkliche Wurzeln der Gleichung $C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$ und sie enthält bloss zweierlei Werthe von q. Da es nur zwei Weisen gibt, auf welche eine Gleichheit zweier Wurzeln erreicht wird, so kann diese Gleichung nur zweierlei Wurzeln besitzen, und es frägt sich, welcher der Werthe von q der repetirten Wurzel entspricht. Wenn eine cubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln besitzt; so gelten die Gleichungen

$$C_0 y^3 + C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$$
$$3C_0 y^2 + 2C_1 y + C_2 = 0$$

für den Werth der repetirten Wurzel; mithin auch

$$C_1 y^2 + 2\,C_2 y + 3\,C_3 = 0$$

für denselben Werth. Aus den quadratischen Gleichungen folgt ferner

$$(2\,C_1^2 - 6\,C_0 C_2)\,y + C_1 C_2 - 9\,C_0 C_3 = 0,$$

somit wäre für diesen Fall

$$y = \frac{9\,C_0 C_3 - C_1 C_2}{2\,(C_1^2 - 3\,C_0 C_2)}.$$

Ferner ergibt die gleiche Schlussweise aus der letzten mit $2\,C_2$ multiplicirten Gleichung und der vorhergehenden mit $(2\,C_1^2 - 6\,C_0 C_2)$ multiplicirten, die zweite Gleichung ersten Grades

$$[4(C_1^2-3C_0C_2)C_2-C_1(C_1C_2-9C_0C_3)]\,y+6C_3(C_1^2-3C_0C_2)=0$$

und hieraus die Bedingung

$$(C_1C_2-9C_0C_3)(3C_1^2C_2+9C_0C_1C_3-12C_0C_2^2)=12C_3(C_1^2-3C_0C_2)^2.$$

Diese Gleichung liefert nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors C_1 die Bedingungsgleichung

$$C_1^2C_2^2+18C_0C_1C_2C_3-27C_0^2C_3^2-4C_0C_2^3-4C_1^3C_3=0.$$

Gesetzt nun die Gleichung für q enthalte die Wurzel

$$q=\frac{9C_0C_3-C_1C_2}{2(C_1^2-3C_0C_2)}$$

die dem Fall $\mathfrak{A}_2=0$ entspreche; so muss zugleich die Gleichung

$$(2C_0C_1^3-9C_0^2C_1C_2+27C_0^3C_3)q^3+(C_1^4-3C_0C_1^2C_2-9C_0^2C_2^2+27C_0^2C_1C_3)q^2$$
$$+(9C_0C_1^2C_3-6C_0C_1C_2^2+C_1^3C_2)q+C_3C_1^3-C_0C_2^3=0$$

und $$C_0y^3+C_1y^2+C_2y+C_3=0$$

für diesen Werth erfüllt sein. Die Vereinigung beider Gleichungen ergibt

$$(C_1^4-6C_0C_1^2C_2+9C_0^2C_2^2)q^2+(C_1^3C_2-9C_0C_1^2C_3-3C_0C_1C_2^2+27C_0^2C_2C_3)q$$
$$+C_1^3C_3-9C_0C_1C_2C_3+27C_0^2C_3^2+C_0C_2^3=0$$

d. i. $$(C_1^2-3C_0C_2)^2q^2+(C_1^2-3C_0C_2)(C_1C_2-9C_0C_3)q+C_1^3C_3-9C_0C_1C_2C_3$$
$$+27C_0^2C_3^2+C_0C_2^3=0.$$

Soll aber der obige Werth von q entsprechen, so muss zugleich, wenn statt q sein Werth gesetzt wird, die Gleichung

$$(C_1^2-3C_0C_2)^2\left(\frac{9C_0C_3-C_1C_2}{2(C_1^2-3C_0C_2)}\right)^2+(C_1^2-3C_0C_2)(C_1C_2-9C_0C_3)\frac{(9C_0C_3-C_1C_2)}{2(C_1^2-3C_0C_2)}$$
$$+C_1^3C_3-9C_0C_1C_2C_3+27C_0^2C_3^2+C_0C_2^3=0$$

auf die früher gefundene Bedingungsgleichung führen. Sie ergibt

$$(9C_0C_3-C_1C_2)^2-2(9C_0C_3-C_1C_2)^2+4(C_1^3C_3-9C_0C_1C_2C_3$$
$$+27C_0^2C_3^2+C_0C_2^3)=0$$

d. i. $$(9C_0C_3-C_1C_2)^2=4(C_1^3C_3-9C_0C_1C_2C_3+27C_0^2C_3^2+C_0C_2^3)$$

und aus dieser Entwicklung folgt

$$C_1^2C_2^2+18C_0C_1C_2C_3-27C_0^2C_3^2-4C_1^3C_3-4C_0C_2^3=0$$

die obige Bedingung. Ist zugleich q eine repetirte Wurzel von

$$\mathfrak{D}_3q^3+\mathfrak{D}_4q^2+\mathfrak{D}_5q+\mathfrak{D}_6=0$$

so ist zugleich $$3\mathfrak{D}_3q^2+2\mathfrak{D}_4q+\mathfrak{D}_5=0$$

oder wenn für $\mathfrak{D}_5$ sein Werth gesetzt wird

$$(9C_0^2q^2-C_1^2)\mathfrak{D}_3+2(3C_0^2q+C_0C_1)\mathfrak{D}_4=0$$

$$3C_0q-C_1=\frac{-2C_0\mathfrak{D}_4}{\mathfrak{D}_3}\quad\text{oder}\quad -3C_0q\mathfrak{D}_3=2C_0\mathfrak{D}_4-C_1\mathfrak{D}_3=\frac{3C_0^2\mathfrak{D}_5}{C_1},$$

$-C_1q\mathfrak{D}_3=C_0\mathfrak{D}_5$. Wird darin der Werth $q=\dfrac{9C_0C_3-C_1C_2}{2(C_1^2-3C_0C_2)}$

gesetzt und der Ausdruck entwickelt, so kömmt man auf die Bedingungsgleichung zweier gleicher Wurzeln, woraus folgt, dass dieser Werth q eine repetirte Wurzel von $\mathfrak{D}_3 q^3 + \mathfrak{D}_4 q^2 + \mathfrak{D}_5 q + \mathfrak{D}_6 = 0$ sei. Die dritte Wurzel der für q aufgestellten Gleichung ist sodann

$$q = \frac{C_1 C_2 - 9 C_0 C_3}{C_1^2 - 3 C_0 C_2} - \frac{C_1^4 - 3 C_0 C_1^2 C_2 - 9 C_0^2 C_2^2 + 27 C_0 C_1 C_3}{2 C_0 C_1^3 - 9 C_0^2 C_1 C_2 + 27 C_0^3 C_3}.$$

