II. Punkt, Linie und Ebene im Raume, mit Zugrundelegung eines gleichwinklig-schiefwinkligen Coordinaten-Systemes.

Analytisch dargestellt von

Gustav Schmidt.

Mitgetheilt und mit einem Vorworte versehen von

Joh. v. Pettko.

Mitgetheilt am 7. Juni 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Vorwort.

Die vorliegende Bearbeitung eines neuen Zweiges der analytischen Geometrie im Raume wurde durch das Bedürfniss der Krystallographie, und namentlich dadurch hervorgerufen, dass ich die für alle Krystallsysteme behauptete gleiche Neigung dreier Axen gegeneinander, an welcher ich der vorhandenen zahlreichen Analogien zufolge nicht im mindesten zweifeln konnte, auch mathematisch beweisen wollte.

Es stehen nämlich die drei pyramidalen Axen des Würfels, und die drei denselben entsprechenden Axen des pyramidalen und orthotypen Systemes auf einander senkrecht, und haben somit eine gleiche Neigung gegen einander. Eben so ist die gleiche Neigung jener drei Axenlinien des Rhomboeders, welche durch die Mittelpunkte der Flächen der Kanten parallel gehen, folglich den pyramidalen Axen des Würfels entsprechen, vollkommen klar. — Es blieb aber noch zu beweisen übrig, dass auch das augitische und anorthische Krystallsystem unter demselben Gesetze der gleichen Neigung dreier Axen gegeneinander stehen, so dass die Rechtwinklichkeit derselben nur als ein specieller Fall des allgemeinen Gesetzes zu betrachten wäre.

Auf dieses Gesetz habe ich bereits im Jahre 1846 *) hingedeutet, und gezeigt, dass man aus dem Rhomboeder durch Verkürzung oder Verlängerung einer Flächenaxe ein schiefes rhombisches Prisma erhält, welches bei gleicher Neigung der drei Flä-

*) Berichte über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften in Wien 1847. I. Band, Seite 135.

chenaxen gegeneinander alle Charaktere eines **augitischen Prismas**, namentlich der Combination $0.\infty A$ an sich trägt, und dieser bei genauer Angabe des Neigungswinkels und des Längenverhältnisses dieser Axen als die Grundgestalt einer augitischen Krystallreihe betrachtet werden kann; und dass man auf dieselbe Art durch gleichzeitige ungleiche Veränderung zweier Axen des Rhomboeders ein **anorthisches Prisma** (die Combination: $0.\infty\breve{H}.\infty\bar{H}$) erhält, bei welchem die Flächenaxen ebenfalls eine gleiche Neigung gegen einander behalten, und welches durch genaue Angabe dieser Neigung und des Längenverhältnisses der drei Axen seinen Abmessungen nach vollkommen bestimmt und fähig wird, als Grundgestalt einer anorthischen Krystallreihe zu dienen.

Es kam nun noch darauf an, mathematisch zu beweisen, dass sich für die natürlichen Krystalle des augitischen und anorthischen Systemes auch wirklich eine solche Grundgestalt auffinden lasse, welche den obigen Bedingungen entspricht.

Ich forderte desshalb einen meiner ausgezeichnetsten Zuhörer, Herrn Gustav Schmidt *) auf, den obengenannten Zweig der analytischen Geometrie, der mir die nothwendigen Rechnungen allein zu ermöglichen oder wenigstens bedeutend zu erleichtern schien, dem Bedürfnisse entsprechend zu bearbeiten. — Derselbe hat seine Aufgabe vollkommen gelöst, und als wir nach den gewonnenen analytischen Formeln den hemiprismatischen Augitspath und den orthotomen Feldspath gemeinschaftlich berechneten, wurden wir in der That zu dem erwünschten Resultate geführt.

Herr G. Schmidt hatte seine Arbeit nicht für den Druck, sondern blos für meinen Privatgebrauch bestimmt, und im erstern Falle würde er vielleicht Manches anders gegeben haben. Da ich jedoch in Kurzem eine Reihe krystallographischer Mittheilungen zu eröffnen denke, bei welchen ich mich in Bezug auf das rhomboedrische, augitische und anorthische Krystallsystem der so eben besprochenen analytischen Formeln bedienen werde, so hielt ich es für zweckmässig, vorerst diese Formeln nebst ihrer Entwickelung der Oeffentlichkeit zu übergeben, und beeilte mich, die Erlaubniss dazu von dem Hrn. Verfasser einzuholen.

Ich glaube nun zur gehörigen Würdigung der vorliegenden Arbeit mit einigen Worten auf die wesentlichen Fortschritte hindeuten zu sollen, welche die Krystallographie mit ihrer Hilfe demnächst zu machen verspricht, und auf den Einfluss, welchen die Umgestaltung der letztern auf die Fortschritte anderer Wissenschaften ausüben dürfte.

1. Zur Berechnung der Grundgestalt einer augitischen Krystallreihe wird man mit zwei Messungen ausreichen, indem man aus einer Messung den Neigungswinkel der Axen, aus der andern das Verhältniss der ungleichen Axe gegen die beiden gleichen finden kann. Eben so wird die Berechnung einer anorthischen Krystallreihe nur

*) Gegenwärtig Assistent an der k. k. montanistischen Lehranstalt zu Leoben.

drei Messungen erfordern, obwohl die Rechnungsschwierigkeiten bei diesem System ausserordentlich gross werden, und, bis jetzt wenigstens, noch nicht überwunden sind. — Auf diese Art werden sich die beiden genannten Krystallreihen um Vieles schärfer bestimmen lassen, weil die Fehler der dritten Messung bei dem augitischen, dann der vierten und fünften Messung bei dem anorthischen Systeme vermieden werden. Zur Vergleichung möge hier als Beispiel die Krystallreihe des Orthoklases dienen. Die Grundgestalt, ein schiefes rhombisches Prisma (das augitische Hexaeder) nach zwei Messungen berechnet, wird charakterisirt:

1. Durch den Neigungswinkel der Flächenaxen $= 85^{0} 3'$,
2. Durch das Verhältniss der beiden gleichen Axen gegen die dritte ungleiche $= 1 : 0{,}89023$.

Nun gibt Naumann für sein Grund-Augitoid das Verhältniss

$$a : b : c = 0{,}8439 : 1 : 1{,}5185;$$

berechnet man aber die Länge derselben Linien aus der erstern Grundgestalt, so bekommmt man das Verhältniss . . . . $0{,}85087 : 1 : 1{,}51899$

Differenz . . $0{,}007 \quad — \quad 0{,}0005$

welche jedenfalls von dem Fehler der dritten Messung herrühren muss, da zur Grundlage der Berechnung zwei von denselben drei Messungen angenommen wurden, deren sich Naumann bediente. Beim Amphibol steigt die Differenz noch höher, und ist bei der Axe $a = 0{,}0105$, bei $c = 0{,}0006$.

