# VIII. Gesetze in den höhern Zahlengleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten.

Von

Simon Spitzer.

Mitgetheilt am 5. October 1849 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

---

## 1.

## Vorwort.

Von

Dr. Leopold Carl Schulz v. Strasznitzki,

Professor der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute.

Gauss hat die reelle und anschauliche Bedeutung der imaginären Ausdrücke, und ihre Zulässigkeit in der Rechnung in den Göttinger Anzeigen Stück 64 vom Jahre 1831 nachgewiesen; allein dieser grossartige Gedanke Gauss's spielte in der Wissenschaft bloss die Rolle eines geistreichen Einfalls, ohne dass von ihm weiter greifende Anwendungen, namentlich in der Geometrie gemacht wurden. Der von ihm vorgeschlagene Namen laterale (seitliche) Grösse statt des unpassenden imaginäre ist noch wenig durchgedrungen.

So wie Descartes die negativen Wurzeln einer Gleichung, von ihm noch falsche Wurzeln genannt, zuerst geometrisch erläutert, und dadurch einer umfassendern Gestaltung der Geometrie der Weg gebahnt, so sind wir auch der Meinung, dass die Gauss'sche Anschauungsweise der sogenannten imaginären Grössen durch das Gesammtgebiet der Mathematik durchgeführt, nicht nur lichtvolle Klarheit in die bisherigen Kenntnisse bringen wird, sondern sehen auch umfassenderen Erweiterungen der Wissenschaft entgegen. In dem Vorworte zu Hrn. Spitzer's Methode, die imaginären Wurzeln einer numerischen Gleichung zu finden, habe ich gezeigt, wie man imaginäre Werthe angeben kann, die in eine Gleichung mit durchgängig reellen Coefficienten substituirt, reelle Resultate geben. Auf diesen Gedanken fussend, hat es Herr Spitzer unternommen, die geometrische Bedeutung dieser reellen Resultate zu ermitteln, und so gelang ihm die geometrische Construction der imaginären Wurzeln einer numerischen Gleichung; wodurch sich neuerdings mit voller Evidenz ergibt, dass die lateralen (seitlichen) Grössen — bisher imaginär genannt — nicht leere Zeichenformen sind, sondern dass sie in die Wissenschaft vollkommen eingebürgert zu werden verdienen.

Descartes nimmt zur geometrischen Deutung einer algebraischen Function $f(x)$, die Werthe der unbekannten $x$ als Abscissen, und die daraus sich ergebenden Resultate der Substitution als Ordinaten an, wodurch das geometrische Bild der Function $f(x)$ eine ebene Krumme wird, und die Punkte, wo die Abscissenachse diese Krumme schneidet, die positiven und negativen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ gibt, weil in diesen Punkten $y=f(x)$ gleich Null wird. — Spitzer nimmt zur geometrischen Veranschaulichung der Function $f(x+y\sqrt{-1})$ als Constructionsfeld die Ebene der $xy$ und zwar so, dass die $x$ auf der Achse der $x$ und senkrecht darauf die Werthe der $y$ verzeichnet werden, ganz im Sinne Gauss's; die reellen Resultate, falls sich solche ergeben, werden in der Richtung der $z$ angebracht. Das geometrische Bild, welches dadurch entstehet, gibt nicht nur die ebene Curve des Descartes, nämlich für die Werthe, wo $y=0$ ist, sondern auch mehrere damit verbundene krumme Linien von doppelter Krümmung, und durch den Platz, wo diese Krumme die Ebene der $xy$ schneiden, erhalten die imaginären Wurzeln ihre geometrische Interpretation. Es sey $u$ eine Function von $x$ mit reellen Coefficienten, setzen wir statt $x$, $x+y\sqrt{-1}$, so dass:

$$u = f(x+y\sqrt{-1}), \quad \text{so hat man:}$$

$$u = f(x) - y^2.\frac{f_2(x)}{2!} + y^4.\frac{f_4(x)}{4!} - \text{u. s. w.}$$

$$+\, y\sqrt{-1}\left\{f_1(x) - y^2.\frac{f_3(x)}{3!} + y^4.\frac{f_5(x)}{5!} - \text{u.s.w.}\right\}$$