6. Um diese Deduction auf die Gleichung

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

anzuwenden; so übergeht die obige Bedingung zweier gleicher Wurzeln für die zwischen A_3, A_4, A_5, A_6 stattfindenden Relationen

$$2 B_0 A_5 = A_4 B_1 - A_3 B_2$$
$$16 B_0^2 A_6 = A_4 B_1^2 - (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3) A_3$$

in

$$\begin{aligned} &\frac{A_4^2}{4 B_0^2}\,[A_4^2 B_1^2 - 2 A_3 A_4 B_1 B_2 + A_3^2 B_2^2] \\ &+ \frac{18 A_3 A_4}{32 B_0^3}\,[A_4^2 B_1^3 - A_3 A_4 B_1 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3) - A_3 A_4 B_1^2 B_2 \\ &\qquad + A_3^2 B_2 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)] \\ &- \frac{27 A_3^2}{16^2 B_0^4}\,[A_4^2 B_1^4 - 2 A_3 A_4 B_1^2 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3) + A_3^2 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)^2] \\ &- \frac{4 A_3}{8 B_0^3}\,[A_4^3 B_1^3 - 3 A_3 A_4^2 B_1^2 B_2 + 3 A_3^2 A_4 B_1 B_2^2 - A_3^3 B_2^3] \\ &- \frac{4 A_4^3}{16 B_0^2}\,[A_4 B_1^2 - A_3 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)] = 0 \end{aligned}$$

und nach gehöriger Reduction in

$$\begin{aligned} &A_3 A_4^3\,[16 B_0 B_1^3 - 4.16 B_0^2 B_1 B_2 + 8.16 B_0^3 B_3] \\ &+ A_3^2 A_4^2\,[-27 B_1^4 + 6.16 B_0 B_1^2 B_2 + 4.16 B_0^2 B_2^2 - 2.9.16 B_0^2 B_1 B_3] \\ &+ A_3^3 A_4\,[2.27 B_1^3 B_2 - 15.16 B_0 B_1 B_2^2 + 4.27 B_0 B_1^2 B_3 + 18.16 B_0^2 B_2 B_3] \\ &+ A_3^4\,[8.16 B_0 B_2^3 - 27 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)^2] = 0. \end{aligned}$$

Der erste Coefficient in Klammern ist $16 B_0 A_3$ und da alsdann A_3^2 ein gemeinschaftlicher Factor ist, reducirt sich dieser Ausdruck auf einen dessen Summe der Indices bloss 12 beträgt. Zugleich zeigt die Deduction, dass man im ganzen Verlaufe auf keine einfachere Bedingungsgleichung kommen könne. Ueberdiess hat nach früheren Betrachtungen in allen den Fällen, wo

$$A_3 p^3 + A_4 p^2 + A_5 p + A_6 = 0$$

zwei gleiche Wurzeln besitzt, die Gleichung

$$B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = 0$$

dieselbe Eigenschaft.

7. Um die im frühern Capitel gefundene Bedingungsgleichung der repetirten Wurzel durch eine einfachere zu ersetzen, dient noch ferner die Betrachtung, dass auch $\frac{-F_7}{F_6}$ ein Werth von q sein müsse. Es ist somit

$$-(2A_4^2-6A_3A_5)F_7+(A_4A_5-9A_3A_6)F_6=0 \quad \text{d. i.}$$
$$3A_3(2A_5F_7-3A_6F_6)+A_4(-2A_4F_7+A_5F_6)=0$$
und nach der Bedeutung von A_5
$$6B_0A_3(2A_5F_7-3A_6F_6)+A_4(A_4B_1F_6-4A_4B_0F_7-A_3B_2F_6)=0$$
oder $\quad A_3[12B_0A_5F_7-18B_0A_6F_6-A_4B_2F_6]+A_4^2(B_1F_6-4B_0F_7)=0.$

Zugleich ist $\quad B_1F_6-4B_0F_7=16B_0A_3(24B_0B_4-16B_1B_3+2B_2^2).$

Wird diess substituirt und der gemeinschaftliche Factor A_3 entfernt; so ergibt sich
$$12B_0A_5F_7-(18B_0A_6+B_2A_4)F_6+16A_4^2B_0(24B_0B_4-6B_1B_3+2B_2^2)=0$$
als ein Ausdruck der weiter keinen gemeinschaftlichen Factor besitzt. Es ist
$$12B_0A_5=12B_0B_1^2B_3+6.16B_0^2B_1B_4-3.16B_0^2B_2B_3;$$
$$-(18B_0A_6+B_2A_4=-B_1^2B_2^2+4B_0B_2^3-2B_0B_1B_2B_3-18B_0B_1^2B_4$$
$$+18B_0^2B_3^2-16B_0^2B_2B_4;$$
$$A_4^2=B_1^4B_2^2+4B_0B_1^3B_2B_3-8B_0B_1^2B_2^3+4B_0^2B_1^2B_3^2+16B_0^2B_2^4$$
$$+2.16B_0^2B_1^2B_2B_4-16B_0^2B_1B_2^2B_3+4.16B_0^3B_1B_3B_4$$
$$-8.16B_0^3B_2^2B_4+16^2B_0^4B_4^2.$$

Diese Theile in ihre Factoren, der erste in
$$F_7=-3.16^2B_0^3B_3B_4+2.16^2B_0^2B_1B_2B_4-9.16B_0B_1^3B_4$$
$$+3.16B_0^2B_1B_3^2+16B_0B_1^2B_2B_3-64B_0^2B_2^2B_3;$$
der zweite in
$$F_6=-4.9.16B_0^3B_3^2+4.7.16B_0^2B_1B_2B_3-6.16B_0B_1^3B_3$$
$$+2.16B_0B_1^2B_2^2+2.16^2B_0^3B_2B_4-8.16B_0^2B_2^3$$
$$-12.16B_0^2B_1^2B_4, \text{ der dritte in}$$
$$24.16B_0^2B_4-6.16B_0B_1B_3+2.16B_0B_2^2 \text{ multiplicirt,}$$
ergeben in dieser Ordnung folgende Glieder:

$B_0^6B_4^3$			24.16^3
$B_0^5B_2B_3^2B_4$	9.16^3	$4.9.16^2$ $4.9.16^2$	
$B_0^5B_1B_3B_4^2$	-18.16^3		6.16^3 -6.16^3
$B_0^5B_3^4$		$-8.81.16$	
$B_0^5B_2^2B_4^2$		-2.16^3	-12.16^3 2.16^3
$B_0^4B_1B_2^2B_3B_4$	-6.16^3 -24.16^2	$-4.7.16^2$ -4.16^2	-24.16^2 3.16^3 8.16^2
$B_0^4B_1B_2B_3^3$	-9.16^2	$8.9.16$ $7.8.9.16$	

$B_0^4 B_2^3 B_3^2$	$12 . 16^2$	$-9 . 16^2$ $-9 . 16^2$	
$B_0^4 B_1^2 B_2 B_4^2$	$12 . 16^3$	$-4 . 9 . 16^2$ $12 . 16^2$	$3 . 16^3$
$B_0^4 B_1^2 B_3^2 B_4$	$18 . 16^2$ $-36 . 16^2$	$8 . 81 . 16$ $-8 . 27 . 16$	$6 . 16^2$ $-3 . 8 . 16^2$
$B_0^4 B_2^4 B_4$		$8 . 16^2$ $8 . 16^2$	$24 . 16^2$ -16^3
$B_0^3 B_1^3 B_2 B_3 B_4$	$27 . 16^2$ $6 . 16^2$ $24 . 16^2$	$-7 . 8 . 9 . 16$ $6 . 16^2$ $24 . 16$	$6 . 16^2$ $-12 . 16^2$
$B_0^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2$	$-3 . 16^2$ $-3 . 16^2$	$4 . 9 . 16$ $-7 . 8 . 16$ $4 . 9 . 16$	$6 . 16^2$ $8 . 16$
$B_0^3 B_1^4 B_4^2$	$-6 . 9 . 16^2$	$8 . 27 . 16$	
$B_0^3 B_1^3 B_3^3$	$36 . 16$	$-4 . 27 . 16$	$-24 . 16$
$B_0^3 B_1 B_2^4 B_3$		$7 . 16^2$ 16^2	$-6 . 16^2$ $-2 . 16^2$
$B_0^3 B_1^2 B_2^3 B_4$		$-2 . 16^2$ $-2 . 16^2$ $9 . 16^2$ $-3 . 16^2$	$-12 . 16^2$ $4 . 16^2$
$B_0^3 B_2^6$		$-2 . 16^2$	$2 . 16^2$
$B_0^2 B_1^5 B_3 B_4$	$-9 . 12 . 16$	$4 . 27 . 16$	
$B_0^2 B_1^4 B_2 B_3^2$	$12 . 16$	$12 . 16$	$-24 . 16$
$B_0^2 B_1^3 B_2^3 B_3$		$-4 . 7 . 16$ $-24 . 16$ $-4 . 16$	$3 . 16^2$ $8 . 16$
$B_0^2 B_1^4 B_2^2 B_4$		$-4 . 9 . 16$ $12 . 16$	$24 . 16$
$B_0^2 B_1^2 B_2^5$		$8 . 16$ $8 . 16$	-16^2
$B_0 B_1^5 B_2^2 B_3$		$6 . 16$	$-6 . 16$
$B_0 B_1^4 B_2^4$		$-2 . 16$	$2 . 16$