2. So wie das Hexaeder des Tesseral-Systemes durch die parallelepipedischen Grundgestalten in den übrigen Systemen repräsentirt wird, so findet man in den letzteren auch Repräsentanten der übrigen vollflächigen tesseralen Formen. Es werden daher alle Krystallsysteme mit dem tesseralen vergleichbar, und man wird z. B. die Adamantoidflächen in einem jeden Krystallsysteme als solche wieder erkennen, und auch die Varietät des Adamantoides mit ihrem krystallographischen Zeichen genau zu bestimmen im Stande sein. Mit andern Worten: alle Krystallgestalten in den übrigen Krystallsystemen werden als Theilgestalten von nur 7 vollflächigen Formen (den tesseralen entsprechend) betrachtet, und darnach bezeichnet werden können. Es ist nun sehr wahrscheinlich, dass diese Vergleichung, wenn sie einmal durchgeführt ist, wichtige Mittel an die Hand geben wird, um die Gesetze der Krystallisation genauer zu erforschen.

3. Aus dem Gesetze der gleichen Neigung dreier Axen der Krystalle gegeneinander, und der Grösse dieser Neigung bei verschiedenen Mineralspecies wird die Lehre von den Atomen, insbesondere von deren Form, von der Art ihrer gegenseitigen Anziehung, ihrem elektrisch-magnetischen Zustande u. s. w. wahrscheinlich Folgerungen ziehen, deren Wichtigkeit und Umfang sich mehr ahnen, als im Voraus bestimmen lässt.

4. Nicht minder dürfte auch die Optik der Krystalle von demselben Gesetze wesentliche Aufklärungen anzuhoffen haben.

Zum Schlusse habe ich noch über den Gang der Entwicklung vorliegender analytischer Formeln zu bemerken, dass so wie dieselbe zum Nutzen der Krystallographie statt gefunden hat, sie sich auch auf eine krystallographische Gestalt, nämlich auf das Rhomboeder gründet. Die Flächen des Rhomboeders, in den Mittelpunkt der Gestalt versetzt, sind nichts anderes als die schiefwinkeligen Coordinat-Ebenen, und ihre Durchschnitte nichts anders als die den Axenkanten des Rhomboeders parallel gehenden schiefwinkligen Coordinaten-Axen.

Es wurden demnach zuerst die Gleichungen dieser Coordinat-Ebenen und Axen in Bezug auf ein schicklich gewähltes orthogonales Coordinaten-System aufgestellt, aus diesen die Transformations-Gleichungen abgeleitet, und sodann die analytischen Formeln des schiefwinkligen Systemes auf die gewöhnliche Weise durch Substitutionen ermittelt.

Schemnitz am 30. April 1850. Joh. v. Pettko.

I. Gleichungen der gleichwinklig-schiefwinkligen Coordinat-Ebenen und Axen in Bezug auf ein orthogonales Coordinaten-System.

Sei (Fig. 1) STUVS′ das Grundrhomboeder, SS′Z die Hauptaxe, und abcdef die durch den Mittelpunkt O darauf senkrecht geführte Ebene, welche sich mit den Ebenen TV, UV und TU in AB, AC und BC schneidet. Nehmen wir nun OAB als die Ebene XY, also OS′Z als die Axe der z eines orthogonalen Systemes, und OA als die Axe der x desselben an, so ist Oa die Axe der y, weil $aOf = 60^0$ und $fOg = 30^0$ ist.

Fig. 1.

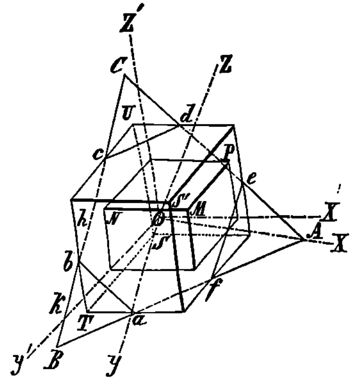
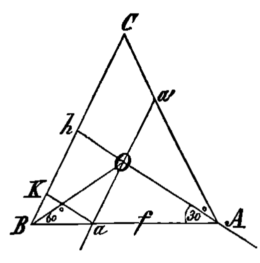


Fig. 2.



Die schiefwinkligen Axen OX′, OY′, OZ′ gehen parallel zu den Rhomboederkanten, und es handelt sich zu nächst um die Gleichungen der schiefwinkligen Coordinat-Ebenen und Axen in Bezug auf das angenommene orthogonale System.

Zu diesem Behufe suchen wir zuerst die Gleichungen der Parallelebenen SAB, SAC, SBC, welche durch die Linien AB, AC, BC und den Punkt S gehen, dessen orthogonale Coordinaten $x=0$, $y=0$, $z=-c$ sind, wenn die halbe Axe OS' des Grundrhomboeders $=c$ gesetzt wird.

Die Gleichung von AB (Fig. 1 und 2) ist: $\frac{x}{AO}+\frac{y}{aO}=1$, und setzt man

$AO=BO=CO=a$, also $aO=AO\tan 30^{\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}}$, so hat man $\frac{x}{a}+\frac{y\sqrt{3}}{a}=1$, oder

$\overline{AB}$ . . . $x+y\sqrt{3}=a$, und analog die Gleichung von

$\overline{AC}$ . . . $x-y\sqrt{3}=a$, und die Gleichung von

$\overline{BC}\parallel Oy$. $x=-\overline{Oh}$; aber $\overline{Oh}=\overline{ak}$, und

$\overline{ak}:\overline{AO}=\overline{Ba}:\overline{aA}=1:2$; also

$\overline{Oh}=\overline{ak}=\frac{1}{2}AO=\frac{a}{2}$, folglich die Gleichung von

$$BC \;.\;.\;.\; x=-\frac{a}{2}.$$

Die zu suchende Gleichung der Ebene SAB sei $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z+c}{C}=0$. Sie schneidet sich mit $z=0$ in der Linie $\overline{AB}\ldots x+y\sqrt{3}=a$, welche Gleichung daher identisch sein muss mit $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{c}{C}=0$; also ist $A=1$, $B=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{c}{C}=-a$ oder $C=-\frac{c}{a}$, daher $SAB)\ldots\ldots x+y\sqrt{3}-\frac{a(z+c)}{c}=0$, oder

$$\left\{\begin{array}{l} SAB)\ldots\frac{x}{a}+\frac{y\sqrt{3}}{a}-\frac{z+c}{c}=0. \text{ In gleicher Weise findet man die Gleichung von} \\ SAC)\ldots\frac{x}{a}-\frac{y\sqrt{3}}{a}-\frac{z+c}{a}=0, \text{ und von SBC, wegen } A=1,\ B=\infty,\ \frac{c}{C}=\frac{a}{2} \\ SBC)\ldots\frac{x}{a}\qquad\quad+\frac{z+c}{2c}=0. \end{array}\right.$$

Daher sind die Gleichungen der Parallelebenen durch den Anfangspunkt:

$$\left.\begin{array}{l} X'Y'\ldots.\frac{x}{a}+\frac{y\sqrt{3}}{a}-\frac{z}{c}=0 \\ X'Z'\ldots.\frac{x}{a}-\frac{y\sqrt{3}}{a}-\frac{z}{c}=0 \\ Y'Z'\ldots.\frac{x}{a}+\frac{z}{2c}=0 \end{array}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Je zwei dieser Gleichungen mit einander verbunden geben die Gleichungen der schiefwinkligen Coordinaten-Axen:

$$\left.\begin{array}{ll} OX'\ldots\left\{\begin{array}{r}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\\ y=0\end{array}\right. \\ OY'\ldots\left\{\begin{array}{r}x\sqrt{3}+y=0\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{2c}=0\end{array}\right. \\ OZ'\ldots\left\{\begin{array}{r}-x\sqrt{3}+y=0\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{2c}=0\end{array}\right. \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