Da wir nur die reellen Werthe von $u$ in Betrachtung ziehen wollen, und selbe $z$ nennen, so haben wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$z = f(x) - y^2.\frac{f_2(x)}{2!} + y^4.\frac{f_3(x)}{3!} - \text{u. s. w.}$$

$$y\left\{f_1(x) - y^2.\frac{f_3(x)}{3!} + y^4.\frac{f_5(x)}{5!} - \text{u.s.w.}\right\} = 0$$

Eine Auflösung liegt auf der Hand, nämlich

$$z = f(x)\ ; \quad y = 0$$

das ist nun die ebene Curve nach der Verzeichnung Descartes, welche die positiven und negativen Wurzeln durch ihre Durchschnitte mit der Achse der $x$ darbietet. Das System der andern Curven ergibt sich aus den Gleichungen:

$$z = f(x) - y^2.\frac{f_2(x)}{2!} + y^4.\frac{f_4(x)}{4!} - \text{u. s. w.}$$

$$f_1(x) - y^2.\frac{f_3(x)}{3!} + y^4.\frac{f_5(x)}{5!} - \text{u. s. w.} = 0$$

die wir kurz durch

$$z = \varphi(x,y)\ ; \quad \psi(x,y) = 0$$

darstellen wollen, wobei wie man leicht sieht, der höchste Exponent von $y$ in

$\psi(x,y)=0$ stets gerade, und um zwei oder wenigstens um einen Grad niederer ist, als der höchste Exponent von x in der Gleichung $f(x)=0$.

Wenn wir nun nach einander dem x in der Gleichung $\psi(x,y)=0$ verschiedene willkührliche Werthe geben, und den dieser Gleichung entsprechenden Werth von y bestimmen, und diese Werthe von x und y in die Gleichung $z=\varphi(x,y)$ substituiren, so hat man einen Punkt dieses Curvensystems. Es sey so m ein willkührlicher Werth von x, und die Gleichung $\psi(m,y)=0$ gebe für y die Werthe $a, b, c, d, \ldots$ so erhält man für z die Werthe

$$\varphi(m,a)\;;\;\;\varphi(m,b)\;;\;\;\varphi(m,c)\;;\;\;\varphi(m,\delta)\;;\ldots.$$

geben wir nun dem x einen von m sehr wenig verschiedenen Werth $m'$, so werden die Werthe von y aus der Gleichung $\psi(m',y)=0$ von den Werthen $a, b, c, d, \ldots$ nur wenig verschieden seyn. Es seyen dieselben $a', b', c', d', \ldots$ und daher die resultirenden Werthe von z, $\varphi(m',a')$; $\varphi(m',b')$; $\varphi(m',c')$;... Ist eben so $m''$ von $m'$ nur sehr wenig verschieden, so werden die Wurzeln der Gleichung $\psi(m'',y)=0$, d. i. $a'', b'', c'', d'', \ldots$ von $a', b', c', d', \ldots$ ebenfalls nur wenig sich unterscheiden, welche uns für z die Resultate $\varphi(m'',a'')$; $\varphi(m'',b'')$; $\varphi(m'',c'')$; ... u. s. w. geben.

Je näher nun $m, m', m''$, folglich auch $a, a', a'', \ldots$ $b, b', b'', \ldots$ $c, c', c'', \ldots$ an einander liegen, um so mehr bilden $\varphi(m,a)$, $\varphi(m',a')$, $\varphi(m'',a'')$, ... eine stätige Reihe von Punkten einer Curve, eben so $\varphi(m,b)$, $\varphi(m',b')$, $\varphi(m'',b'')$, ... und eben so $\varphi(m,c)$, $\varphi(m',c')$, $\varphi(m'',c'')$,... Diese Curven im Allgemeinen von doppelter Krümmung wollen wir c o n j u g i r t e C u r v e n nennen.