Das Resultat, als die einfachste Bedingungsgleichung für den Fall zweier gleicher Wurzeln einer biquadratischen Gleichung ist somit:

$$\begin{aligned}16^2 B_0^3 B_4^3 &+ 9.16 B_0^2 B_2 B_3^2 B_4 - 12.16 B_0^2 B_1 B_3 B_4^2 - 27 B_0^2 B_3^4 \\ &- 8.16 B_0^2 B_2^2 B_4^2 - 5.16 B_0 B_1 B_2^2 B_3 B_4 + 18 B_0 B_1 B_2 B_3^3 \\ &- 4 B_0 B_2^3 B_3^2 + 9.16 B_0 B_1^2 B_2 B_4^2 - 6 B_0 B_1^2 B_3^2 B_4 + 16 B_0 B_2^4 B_4 \\ &+ 18 B_1^3 B_2 B_3 B_4 + B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 27 B_1^4 B_4^2 - 4 B_1^3 B_3^3 + 4 B_1^2 B_2^3 B_4 = 0.\end{aligned}$$

8. Diese Werthe vereinfachen sich noch in den besondern Fällen:

a) Falls $A_4 = 0$, dann ist

$$A_5 = \frac{-B_2}{2B_0} A_3, \quad A_6 = -\frac{(B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)}{16 B_0^2} A_3.$$

Die Gleichung für p übergeht in

$$16 B_0^2 p^3 - 8 B_0 B_2 p - (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3) = 0.$$

Die Werthe von p sind alsdann

$$p = \frac{-3 A_3 A_6}{2 A_3 A_5} = -\frac{3(B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)}{16 B_0 B_2}$$

als der Werth der repetirten Wurzel und

$$p = \tfrac{3}{8} \frac{(B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)}{B_0 B_2}$$

als der dritte Werth. Die Bedingung der repetirten Wurzel der biquadratischen Gleichung übergeht alsdann in

$$27 (B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)^2 = 128 B_0 B_2^3.$$

b) Wenn $A_5 = 0$, alsdann ist $A_4 = \dfrac{B_2 A_3}{B_1}$, $A_6 = \dfrac{-B_3 A_3}{8 B_0}$

mithin die Gleichung für p:

$$8 B_0 B_1 p^3 + 8 B_0 B_2 p^2 - B_1 B_3 = 0,$$

das der repetirten Wurzel entsprechende p ist

$$p = \tfrac{9}{2} \frac{A_3 A_6}{A_4^2} = -\tfrac{9}{16} \frac{B_1^2 B_3}{B_0 B_2^2}$$

und die dritte Wurzel $\qquad p = \dfrac{9 B_1^3 B_3 - 8 B_0 B_2^3}{8 B_0 B_1 B_2^2}.$

Die Bedingungsgleichung ergibt sich sodann aus dem letzten Coefficienten der Gleichung für p, nämlich aus

$$\frac{B_1 B_3}{8 B_0 B_1} = \frac{9^2}{8.16^2} \frac{(9 B_1^3 B_3 - 8 B_0 B_2^3)}{B_0 B_1 B_2^2} \cdot \frac{B_1^4 B_3^2}{B_0^2 B_2^4}$$

d. i. aus $\qquad 16^2 B_0^2 B_2^6 = 9^2 (9 B_1^3 B_3 - 8 B_0 B_2^3) B_1^3 B_3.$

c) Zuletzt gibt der Fall $A_6 = 0$ für die weitern Coefficienten:

$$A_4 = \frac{(B_1 B_2 + 2 B_0 B_3)}{B_1^2} A_3$$

$$A_5 = \frac{B_3 A_3}{B_1}$$

und für die Gleichung für p

$$B_1^2 p^3 + (2B_0B_3 + B_1B_2)p^2 + B_1B_3 p = 0$$

d. i.

$$\left(p + \frac{2B_0B_3 + B_1B_2}{2B_1^2}\right)^2 p = 0.$$

Die entsprechende Bedingung ist sodann

$$(2B_0B_3 + B_1B_2)^2 = 4B_1^3 B_3.$$

VII.

Bestimmung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}}$ in geschlossener Form.

1. Nach diesen Vorbereitungen wird es möglich die Bedingungen anzugeben, unter welchen das Integral

$$S = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)}} \quad \text{welches für } x = \rho + \frac{1+my+ny^2}{1+m_1y+n_1y^2}$$

in

$$S = \int \frac{[(m-m_1) + 2(n-n_1)y + (nm_1-mn_1)y^2]\,dy}{\sqrt{[1+m_1y+n_1y^2][1+\rho-w_1+(m+m_1(\rho-w_1))y+(n+n_1(\rho-w_1))y^2]\,[1+\rho-w_2+(m+m_1(\rho-w_2))y+(n+n_1(\rho-w_2))y^2]\,[1+\rho-w_3+(m+m_1(\rho-w_3))y+(n+n_1(\rho-w_3))y^2]}}$$

übergeht, auf ein bereits gelöstes zurückgeführt wird. Es sei zur Abkürzung

$$1 + \rho - w_1 = B_4$$
$$m_1 + m + 2m_1(\rho - w_1) = B_3$$
$$n_1 + n + 2n_1(\rho-w_1) + m_1(m+m_1(\rho-w_1)) = B_2$$
$$mn_1 + nm_1 + 2m_1n_1(\rho-w_1) = B_1$$
$$n_1(n+n_1(\rho-w_1)) = B_0$$
$$(1+\rho-w_2)(1+\rho-w_3) = C_4$$
$$(m+m_1(\rho-w_2))(1+\rho-w_3) + (1+\rho-w_2)(m+m_1(\rho-w_3)) = C_3$$
$$(1+\rho-w_2)(n+n_1(\rho-w_3)) + (m+m_1(\rho-w_2))(m+m_1(\rho-w_3)) + (n+n_1(\rho-w_2))(1+\rho-w_3) = C_2$$
$$(m+m_1(\rho-w_2))(n+n_1(\rho-w_3)) + (n+n_1(\rho-w_2))(m+m_1(\rho-w_3)) = C_1$$
$$(n+n_1(\rho-w_2))(n+n_1(\rho-w_3)) = C_0$$

und daher das Integral

$$S = \int \frac{[m-m_1+2(n-n_1)y + (nm_1-mn_1)y^2]\,dy}{\sqrt{[B_0y^4+B_1y^3+B_2y^2+B_3y+B_4][C_0y^4+C_1y^3+C_2y^2+C_3y+C_4]}}.$$

Es lassen sich höchstens zwei in frühern Capiteln angeführte Vereinfachungen der biquadratischen Theile vornehmen; ohne dass entweder die Anzahl der Bedingungen zu gross ausfalle oder für die unbestimmten Grössen Werthe resultiren, die die Substitution unbrauchbar machen. Ein solcher Versuch wäre folgender.

