I. Skizzen aus dem Gebiete der höheren Gleichungen.

Von

Simon Spitzer.

Mitgetheilt am 26. April 1850 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Ich wage es, Skizzen meiner Arbeiten hier nieder zu legen. Die beiden früheren Mittheilungen in dem III. Bande der naturwissenschaftlichen Abhandlungen, Abth. 2, S. 109 und 143, sollen die Anfänge bilden, diese die erste Fortsetzung. — Ich habe hier Manches allgemeiner, Manches strenger aufgefasst, als in den früheren Aufsätzen, auch manches Neue hinzugefügt. — Möge der freundliche Leser es nachsichtig beurtheilen.

1.

Geometrisches Bild der binomischen Gleichungen:

$$z = u^n - 1.$$

Ich setze $u = x + y\sqrt{-1}$, und erhalte alsdann:

$$z = x^n - 1 - \binom{n}{2} y^2 x^{n-2} + \binom{n}{4} y^4 x^{n-4} - \ldots$$

$$y \left\{ \binom{n}{1} x^{n-1} - \binom{n}{3} y^2 x^{n-3} + \binom{n}{5} y^4 x^{n-5} - \ldots \right\} = 0.$$

Die letzte Gleichung wird Null für:

$$y = 0, \quad y = x \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}, \quad y = x \operatorname{tg} 2 . \frac{180^0}{n}, \ldots y = x \operatorname{tg} (n-1) . \frac{180^0}{n},$$

wovon man sich durch unmittelbares Substituiren leicht überzeugen kann, denn setzt man $y = x \operatorname{tg} m . \frac{180^0}{n}$, so geht sie über in:

$$x^n \left\{ \binom{n}{1} \operatorname{tg} m . \frac{180^0}{n} - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 m . \frac{180^0}{n} + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 m . \frac{180^0}{n} - \ldots \right\} = 0,$$

oder, wenn man die Gleichung mit $\cos^n m . \frac{180^0}{n}$ multiplicirt, in:

$$x^n \left\{ \binom{n}{1} \cos^{n-1} m . \frac{180^0}{n} \sin m . \frac{180^0}{n} - \binom{n}{3} \cos^{n-3} m . \frac{180^0}{n} \sin^3 m . \frac{180^0}{n} + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{5} \cos^{n-5} m . \frac{180^0}{n} \sin^5 m . \frac{180^0}{n} - \ldots \right\} = 0.$$

Allein, der in Klammern stehende Ausdruck ist nichts anders als $\sin n\left(m\,.\,\frac{180^0}{n}\right)$ oder $\sin m\,.\,180^0$, d. h. gleich Null, also wird wirklich die letzte Gleichung für $y = x \operatorname{tg} m\,.\,\frac{180^0}{n}$ befriedigt.

Hiefür wird aber die erste Gleichung

$$z = -1 + x^n - \binom{n}{2} x^n \operatorname{tg}^2 m\,.\,\frac{180^0}{n} + \binom{n}{4} x^n \operatorname{tg}^4 m\,.\,\frac{180^0}{n} - \ldots$$

oder

$$z = -1 + \frac{x^n}{\cos^n m\,.\,\frac{180^0}{n}} \left\{\cos^n m\,.\,\frac{180^0}{n} - \binom{n}{2} \cos^{n-2} m\,.\,\frac{180^0}{n} \sin^2 m\,.\,\frac{180^0}{n} + \ldots\right\}$$

oder

$$z = -1 + \frac{x^n}{\cos^n m\,.\,\frac{180^0}{n}} \cos m\,.\,180^0,$$

oder endlich für:

$$y = x \operatorname{tg} m\,.\,\frac{180^0}{n}\,; \quad z = -1 + (-1)^m\,.\,\frac{x^n}{\cos^n m\,.\,\frac{180^0}{n}} \tag{1}$$

Man hat daher folgende Systeme von Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} z=-1+x^n, & z=-1+\frac{x^n}{\cos^n.\frac{180^0}{n}}, & z=-1+\frac{x^n}{\cos^n 2\,.\frac{180^0}{n}}, & z=-1+\frac{x^n}{\cos^n 3\,.\frac{180^0}{n}} \\ y=0, & y=x \operatorname{tg}\frac{180^0}{n}, & y=x \operatorname{tg} 2\,.\frac{180^0}{n}, & y=x \operatorname{tg} 3\,.\frac{180^0}{n} \end{array} \tag{2}$$

u. s. f. die durchgehends ebenen Curven entsprechen, und zwar n an der Zahl. Alle diese Gleichungen leisten der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^n = (1 + z)^2 \tag{3}$$

Genüge, man kann daher statt der Gleichungen (1) auch folgende zwei Gleichungen aufstellen:

$$y = x \operatorname{tg} m\,.\,\frac{180^0}{n}\,, \quad (x^2 + y^2)^n = (1 + z)^2 \tag{4}$$

und diese sagen uns, dass alle die Curven (2) Meridiane einer Rotationsfläche sind, deren Gleichung (3) ist. Wird das Curvensystem (4) durch die Ebene $z = \alpha - 1$ geschnitten, so erhält man für die Durchschnittspunkte die Orte der n Wurzeln von $u^n = \alpha$.

2.

Geometrischer Ort der symmetrischen Functionen der Wurzeln.

Es sey

$$1) \qquad z = u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_{n-1} u + A_n$$

die Gleichung eines Systemes von Curven, und

$$z = \alpha$$

die Gleichung einer Ebene, welche nothwendigerweise das System der durch 1) vorgestellten Curven in n Punkten schneidet, weil die Gleichung

$$2)\qquad \alpha = u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_{n-1} u + A_n$$

n Wurzeln hat. Sie seyen:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 + y_1\sqrt{-1} \\ u_2 &= x_2 + y_2\sqrt{-1} \\ &\ldots\ldots \\ u_n &= x_n + y_n\sqrt{-1} \end{aligned}$$

und führen geometrisch construirt zu den Durchschnittspunkten des Curvensystemes (1) mit der Ebene $z = \alpha$. Würde ich in derselben Ebene einen Punkt suchen, dessen u (der reelle Theil desselben ist x, der imaginäre das y) gleich $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ ist, so könnte ich denselben finden, ohne noch die Wurzeln $u_1, u_2, \ldots u_n$ selbst zu kennen, da ja ihre Summe gleich $-A_1$ ist.