Es sey z. B. die Gleichung

$$x^3-6x^2+11x-6=0 \quad\text{oder}\quad (x-1)(x-2)(x-3)=0$$

setzet man hier statt x, $x+y\sqrt{-1}$, so hat man:

$$u=f(x+y\sqrt{-1})=f(x)-\tfrac{1}{2}f_2(x).y^2+\{f_1(x)-\tfrac{1}{6}f_3(x)\,y^2\}y\sqrt{-1}$$

Damit nun u reel werde, muss der Factor des zweiten Gliedes sich auf Null reduciren, und man hat:

$$z=f(x)-\tfrac{1}{2}f_2(x).y^2\;;\quad f_1(x)-\tfrac{1}{6}f_3(x)y^2=0,\quad \text{d. h.}$$

$$z=x^3-6x^2+11x-6-(3x-6)y^2;\;\; 3x^2-12x+11-y^2=0$$

woraus:

$$y^2=3x^2-12x+11\;;\quad z=-(8x^3-48x^2+94x-60)$$

als Gleichungen der c o n j u g i r t e n C u r v e n, während die Gleichungen der Hauptcurve $y=0$ und $z=x^3-6x^2+11x-6$ sind.

Die Projection auf die Ebene xy wird durch $y^2=3x^2-12x+11$ gegeben, welche, wie man sieht, die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Centrum $x=2$, $y=0$, und die Scheitel derselben $x=2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $z=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ und $x=2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ und $z=-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ zu ihren Coordinaten haben. Diese zwei Scheitel treffen mit dem Maximum- oder Minimum-punkt der Hauptcurve zusammen. Es ergibt sich somit das Bild Fig. 1. Die Ebene $xy$ schneidet unser Curvensystem in den Punkten A, C und E, wo $x = 1, 2$ und $3$ ist. Schiebt man bei diesem Curvensystem die Ebene $xy$ aufwärts, d. h. vermindert die Constante in der Gleichung $z = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, so hat die neu entstehende Gleichung, die nur im letzten bekannten Gliede abweichet, so lange drei reelle Wurzeln, bis die Ebene $xy$ den Punkt B trifft, wo dann die Gleichung zwar auch noch drei reelle Wurzeln hat, wovon aber zwei einander gleich sind. Geht die Ebene $xy$ noch höher, so hat dann die Gleichung zwei imaginäre und eine reelle Wurzel; ein ähnliches Verhalten findet statt, wenn man die Ebene $xy$ abwärts schiebt. Wie man sieht, hat die Gleichung stets eine reelle Wurzel sicher; die zwei andern sind imaginär, und werden nur zwischen den Horizontalen in B und D reel. Und so gibt unsere Figur die geometrische Construction der reellen und imaginären Wurzeln der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x + A = 0$, wo A jeden reellen Werth haben kann.

Als zweites Beispiel diene uns die Gleichung

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25 = 0$$

welche die vier imaginären Wurzeln $1 \pm 2\sqrt{-1}$ und $2 \pm \sqrt{-1}$ hat. Man hat:

$$z = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25 - (6x^2 - 18x + 18)y^2 + y^4$$

$$4x^3 - 18x^2 + 36x - 30 - (4x - 6)y^2 = 0$$

Man erhält hier für $x = 1; \quad y = \pm 2; \quad z = 0$

für $x = 2; \quad y = \pm 1; \quad z = 0$

Verzeichnet man dieses Curvensystem, so ist nach Figur 2

$$OA = 1; \quad AM = AM' = 2;$$

und $OB = 2; \quad BN = BN' = 1$ als Construction der imaginären Wurzeln. Schiebt man die Ebene $xy$ hinauf bis zum Punkt O dem tiefsten Punkt der Hauptcurve, und verändert dann entsprechend die Constante in der Gleichung, so hat diese zwei gleiche reelle Wurzeln; wird die Ebene $xy$ noch höher hinauf geschoben, so hat man dann zwei verschiedene reelle Wurzeln, die andern zwei bleiben aber imaginär.