II. Transformations - Gleichungen.

Wir wollen nun durch einen Punkt M (Fig. 1), dessen orthogonale Coordinaten $\xi\eta\zeta$ seien, die Linien MN, MP, MQ parallel zu den schiefwinkligen Axen ziehen und dieselben mit den schiefwinkligen Coordinat-Ebenen zum Durchschnitte bringen, und dann die Länge der so begränzten schiefen Coordinaten durch $\xi\eta\zeta$ ausdrücken.

$$MN \parallel OX' \ldots \left.\begin{array}{r}\frac{x-\xi}{a}-\frac{z-\zeta}{c}=0\\ y-\eta=0\end{array}\right\} \text{ kommt zum Durchschnitte mit}$$

$$Y'Z' \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x}{a}+\frac{z}{2c}=0.$$

Hat man aus diesen drei Gleichungen das x, y, z des Punktes N, so ist

$$MN = x' = \pm\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} = \pm(x-\xi)\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}} = \pm\frac{x-\xi}{a}\sqrt{a^2+c^2}\ldots(3).$$

Es ist aber $\frac{x-\xi}{a}=\frac{z-\zeta}{c}$ und $\frac{z}{c}=-\frac{2x}{a}$, also

$$\frac{x-\xi}{a}=-\frac{2x}{a}-\frac{\zeta}{c}=-\frac{2(x-\xi)}{a}-\frac{2\xi}{a}-\frac{\zeta}{c}, \text{ folglich}$$

$$\frac{3(x-\xi)}{a}=-\frac{2c\xi+a\zeta}{ac}, \text{ diess substituirt in (3)}$$

$$x'=\mp\frac{2c\xi+a\zeta}{3ac}\sqrt{a^2+c^2}, \text{ und setzt man der Kürze halber}$$

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{3ac}=k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$x' = \mp k(2c\xi+a\zeta).$$

Ist ξ und ζ positiv, so ist es auch x', und es gilt das untere Zeichen, also

$$x' = k(2c\xi+a\zeta).$$

Eben so kommt $MP \parallel OY' \ldots \left.\begin{array}{r}(x-\xi)\sqrt{3}+(y-\eta)=0\\ \frac{x-\xi}{a}+\frac{z-\zeta}{2c}=0\end{array}\right\}$ zum Durchschnitte mit

$$X'Z' \ldots\ldots\ldots \frac{x}{a}-\frac{y\sqrt{3}}{a}-\frac{z}{c}=0.$$

Nach der ersten Gleichung ist $y-\eta=-(x-\xi)\sqrt{3}$

und nach der zweiten . . . . . $z-\zeta=-\frac{2c}{a}(x-\xi)$, folglich

$$\overline{MP}=y'=\pm(x-\xi)\sqrt{1+3+\frac{4c^2}{a^2}}=\pm\frac{2(x-\xi)}{a}\sqrt{a^2+c^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Die Gleichung von X′Z′ kann auch folgenderweise geschrieben werden:

$$\frac{x-\xi}{a}-\frac{(y-\eta)\sqrt{3}}{a}-\frac{z-\zeta}{c}+\frac{\xi}{a}-\frac{\eta\sqrt{3}}{a}-\frac{\zeta}{c}=0, \text{ also für den Punkt P:}$$

$$\frac{x-\xi}{a}+\frac{3(x-\xi)}{a}+\frac{2(x-\xi)}{a}+\frac{c(\xi-\eta\sqrt{3})-a\zeta}{ac}=0$$

$$6(x-\xi)+\frac{c(\xi-\eta\sqrt{3})-a\zeta}{c}=0, \text{ also } (x-\xi)=-\frac{c(\xi-\eta\sqrt{3})-a\zeta}{6c}.$$

Diesen Werth in (5) gesetzt: $y'=\mp\frac{2\sqrt{a^2+c^2}}{a}\cdot\frac{c(\xi-\eta\sqrt{3})-a\zeta}{6c}$, und mit Rücksicht

auf (4) $$y'=\mp k\,[c(\xi-\eta\sqrt{3})-a\zeta].$$

Nimmt man an, dass y' positiv sein soll für $\xi=\eta=\zeta=$ einer sehr kleinen Grösse ε, so muss $\mp k\varepsilon\,[c(1-\sqrt{3})-a]>0$, und da der eingeklammerte Theil negativ ist, so muss auch vorn das obere Zeichen gelten, also ist

$$y'=-k\,[c\xi-c\eta\sqrt{3}-a\zeta]=k(-c\xi+c\eta\sqrt{3}+a\zeta)$$

und durch Veränderung von $\sqrt{3}$ in $-\sqrt{3}$

$$z'=k(-c\xi-c\eta\sqrt{3}+a\zeta).$$

Um also statt der orthogonalen Coordinaten $\xi\eta\zeta$ eines Punktes die schiefwinkligen xyz einzuführen, dienen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= k\,(2c\xi+a\zeta)\\ y &= k\,(-c\xi+c\eta\sqrt{3}+a\zeta)\\ z &= k\,(-c\xi-c\eta\sqrt{3}+a\zeta)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Um erforderlichenfalls statt den nicht gegebenen Grössen a, c, k den unmittelbar gegebenen Flächenwinkel φ des Grundrhomboeders in den Formeln erscheinen zu lassen, wollen wir φ und auch die Seite s des Rhomboeders durch diese Grössen ausdrücken.

Cos φ werden wir aus dem Dreiecke ABS (Fig. 1) berechnen. Die orthogonalen Coordinaten von S sind: $x=0,\ y=0,\ z=-c$;

die von A: $x=a,\ y=0,\ z=0$

und die von B aus Fig. 2: $\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{a}{2}\\ y &= Bh = BO\,\mathrm{Cos}\,30^\circ=\frac{a}{2}\sqrt{3}\\ z &= 0\end{aligned}\right.$

Also ist $AS = \sqrt{a^2+c^2}$

und $AB = \sqrt{\left(a+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{\frac{9+3}{4}} = a\sqrt{3}$.