Man setze als erste Bedingung:

$$\begin{aligned}&16^2 B_0^3 B_4^3 + 9.16 B_0^2 B_2 B_3^2 B_4 - 12.16 B_0^2 B_1 B_3 B_4^2 - 27 B_0^2 B_3^4 \\ &\quad - 8.16 B_0^2 B_2^2 B_4^2 - 5.16 B_0 B_1 B_2^2 B_3 B_4 + 18 B_0 B_1 B_2 B_3^3 - 4 B_0 B_2^3 B_3^2 \\ &\quad + 9.16 B_0 B_1^2 B_2 B_4^2 - 6 B_0 B_1^2 B_3^2 B_4 + 16 B_0 B_2^4 B_4 + 18 B_1^3 B_2 B_3 B_4 \\ &\quad + B_1^2 B_2^2 B_3^2 - 27 B_1^4 B_4^2 - 4 B_1^3 B_3^3 + 4 B_1^2 B_2^3 B_4 = 0\end{aligned}$$

wodurch für

$$B_1^3 - 4 B_0 B_1 B_2 + 8 B_0^2 B_3 = A_3$$

$$B_1^2 B_2 + 2 B_0 B_1 B_3 + 16 B_0^2 B_4 - 4 B_0 B_2^2 = A_4$$

wenn zur Vereinfachung

$$\begin{aligned}F_6 &= 2[-18 B_0^2 B_3^2 + 14 B_0 B_1 B_2 B_3 - 3 B_1^3 B_3 + B_1^2 B_2^2 \\ &\quad + 16 B_0^2 B_2 B_4 - 4 B_0 B_2^3 - 6 B_0 B_1^2 B_4] \\ F_7 &= -48 B_0^2 B_3 B_4 + 32 B_0 B_1 B_2 B_4 - 9 B_1^3 B_4 + 3 B_0 B_1 B_3^2 \\ &\quad + B_1^2 B_2 B_3 - 4 B_0 B_2^2 B_3\end{aligned}$$

und $p = \frac{-A_4}{A_3} + \frac{2F_7}{F_6}$ gesetzt wird, ferner die Hilfsgrössen

$$\begin{aligned}D_0 &= B_0 \\ D_1 &= 4 B_0 p + B_1 \\ D_2 &= 6 B_0 p^2 + 3 B_1 p + B_2 \\ D_3 &= 4 B_0 p^3 + 3 B_1 p^2 + 2 B_2 p + B_3 \\ D_4 &= B_0 p^4 + B_1 p^3 + B_2 p^2 + B_3 p + B_4\end{aligned}$$

eingeführt werden; die Wurzeln folgende Form annehmen: a) für $D_2 > 2\sqrt{D_0 D_4}$

$$\begin{aligned}B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = B_0 \left[y - p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\right] \left[y - p + \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\right] \\ \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}}\right)}\right] \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}}\right)}\right]\end{aligned}$$

und für $D_2 < 2\sqrt{D_0 D_4}$

$$\begin{aligned}B_0 y^4 + B_1 y^3 + B_2 y^2 + B_3 y + B_4 = B_0 \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\right] \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\right] \\ \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{i \arccos -\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}}\right)}\right] \left[y - p - \sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}\, e^{-i \arccos -\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}}\right)}\right].\end{aligned}$$

Der Fall $D_2 = 2\sqrt{D_0 D_4}$ kann nicht stattfinden, da die Bedingung zweier gleicher Wurzelfactoren diesen Fall als einen unmöglichen ausschliesst. Es lassen sich jedoch diese Fälle vereinen, wenn $p = \frac{-F_7}{F_6}$ statuirt wird und die Wurzelfactoren in einer andern Weise, die diese Beachtung nicht erheischt, geschrieben werden. Nach N. 9 in III. sind alsdann diese Factoren

$$\begin{aligned}B_0 [y-p] [y-p] \left[y - p - \frac{1}{2B_0}\left(\sqrt{\frac{A_3}{4 B_0 p + B_1}} - (4 B_0 + B_1)\right)\right] \left[y - p - \frac{1}{2B_0}\left(\sqrt{\frac{A_3}{4 B_0 p + B_1}}\right.\right. \\ \left.\left. + 4 B_0 p + B_1\right)\right].\end{aligned}$$

Analog sei ferner:

$$16^2 C_0^3C_4^3 + 9.16\,C_0^2C_2C_3^2C_4 - 12.16\,C_0^2C_1C_3C_4^2 - 27\,C_0^2C_3^4$$
$$-8.16\,C_0^2C_2^2C_4^2 - 5.16\,C_0C_1C_2^2C_3C_4 + 18\,C_0C_1C_2C_3^3 - 4\,C_0C_2^3C_3^2$$
$$+9.16\,C_0C_1^2C_2C_4^2 - 6\,C_0C_1^2C_3^2C_4 + 16\,C_0C_2^4C_4 + 18\,C_1^3C_2C_3C_4$$
$$+C_1^2C_2^2C_3^2 - 27\,C_1^4C_4^2 - 4\,C_1^3C_3^3 + 4\,C_1^2C_2^3C_4 = 0$$

$$A'_3 = C_1^3 - 4\,C_0C_1C_2 + 8\,C_0^2C_3$$
$$A'_4 = C_1^2C_2 + 2\,C_0C_1C_3 + 16\,C_0^2C_4 - 4\,C_0C_2^2$$
$$G_6 = 2[-18\,C_0^2C_3^2 + 14\,C_0C_1C_2C_3 - 3\,C_1^3C_3 + C_1^2C_2^2 + 16\,C_0^2C_2C_4$$
$$-4\,C_0C_2^3 - 6\,C_0C_1^2C_4]$$
$$G_7 = -48\,C_0^2C_3C_4 + 32\,C_0C_1C_2C_4 - 9\,C_1^3C_4 + 3\,C_0C_1C_3^2 + C_1^2C_2C_3$$
$$-4\,C_0C_2^2C_3$$

$$p' = \frac{-A'_4}{A'_3} + \frac{2\,G_7}{G_6}$$

$$E_0 = C_0$$
$$E_1 = 4\,C_0p' + C_1$$
$$E_2 = 6\,C_0p'^2 + 3\,C_1p' + C_2$$
$$E_3 = 4\,C_0p'^3 + 3\,C_1p'^2 + 2\,C_2p' + C_3$$
$$E_4 = C_0p'^4 + C_1p'^3 + C_2p'^2 + C_3p' + C_4$$

alsdann ist:

$$C_0y^4 + C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4 = C_0\left[y - p' + \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}}\right]\left[y - p' + \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}}\right]$$
$$\left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}}\,e^{i\arccos\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_1E_3}{E_0E_4}}\right)}\right]\left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}}\,e^{-i\arccos\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_1E_3}{E_0E_4}}\right)}\right]$$

im Fall $E_2 > 2\sqrt{E_0E_4}$ und

$$C_0y^4 + C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4 = \left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}}\right]\left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}}\right]$$
$$\left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}}\,e^{i\arccos-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_1E_3}{E_0E_4}}\right)}\right]\left[y - p' - \sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}}\,e^{-i\arccos-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_1E_3}{E_0E_4}}\right)}\right]$$

für $E_2 < 2\sqrt{E_0E_4}$. Der Fall $E_2 = 2\sqrt{E_0E_4}$ ist wie erwähnt unmöglich. Oder auch