Herr SPITZER hat vorstehende Betrachtungen zunächst zur Grenzenbestimmung der imaginären Wurzeln benutzt, wodurch die Berechnung derselben wesentlich erleichtert wird; er erläutert ferners die Fälle, in welchen eine Function durch imaginäre Werthe einen Maximum- oder Minimumwerth erreicht. Zum Schlusse dehnt er seine Betrachtungen und Methoden auch auf die Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten aus. Hoffentlich werden die Mathematiker das hier Dargebrachte ihrer Aufmerksamkeit nicht für unwürdig halten, und die hier entwickelten Gedanken zur weiteru Durchführung in der Wissenschaft bringen.

2.

# Ueber höhere Zahlengleichungen.

Von

Simon Spitzer.

1.

## Bestimmung der Grenzen der reellen und imaginären Wurzeln einer Zahlengleichung höheren Grades.

In meiner letzten Mittheilung habe ich mich vorzüglich mit der Berechnung der imaginären Wurzeln beschäftigt, während Herr Professor Schulz (mein hochverehrter Lehrer und Wohlthäter) eine Methode angab, den Ort derselben zu entdecken.

Durch mehr geometrische Betrachtungen gelang es mir zu Gesetzen zu kommen, die auch gehörig Aufschluss über die Grenzen der imaginären Wurzeln geben. Ich theile sie in Nachfolgendem mit, mit dem Wunsche, dass man sie der Aufmerksamkeit nicht unwerth halten möge.

Was ich zuerst hier gebe, ist nichts anderes als eine Verallgemeinerung einer Methode von Descartes, der bekanntlich dem x in der zur Untersuchung vorliegenden Gleichung

$$f(x) = 0$$

ganz beliebige Werthe beilegte, die Resultate dieser Substitutionen bestimmte, erstere als die Abscissen, letztere als die Ordinaten einer Curve betrachtete, deren Gleichung

$$y = f(x)$$

ist. So oft er alsdann für zwei, dem x beigelegte Werthe a und b verschieden bezeichnete Resultate erhielt, schloss er auf das Vorhandenseyn wenigstens Einer zwischen a und b liegenden Wurzel.

Es sey jetzt

$$\varphi(u) + \sqrt{-1}\,.\,\psi(u) = 0$$

die vorgelegte Gleichung, wo $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ Polynome mit reellen Coefficienten von der Form

$$A_0 u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_{n-1} u + A_n$$

seyen. Ich lege nun dem u, nicht bloss wie Descartes reelle Werthe allein bei, sondern auch imaginäre, etwa wie $3+y\sqrt{-1}$, und untersuche nun, welche Werthe von y

$$z=\varphi(3+y\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\,.\,\psi(3+y\sqrt{-1})$$

reell machen; seyen $y_1$, $y_2$, $y_3\ldots$ diese Werthe, so betrachte ich 3 als die Abscissen $y_1$, $y_2$, $y_3\ldots$ als die Ordinaten von Puncten im Raume, deren dritte Coordinate z ich finde, wenn ich $3+y_1\sqrt{-1}$, $3+y_2\sqrt{-1}$, $3+y_3\sqrt{-1}\ldots$ in $\varphi(u)+\sqrt{-1}\,.\,\psi(u)$ statt u substituire. Setze ich statt 3 nach und nach immer andere und andere Zahlen, suche die dazu gehörigen y und z, so erhalte ich Puncte, die in einem Systeme von Curven liegen, deren Gleichungen aus

$$z=\varphi(u)+\sqrt{-1}\,.\,\psi(u)$$

hervorgehen, wenn man in dieselbe statt u, $x+y\sqrt{-1}$ substituirt; und sie dann in zwei bloss aus reellen Theilen bestehende zerlegt. Man erhält sonach:

$$z=\varphi(x)-\frac{y^2}{2}\varphi''(x)+\frac{y^4}{2.3.4}\varphi''''(x)-\ldots+y\psi'(x)-\frac{y^3}{2.3}\psi'''(x)+\ldots$$

$$y\varphi'(x)-\frac{y^3}{2.3}\varphi'''(x)+\ldots \qquad\qquad +\psi(x)-\frac{y^2}{2}\psi''(x)+\frac{y^4}{2.3.4}\psi''''(x)-\ldots=0$$