Nun betrachte ich dasselbe Curvensystem (1) durch die Ebene $z = \alpha'$ geschnitten, dadurch werden die Wurzeln der Gleichung:

$$3)\qquad \alpha' = u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_{n-1} u + A_n$$

anders seyn, etwa

$$\begin{aligned} u_1 &= x'_1 + y'_1\sqrt{-1} \\ u_2 &= x'_2 + y'_2\sqrt{-1} \\ &\ldots\ldots \\ u_n &= x'_n + y'_n\sqrt{-1} \end{aligned}$$

und somit wird auch die Ebene $z = \alpha'$ in n Punkten geschnitten, die aber andere Abscissen und andere Ordinaten haben, als die in der Ebene $z = \alpha$ sich befindenden Durchschnittspunkte. — Allein, wenn ich in $z = \alpha'$ einen Punkt suchen würde, dessen u gleich $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ ist, so würde ich wieder finden $u = -A_1$.

Für $z = \alpha''$, $z = \alpha'''$, ... folgt dasselbe, somit ist $u = -A_1$ die Gleichung einer, mit der Axe der z parallelen Geraden, die von den Ebenen $z =$ Const. in solchen Punkten geschnitten wird, dass deren u stets die Summe der u ist, die den Durchschnittspunkten derselben Ebene mit dem Curvensysteme 1) zukommen.

Genau dasselbe liesse sich sagen für einen Punkt, dessen u gleich dem nten Theile der Summe der u's der Durchschnittspunkte ist, woraus folgt, dass $u = -\frac{A_1}{n}$ die Gleichung einer mit der Axe der z parallelen Geraden ist, die von den Ebenen $z =$ Const. in Punkten geschnitten wird, die die Schwerpunkte sind, von den Durchschnittspunkten derselben Ebene mit dem Curvensystem (1). Für Curven 3ten Grades lässt sich hieraus folgender Satz ableiten. Ist nämlich:

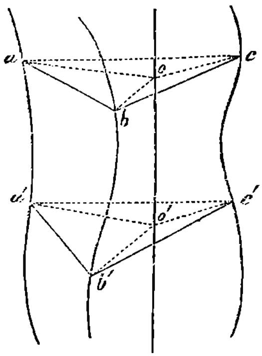
$$z = u^3 + (a_1 + b_1\sqrt{-1})\,u^2 + (a_2 + b_2\sqrt{-1})\,u + (a_3 + b_3\sqrt{-1}),$$

so ist die Gleichung der letzt erwähnten Geraden

$$u = -\tfrac{1}{3}(a_1 + b_1\sqrt{-1}),$$

oder wenn statt u, $x + y\sqrt{-1}$ geschrieben wird:

$$x = -\frac{a_1}{3}, \quad y = -\frac{b_1}{3}.$$



Eine Ebene $z = \alpha$ schneide das System der Curven in den Punkten a, b, c und die Gerade in 0. Die drei Dreiecke a o b, b o c, c o a sind stets von gleicher Fläche, wie immer auch α ist. Lassen wir dem z alle Werthe zwischen 0 und 0′ zukommen, so wird jedes der genannten Dreiecke einen bestimmten Raum durchlaufen, und alle diese drei durchlaufenen Räume sind von demselben Inhalte.

Gehen wir nun weiter in der Untersuchung der Eigenschaften unseres Systemes, der durch die Gleichung

$$1)\qquad z = u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_{n-1} u + A_n$$

repräsentirten Curven. — Würden wir in der Ebene $z = \alpha$ einen Punkt suchen, dessen $u = u_1 u_2 + u_1 u_3 + \ldots + u_{n-1} u_n$ ist, so wäre es gleich A_2, und diess findet statt, unabhängig von α, somit ist wieder $u = A_2$ die Gleichung einer, mit der z Axe parallelen Geraden, die von der Ebene $z =$ Const. in Punkten geschnitten wird, deren u stets gleich ist $u_1 u_2 + u_1 u_3 + \ldots + u_{n-1} u_n$, und wo, wie schon gesagt, $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ die Coordinaten der jedesmaligen Durchschnittspunkte repräsentiren.

Genau dasselbe findet statt, wenn wir in der Ebene $z = \alpha$ einen Punkt suchen, dessen u irgend eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung 1) ist, wenn nur die Ordnungszahl derselben kleiner als n ist, es sind nämlich alsdann immer diese Punkte in einer mit der z Axe parallelen Geraden. — Sobald aber ein Punkt gesucht wird, dessen u eine symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung von der Ordnung n ist, z. B. u gleich dem Producte aller Wurzeln, also $u = u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$, so hat man:

$$u = \pm A_n - z,$$

was die Gleichung einer Geraden ist, die auf der Ebene xy schief steht. Setzt man statt $\pm A_n$, $a + b\sqrt{-1}$, statt u, $x + y\sqrt{-1}$, und sondert die reellen und imaginären Glieder, so erhält man:

$$x = \alpha - z, \quad y = \beta.$$

So lange die Ordnungszahl der symmetrischen Function inclusive zwischen n und $2n - 1$ liegt, erhält man im Allgemeinen eine schiefe Gerade, wird aber die Ordnungszahl grösser als $2n - 1$, bleibt sie aber kleiner als $3n$, so werden die Gleichungen zwischen x, y, z vom 2ten Grade seyn, daher der Ort solcher Punkte eine Curve zweiten Grades und allgemein: Der geometrische Ort der Punkte, deren u irgend eine symmetrische Function der u's der Durchschnittspunkte ist, ist eine Curve mten Grades, wenn die Ordnungszahl der symmetrischen Function inclusive zwischen mn und $(m+1)n - 1$ liegt.

3.

Erweiterung der Theorie des Grössten und des Kleinsten.

1. Bei Gleichungen mit Einer Unbekannten.

Sey $z = f(u)$ die Gleichung eines Systemes von Curven; durch Substitution von $u = x + y\sqrt{-1}$ erhalten wir:

$$z = f(x) - \frac{y^2}{2} f''(x) + \frac{y^4}{24} f^{(4)}(x) - \ldots$$

$$y \left\{ f'(x) - \frac{y^2}{6} f'''(x) + \frac{y^4}{120} f^{(5)}(x) - \ldots \right\} = 0$$

als Gleichungen derselben.