Es ist aber auch $\overline{AB}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 - 2\overline{AS}.\overline{BS}.\operatorname{Cos}\varphi = \overline{AS}^2(2-2\operatorname{Cos}\varphi)$, also

$$3a^2 = 2(a^2+c^2)(1-\cos\varphi)$$

$$2(a^2+c^2)\operatorname{Cos}\varphi = 2a^2+2c^2-3a^2 = 2c^2-a^2, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{2c^2-a^2}{2(a^2+c^2)} \quad \ldots . \quad (7)$$

Ferner ist (Fig. 1) $AV : AS = Af : AB = 1 : 3$, folglich

$$AV = \tfrac{1}{3}AS \quad \text{und} \quad SV = \tfrac{2}{3}AS \quad \text{oder}$$

$$s = \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2+c^2} \quad \ldots . \quad (8)$$

also aus (4) . . . . . $k = \frac{s}{2ac}$ . . . . (9)

Aus (7) folgt $a^2(1+2\operatorname{Cos}\varphi) = 2c^2(1-\operatorname{Cos}\varphi)$, also

$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{2(1-\operatorname{Cos}\varphi)}{1+2\operatorname{Cos}\varphi}}$, und wegen $\operatorname{Cos}\varphi = 1-2\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}\varphi = 2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}\varphi - 1$

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{4\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}} \quad \ldots . \quad (10)$$

Ferner ist aus (8), $9s^2 = 4a^2+4c^2$, also $4c^2 = 9s^2-4a^2$, und diess in (7)

$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{4c^2-2a^2}{4(a^2+c^2)}$ gesetzt:

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{9s^2-6a^2}{9s^2} = \frac{3s^2-2a^2}{3s^2} \quad \ldots . \quad (11)$$

Daraus ist $2a^2 = 3s^2(1-\operatorname{Cos}\varphi) = 3s^2.2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$, also

$$\frac{a}{s} = \sqrt{3}\sin\tfrac{1}{2}\varphi \quad \ldots . \quad (12)$$

Die Gleichungen (6) können mit Rücksicht auf (9) auch so geschrieben werden:

$$x = \frac{s}{2a}\left(2\xi + \frac{a}{c}\zeta\right)$$

$$y = \frac{s}{2a}\left(-\xi + \eta\sqrt{3} + \frac{a}{c}\zeta\right)$$

$$z = \frac{s}{2a}\left(-\xi - \eta\sqrt{3} + \frac{a}{c}\zeta\right)$$

Setzt man also nach (12) $\frac{2a}{s} = 2\sqrt{3}\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \chi$

und nach (10) $\frac{a}{c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}} = \lambda$ $\Bigg\}$ . . . . . (13)

so erhält man als Transformations-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\chi}(2\xi + \lambda\zeta) \\ y &= \frac{1}{\chi}(-\xi + \eta\sqrt{3} + \lambda\zeta) \\ z &= \frac{1}{\chi}(-\xi - \eta\sqrt{3} + \lambda\zeta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (14)$$

Diese Gleichungen nach ξ, η, ζ aufgelöst, erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\chi}{6}(2x - y - z) \\ \eta &= \frac{\chi\sqrt{3}}{6}(y - z) \\ \zeta &= \frac{\chi}{3\lambda}(x + y + z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (15)$$

Um nun irgend eine Aufgabe im schiefwinkligen Systeme zu lösen, geht man mittelst der Gleichungen (14) von diesem in das orthogonale System über, löst mit den Coordinaten $\xi\eta\zeta$ die Aufgabe nach den bekannten Formeln, und führt im Resultat wieder die schiefwinkligen Coordinaten xyz mittelst der Gleichungen (15) ein.

Die in den Transformations-Gleichungen vorkommenden Constanten χ und λ sind in Folge der Gleichungen (13) bloss von φ abhängig. Hiebei bemerkt man, dass der Nenner von λ, nämlich $\sqrt{4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi - 1}$, weil er reell sein muss, dem Winkel φ eine Gränze setzt, denn es muss $(4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi - 1)$ positiv, also $4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi > 1$ sein, also auch $2\,\mathrm{Cos}\frac{1}{2}\varphi > 1$, folglich $\mathrm{Cos}\frac{1}{2}\varphi > \frac{1}{2} = \mathrm{Cos}\,60^0$, daher $\frac{1}{2}\varphi < 60^0$ und $\varphi < 120^0$. Und wirklich existirt kein Rhomboeder mit grösserem Flächenwinkel als 120^0, weil die Axe schon verschwindend klein werden muss, damit der Flächenwinkel 120^0 erreiche.

III. Distanz zweier Punkte.

Die schiefwinkligen Coordinaten dieser Punkte seien xyz und $x_1y_1z_1$, und die respektiven Differenzen dieser Coordinaten mögen δx, δy, δz heissen. Demzufolge ist nach (15)

$$\begin{aligned} \xi' - \xi &= \frac{\chi}{6}(2\delta x - \delta y - \delta z) \\ \eta' - \eta &= \frac{\chi\sqrt{3}}{6}(\delta y - \delta z) \\ \zeta' - \zeta &= \frac{\chi}{3\lambda}(\delta x + \delta y + \delta z) \end{aligned}$$

woraus nun die Distanz

$$R = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}$$

leicht gefunden wird, nämlich:

$$R=\frac{\chi}{6}\sqrt{(2\delta x-\delta y-\delta z)^2+3(\delta y-\delta z)^2+\frac{4}{\lambda^2}(\delta x+\delta y+\delta z)^2}$$

$$=\frac{\chi}{6}\sqrt{\begin{array}{l}4\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2-4\delta x\,\delta y-4\delta x\,\delta z+2\delta y\,\delta z+\frac{4}{\lambda^2}(\delta x+\delta y+\delta z)^2\\ \qquad +3\delta y^2+3\delta z^2 \qquad\qquad\qquad -6\delta y\,\delta z\end{array}}$$

$$=\frac{\chi}{3\lambda}\sqrt{\lambda^2(\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2-\delta x\,\delta y-\delta x\,\delta z-\delta y\,\delta z)+\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2+2\delta x\,\delta y+2\delta x\,\delta z+2\delta y\,\delta z}$$

$$=\frac{\chi}{3\lambda}\sqrt{(1+\lambda^2)(\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2)+(2-\lambda^2)(\delta x\,\delta y+\delta x\,\delta z+\delta y\,\delta z)}$$

Nun ist nach (13) $\frac{\chi}{3\lambda}=\frac{2\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\varphi}{2.3\sin\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}=\sqrt{\frac{4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}{3}}$

$$1+\lambda^2=\frac{4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1+4\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}=\frac{3}{4\,\mathrm{Cos}^2\varphi-1}=\left(\frac{3\lambda}{\chi}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ \alpha$$

$$2-\lambda^2=\frac{8\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-2-4\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}=\frac{8\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-2(\sin^2\frac{1}{2}\varphi+\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi)-4\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}$$

$$=\frac{6(\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-\sin^2\frac{1}{2}\varphi)}{4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}=\frac{6\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}=2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\left(\frac{3\lambda}{\lambda}\right)^2 \quad \ldots\ \beta$$

also $R=\frac{\chi}{3\lambda}\sqrt{\left(\frac{3\lambda}{\chi}\right)^2(\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2)+2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\left(\frac{3\lambda}{\chi}\right)^2(\delta x\,\delta y+\delta x\,\delta z+\delta y\,\delta z)}$, oder

$$R=\sqrt{\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2+2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(\delta x\,\delta y+\delta x\,\delta z+\delta y\,\delta z)} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Daraus folgt die Centraldistanz eines Punktes, dessen schiefwinklige Coordinaten $x\,y\,z$ sind:

$$D=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,(xy+xz+yz)} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