$$C_0y^4 + C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4 = C_0[y-p'][y-p']\left[y - p' - \frac{1}{2C_0}\left(\sqrt{\frac{A'_3}{4\,C_0p' + B_1}}\right.\right.$$
$$\left.\left.-(4C_0p + C_1)\right)\right]\left[y - p' + \frac{1}{2C_0}\left(\sqrt{\frac{A'_3}{4C_0p' + C_1}} + 4\,C_0p' + C_1\right)\right]$$

ohne Rücksicht ob E_2 grösser oder kleiner als $2\sqrt{E_0E_4}$, nur dass p' in dieser Gleichung den Werth $p' = \frac{-G_7}{G_6}$ erhält. Uebrigens kann in den vorigen Gleichungen überall statt $\sqrt[4]{\frac{D_4}{D_0}}$ und $\sqrt[4]{\frac{E_4}{E_0}}$, $\sqrt{\frac{D_3}{D_1}}$ und $\sqrt{\frac{E_3}{E_1}}$ gesetzt werden, weil diess die Natur der Werthe p und p′ sie mögen selbst, welche immer der beiden Bedeutungen annehmen, mit sich bringt.

Durch die zwei aufgestellten Bedingungsgleichungen zur Bestimmungen der unbestimmten Grössen ρ, m, m_1, n, n_1, erlangt das Integral bereits die einfachere Form

$$S = \frac{1}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{[m - m_1 + 2(n - n_1)y + (nm_1 - mn_1)y^2]\,dy}{\left(y - p \mp \sqrt{\frac{D_3}{D_1}}\right)\left(y - p' \mp \sqrt{\frac{E_3}{E_1}}\right)\sqrt{\left[(y-p)^2 + 2(y-p)\sqrt{\frac{D_3}{D_1}}\left(\pm 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_1 D_3}{D_0 D_4}}\right) + \frac{D_3}{D_1}\right]\left[(y-p')^2 + 2(y-p')\sqrt{\frac{E_3}{E_1}}\left(\pm 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_1 E_3}{E_0 E_4}}\right) + \frac{E_3}{E_1}\right]}}$$

wo die jedesmaligen Zeichen von ± 1 der früher erwähnten Bedingungen gemäss zu bestimmen sind.

Dieser lästigen Unterscheidung wegen, möge die zweite Schreibart gelten, für welche das Integral folgende Form annimmt:

$$S = \frac{1}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{[m - m_1 + 2(n - n_1)y + (nm_1 - mn_1)y^2]\,dy}{(y-p)(y-p')\sqrt{\left[\left(y + p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{(4B_0 p + B_1)}\right]\left[\left(y + p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{(4C_0 p' + C_1)}\right]}},$$

worin $p = \frac{-F_7}{F_6}$, $p' = \frac{-G_7}{G_6}$.

$$\frac{m - m_1 + 2(n - n_1)y + (nm_1 - mn_1)y^2}{(y-p)(y-p')} \text{ zerfällt in die Theile}$$

$$= nm_1 - mn_1 + \frac{A}{y-p} + \frac{B}{y-p'} \text{ wo } A, B \text{ ihre Bedeutung}$$

durch die beiden Gleichungen:

$$2(n - n_1) = -(nm_1 - mn_1)(p + p') + A + B$$
$$m - m_1 = pp'(nm_1 - mn_1) - Ap' - Bp$$

erhalten, und zwar ist

$$A = \frac{2(n - n_1)p + (nm_1 - mn_1)p^2 + m - m_1}{p - p'}$$

$$B = -\left[\frac{2(n - n_1)p' + (nm_1 - mn_1)p'^2 + m - m_1}{p - p'}\right].$$

Das Integral ist somit in die drei Theile zerlegt

$$S = \frac{(nm_1 - mn_1)}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{dy}{k^{\frac{1}{2}}} + \frac{A}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{dy}{(y-p)k^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ \frac{B}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{dy}{(y-p')k^{\frac{1}{2}}}$$

worin k die Grösse

$$y^4 + \left[2(p+p') + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}\right]y^3 + \left[\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1}\right.$$
$$\left. + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1} + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)\right]y^2$$

$$+\left[\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right)+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\right.$$
$$\left.\left(\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}\right)\right]y$$
$$+\left[\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right]\left[\left(p'+\frac{C_1}{2C_0^2}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}\right]$$

vorstellt.

2. Man bestimme den Werth von k den es annimmt, wenn y in $\frac{1}{z_1}+p$ und in $\frac{1}{z_2}+p'$ übergeht, und bezeichne durch k_1 und k_2 die bezüglichen Werthe aus folgenden Gleichungen:

$$k_1=1+\left[6p+2p'+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right]z_1+\left[6p^2+3p\left(2p+2p'\right.\right.$$
$$\left.+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right)+\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}+\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2$$
$$\left.-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\right]z_1^2+\left[4p^3\right.$$
$$+3p^2\left(2p+2p'+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right)+2p\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right.$$
$$\left.+\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\right)$$
$$+\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right)+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}\right)\right]z_1^3+\left[p^4+p^3\left(2p+2p'+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right)+p^2\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}+\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\right)$$
$$+p\left(\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right)+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(\left(p'+\frac{1}{2C_0}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C}\right)\right)+\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right)\left(\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}\right)\right]z_1^4.$$

$$k_2=1+\left[6p'+2p+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right]z_2+\left[6p'^2+3p'\left(2p+2p'+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right)\right.$$
$$+\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}+\left(p'+\frac{C'}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}$$

$$+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\Big]\, z_2^2+\Big[4p'^3+3p'^2\left(2p+2p'+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right)$$

$$+\,2p'\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}+\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}\right.$$

$$\left.+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\right)+\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right)$$

$$+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}\right)\Big]\, z_2^3+\Big[p'^4$$

$$+\,p'^3\left(2p+2p'+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right)+p'^2\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right.$$

$$\left.+\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\right)$$

$$+\,p'\left(\left(2p'+\frac{C_1}{{}_0C}\right)\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{2B_0}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right)+\left(2p+\frac{B_1}{2B_0}\right)\left(\left(p'\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{C'}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}\right)\right)+\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right)\left(\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}\right)\Big]\, z_2^4.$$

Ferner sei Kürze halber

$$G_4 = 1$$

$$G_3 = 6p+2p'+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}$$

$$G_2 = 6p^2+3p\left(2p+2p'+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right)+\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2$$

$$-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}+\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}$$

$$+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)$$

$$G_1 = 4p^3+3p^2\left(2p+2p'+\frac{B_1}{B_0}+\frac{C_1}{C_0}\right)$$

$$+\,2p\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}+\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\right)$$

$$+\left(2p'+\frac{C_1}{C_0}\right)\left(\left(p+\frac{B_1}{2B_0}\right)^2-\frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0p+B_1}\right)$$

$$+\left(2p+\frac{B_1}{B_0}\right)\left(\left(p'+\frac{C_1}{2C_0}\right)^2-\frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0p'+C_1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
G_0 = {} & p^4 + p^3\left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}\right) + p^2\Bigg(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 \\
& - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1} \\
& + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)\Bigg) + p\Bigg(\left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)\left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1}\right) \\
& + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right)\left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1}\right)\Bigg) \\
& + \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1}\right)\left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1}\right)
\end{aligned}
$$