Die Gleichungen der Berührungslinie am Punkte x, y, z sind:

$$\zeta - z = (\xi - x) \left[f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \frac{y^4}{24} f^{(5)}(x) - \ldots \right]$$
$$- (\eta - y) \left[y f''(x) - \frac{y^3}{6} f^{(4)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(6)}(x) - \ldots \right]$$

$$(\xi - x) \left[y f''(x) - \frac{y^3}{6} f^{(4)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(6)}(x) - \ldots \right]$$
$$+ (\eta - y) \left[f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \frac{y^4}{24} f^{(5)}(x) - \ldots \right] = 0,$$

oder abkürzend geschrieben:

$$\zeta - z = (\xi - x) P - (\eta - y) Q$$
$$(\xi - x) Q + (\eta - y) P = 0,$$

wo

$$P = f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \frac{y^4}{24} f^{(5)}(x) - \ldots$$

$$Q = y f''(x) - \frac{y^3}{6} f^{(4)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(6)}(x) - \ldots$$

ist, und ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten der Berührungslinie bezeichnen. Diese Tangente mache mit den drei Axen die Winkel α, β, γ, die nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie aus den Gleichungen:

$$\cos^2\alpha = \frac{P^2}{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)}, \quad \cos^2\beta = \frac{Q^2}{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)}; \quad \cos^2\gamma = \frac{P^2+Q^2}{1+P^2+Q^2}$$

bestimmt werden. Nun weiss man, dass für jene höchsten und tiefsten Punkte der Curve, wo keine Unterbrechung der Stätigkeit stattfindet, die Tangente horizontal, also $\gamma = 90^0$, und diess findet statt, wenn $P = 0$ und $Q = 0$ ist. Ist für gewisse Punkte der Haupt- oder conjugirten Curven $P = 0$, $Q = 0$, so folgt aber hieraus noch nicht, dass sie schon höchste oder tiefste seyn müssen, sie könnten ja auch bloss Wendepunkte seyn.

Wir wollen nun die Bedingungen aufsuchen, die noch stattfinden müssen, wenn Punkte der Curve, für die $P = 0$ und $Q = 0$ ist, höchste oder tiefste seyn sollen. Geben $x + y\sqrt{-1}$ die horizontale Projection eines solchen Punktes, z seine Höhe, oder was dasselbe ist, x sey die Abscisse, y die Ordinate und z die dritte Coordinate dieses Punktes. — Für den nächsten Punkt dieser Curve sey das x in $x+\xi$, das y in $y+\eta$, das z in z' übergegangen, wo ξ und η kleine, von einander abhängige Zuwächse bedeuten, und daher ist:

$$z' = f[(x+y\sqrt{-1})+(\xi+\eta\sqrt{-1})],$$

und wenn man entwickelt:

$$z' = f(x+y\sqrt{-1})+(\xi+\eta\sqrt{-1})f'(x+y\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1}) \\ +\tfrac{1}{6}(\xi+\eta\sqrt{-1})^3 f'''(x+y\sqrt{-1})+\ldots$$

oder

$$z'-z = (\xi+\eta\sqrt{-1})\,f'(x+y\sqrt{-1})+\tfrac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1})+ \\ +\tfrac{1}{6}(\xi+\eta\sqrt{-1})^3 f'''(x+y\sqrt{-1})+\ldots$$

Es ist aber $f'(x+y\sqrt{-1})$ nichts anders als $P+Q\sqrt{-1}$, mithin Null, da $P=0$ und $Q=0$ ist, daher hat man:

$$z'-z = \tfrac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1})+\tfrac{1}{6}(\xi+\eta\sqrt{-1})^3 f'''(x+y\sqrt{-1})+\ldots$$

und nun betrachten wir das Glied $\frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1})$, weil diess als das prädominirende das Zeichen von $z'-z$ bestimmt. Der imaginäre Theil desselben ist entweder für sich der Nulle gleich, oder wenn nicht, so tilgt er sich mit den andern imaginären Gliedern rechter Hand, da $z'-z$ reel ist. Ist der reelle Theil von $\frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1})$ für beliebig gewählte ξ positiv, so hat man ein Minimum, ist er negativ, so hat man ein Maximum.

Beispiel. Man suche die Maximum- und Minimum-Werthe von

$$1)\quad z = u^4-4u^3+14u^2-20u+12.$$

Die abgeleitete Gleichung ist:

$$2)\quad 4u^3-12u^2+28u-20=0$$

und sie hat die Wurzeln $u=1$, $u=1+2\sqrt{-1}$, $u=1-2\sqrt{-1}$, die durchgehends das z reel machen, und zwar der Ordnung nach 3, —13, —13. — Die Gleichung 1) zerfällt für $u=x+y\sqrt{-1}$ in folgende Systeme von Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} z = x^4-4x^3+14x^2-20x+12 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} z = 3-8y^2+y^4 \\ x=1 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} z = x^4-4x^3+14x^2-20x+12-y^2(6x^2+12x+14)+y^4 \\ y^2=x^2-2x+5 \end{cases}$$

Untersuchen wir nun, ob die Punkte, die die Coordinaten

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-13 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=-13 \end{cases}$$

haben, höchste oder tiefste sind.

Die durch die Gleichungen (1) gegebene Curve kann bloss durch den von den drei Punkten gehen, dessen Coordinaten $x=1$, $y=0$, $z=3$ sind. — Für diese Curve ist

$\eta = 0$, weil alle Punkte derselben in der Ebene $y = 0$ liegen, und $f''(u) = 12u^2 - 24u + 28$ wird hiefür 16, also ist $(\xi + \eta\sqrt{-1})^2 f''(u) = 16\xi^2$, also für jedes ξ positiv, daher ist dieser in (1) liegende Punkt ein tiefster.

Den Gleichungen (2) leisten die Coordinaten aller drei Punkte Genüge — für alle Punkte dieser Curve ist $\xi = 0$, weil die Curve in der Ebene $x = 1$ liegt, ferner ist für

$x=1,\ y=\ 0,\ z=\ 3,\ f''(u)=\ 16,\ \frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(u) = -8\eta^2$, dah. diess ein höchst. Pkt.
$x=1,\ y=+2,\ z=-13,\ f''(u)=-32,\ \frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(u) = 16\eta^2$ „ „ „ tiefst. „
$x=1,\ y=-2,\ z=-13,\ f''(u)=-32,\ \frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(u) = 16\eta^2$ „ „ „ „ „

Den Gleichungen (3) entsprechen bloss die zwei Punkte:

$$\begin{array}{ll} x = 1 & x = 1 \\ y = 2 & y = -2 \\ z = -13 & z = -13 \end{array}$$

Für $x=1$, $y=2$, $z=-13$ ist $f''(u) = -32$, $\frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(u) = -16(\xi^2 - \eta^2 + 2\xi\eta\sqrt{-1})$. Man hat daher zu sehen, wie das Zeichen von $\xi^2 - \eta^2$ beschaffen ist. — Die Gleichung der horizontalen Projectionen der Curve (3) ist: $y^2 = x^2 - 2x + 5$, setzt man in sie statt $x = 1 + \xi$, statt $y = 2 + \eta$, so ist: $\xi^2 = \eta^2 + 4\eta$, daher $\eta = -2 + \sqrt{4+\xi^2}$ (weil η als kleine Zahl nicht $-2 - \sqrt{4+\xi^2}$ gleich seyn kann), und folglich der reelle Theil von $\frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(u)$ gleich $-16 \cdot 4\eta = -64(-2+\sqrt{4+\xi^2})$, d. i. negativ, wie ξ auch beschaffen ist, also dieser Punkt ein höchster. — Eben so zeigt sich, dass der andere Punkt ein höchster ist.