IV. Gleichung der Normale.

Sei $Ax+By+Cz=D$ die Gleichung einer Ebene im schiefwinkligen Systeme. Gehen wir mittelst der Gleichungen (14) ins orthogonale System über, so erhalten wir als Gleichung dieser Ebene:

$$A(2\xi+\lambda\zeta)+B(-\xi+\eta\sqrt{3}+\lambda\zeta)+C(-\xi-\eta\sqrt{3}+\lambda\zeta)=D\chi, \text{ oder}$$

$$(2A-B-C)\xi+(B-C)\eta\sqrt{3}+(A+B+C)\lambda\zeta=D\chi, \text{ oder kurz}$$

$$A'\xi+B'\eta+C'\zeta=D', \text{ wobei}$$

$$\left.\begin{array}{l}A'=2A-B-C\\ B'=(B-C)\sqrt{3}\\ C'=(A+B+C)\lambda\\ D'=D\chi\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Die Gleichungen der Normale auf diese Ebene sind:

$$\frac{\xi}{A'}=\frac{\eta}{B'}=\frac{\zeta}{C'}$$

oder wenn wir mittelst der Gleichungen (15) wieder ins schiefwinklige System übergehen:

$$\frac{x}{6A'}(2x-y-z) = \frac{x\sqrt{3}}{6B'}(y-z) = \frac{x}{3\lambda C'}(x+y+z), \text{ oder}$$

$$\frac{x+y+z}{\lambda C'} = \frac{2x-y-z}{2A'} = \frac{y-z}{2\frac{B'}{\sqrt{3}}}.$$

Da aber, wie bekannt, wenn $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, jeder dieser Brüche auch $=\frac{m+p}{n+q}$, oder $=\frac{m-p}{n-q}$ ist, so haben wir

$$\frac{x+y+z}{\lambda C'} = \frac{2x-y-z+y-z}{2A'+2\frac{B'}{\sqrt{3}}} = \frac{2x-y-z-y+z}{2A'-2\frac{B'}{\sqrt{3}}}, \text{ oder}$$

$$\frac{x+y+z}{\lambda C'} = \frac{x-z}{A'+\frac{B'}{\sqrt{3}}} = \frac{x-y}{A'-\frac{B'}{\sqrt{3}}},$$

und statt A', B', C' die Werthe (18) gesetzt:

$$\underset{\mathrm{I}}{\frac{x+y+z}{\lambda^2(A+B+C)}} = \underset{\mathrm{II}}{\frac{x-z}{2(A-C)}} = \underset{\mathrm{III}}{\frac{x-y}{2(A-B)}}$$

Bezeichnen wir die 3 Theile dieser Gleichung mit I, II, III, so folgt aus II = III:

$$(A-B)(x-z) = (A-C)(x-y), \text{ oder}$$

$$(A-B)z + (C-A)y + (B-C)x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Daraus suchen wir nun z, und substituiren es in I = III, um eine Gleichung zwischen x und y allein zu bekommen.

$$z = \frac{(C-B)x+(A-C)y}{A-B}, \text{ und}$$

$$x+y+z = \frac{(x+y)(A-B)+(C-B)x+(A-C)y}{A-B} = \frac{(A+C-2B)x+(2A-B-C)y}{A-B}.$$

Diese Werthe von x+y+z in I = III gesetzt erhält man:

$$\frac{(A+C-2B)x+(2A-B-C)y}{\lambda^2(A+B+C)(A-B)} = \frac{x-y}{2(A-B)}, \text{ oder}$$

$$2(A+C-2B)x + 2(2A-B-C)y = \lambda^2(A+B+C)(x-y), \text{ das ist:}$$

und d. Vertauschung

$$\left.\begin{aligned} x[\lambda^2(A+B+C)+2(2B-A-C)]-y[\lambda^2(A+B+C)+2(2A-B-C)]&=0\\ y[\lambda^2(A+B+C)+2(2C-B-A)]-z[\lambda^2(A+B+C)+2(2B-C-A)]&=0\\ z[\lambda^2(A+B+C)+2(2A-B-C)]-x[\lambda^2(A+B+C)+2(2C-A-B)]&=0 \end{aligned}\right\}\ldots(20)$$

V. Länge der Normale.

Die Länge der Normale ist mit Beibehaltung der frühern Bezeichnung

$$N = \frac{D'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$ Nun ist aus (18)

$$\begin{array}{rcl} A'^2 &=& 4A^2+B^2+C^2-4AB-4AC+2BC \\ B'^2 &=& 3B^2+3C^2-6BC \\ \hline A'^2+B'^2 &=& 4(A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC), \text{ also} \end{array}$$

$$N = \frac{\chi D}{\sqrt{4(A^2+B^2+C^2)-4(AB+AC+BC)+\lambda^2(A+B+C)^2}} \quad \ldots (21)$$

welchem Ausdruck man auch eine andere Form ertheilen kann. Es ist nämlich die Grösse unter dem Wurzelzeichen

$$G = (4+\lambda^2)(A^2+B^2+C^2) - 2(2-\lambda^2)(AB+AC+BC).$$

Wir fanden aber schon früher (Gleichung β) $2-\lambda^2 = 2\left(\frac{\chi}{3\lambda}\right)^2 \operatorname{Cos}\varphi$, und wegen (13) ist

$$4+\lambda^2 = \frac{4(4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1)+4\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1} = \frac{4(4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1+1-\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi)}{4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}, \text{ also}$$

$$4+\lambda^2 = \frac{3.4.\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi}{4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1} = 4\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\left(\frac{3\lambda}{\chi}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

demnach $G = 4\left(\frac{3\lambda}{\chi}\right)^2 \operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi.(A^2+B^2+C^2) - 4\left(\frac{3\lambda}{\chi}\right)^2 \operatorname{Cos}\varphi\,(AB+AC+BC)$

$$= \left[2\left(\frac{3\lambda}{\chi}\right)\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi\right]^2 \left[(A^2+B^2+C^2) - \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi}(AB+AC+BC)\right].$$

Diess und die Werthe von χ und λ aus (13) in die Gleichung (21) gesetzt, gibt

$$N = \frac{2\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\varphi.D}{2\sqrt{\frac{3}{4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}}\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi\sqrt{A^2+B^2+C^2-\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi}(AB+AC+BC)}}$$

$$N = \frac{D\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\sqrt{4\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2-(1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi)(AB+AC+BC)}} \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

Für $\varphi = 90^\circ$, also $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = 1$ und $\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$ folgt

$$N = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

VI. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Normale mit der Ebene.

Diese bestimmen wir aus der Gleichung der Ebene

$$\left\{\begin{array}{l} Ax+By+Cz = D, \text{ und aus zwei Gleichungen, die der Normale angehören:} \\ (B-C)x+(C-A)y+(A-B)z = 0, \text{ und} \\ x[\lambda^2(A+B+C)+2(2B-A-C)] - y[\lambda^2(A+B+C)+2(2A-B-C)] = 0 \end{array}\right.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen z eliminirt, erhält man

$$x(A^2+C^2-AB-BC)+y(AB+AC-B^2-C^2) = D(A-B).$$

Diese Gleichung hat die Form: $ax+by = c$

die obige dritte Gleichung dagegen die Form: $a'x - b'y = 0$.