also
$$k_1 = G_0 z_1^4 + G_1 z_1^3 + G_2 z_1^2 + G_3 z_1 + G_4,$$

$$H_4 = 1$$

$$H_3 = 6p' + 2p + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}$$

$$
\begin{aligned}
H_2 = {} & 6p'^2 + 3p'\left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}\right) + \left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 \\
& - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1} \\
& + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_1 = {} & 4p'^3 + 3p'^2\left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}\right) + 2p'\Bigg(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 \\
& - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1} \\
& + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right)\left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)\Bigg) + \left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)\left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right) - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1}\right) \\
& + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right)\left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0 = {} & p'^4 + p'^3\left(2p + 2p' + \frac{B_1}{B_0} + \frac{C_1}{C_0}\right) + p'^2\Bigg(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 \\
& - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1} + \left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1} \\
& + \left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)\left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right)\Bigg) + p'\Bigg(\left(2p' + \frac{C_1}{C_0}\right)\left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1}\right) \\
& + \left(2p + \frac{B_1}{B_0}\right)\left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1}\right)\Bigg) \\
& + \left(\left(p + \frac{B_1}{2B_0}\right)^2 - \frac{1}{4B_0^2}\,\frac{A_3}{4B_0 p + B_1}\right)\left(\left(p' + \frac{C_1}{2C_0}\right)^2 - \frac{1}{4C_0^2}\,\frac{A'_3}{4C_0 p' + C_1}\right)
\end{aligned}
$$

$$k_2 = H_0 z_2^4 + H_1 z_2^3 + H_2 z_2^2 + H_3 z_2 + H_4.$$

Da bisher erst zwei Bedingungsgleichungen für die fünf unbestimmten Grössen statuirt wurden, sei ferner:

$$G_1^3 - 4G_0 G_1 G_2 + 8G_0^2 G_3 = 0 \quad \text{und}$$
$$H_1^3 - 4H_0 H_1 H_2 + 8H_0^2 H_3 = 0. \quad \text{Alsdann ist}$$

$$\begin{aligned}
k_1 = G_0 &\left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} - \frac{1}{4G_0}\sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 + 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_4}}\right] \\
&\left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} - \frac{1}{4G_0}\sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 - 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_4}}\right] \\
&\left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} + \frac{1}{4G_0}\sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 - 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_4}}\right] \\
&\left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0} + \frac{1}{4G_0}\sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 + 2\sqrt{G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_4}}\right] \\
k_2 = H_0 &\left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0} - \frac{1}{4H_0}\sqrt{-8H_0H_2 + 3H_1^2 + 2\sqrt{(H_1^2 - 4H_0H_2)^2 - 64H_0^3H_4}}\right] \\
&\left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0} - \frac{1}{4H_0}\sqrt{-8H_0H_2 + 3H_1^2 - 2\sqrt{(H_1^2 - 4H_0H_2)^2 - 64H_0^3H_4}}\right] \\
&\left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0} + \frac{1}{4H_0}\sqrt{-8H_0H_2 + 3H_1^2 - 2\sqrt{(H_1^2 - 4H_0H_2)^2 - 64H_0^3H_0}}\right] \\
&\left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0} + \frac{1}{4H_0}\sqrt{-8H_0H_2 + 3H_1^2 + 2\sqrt{(H_1^2 - 4H_0H_2)^2 - 64H_0^3H_4}}\right].
\end{aligned}$$

Das Integral ist somit auf die drei Theile

$$S = -\frac{A}{\sqrt{B_0C_0}}\int\frac{z_1\,dz_1}{k_1^{\frac12}} - \frac{B}{\sqrt{B_0C_0}}\int\frac{z_2\,dz_2}{k_2^{\frac12}} + \frac{(nm_1 - mn_1)}{\sqrt{B_0C_0}}\int\frac{dy}{k^{\frac12}}$$

reducirt, welches wohl die Schwierigkeit nicht behebt, jedoch eine Lösung vorbereitet.

3. Man statuire als fünfte Bedingungsgleichung

$$nm_1 - mn_1 - \frac{AG_1}{4G_0} - \frac{BH_1}{4H_0} = 0$$

wodurch sämmtliche fünf unbestimmte Grössen bestimmt sind; dadurch ist zugleich

$$\frac{nm_1 - mn_1}{\sqrt{B_0C_0}}\int\frac{dy}{k^{\frac12}} = \frac{AG_1}{\sqrt{B_0C_0}\,.\,4G_0}\int\frac{dy}{k^{\frac12}} + \frac{BH_1}{\sqrt{B_0C_0}\,.\,4H_0}\int\frac{dy}{k^{\frac12}}$$

und weil

$$k^{\frac12} = \frac{k_1^{\frac12}}{z_1^2}, \quad y = \frac{1}{z_1} + p$$

$$k^{\frac12} = \frac{k_2^{\frac12}}{z_2^2}, \quad y = \frac{1}{z_2} + p',$$

$$\frac{nm_1 - mn_1}{\sqrt{B_0C_0}}\int\frac{dy}{k^{\frac12}} = \frac{-AG_1}{4G_0\sqrt{B_0C_0}}\int\frac{dz_1}{k_1^{\frac12}} - \frac{BH_1}{4H_0\sqrt{B_0C_0}}\int\frac{dz_2}{k_2^{\frac12}}.$$

Das fragliche Integral ist dadurch

$$S = \frac{-A}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{d z_1 \left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0}\right]}{k_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{\sqrt{B_0 C_0}} \int \frac{d z_2 \left[z_2 + \frac{H_1}{4H_0}\right]}{k_2^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man zur Abkürzung im Schreiben

$$\frac{1}{4G_0}\sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 + 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_4}} = \alpha$$

$$\frac{1}{4G_0}\sqrt{-8G_0G_2 + 3G_1^2 - 2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_4}} = \beta$$

und überdiess $z_1 + \frac{G_1}{4G_0} = \sqrt{u + \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$; so erhält man für das fragliche Integral

$$\frac{1}{\sqrt{G_0}} \int \frac{d z_1 \left[z_1 + \frac{G_1}{4G_0}\right]}{\sqrt{\left[\left(z_1 + \frac{G_1}{4G_0}\right)^2 - \alpha^2\right]\left[\left(z_1 + \frac{G_1}{4G_0}\right)^2 - \beta^2\right]}} = \frac{1}{2\sqrt{G_0}} \int \frac{2du}{\sqrt{4u^2 - (\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{G_0}} \operatorname{arc\,Sin} \frac{2u}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Werden darin die Werthe

$$u = \left(z_1 + \frac{G_1}{4G_0}\right)^2 - \frac{(\alpha^2+\beta^2)}{2} = \frac{1}{16G_0^2}\left[\frac{(4G_0 + G_1(y-p))^2}{(y-p)^2} - (3G_1^2 - 8G_0G_2)\right]$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{4G_0^2}\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_4}$$

gesetzt; so resultirt für das Integral S, wenn der zweite Theil analog gebildet wird, der Werth

$$S = \frac{-A}{2\sqrt{B_0C_0G_0}} \operatorname{arc\,Sin} \tfrac{1}{2}\left[\frac{(4G_0 + G_1(y-p))^2 - (3G_1^2 - 8G_0G_2)(y-p)^2}{(y-p)^2\sqrt{(G_1^2 - 4G_0G_2)^2 - 64G_0^3G_4}}\right]$$
$$- \frac{B}{2\sqrt{B_0C_0H_0}} \operatorname{arc\,Sin} \tfrac{1}{2}\left[\frac{(4H_0 + H_1(y-p'))^2 - (3H_1^2 - 8H_0H_2)(y-p')^2}{(y-p')^2\sqrt{(H_1^2 - 4H_0H_2)^2 - 64H_0^3H_4}}\right].$$