4.

Die Winkel, die die Tangente der höchsten oder tiefsten Punkte mit den beiden Axen der x und der y macht, werden gefunden, wie schon früher bemerkt, aus den Gleichungen:

$$\cos^2\alpha = \frac{P^2}{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)}, \quad \cos^2\beta = \frac{Q^2}{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)},$$

wo $P = 0$ und $Q = 0$ ist. Es erscheinen daher $\cos^2\alpha$ und $\cos^2\beta$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Wir wollen, anstatt sie zu bestimmen, vielmehr die Tangente des Winkels berechnen, den diese horizontale Berührungslinie mit der Axe der x macht. Diese ist gegeben durch $\frac{dy}{dx}$, und wird gefunden, wenn man die Gleichung der horizontalen Projection der Curven, nämlich:

$$y\left\{f'(x) - \frac{y^2}{2.3} f'''(x) + \frac{y^4}{2.3.4.5} f^{(5)}(x) - \ldots\right\} = 0$$

differenzirt. Man erhält hierdurch die Gleichung:

$$(1) \quad Q + P \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

die sich in $0+0 . \frac{dy}{dx} = 0$ verwandelt, woraus man natürlich für $\frac{dy}{dx}$ keinen Werth ziehen kann. Differenzirt man aber die Gleichung (1) nochmals, und setzt der Kürze halber:

$$P' = f''(x) - \frac{y^2}{2} f^{(4)}(x) + \frac{y^4}{24} f^{(6)}(x) - \ldots$$

$$Q' = y f'''(x) - \frac{y^3}{6} f^{(5)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(7)}(x) - \ldots$$

so ist:

$$Q' + P' \frac{dy}{dx} + P \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(P' - Q' \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

oder, wenn man ordnet, und berücksichtigt, dass $P = 0$ ist,

$$2)\quad Q' + 2P' \frac{dy}{dx} - Q' \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

woraus für $\frac{dy}{dx}$, d. h. für die Tangente des Winkels, der die Berührungslinie mit der Axe der x macht, stets zwei reelle Werthe folgen, die, wenn man sie mit a und a_1 bezeichnet, der Gleichung

$$1 + aa' = 0$$

genügen, und daher anzeigen, dass an denjenigen Punkten der Curven, für die $P = 0$, $Q = 0$ und nicht zugleich $P' = 0$, $Q' = 0$ sind, es zwei Berührungslinien gibt, die aufeinander senkrecht stehen. Wäre aber auch $P' = 0$, $Q' = 0$, so müsste man (2) differenziren, wodurch man für $\frac{dy}{dx}$ eine Gleichung 3ten Grades erhielte, die, wenn man:

$$P'' = f'''(x) - \frac{y^2}{2} f^{(5)}(x) + \frac{y^4}{24} f^{(7)}(x) - \ldots$$

$$Q'' = y f^{(4)}(x) - \frac{y^3}{6} f^{(6)}(x) + \frac{y^5}{120} f^{(7)}(x) - \ldots$$

setzen würde, folgende Form hätte:

$$Q'' + P'' \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx}\left(P'' - Q'' \frac{dy}{dx}\right) - \frac{dy^2}{dx^2}\left(Q'' + P'' \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

oder reducirt:

$$Q'' + 3P'' \frac{dy}{dx} - 3Q'' \frac{dy^2}{dx^2} - P'' \frac{dy^3}{dx^3} = 0.$$

Sie hat, wenn nicht $P'' = 0$ und $Q'' = 0$ ist, stets drei reelle Wurzeln, und deutet daher auf ein Durchschneiden dreier Curvenzweige hin.

Zwei sehr einfache Sätze ergeben sich aus blosser Betrachtung der Curven:

1) Wenn $u = x_1 + y_1 \sqrt{-1}$ und $u = x_2 + y_2 \sqrt{-1}$ Wurzeln einer Gleichung sind, die von einem und demselben Curvenzweig herrühren, so gibt es wenigstens einen

höchsten oder tiefsten Punkt, dessen Coordinaten zwischen $x_1 + y_1\sqrt{-1}$ und $x_2+y_2\sqrt{-1}$ liegen *).

2) Wenn $u = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ die Coordinaten zweier tiefsten Punkte sind, so sind sie zugleich die Coordinaten zweier höchsten Punkte von andern, aus derselben Gleichung hervorgehenden Curvenzweigen.

3) Hat die Hauptcurve m tiefste Punkte über der xy Ebene, und n höchste Punkte unter der xy Ebene, so hat die vorgelegte Gleichung wenigstens $m+n$ Paare conjugirter imaginärer Wurzeln.

2. Bei Systemen von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

5.

Ich habe bei der Aufsuchung der reellen Wurzeln höherer Gleichungen mit zwei Unbekannten $\varphi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = 0$ folgenden Weg eingeschlagen: Ich setzte:

$$z = \varphi(x,y)\ ,\quad \psi(x,y) = 0,$$

gab dem x der Reihe nach verschiedene Werthe, suchte aus $\psi(x,y) = 0$ die entsprechenden Werthe von y, und bestimmte alsdann das z. Aenderte z sein Zeichen für zwei Systeme von Substitutionen, die einem und demselben Curvenzweig angehörten, so schloss ich auf dazwischen liegende Wurzelwerthe.

Bestimmen wir jetzt die höchsten und tiefsten Punkte dieses Curvensystemes. Es sind die Gleichungen der Tangente am Punkte xyz

$$\zeta - z = \frac{d\varphi}{dx}(\xi - x) + \frac{d\varphi}{dy}(\eta - y)$$

$$0 = \frac{d\psi}{dx}(\xi - x) + \frac{d\psi}{dy}(\eta - y).$$

Die Tangente mache mit der Ebene xy den Winkel γ, der sich bestimmen lässt aus:

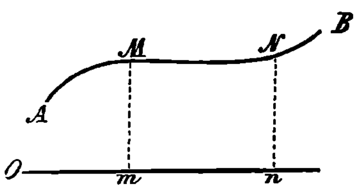
$$\cos^2\gamma = \frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}$$

Für die höchsten und tiefsten Punkte muss

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi}{dx} = 0$$

---

*) Ist AB die horizontale Projection eines Curvenzweiges, habe M die Coordinaten $x_1\, y_1$ und N die Coordinaten $x_2\, y_2$, so sage ich: Jeder Punkt in der Curve AB zwischen den Punkten M und N habe Coordinaten, die zwischen $x_1+y_1\sqrt{-1}$ und $x_2+y_2\sqrt{-1}$ liegen.