Diese zwei Gleichungen nach x aufgelöst geben

$$x = \frac{b'c}{ab' + a'b}.$$

In unserem Falle ist

$$\begin{aligned} a &= A^2 + C^2 - AB - BC \\ b &= -B^2 - C^2 + AB + AC \\ c &= D(A-B) \\ a' &= \lambda^2(A+B+C) + (4B-2A-2C) \\ b' &= \lambda^2(A+B+C) + (4A-2B-2C). \end{aligned}$$

Construiren wir zuerst den Nenner $ab' + a'b$. Dieser enthält Glieder mit und ohne λ^2. Jene reduciren sich auf

$$\begin{aligned} \lambda^2(A+B+C)(A^2-B^2+AC-BC) &= \lambda^2(A+B+C)[(A+B)(A-B) + C(A-B)] \\ &= \lambda^2(A-B)(A+B+C)^2. \end{aligned}$$

Die Glieder ohne λ^2 sind:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r|r|r} 4A^3-2 & A^2B-2 & A^2C+4 & AC^2-2 & BC^2-2 & C^3+2 & AB^2+2 & ABC+2 & B^2C \\ -4 & -2 & +2 & +2 & +2 & +2 & -4 & +2 & -4B^3 \\ -2 & & -2 & -4 & & +4 & -2 & & \\ & & & & & & +4 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 4A^3 - 8A^2B - 4A^2C + 4AC^2 - 4BC^2 + 8AB^2 + 4B^2C - 4B^3 \\ &= 4(A^3 - 2A^2B + 2AB^2 - B^3 + B^2C - BC^2 + AC^2 - A^2C) \\ &= 4[(A-B)^3 + A^2B - AB^2 + C(B^2-A^2) + C^2(A-B)], \quad \text{also ist} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab' + a'b &= \lambda^2(A-B)(A+B+C)^2 + 4[(A-B)^3 + AB(A-B) + C(A-B)(C-A-B)] \\ &= \lambda^2(A-B)(A+B+C)^2 + 4(A-B)(A^2+B^2-AB+C^2-AC-BC) \end{aligned}$$

und $$x = \frac{D[\lambda^2(A+B+C) + 4A - 2B - 2C]}{\lambda^2(A+B+C)^2 + 4(A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC)} \quad \dots \quad (23)$$

Lässt man A, B, C in B C A übergehen, so erhält man den Ausdruck für y, und durch abermalige Vertauschung erhält man z.

Vergleicht man die Gleichungen (23) und (21), so sieht man, dass der Nenner von x = ist $\left(\frac{\chi D}{N}\right)^2$, also

$$\begin{aligned} x &= \frac{D N^2 [\lambda^2(A+B+C) + 2(2A-B-C)]}{\chi^2 D^2} \\ &= N^2 . \frac{[\lambda^2(A+B+C) + 2(2A-B-C)]}{\chi^2 D}. \end{aligned}$$

Setzt man statt χ^2 und λ^2 ihre Werthe aus (13), so folgt

$$\begin{aligned} x &= \frac{N^2}{D}\,\frac{4\sin^2\frac{1}{2}\varphi(A+B+C) + 2(4\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi - 1)(2A-B-C)}{(4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi - 1) . 3 . 4 . \sin^2\frac{1}{2}\varphi} \\ &= \frac{N^2}{D}\,\frac{2(1-\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi)(A+B+C) + (4\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi - 1)(2A-B-C)}{2 . 3 . \sin^2\frac{1}{2}\varphi(4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi - 1)}. \end{aligned}$$

Der Zähler ist

$$\begin{array}{rl} = & \left.\begin{array}{l} 2A + 2B + 2C + 2\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi(-A-B-C) \\ -2A + B + C \qquad\qquad + 4A - 2B - 2C \end{array}\right\} \\ \hline = & 3B + 3C + 2 . 3 . \mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi(A-B-C) \end{array}$$

Demnach
$$x = \frac{N^2}{D}\,\frac{B+C+2(A-B-C)\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\,(4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1)}$$
$$= \frac{N^2}{D}\,\frac{(B+C-A)+A+2(A-B-C)\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\,(4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1)}$$
$$= \frac{N^2}{D}\cdot\frac{A+(A-B-C)\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\,(4\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi-1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Setzt man $\varphi = 90^0$, also $\sin^2\frac{1}{2}\varphi = \mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$, so folgt
$$x = \frac{N^2}{D}\cdot\frac{A}{2\,.\,\frac{1}{2}(2-1)} = \frac{N^2A}{D}, \text{ wie bekannt.}$$

VII. Neigungswinkel W zweier Ebenen.

Seien die Gleichungen dieser Ebenen im schiefwinkligen Systeme:
$$E \; . \; . \; . \; . \; Ax + By + Cz = D$$
$$E' \; . \; . \; . \; . \; A'x + B'y + C'z = D'$$
und die entsprechenden Gleichungen im orthogonalen Systeme seien
$$E \; . \; . \; . \; . \; ax + by + cz = d$$
$$E' \; . \; . \; . \; . \; a'x + b'y + c'z = d'$$
so ist nach (18)
$$\begin{array}{ll|l} a &= 2A-B-C & a' = 2A'-B'-C' \\ b &= (B-C)\sqrt{3}. & b' = (B'-C')\sqrt{3} \\ c &= (A+B+C)\lambda & c' = (A'+B'+C')\lambda \end{array}$$
und wie bekannt
$$\mathrm{Cos}\,W = \pm\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$
Nun ist
$$\begin{aligned} aa' &= 4AA' - 2AB' - 2AC' - 2A'B + BB' + BC' - 2A'C + B'C + CC' \\ bb' &= 3BB' - 3BC' - 3B'C + 3CC' \\ \hline aa'+bb' &= 4(AA'+BB'+CC') - 2(AB'+A'B+AC'+A'C+BC'+B'C) \\ cc^2 &= \lambda^2(AA'+BB'+CC') + \lambda^2(AB'+A'B+AC'+A'C+BC'+B'C) \\ \hline aa'+bb'+cc' &= (4+\lambda^2)(AA'+BB'+CC') - (2-\lambda^2)(AB'+A'B+AC'+A'C+BC'+B'C) \end{aligned}$$
und mit Rücksicht auf die Gleichungen (β) und (γ)
$$aa'+bb'+cc' = 4\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2(AA'+BB'+CC') - 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2(AB'+A'B$$
$$+AC'+A'C+BC'+B'C).$$
Ferner haben wir bei Bestimmung von N (Gleichung 21) schon gefunden
$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= \lambda^2(A+B+C)^2 + 4(A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC) \\ &= (A^2+B^2+C^2)(\lambda^2+4) + 2(AB+AC+BC)(\lambda^2-2) \\ &= 4\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2(A^2+B^2+C^2) - 4\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2(AB+AC+BC) \\ &= 4\left(\frac{3\lambda}{x}\right)^2[(A^2+B^2+C^2)\,\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}\varphi - (AB+AC+BC)\,\mathrm{Cos}\,\varphi], \text{ also} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Cos} W = \pm \frac{4\left(\frac{3\lambda}{\chi}\right)^2 \left[(AA'+BB'+CC')\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}(AB'+A'B+AC'+A'C+BC'+B'C)\operatorname{Cos}\varphi\right]}{4\left(\frac{3\lambda}{\chi}\right)^2 \sqrt{(A^2+B^2+C^2)\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\varphi - (AB+AC+BC)\operatorname{Cos}\varphi}\,\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)\operatorname{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\varphi - (AB'+A'C'+B'C')\operatorname{Cos}\varphi}}$$

$$= \pm \frac{(AA'+BB'+CC')(1+\operatorname{Cos}\varphi) - (AB'+A'B+AC'+A'C+BC'+B'C)\operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{A^2+B^2+C^2)(1+\operatorname{Cos}\varphi) - 2(AB+AC+BC)\operatorname{Cos}\varphi}\,\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)(1+\operatorname{Cos}\varphi) - 2(A'B'+A'C'+B'C')\operatorname{Cos}\varphi}}$$

$$\operatorname{Cos} W = \pm \frac{AA'+BB'+CC'+[A(A'-B'-C')+B(B'-C'-A')+C(C'-A'-B')]\operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{A^2+B^2+C^2+(A^2+B^2+C^2-2AB-2AC-2BC)\operatorname{Cos}\varphi}\,\sqrt{A'^2+B'+C'^2+(\ldots\ldots)\operatorname{Cos}\varphi}} \ldots (25)$$