4. Die zweite aus vorigen Kapiteln ersichtliche und noch mögliche Lösung des Problems ist folgende. Man setze als die ersten Bedingungen:

$$B_1^3 - 4B_0B_1B_2 + 8B_0^2B_3 = 0$$
$$B_1^2B_4 - B_0B_3^2 = 0 \quad \text{alsdann ist:}$$

$$B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = B_0\left[y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0}\right]^2\left[y + \frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0}\right]^2$$

und $$S = \frac{1}{\sqrt{B_0}} \int \frac{m - m_1 + 2(n - n_1)y + (nm_1 - mn_1)y^2}{\left(y + \frac{B_1 - \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0}\right)\left(y + \frac{B + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0}\right)} \cdot \frac{dy}{\sqrt{C_0y^4 + C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4}}.$$

Die Entwicklung des ersten Factors ergibt

$$\frac{m-m_1+2(n-n_1)y+(nm_1-mn_1)y^2}{y^2+\frac{B_1}{2B_0}y+\frac{4B_0B_2-B_1^2}{8B_0}} = nm_1-mn_1$$

$$+\frac{\left[2(n-n_1)-\frac{B_1}{2B_0}(nm_1-mn_1)\right]y+m-m_1+\frac{(nm_1-mn_1)(B_1^2-4B_0B_2)}{8B_0^2}}{\left[y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right]\left[y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right]}$$

Die ganze Zahl nm_1-mn_1 und die Partialbrüche

$$\frac{A}{y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}}+\frac{B}{y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}}.$$

Die Werthe der Coefficienten A und B sind alsdann

$$A = \frac{8B_0^2(m-m_1)+(nm_1-mn_1)(B_1^2-4B_0B_2)-[4(n-n_1)B_0-B_1(nm_1-mn_1)](B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2})}{4B_0\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}$$

$$B = -\frac{[8B_0^2(m-m_1)+(nm_1-mn_1)(B_1^2-4B_0B_2)-[4(n-n_1)B_0-B_1(nm_1-mn_1)](B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2})]}{4B_0\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}$$

Das Integral ist somit in drei Theile zerlegt,

$$S = \frac{1}{\sqrt{B_0}}\int\frac{(nm_1-mn_1)\,dy}{k^{\frac{1}{2}}}+\frac{A}{\sqrt{B_0}}\int\frac{dy}{\left[y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right]k^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{B}{\sqrt{B_0}}\int\frac{dy}{\left[y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right]k^{\frac{1}{2}}},$$

worin k die Grösse $C_0y^4+C_1y^3+C_2y^2+C_3y+C_4$ vorstellt. Ferner sei für $y=\frac{1}{z_1}-\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)$ Kürze halber

$$S_4 = C_0$$

$$S_3 = -4C_0\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)+C_1$$

$$S_2 = 6C_0\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2-3C_1\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)+C_2$$

$$S_1 = -4C_0\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^3+3C_1\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2$$

$$-2C_2\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)+C_3$$

$$S_0 = C_0\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^4-C_1\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^3$$

$$+C_2\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2-C_3\left(\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)+C_4$$

und für $y = \frac{1}{z_2} - \left(\frac{B_1 + \sqrt{3B_1^2 - 8B_0B_2}}{4B_0}\right)$

$$K_4 = C_0$$

$$K_3 = -4C_0\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right) + C_1$$

$$K_2 = 6C_0\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2 - 3C_1\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right) + C_2$$

$$K_1 = -4C_0\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^3 + 3C_1\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2$$
$$-2C_2\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right) + C_3$$

$$K_0 = C_0\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^4 - C_1\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^3$$
$$+ C_2\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2 - C_3\left(\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right) + C_4$$

und somit $A\int\frac{dy}{\left(y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)k^{\frac{1}{2}}}$

$$= -A\int\frac{z_1\,dz_1}{\sqrt{S_4+S_3z_1+S_2z_1^2+S_1z_1^3+S_0z_1^4}}$$

$$B\int\frac{dy}{\left(y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)k^{\frac{1}{2}}} =$$

$$-B\int\frac{z_2\,dz_2}{\sqrt{K_4+K_3z_2+K_2z_2^2+K_1z_2^3+K_0z_2^4}}.$$

Die zwei folgenden Bedingungen seien

$$S_1^3 - 4S_0S_1S_2 + 8S_0^2S_3 = 0$$

$K_1^3 - 4K_0K_1K_2 + 8K_0^2K_3 = 0$ mithin ist alsdann

$$k_1 = S_0z_1^4 + S_1z_1^3 + S_2z_1^2 + S_3z_1 + S_4$$

$$= S_0\left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} - \frac{1}{4S_0}\sqrt{3S_1^2 - 8S_0S_2 + 2\sqrt{(S_1^2-4S_0S_2)^2 - 64S_0^3S_4}}\right]$$
$$\left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} - \frac{1}{4S_0}\sqrt{3S_1^2 - 8S_0S_2 - 2\sqrt{(S_1^2-4S_0S_2)^2 - 64S_0^3S_4}}\right]$$
$$\left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} + \frac{1}{4S_0}\sqrt{3S_1^2 - 8S_0S_2 - 2\sqrt{(S_1^2-4S_0S_2)^2 - 64S_0^3S_4}}\right]$$
$$\left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0} + \frac{1}{4S_0}\sqrt{3S_1^2 - 8S_0S_2 + 2\sqrt{(S_1^2-4S_0S_2)^2 - 64S_0^3S_4}}\right]$$

$$k_2 = K_0 z_2^4 + K_1 z_2^3 + K_2 z_2^2 + K_3 z_2 + K_4$$

$$= k_0 \left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0} - \frac{1}{4K_0}\sqrt{3K_1^2 - 8K_0K_2 + 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_4}}\right]$$

$$\left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0} - \frac{1}{4K_0}\sqrt{3K_1^2 - 8K_0K_2 - 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_4}}\right]$$

$$\left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0} + \frac{1}{4K_0}\sqrt{3K_1^2 - 8K_0K_2 - 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_0}}\right]$$

$$\left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0} + \frac{1}{4K_0}\sqrt{3K_1^2 - 8K_0K_2 + 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_4}}\right]$$

und das Integral

$$S = \frac{(nm_1 - mn_1)}{\sqrt{B_0}}\int\frac{dy}{k^{\frac{1}{2}}} - \frac{A}{\sqrt{B_0}}\int\frac{z_1\,dz_1}{k_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{B}{\sqrt{B_0}}\int\frac{z_2\,dz_2}{k_2^{\frac{1}{2}}}.$$