seyn. — **Es kann nun der Fall eintreten, dass dieser Ausdruck identisch Null ist.** Untersuchen wir, was unter diesen Umständen stattfindet. Aus der letzten Gleichung hat man:

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}} = f(x,y) \; ; \quad \frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}} = f(x,y).$$

Das sind partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung, die integrirt zeigen, dass sowohl $\varphi(x,y)$ als $\psi(x,y)$ bestimmte Functionen einer und derselben Function $F(x,y)$ sind, wo $F(x,y) = 0$ das Integrale des vollständigen Differentials

$$f(x,y)\,dx + dy = 0$$

ist. Es können daher die beiden gegebenen Gleichungen

$$z = \varphi(x,y) \; , \quad \psi(x,y) = 0$$

unter die Form

$$z = \omega(F(x,y)) \; , \quad \chi(F(x,y)) = 0$$

gebracht werden. Bestimmt man aus der letzten Gleichung $F(x,y)$, so findet man dafür constante Werthe, etwa $F(x,y) = a$, $F(x,y) = b$, $F(x,y) = c$, ... die in der ersten Gleichung substituirt

$$z = A \; , \quad z = B \; , \quad z = C \; , \; . \; . \; .$$

geben, daher ist das vorgelegte System von Gleichungen gleichbedeutend mit

$$\begin{array}{ccc} z = A & z = B & z = C \\ F(x,y) = a & F(x,y) = b & F(x,y) = c \end{array} \quad \text{u. s. f.}$$

und das sind die Gleichungen einer Reihe von Curven, die entweder in der xy Ebene, oder in, mit der xy parallelen Ebenen liegen. Im ersten Falle hat man unendlich viele Auflösungen, im zweiten gar keine; oder mit andern Worten, im ersten Falle sind die beiden Gleichungen $\varphi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = 0$ von einander nicht wesentlich verschieden, im zweiten aber widersprechen sie sich.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

1) Es seyen:

$$\varphi(x,y) = y^3 + y^2(6x-7) + y(12x^2-28x+5) + 8x^3 - 28x^2 + 10x + 4$$
$$\psi(x,y) = y^2 + 4y(x+1) + 4x^2 + 8x - 5.$$

Um die höchsten oder tiefsten Punkte zu bestimmen, berechne ich:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 6y^2 + 4y(6x-7) + 2(12x^2-28x+5) \qquad \frac{d\psi}{dx} = 4y + 8(x+1)$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 3y^2 + 2y(6x-7) + 12x^2 - 28x + 5 \qquad \frac{d\psi}{dy} = 2y + 4(x+1).$$

Man sieht auf den ersten Blick, dass $\frac{d\varphi}{dx} = 2 \cdot \frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\psi}{dx} = 2 \cdot \frac{d\psi}{dy}$ ist, daher

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

also liegen alle Punkte gleich hoch, oder auch $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ sind Functionen von $y+2x$, da das Integral von $f(x,y)dx+dy=0$, $y+2x=$ Const. ist. Ordnet man daher sowohl $\varphi(x,y)$ als $\psi(x,y)$ nach den Potenzen von $y+2x$, was man, analog dem Verfahren, das Professor SCHULZ VON STRASSNITZKI anwandte*), sehr leicht durch fortgesetztes dividiren von $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ und ihren Quotienten erzweckt, so hat man:

$$\varphi(x,y) = (y+2x)[y^2+y(4x-7)+4x^2-14x+5]+4$$
$$y^2+y(4x-7)+4x^2-14x+5 = (y+2x)[y+2x-7]+5.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(1) \quad \varphi(x,y) = (y+2x)^3-7(y+2x)^2+5(y+2x)+4.$$

Ferner hat man:

$$\psi(x,y) = (y+2x)[y+2x+4]-5, \quad \text{oder}$$
$$(2) \quad \psi(x,y) = (y+2x)^2+4(y+2x)-5.$$

Die Gleichung $\varphi(x,y)=0$ gibt für $y+2x$ drei constante Werthe a_1, a_2, a_3, und die Gleichung $\psi(x,y)=0$ gibt für $y+2x$ zwei constante Werthe b_1, b_2, daher sind diese Gleichungen gleichbedeutend mit folgendem Systeme von Gleichungen:

$$\begin{array}{llllll} y+2x=a_1 & y+2x=a_2 & y+2x=a_3 & y+2x=a_1 & y+2x=a_2 & y+2x=a_3 \\ y+2x=b_1 & y+2x=b_1 & y+2x=b_1 & y+2x=b_2 & y+2x=b_2 & y+2x+b_2. \end{array}$$

2. Es seyen:

$$\varphi(x,y) = x^6-2x^4y-4x^3y^2+x^2y^2+4xy^3+4y^4-5x^3+5xy+10y^2-9$$
$$\psi(x,y) = x^6-2x^4y-4x^3y^2+x^2y^2+4xy^3+4y^4+9x^3-9xy-18y^2+5.$$

Bildet man $\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi}{dx}$, so findet man es identisch gleich Null, daher sind alle Punkte des Curvensystemes $z=\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)=0$ gleich hoch. — Bevor man die Gleichung

$$(1) \quad \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}dx+dy=0$$

integrirt, wird man nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Masses untersuchen, ob Zähler und Nenner des Bruches einen gemeinschaftlichen Factor besitzen. — Man hat:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 6x^5-8x^3y-3x^2(4y^2+5)+2xy^2+4y^3+5y$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = -2x^4-8x^3y+2x^2y+x(12y^2+5)+16y^3+20y$$

$$\frac{d\varphi}{dx}:\frac{d\varphi}{dy} = -3x+12y+\frac{y(48y-1)(2x^3-2xy-4y^2-5)}{\frac{d\varphi}{dy}}$$

$$\frac{d\varphi}{dy}:(2x^3-2xy+4y^2-5) = -x-4y.$$

Man kann daher statt der Differentialgleichung (1) schreiben:

---

*) Grundlehren der Analysis, zweites Kapitel.

$$\frac{3x^2-y}{-x-4y}dx + dy = 0.$$

Dieses vollständige Differential gibt integrirt

$$F(x, y) = x^3 - xy - 2y^2,$$

und nach diesem Ausdrucke muss sich nun $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ ordnen lassen. Man hat nämlich:

$$\varphi(x,y) = (x^3-xy-2y^2)^2 - 5(x^3-xy-2y^2) - 9$$
$$\psi(x,y) = (x^3-xy-2y^2)^2 + 9(x^3-xy-2y^2) + 5.$$