Führt man statt des Flächenwinkels φ den Kantenwinkel ω ein, mittelst Formel (34) $\operatorname{Cos}\varphi = \frac{\operatorname{Cos}\omega}{1-\operatorname{Cos}\omega}$, so erhält man:

$$\operatorname{Cos} W = \pm \frac{AA'+BB'+CC' - [AB'+A'B+AC'+A'C+BC'+B'C]\operatorname{Cos}\omega}{\sqrt{A^2+B^2+C^2-2(AB+AC+BC)\operatorname{Cos}\omega}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2-2(A'B'+A'C'+B'C')\operatorname{Cos}\omega}} \ldots (25')$$

VIII. Neigungswinkel V zweier Linien.

Die Gleichungen der beiden Linien seien:

$$L \ldots \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{z}{c} + \frac{x}{d} = 1 \\ \frac{y}{e} + \frac{z}{f} = 1 \end{cases} \qquad L' \ldots \begin{matrix} \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1 \\ \frac{z}{c'} + \frac{x}{d'} = 1 \\ \frac{y}{e'} + \frac{z}{f'} = 1 \end{matrix}$$

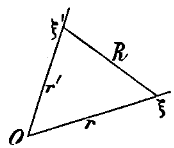
so werden die parallelen Linien durch den Ursprung die Gleichungen haben:

$$y = -\frac{b}{a}x = px \qquad y = -\frac{b'}{a'}x = p'x$$

$$z = -\frac{c}{d}x = qx \qquad z = -\frac{c'}{d'}x = q'x.$$

Wir schneiden nun auf den beiden Linien (Fig. 3) zwei beliebige Stücke r und r′ ab, und verbinden die erhaltenen Endpuncte, deren Coordinaten ξ, $p\xi$ und $q\xi$ in der einen, und ξ_1, $p_1\xi_1$, $q_1\xi_1$ in der andern Linie seien. Um die Distanz R dieser Puncte zu berechnen, dient die Gleichung (16)

Fig. 3.



$$R = \sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2 + 2\operatorname{Cos}\varphi\,(\delta\xi\,\delta\eta + \delta\xi\,\delta\zeta + \delta\eta\,\delta\zeta}.$$

In unserem Falle ist

$$\delta\xi = \xi_1 - \xi$$
$$\delta\eta = p_1\xi_1 - p\xi$$
$$\delta\zeta = q_1\xi_1 - q\xi, \quad \text{daher}$$
$$\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2 = \xi_1^2(1+p_1^2+q_1^2) - 2\xi\xi_1(1+2pp_1+2qq_1) + \xi^2(1+p^2+q^2)$$
$$\delta\xi\delta\eta + \delta\xi\delta\zeta + \delta\eta\delta\zeta = \xi_1^2(p_1+q_1+p_1q_1) - \xi\xi_1(p+p_1+q+q_1+p_1q+pq_1) + \xi^2(p+q+pq).$$

Diese Werthe in die Gleichung:

$$R^2 = \delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2 + 2\operatorname{Cos}\varphi(\delta\xi\delta\eta + \delta\xi\delta\zeta + \delta\eta\delta\zeta)$$

hinein gesetzt erhält man mit Berücksichtigung, dass

$$r^2 = \xi^2[1+p^2+q^2+2\operatorname{Cos}\varphi(p+q+pq)] \quad \text{und}$$
$$r_1^2 = \xi_1^2[1+p_1^2+q_1^2+2\operatorname{Cos}\varphi(p_1+q_1+p_1q_1)] \quad \text{ist},$$
$$R^2 = r^2 + r_1^2 - 2\xi\xi_1[1+pp_1+qq_1+\operatorname{Cos}\varphi(p+p_1+q+q'+p_1q+pq_1)].$$

Es ist aber auch $R^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\operatorname{Cos}V$, also

$rr_1\operatorname{Cos}V = \xi\xi_1[1+pp_1+qq_1+\operatorname{Cos}\varphi(p+p_1+q+q_1+p_1q+pq_1)]$, und quadrirt

$$[1+p^2+q^2+2\operatorname{Cos}\varphi(p+q+pq)][1+p_1^2+q_1^2+2\operatorname{Cos}\varphi(p_1+q_1+p_1q_1)]\operatorname{Cos}^2V =$$
$$= [1+pp_1+qq_1+\operatorname{Cos}\varphi(p+p_1+q+q_1+p_1q+pq_1)]^2$$

$$\operatorname{Cos}V = \pm\frac{1+pp_1+qq_1+\operatorname{Cos}\varphi(p+p_1+q+q_1+p_1q+pq_1)}{\sqrt{1+p^2+q^2+2(p+q+pq)\operatorname{Cos}\varphi}\sqrt{1+p_1^2+q_1^2+2(p_1+q_1+p_1q_1)\operatorname{Cos}\varphi}} \quad \ldots\ldots (26)$$

Stellt man statt $p q p_1 q_1$ wieder ihre Werthe her, so erhält man:

$$\operatorname{Cos}V = \pm\frac{1+\frac{bb'}{aa'}+\frac{cc'}{dd'}+\operatorname{Cos}\varphi\left(-\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}-\frac{c}{d}-\frac{c'}{d'}+\frac{bc'}{ad'}+\frac{b'c}{a'd}\right)}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{d^2}+2\left(-\frac{b}{a}-\frac{c}{d}+\frac{bc}{ad}\right)\operatorname{Cos}\varphi}\sqrt{1+\frac{b_1^2}{a_1^2}+\frac{c_1^2}{d_1^2}+2\left(-\frac{b'}{a'}-\frac{c'}{d'}+\frac{b'c'}{a'd'}\right)\operatorname{Cos}\varphi}}$$

$$\operatorname{Cos}V = \pm\frac{aa_1dd_1+bb_1dd_1+aa_1cc_1+\operatorname{Cos}\varphi[a_1bc_1d+ab_1cd_1-dd_1(a_1b+ab_1)-aa_1(cd_1+c_1d)]}{\sqrt{a^2d^2+b^2d^2+a^2c^2+2ad(bc-ac-bd)\operatorname{Cos}\varphi}\sqrt{a_1^2d_1^2+b_1^2d_1^2+a_1^2c_1^2+2a_1d_1(b_1c_1-a_1c_1-b_1d_1)\operatorname{Cos}\varphi}}$$

$$\operatorname{Cos}V = \pm\frac{aa_1cc_1+aa_1dd_1+bb_1dd_1+\operatorname{Cos}\varphi[acd_1(b_1-a_1)-ad(a_1c_1+b_1d_1)+bda_1(c_1-d_1)]}{\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2d^2-2ad(ac-bc+bd)\operatorname{Cos}\varphi}\sqrt{a_1^2c_1^2+a_1^2d_1^2+b_1^2d_1^2-2a_1d_1(a_1c_1-b_1c_1+b_1d_1)\operatorname{Cos}\varphi}} \quad \ldots (27)$$