So oft ich nun für zwei, dem u beigelegte, ein und demselben Curvenzweige angehörigen Werthe $\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}$, $\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}$ zwei entgegengesetzt bezeichnete z finde, kann ich mit demselben Recht wie Descartes auf das Vorhandenseyn wenigstens Einer Wurzel schliessen, deren reeller Theil zwischen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ liegt.

Ich will nun an einigen Beispielen den Werth dieser Methode prüfen.

$$1)\quad u^4+9u^2-6u+5=0$$

Setze ich $u=0+y\sqrt{-1}$, so geht dadurch die Gleichung

$$z=u^4+9u^2-6u+5$$

über in

$$z=y^4-9y^2-6y\sqrt{-1}+5$$

welche bloss für $y=0$ reel wird. Man hat somit für

$$x=0;\quad y=0 \text{ und } z=5$$

Alsdann setze ich statt u, $1+y\sqrt{-1}$. Diess geschieht am bequemsten dadurch, dass ich eine neue Gleichung bilde, deren Wurzeln sämmtlich um 1 kleiner sind, und in dieser statt u, $y\sqrt{-1}$ setze. Man hat somit:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 9 | −6 | 5 |
| 1 | 1 | 10 | 4 | 9* |
| 1 | 2 | 12 | 16* | |
| 1 | 3 | 15* | | |
| 1 | 4* | | | |

als neue Gleichung

$$u^4+4u^3+15u^2+16u+9=0$$

und statt u, $y\sqrt{-1}$ gesetzt:

$$y^4 - 4y^3\sqrt{-1} - 15y^2 + 16y\sqrt{-1} + 9 = 0$$

welche reel wird für $-4y^3 + 16y = 0$, also für $y_1 = 0$, $y_2 = +2$, $y_3 = -2$. Es wird daher die vorgelegte Gleichung auch reel, für

$$u = 1,\quad u = 1 + 2\sqrt{-1},\quad u = 1 - 2\sqrt{-1}$$

Für $u = 1$ ist $z = 9$; für $u = 1 + 2\sqrt{-1}$ erhalte ich schnell das Resultat, wenn ich in

$$u^4 + 4u^3 + 15u^2 + 16u + 9$$

statt u, $2\sqrt{-1}$ substituire. Diess führt auf folgende Rechnung:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
1 & 4 & 15 & 16 & 9 \\
 & 2\sqrt{-1} & -4 + 8\sqrt{-1} & -16 + 22\sqrt{-1} & -44 \\
\hline
 & 4 + 2\sqrt{-1} & 11 + 8\sqrt{-1} & 0 + 22\sqrt{-1} & -35
\end{array}$$

Man erhält also $-35$, und eben diess erscheint auch, wenn man $u = 1 - 2\sqrt{-1}$ setzt. Man hat also hierdurch drei Puncte, die folgende Coordinaten haben:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 9 \end{cases}\quad \begin{cases} x = +1 \\ y = +2 \\ z = -35 \end{cases}\quad \begin{cases} x = +1 \\ y = -2 \\ z = -35 \end{cases}$$