Sowohl aus $\varphi(x,y)=0$, als auch aus $\psi(x,y)=0$ findet man zwei Werthe für $x^3-xy-2y^2$, seyen sie $a_1\, a_2$, $b_1\, b_2$, so lassen sich die zwei vorgelegten Gleichungen in folgende vier Systeme von Gleichungen zerlegen:

$$\begin{array}{llll} x^3-xy-2y^2=a_1 & x^3-xy-2y^2=a_2 & x^3-xy-2y^2=a_1 & x^3-xy-2y^2=a_2 \\ x^3-xy-2y^2=b_1 & x^3-xy-2y^2=b_1 & x^3-xy-2y^2=b_2 & x^3-xy-2y^2=b_2 \end{array}$$

die daher alle sich widersprechen:

Die Untersuchung, ob ein System zweier höherer Gleichungen $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$ zusammen bestehen kann, oder nicht, ist durch diess äusserst einfach. Man bilde sich bloss den Ausdruck

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi}{dx}$$

und sehe ob er identisch Null ist, oder nicht. Ist er identisch Null, so sind die beiden vorgelegten Gleichungen entweder nicht wesentlich von einander verschieden, oder sie widersprechen sich. — Ist dieser Ausdruck einer Constante gleich, so gibt es gar keinen höchsten oder tiefsten Punkt, ist er gleich einer reinen Function von x, so kann es höchstens in der Ebene xz Maxima- und Minimapunkte geben u. s. w.

6.

Ich versuchte diese Darstellung eines Systems zweier höherer Gleichungen mit zwei Unbekannten zu vervollständigen, um nicht nur die reellen, sondern auch die imaginären Wurzeln zur bildlichen Ansicht zu bringen.

Sind nämlich $\varphi(u,v)=0$, $\psi(u,v)=0$ die vorgelegten Gleichungen, so setze man $u = x + y\sqrt{-1}$, wo x beliebig ist, y aber noch zu unserer Disposition steht. Aus der ersten Gleichung würde hieraus $v = z + \zeta\sqrt{-1}$, aus der zweiten $z' + \xi'\sqrt{-1}$ folgern. Nun wähle man das y so, dass $\zeta' = \zeta$ werde, betrachte alsdann x als die Abscisse, y als die Ordinate, $z' - z$ als die 3te Coordinate von Punkten im Raume. Gibt man dann dem x successive andere und andere Werthe, so wird man andere und andere Punkte erhalten, die in einem Systeme von Curven liegen, die bei ihrem Durchschneiden der xy Ebene auf Wurzeln der vorgelegten Gleichungen deuten.

Die höchsten und tiefsten Punkte haben uns bis jetzt schon mehrmals zu überraschenden Resultaten geführt, wir wollen daher auch hier diesen Gegenstand in dieser Richtung verfolgen.

Ich setze $\varphi(u,v)=0$, $\psi(u,v')=0$, $z=v-v'$, $u=x+y\sqrt{-1}$, denn diess gibt ja genau die Punkte der oben verlangten Curven. Die Gleichung der Tangente am Punkte z,u ist:

$$Z-z = \frac{dz}{du}(U-u),$$

wo Z, U die laufenden Coordinaten bezeichnen. Nun hat man:

$$\frac{dz}{du} = \frac{dv}{du} - \frac{dv'}{du}$$

Um $\frac{dv}{du}, \frac{dv'}{du}$ zu erhalten, differenziren wir die beiden Gleichungen der Curven $\varphi(u,v)=0$, $\psi(u,v')=0$, und erhalten so:

$$\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=0, \quad \frac{d\psi}{du}+\frac{d\psi}{dv'}\cdot\frac{dv'}{du}=0$$

$$\frac{dv}{du}-\frac{dv'}{du} = \frac{-\frac{d\varphi}{du}}{\frac{d\varphi}{dv}}+\frac{\frac{d\psi}{du}}{\frac{d\psi}{dv'}} = \frac{\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{d\psi}{du}-\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{d\psi}{dv'}}{\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{d\psi}{dv'}},$$

diess substituirt gibt:

$$Z-z = \frac{\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{d\psi}{du}-\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{d\psi}{dv'}}{\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{d\psi}{dv'}}(U-u)$$

oder

$$(Z-z)\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{d\psi}{dv'} = \left(\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{d\psi}{du}-\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{d\psi}{dv'}\right)(U-u).$$

Setzt man nun

$$u=x+y\sqrt{-1} \quad \frac{d\varphi}{dv}=A+B\sqrt{-1} \quad \frac{d\psi}{dv'}=C+D\sqrt{-1}$$
$$U=X+Y\sqrt{-1} \quad \frac{d\varphi}{du}=A'+B'\sqrt{-1} \quad \frac{d\psi}{du}=C'+D'\sqrt{-1},$$

so ist:

$$(Z-z)(A+B\sqrt{-1})(C+D\sqrt{-1})=[(A+B\sqrt{-1})(C'+D'\sqrt{-1})-(A'+B'\sqrt{-1})(C+D\sqrt{-1})]\,[(X-x)+(Y-y)\sqrt{-1}]$$

oder

$$(Z-z)(AC-BD)=(AC'-A'C+B'D-BD')(X-x)-(AD'+BC'-A'D-B'C)(Y-y)$$
$$(Z-z)(AD+BC)=(AD'+BC'-A'D-B'C)(X-x)+(AC'-A'C+B'D-BD')(Y-y).$$

Setzt man der Kürze halber:

$$P=AC-BD \qquad M=AC'-A'C+B'D-BD'$$
$$Q=AD+BC \qquad N=AD'+BC'-A'D-B'C,$$

so hat man

$$P(Z-z) = M(X-x)-N(Y-y)$$
$$Q(Z-z) = N(X-x)+M(Y-y).$$

Diese Tangente mache mit den drei Axen die Winkel α, β, γ, die gesucht werden aus

$$\cos^2\alpha = \frac{(MP+NQ)^2}{(M^2+N^2)(M^2+N^2+P^2+Q^2)}\,; \quad \cos^2\beta = \frac{(MQ-NP)^2}{(M^2+N^2)(M^2+N^2+P^2+Q^2)}\,;$$

$$\cos^2\gamma = \frac{M^2+N^2}{(M^2+N^2+P^2+Q^2)}\,.$$

Die Tangente ist horizontal, wenn $M=0$, $N=0$ ist; hiefür wird aber $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Setzt man statt $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, $\frac{dy}{dx}=y'$, so hat man:

$$y' = \frac{MQ-NP}{MP+NQ} \quad \text{oder}$$

$$(MP+NQ)\,y' = MQ-NP.$$

Für $M=0$, $N=0$ folgt hieraus $0.y'=0$, woraus man y' nicht bestimmen kann. Differenzirt man daher diese Gleichung nach x, so hat man die Gleichungen $M=0$, $N=0$ berücksichtigend:

$$y'\left[P\left(\frac{dM}{dx}\right)+Q\left(\frac{dN}{dx}\right)\right] = Q\left(\frac{dM}{dx}\right) - P\left(\frac{dN}{dx}\right),$$

diess gibt, wenn man die angezeigten Differentiationen vollzieht, eine Gleichung, die nach y' vom 2ten Grade ist, falls nicht alle ihre Coefficienten der Nulle gleich sind. — Wäre diess der Fall, so müsste man nochmals differenziren, dadurch würde man nach y' eine Gleichung dritten Grades erhalten u. s. w. — Im Allgemeinen wird also auch hier bei den höchsten und tiefsten Punkten eine Vereinigung mehrerer Curvenzweige stattfinden.