Nimmt man ferner als letzte Bedingung

$$nm_1 - mn_1 - \frac{AS}{4S_0} - \frac{BK_1}{4K_0} = 0$$

so übergeht das Integral in die beiden Theile

$$S = -\frac{A}{\sqrt{B_0S_0}}\int\frac{dz_1\left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0}\right]}{\sqrt{\left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0}\right)^2 - \alpha^2\right]\left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0}\right)^2 - \beta^2\right]}}$$

$$-\frac{B}{\sqrt{B_0K_0}}\int\frac{dz_2\left[z_2 + \frac{K_1}{4K_0}\right]}{\sqrt{\left[\left(z_2 + \frac{K_1}{4K_0}\right)^2 - \gamma^2\right]\left[\left(z_2 + \frac{K_1}{4K_0}\right)^2 - \delta^2\right]}}$$

wenn $\frac{1}{4S_0}\sqrt{-8S_0S_2 + 3S_1^2 + 2\sqrt{(S_1^2 - 4S_0S_2)^2 - 64S_0^3S_4}} = \alpha$

$$\frac{1}{4S_0}\sqrt{-8S_0S_2 + 3S_1^2 - 2\sqrt{(S_1^2 - 4S_0S_2)^2 - 64S_0^3S_4}} = \beta$$

$$\frac{1}{4K_0}\sqrt{-8K_0K_2 + 3K_1^2 + 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_4}} = \gamma$$

$$\frac{1}{4K_0}\sqrt{-8K_0K_2 + 3K_1^2 - 2\sqrt{(K_1^2 - 4K_0K_2)^2 - 64K_0^3K_4}} = \delta$$

gesetzt wird. Für $z_1 + \frac{S_1}{4S_0} = \sqrt{u_1 + \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$ ist alsdann

$$\frac{-A}{\sqrt{B_0S_0}}\int\frac{dz_1\left[z_1 + \frac{S_1}{4S_0}\right]}{\sqrt{\left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0}\right)^2 - \alpha^2\right]\left[\left(z_1 + \frac{S_1}{4S_0}\right)^2 - \beta^2\right]}} = -\frac{1}{2\sqrt{B_0S_0}}\int\frac{2\,du}{\sqrt{4u_1^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{B_0S_0}}\arcsin\frac{2u_1}{\alpha^2 - \beta^2} \quad \text{und wegen}$$

$$\left(y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2 u_1 = \frac{1}{16} S_0^2\left[\left(4S_0+S_1\left(y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)\right)^2-\right.$$

$$\left.-(3S_1^2-8S_0S_2)\left(y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2\right]$$

$$\frac{-A}{\sqrt{B_0S_0}}\int\frac{dz_1\left[z_1+\frac{S_1}{4S_0}\right]}{\sqrt{\left[\left(z_1+\frac{S_1}{4S_0}\right)^2-\alpha^2\right]\left[\left(z_1+\frac{S_1}{4S_0}\right)^2-\beta^2\right]}}=$$

$$\frac{-A}{2\sqrt{B_0S_0}}\operatorname{arc\,Sin}\frac{1}{2}\frac{\left[\left(4S_0+S_1\left(y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)\right)^2-(3S_1^2-8S_0S_2)\left(y+\frac{B_1}{4B_0}-\frac{\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2\right]}{\sqrt{(S_1^2-4S_0S_2)^2-64S_0^3S_4}\left(y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2}.$$

Wird das zweite Theilintegrale dem ersten nachgebildet; so ist das Endresultat

$$S=\frac{-A}{2\sqrt{B_0S_0}}\operatorname{arc\,Sin}\frac{1}{2}\frac{\left[\left(4S_0+S_1\left(y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)\right)^2-(3S_1^2-8S_0S_2)\left(y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2\right]}{\left(y+\frac{B_1-\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2\sqrt{(S_1^2-4S_0S_2)^2-64S_0^3S_4}}$$

$$\frac{-B}{2\sqrt{B_0K_0}}\operatorname{arc\,Sin}\frac{1}{2}\frac{\left[\left(4K_0+K_1\left(y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)\right)^2-(3K_1^2-8K_0K_2)\left(y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2\right]}{\left(y+\frac{B_1+\sqrt{3B_1^2-8B_0B_2}}{4B_0}\right)^2\sqrt{(K_1^2-4K_0K_2)^2-64K_0^3K_4}}$$

5. Das bestimmte Integral $\int_A^B\frac{dx}{\sqrt{(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)}}$

biethet nach den Werthen von A und B reelle oder imaginäre Glieder. Seien $w_1 > w_2 > w_3$ die Wurzeln ihrer Grösse nach geordnet, und alle zuerst positiv; dann ist dasselbe für alle negativen Werthe, so wie für alle positiven unter w_3 imaginär und wird erst für $x = w_3$ bis $x = w_2$ reell. Von w_2 bis w_1 erhält es wieder einen imaginären Werth. Für w_1 bis ∞ ergibt es wieder reelle Werthe. Die Grenzen A und B sind also in diesem Fall zwischen $x = w_3$ und $x = w_2$

$x = w_1$ bis $x = \infty$.

Sei eine der Wurzeln negativ, z. B. für w_1 negativ; so wird das Integral reell für

$x = 0$ angefangen bis $x = w_3$,
$x = w_3$ angefangen bis $x = \infty$,
$x = 0$ angefangen bis $x = -w_1$;

für $-w_2$

von $x = 0$ angefangen bis $x = w_3$
$x = w_2$ „ bis $x = \infty$
$x = 0$ „ bis $x = -w_2$;

für $-w_3$

von $x = 0$ angefangen bis $x = w_2$
$x = w_1$ „ bis $x = \infty$
$x = 0$ „ bis $x = -w_3$.

Sind 2 Wurzeln negativ; z. B. $-w_1$ und $-w_2$ dann bleibt das Integral reell für

$$x = w_3 \quad \text{bis} \quad x = \infty$$
$$x = -w_2 \text{ bis } x = -w_1;$$

für $-w_1$ und $-w_3$ von

$$x = w_2 \quad \text{bis} \quad x = \infty$$
$$x = -w_3 \text{ bis } x = -w_1;$$

für $-w_2$ und $-w_3$ von

$$x = w_1 \quad \text{bis} \quad x = \infty$$
$$x = -w_3 \text{ bis } x = -w_2.$$

Sind endlich alle Wurzeln negativ, dann hat das Integral für alle positiven Werthe so wie für $x = -w_2$ bis $x = -w_1$ reelle Werthe. Da aber das Integral für mehrere dieser gefundenen Werthe seine Stetigkeit verliert, und zu einem singulären Integrale wird; so frägt es sich, ob diese Grenzen ihre Anwendung zulassen.

Sei $\dfrac{1}{\sqrt{(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)}} = f(x)$ alsdann ist

$$S = \int_A^B f(x)\,dx = \int_A^w f(x)\,dx + \int_w^B f(x)\,dx$$

worin w die Wurzel vorstellen mag, für welche das Integral die Stetigkeit verliert.

Zugleich ist
$$S = \lim \left[\int_A^{w-\alpha\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{w+\beta\varepsilon}^B f(x)\,dx\right]$$

(worin α, β beliebige, ε eine unendlich kleine Grösse vorstellen), das singuläre Integral und

$$S_1 = \lim \left[\int_A^{w-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{w+\varepsilon}^B f(x)\,dx\right]$$

seien Hauptwerthe, somit

$$S - S_1 = \lim \left[\int_{w-\varepsilon}^{w-\alpha\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{w+\beta\varepsilon}^{w+\varepsilon} f(x)\,dx\right].$$

Ferner ist

$$\int_{w-\varepsilon}^{w-\alpha\varepsilon} f(x)\,(x-w)\,\frac{dx}{x-w} = \xi\, f(\xi)\,.\,\lambda(\alpha),$$

wo ξ zwischen den Grenzen $w-\varepsilon$ und $w-\alpha\varepsilon$ liegt. Sei ferner $(\xi-w)\,f(\xi)$ für den speciellen Werth w gleich F; so ist

$$S - S_1 = \lim F\,.\,\lambda\,\frac{\alpha}{\beta}.$$

Da jedoch $F = \dfrac{x-w}{\sqrt{(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)}}$ wenn w einen der Werthe w_1, w_2, w_3 erhält, zu Null wird; so folgt für jeden endlichen Werth von α und β

$$S - S_1 = 0.$$

Somit wäre das Integral bestimmt, und zugleich endlich, weil die Hinzugabe der Parthie in der Nähe von w das Integral nicht ändert. Man kann daher die Integration unbesorgt auf diese Werthe erstrecken.