Man erhält CosV durch die andern Parameter der Linien ausgedrückt, wenn man die Buchstaben $a\ b\ c\ d\ e\ f\ a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1$ übergehen lässt in

$c\ d\ e\ f\ a\ b\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1\ a_1\ b_1$ oder in

$e\ f\ a\ b\ c\ d\ e_1\ f_1\ a_1\ b_1\ c_1\ d_1$

$$\operatorname{Cos}V = \pm\frac{cc_1ee_1+cc_1ff_1+dd_1ff_1+\operatorname{Cos}\varphi[cef_1(d_1-c_1)-cf(c_1e_1+d_1f_1)+dfc_1(e_1-f_1)]}{\sqrt{c^2e^2+c^2f^2+d^2f^2-2cf(ce-de+df)\operatorname{Cos}\varphi}\sqrt{c_1^2e_1^2+c_1^2f_1^2+d_1^2f_1^2-2c_1f_1(c_1e_1-d_1e_1+d_1f_1)\operatorname{Cos}\varphi}} \quad \ldots (28)$$

$$\operatorname{Cos}V = \pm\frac{aa_1ee_1+bb_1ee_1+bb_1ff_1+\operatorname{Cos}\varphi[aeb_1(f_1-e_1)-be(a_1e_1+b_1f_1)+bfe_1(a_1-b_1)]}{\sqrt{a^2e^2+b^2e^2+b^2f^2-2be(ae-af+bf)\operatorname{Cos}\varphi}\sqrt{a_1^2e_1^2+b_1^2e_1^2+b_1^2f_1^2-2b_1e_1(a_1e_1-a_1f_1+b_1f_1)\operatorname{Cos}\varphi}} \quad \ldots (29)$$

IX. Neigungswinkel Ψ der Axe der z gegen die Ebene XY.

Dieser ist gleich dem Winkel, welchen die Axe der z ($y = 0$, $x = 0$), mit der Linie $x = y$, $z = 0$ macht. Die Gleichungen dieser Linien können auch so geschrieben werden:

$$L \ldots \begin{cases} \frac{x}{\infty} + \frac{y}{1} = 0 \\ \frac{z}{\infty} + \frac{x}{1} = 0 \end{cases} \qquad L' \ldots \begin{cases} \frac{x}{1} - \frac{y}{1} = 0 \\ \frac{z}{1} + \frac{x}{\infty} = 0 \end{cases}$$

folglich ist in diesem Falle:

$$\begin{array}{ll} a = \infty & a_1 = 1 \\ b = 1 & b_1 = -1 \\ c = \infty & c_1 = 1 \\ d = 1 & d_1 = \infty. \end{array}$$

Es werden also in dem Ausdrucke (27) im Zähler alle Glieder gegen jene verschwinden, welche den Factor $a c d_1$ haben, also ist

$$\operatorname{Cos}\psi = \pm \frac{a c d_1 (b' - a') \operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{a^2 c^2} \sqrt{d_1^2 (a_1^2 + b_1^2 - 2 a_1 b_1 \operatorname{Cos}\varphi)}} = \pm \frac{(a_1 - b_1) \operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2 a_1 b_1 \operatorname{Cos}\varphi}} =$$

$$= \mp \frac{2 \operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{Cos}\varphi}} = \mp \frac{2 \operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{2 + 2 (2 \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}\varphi - 1)}} = \mp \frac{2 \operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{4 \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}\varphi}} = \mp \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi}.$$

Ist $\varphi < 90^\circ$, so ist auch ψ kleiner als 90°, also $\operatorname{Cos}\psi$ positiv, daher gilt

$$\operatorname{Cos}\psi = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Für $\varphi = 90^\circ$ folgt $\operatorname{Cos}\psi = 0$, $\psi = 90^\circ$

Für $\varphi = 120$: $\left.\begin{array}{ll} \operatorname{Cos}\varphi = \operatorname{Cos}(90 + 30) & = -\sin 30^\circ \\ \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi = \operatorname{Cos} 60^\circ & = +\sin 30^\circ \end{array}\right\}$ folglich $\operatorname{Cos}\psi = -1$ und $\psi = 180^\circ$.

Um φ aus ψ zu berechnen hat man aus (30)

$\operatorname{Cos}\psi . \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi = 2 \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}\varphi - 1$, also

$\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$

$\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi = + \frac{1}{4}\operatorname{Cos}\psi \pm \sqrt{\frac{1}{16}\operatorname{Cos}^2\psi + \frac{1}{2}}$, und da für $\psi < 90^\circ$ das obere Zeichen gelten muss

$$\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi = \frac{\operatorname{Cos}\psi}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\operatorname{Cos}^2\psi + 9 - 1} = \frac{\operatorname{Cos}\psi}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9 - \sin^2\psi} = \frac{1}{4}\left[\operatorname{Cos}\psi + 3\sqrt{1 - \frac{1}{9}\sin^2\psi}\right].$$

Setzt man nun $\sin\Theta = \frac{1}{3}\sin\psi$ . . . . (31)

so ist $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4}\left[\operatorname{Cos}\psi + 3\sqrt{1 - \sin^2\Theta}\right]$, oder

$$\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4}(\operatorname{Cos}\psi + 3 \operatorname{Cos}\Theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

X. Neigungswinkel ω der Coordinat-Ebenen XZ und YZ.

Diesen können wir nach (25) berechnen.

Die Gleichung von YZ ist . . . . $x = 0$

von XZ „ . . . . $y = 0$

folglich ist hier $A = 1$, $B' = 1$, und alle übrigen Coefficienten $= 0$, daher

$$\operatorname{Cos}\omega = \pm \frac{-\operatorname{Cos}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{Cos}\varphi}\,\sqrt{1+\operatorname{Cos}\varphi}} = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{1+\operatorname{Cos}\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Um φ durch ω auszudrücken, hat man aus der letzten Gleichung

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{\operatorname{Cos}\omega}{1-\operatorname{Cos}\omega} = \frac{\operatorname{Cos}\omega}{2\sin^2\frac{1}{2}\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

$$2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}\varphi = 1 + \frac{\operatorname{Cos}\omega}{2\sin^2\frac{1}{2}\omega} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\omega + 2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\omega - 1}{2\sin^2\frac{1}{2}\omega} = \frac{2-1}{2\sin^2\frac{1}{2}\omega} = \frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\omega}, \text{ also}$$

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\omega} \quad \text{und} \quad \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Um endlich ψ durch ω auszudrücken, substituirt man (34) und (35) in (30) und erhält

$$\operatorname{Cos}\psi = \frac{\operatorname{Cos}\omega}{2\sin^2\frac{1}{2}\omega} \cdot 2\sin\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\operatorname{Cos}\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$