3. Bei Systemen von mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

7.

Analoge Untersuchungen lassen sich leicht auf ein System höherer Gleichungen mit beliebiger Anzahl von Unbekannten übertragen.

Es seyen die vorgelegten Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) &= 0 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \\ \varphi_n(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Ich setze eine von ihnen gleich z, nämlich

$$(2)\quad z = \varphi_1(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_2(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) &= 0 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \\ \varphi_n(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) &= 0 \end{aligned} \right.$$

und suche nun, welche Werthe von $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ das z zu einem Grössten oder Kleinsten machen. Nach LAGRANGE verfährt man hiebei auf folgende Weise. Man bilde sich die Gleichung

$$(4) \qquad z = \varphi_1 + \lambda_1 \varphi_2 + \lambda_2 \varphi_3 + \ldots + \lambda_{n-1} \varphi_n ,$$

wo der Kürze wegen statt $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ bloss φ geschrieben ist, und wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ unbestimmte, aber constante Factoren sind. Aus (4) leite man dann durch successives Differenziren nach x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$ folgende Gleichungen ab:

$$(5) \qquad \begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_1} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_1} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_1} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_1} = 0 \\
&\frac{d\varphi_1}{dx_2} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_2} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_2} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_2} = 0 \\
&\frac{d\varphi_1}{dx_3} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_3} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_3} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_3} = 0 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\frac{d\varphi_1}{dx_n} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_n} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_n} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_n} = 0.
\end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen n Gleichungen die $n-1$ Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_{n-1}$, so erhält man eine Gleichung in $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, die in Verbindung mit den $n-1$ Gleichungen (3) hinreichen, die n Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ zu bestimmen. — Es könnte einen Fall geben, dass die Eliminationsgleichung, die aus (5) hervorgeht, identisch gleich Null wäre. Was findet dann Statt? Sind etwa wiederum die Systeme der vorgelegten Gleichungen einander widersprechend, oder sind sie nicht wesentlich von einander verschieden?

Wir wollen die Eliminationsgleichung bilden, und verfolgen hiebei eine, von Hrn. Professor PETZVAL herrührende Methode. Wir schreiben nämlich die n Gleichungen (5) in folgender Form:

$$(6) \qquad \begin{aligned}
&\lambda_0 \frac{d\varphi_1}{dx_1} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_1} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_1} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_1} = a_1 \\
&\lambda_0 \frac{d\varphi_1}{dx_2} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_2} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_2} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_2} = a_2 \\
&\lambda_0 \frac{d\varphi_1}{dx_3} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_3} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_3} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_3} = a_3 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\lambda_0 \frac{d\varphi_1}{dx_n} + \lambda_1 \frac{d\varphi_2}{dx_n} + \lambda_2 \frac{d\varphi_3}{dx_n} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{d\varphi_n}{dx_n} = a_n
\end{aligned}$$

wobei $\lambda_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ ist; und thun so, als ob wir λ_0 suchen würden. Sey $\lambda_0 = \frac{L}{M}$, so ist $L = 0$, weil der Zähler in jedem Gliede eine der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ hat, also muss auch der Nenner $M = 0$ seyn. Diesen Nenner $M = 0$ bildet man aus der Summe aller möglichen Permutationen der Elemente:

$$(7)\quad \begin{array}{l} \frac{d\varphi_1}{dx_1},\ \frac{d\varphi_2}{dx_1},\ \frac{d\varphi_3}{dx_1}\ \ldots\ldots\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_2},\ \frac{d\varphi_2}{dx_2},\ \frac{d\varphi_3}{dx_2}\ \ldots\ldots\ \frac{d\varphi_n}{dx_2} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_3},\ \frac{d\varphi_2}{dx_3},\ \frac{d\varphi_3}{dx_3}\ \ldots\ldots\ \frac{d\varphi_n}{dx_3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\varphi_1}{dx_n},\ \frac{d\varphi_2}{dx_n},\ \frac{d\varphi_3}{dx_n}\ \ldots\ldots\ \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{array}$$

wo aber in keiner Permutation 2 Glieder derselben Horizontal- oder Verticalreihe stehen dürfen, jedes Glied, genommen mit dem Zeichen plus oder minus, je nach der geraden oder ungeraden Anzahl der Compensationen, die in jedem Gliede vorkommen *). Würde die Gleichung $M = 0$ nach φ_1 geordnet,

$$(8)\quad X_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi_1}{dx_2} + X_3 \frac{d\varphi_1}{dx_3} + \ldots\ldots X_n \frac{d\varphi_1}{dx_n} = 0,$$

d. h. substituirt man statt aller der Ausdrücke $\varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$ ihre Werthe, nur nicht statt φ_1, so wird $M = 0$ die eben aufgeschriebene Form annehmen, und identisch wahr werden:

erstens, wenn für φ_1 sein vorgelegter Werth substituirt wird, denn diess ist ja die Voraussetzung;

zweitens, wenn durchgehends statt φ_1 gesetzt wird φ_2 oder φ_3 oder irgend ein anderes φ*).

Es sind also $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0, \ldots \varphi_n = 0$ particuläre Integrale der partiellen Differentialgleichung (8) und

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n) = 0$$

ist das allgemeine Integrale. Hieraus folgt, dass eine dieser Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$ eine Function aller übrigen ist, oder anders, das System der vorgelegten Gleichungen hat entweder unendlich viele Auflösungen, oder sie widersprechen sich.

Wäre irgend einer der n Coefficienten $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ identisch gleich Null, etwa $X_1 = 0$, so stehen die n—1 Gleichungen $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0, \ldots \varphi_n = 0$ in derselben Beziehung unter sich, wie die n vorgelegten Gleichungen, weil der Bau jeder dieser Coefficienten eben so aus n—1 dieser Gleichungen zusammengesetzt ist, wie $M = 0$ aus den n Gleichungen, daher ist irgend eine der n—1 Functionen $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ eine Function aller übrigen u. s. w.

8.

Betrachtung specieller Fälle bei zwei Gleichungen höheren Grades.

Es sey eine der vorgelegten Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ ein Product zweier Factoren, von denen einer eine reine Function von x oder y ist; z. B.

*) Man sehe: Theorie des Grössten und Kleinsten, von Professor Petzval im 2ten Bande der naturwissenschaftlichen Abhandlungen von Haidinger.

$$f(x) \cdot \chi(x,y) = 0, \quad \psi(x,y) = 0;$$

hat $f(x) = 0$ die Wurzel $x = \alpha$, so wird die erste Gleichung befriedigt für $x = \alpha$, und die zweite für alle jene Werthe von y, die aus der Gleichung $\psi(\alpha, y) = 0$ hervorgehen, seyen diese $y_1, y_2, y_3 \ldots$, so hat man folgendes System von Wurzelwerthen:

$$x = \alpha, \; y = y_1; \quad x = \alpha, \; y = y_2; \quad x = \alpha, \; y = y_3; \ldots$$

Sey $x = \beta$ eine zweite Wurzel von $f(x) = 0$, und habe $\psi(\beta, y) = 0$ die Wurzeln $y'_1, y'_2, y'_3, \ldots$ so sind

$$x = \beta, \; y = y'_1; \quad x = \beta, \; y = y'_2; \quad x = \beta, \; y = y'_3, \ldots$$

wieder Systeme von, den vorgelegten Gleichungen Genüge leistenden Wurzelwerthen. — Wenn daher eine der beiden Gleichungen einen Factor $f(x)$ besitzt, so ist es vortheilhaft ihn aufzusuchen, da die Kenntniss desselben die Auflösung solcher Systeme von Gleichungen ungemein vereinfacht. Wäre

$$\chi(x,y) = A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + A_{m-2} y^{m-2} + \ldots + A_1 y + A_0,$$

wo $A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots A_1, A_0$ entweder Functionen von x oder Constante sind, so ist:

$$f(x) \cdot \chi(x,y) = A_m f(x) \cdot y^m + A_{m-1} f(x) \cdot y^{m-1} + A_{m-2} f(x) \cdot y^{m-2} + \ldots + A_1 f(x) \cdot y + A_0 f(x),$$

woraus man sieht, dass falls eine der vorgelegten Gleichungen den Factor $f(x)$ besitzen soll, ihn jede Potenz von y als Factor haben muss. — Man wird daher, um zu untersuchen, ob eine Gleichung $f(x)$ als Factor hat, diese Gleichung nach y ordnen, denjenigen Coefficienten, der vom niedrigsten Grade ist, in Factoren zerlegen, wären sie $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots$ dann sehen, ob $x = \alpha$ oder $x = \beta$, oder $x = \gamma, \ldots$ alle übrigen Coefficienten identificirt, ist diess der Fall für $x = \alpha$, so hat sie $x - \alpha$ als Factor, ist es auch für $x = \beta$ der Fall, so ist $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ u. s. w.

Man kann also stets auf höchst einfache Weise aus $f(x) \cdot \chi(x,y)$ den Factor $f(x)$ absondern, und wird alsdann das System der beiden Gleichungen

$$f(x) \cdot \chi(x,y) = 0, \quad \psi(x,y) = 0$$

in folgende zwei Systeme

$$\begin{array}{ll} f(x) = 0 & \chi(x,y) = 0 \\ \psi(x,y) = 0 & \psi(x,y) = 0 \end{array}$$

zerlegen können, von denen das erste höchst einfache, leicht zu ermittelnde Auflösungen gestattet. Sehr leicht lassen sich auch analoge Untersuchungen auf mehrere Systeme von Gleichungen übertragen, etwa ob eine Gleichung mit zwei Unbekannten einen Factor $\varphi(x,y)$ besitzt.

Sey eine der vorgelegten Gleichungen

$$1) \quad (x-\alpha) A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + A_{m-2} y^{m-2} + \ldots + A_2 y^2 + A_1 y + A_0 = 0,$$

wo $A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots A_2, A_1, A_0$ Constante oder Functionen von x sind, und A_m sowohl als A_{m-1} enthalten nicht den Factor $x - \alpha$. Für jeden Werth von x erhält man aus 1) m Werthe für y, also auch für $x = \alpha$, dadurch geht aber 1) über in:

$$2) \quad A'_{m-1} y^{m-1} + A'_{m-2} y^{m-2} + \ldots + A'_2 y^2 + A'_1 \cdot y + A'_0 = 0$$

(die Striche ober den A zeigen an, dass in ihnen statt x, α gesetzt wurde) und diese habe die $m-1$ Wurzeln

$$y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_{m-1}.$$

Setzt man nun in 1) statt x, α, statt y, y_1, so wird sie identisch wahr, also ist für $x=\alpha$, $y=y_1$ eine Wurzel von 1); eben so sind für $x=\alpha$, $y=y_2$, $y=y_3$, ... $y=y_{m-1}$ Wurzeln von 1), also hat man bereits m—1 Wurzeln von 1) für $x=\alpha$, deren Summe $=-\frac{A'_{m-2}}{A'_{m-1}}$ ist. — Die Summe aller Wurzeln von 1) ist aber $-\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)A_m}$ und für $x=\alpha$, unendlich, daher muss die mte Wurzel unendlich seyn. — Eben diess gilt auch, wenn $(x-\alpha)$ im ersten Gliede in einer höhern als der ersten Potenz erscheint. Hat also eine der vorgelegten Gleichungen die Form:

$$(x-a)^\alpha.(x-b)^\beta.(x-c)^\gamma \ldots y^m + A_{m-1}y^{m-1} + A_{m-2}y^{m-2} + \ldots + A_2y^2 + A_1y + A_0 = 0,$$

so wird für $x=a$, $x=b$, $x=c$, ... stets eine Wurzel von y unendlich gross werden.

Hat eine der vorgelegten Gleichungen die Form:

$$1)\quad (x-a)A_m y^m + (x-a)A_{m-1}y^{m-1} + A_{m-2}y^{m-2} + A_{m-3}y^{m-3} + \ldots + A_2y^2 + A_1y + A_0 = 0.$$

Für $x=a$ hat man:

$$2)\quad A'_{m-2}y^{m-2} + A'_{m-3}y^{m-3} + \ldots + A'_2y^2 + A'_1y + A'_0 = 0,$$

die die m—2 Wurzeln y_1, y_2, $y_3 \ldots y_{m-2}$ haben möge. — Da für $x=a$, $y=y_1$ oder für $x=a$, $y=y_2$ oder für $x=a$, $y=y_{m-2}$ auch 1) identisch wird, so hat auch 1) für $x=a$ die m—2 Wurzelwerthe y_1, y_2, $y_3, \ldots y_{m-2}$. Die Summe aller Wurzeln von 1) ist gleich $-\frac{A'_{m-1}}{A'_m}$, die Summe der Amben der Wurzeln $=\infty$, also sind die beiden letzten Wurzeln unendlich gross u. s. w.