Nun setze ich statt u, $2 + y\sqrt{-1}$, und diess wieder am bequemsten dadurch, dass ich die Wurzeln der Gleichung

$$u^4 + 4u^3 + 15u^2 + 16u + 9 = 0$$

um 1 vermindere, und in der so heraus erhaltenen statt u, $y\sqrt{-1}$ setze. Diess gibt:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 4 & 15 & 16 & 9 \\
1 & 5 & 20 & 36 & 45^* \\
1 & 6 & 26 & 62^* & \\
1 & 7 & 33^* & & \\
1 & 8^* & & &
\end{array}$$

$$u^4 + 8u^3 + 33u^2 + 62u + 45 = 0$$

und folglich

$$y^4 - 8y^3\sqrt{-1} - 33y^2 + 62y\sqrt{-1} + 45 = 0$$

welche für $-8y^3 + 62y = 0$ reel wird. Hieraus ergibt sich:

$$y_1 = 0,\ y_2 = +\tfrac{1}{2}\sqrt{31},\ y_3 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{31}$$

und wenn man also statt u substituirt:

$$2,\ 2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{-31},\ 2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{-31}$$

oder

$$2,\ 2 + \sqrt{-1}\,.\,2{\cdot}78\ldots,\ 2 - \sqrt{-1}\,.\,2{\cdot}78\ldots$$

so erhält man

$$45,\ -150{\cdot}68\ldots,\ -150{\cdot}68\ldots$$

Die Coordinaten dieser drei Punkte sind daher

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 45 \end{cases}\quad \begin{cases} x = +2 \\ y = +2{\cdot}78\ldots \\ z = -150{\cdot}68\ldots \end{cases}\quad \begin{cases} x = +2 \\ y = -2{\cdot}78\ldots \\ z = -150{\cdot}68\ldots \end{cases}$$

Fährt man so fort, so erhält man:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 149 \end{cases} \quad \begin{cases} x = +3 \\ y = +3\cdot605 \\ z = -501 \end{cases} \quad \begin{cases} x = +3 \\ y = -3\cdot605 \\ z = -501 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 381 \end{cases} \quad \begin{cases} x = +4 \\ y = +4\cdot486 \\ z = -1327\cdot\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} x = +4 \\ y = -4\cdot486\ldots \\ z = -1327\cdot\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = 825 \end{cases} \quad \begin{cases} x = +5 \\ y = +5\cdot403\ldots \\ z = -2965\cdot\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} x = +5 \\ y = -5\cdot403\ldots \\ z = -2965\cdot \end{cases}$$

Unsere zuerst gemachte Substitution $u = 0 + y\sqrt{-1}$ gab für $y$ bloss Einen Werth, während jede andere unserer Substitutionen drei Werthe nach sich zog, wovon immer zwei und zwei gleich und entgegegesetzt waren. Wir wollen daher sehen, ob nicht für ein bestimmtes $x$ diese zwei Werthe ganz gleich werden. Setzen wir daher statt $u$, $x + y\sqrt{-1}$, so erhalten wir:

$$z = (x^4+9x^2-6x+5) + y\sqrt{-1}\,(4x^3+18x-6) - y^2(6x^2+9) - y^3x\sqrt{-1} + y^4$$

und diese Gleichung wird reel für

$$y\,(4x^3+18x-6) - y^3x = 0$$

d. h. entweder für $y=0$ oder $y^2 = \dfrac{4x^3+18x-6}{x}$, und dieses gibt nur dann für $y$ zwei ganze gleiche Werthe, wenn $4x^3+18x-6 = 0$ ist, d. h. für $x = 0\cdot325\cdot\ldots$ wofür dann $z = 4\cdot011\ldots$ wird.

Wir haben somit für $u = 0\cdot325\ldots + y\sqrt{-1}$ drei gleiche Werthe für $y$ erhalten, die sämmtlich Null sind, und deren entsprechende $z = 4\cdot011\ldots$ ist.

Stellen wir nun die Coordinaten der drei Curvenzweige in einem Schema zusammen:

Schema für positive x.

| | 1. Curvenzweig | 2ter Curvenzweig | | 3ter Curvenzweig | |
|---|---|---|---|---|---|
| x=0 | y=0, z= 5 | von x=0 bis x=0·325... haben beide Curvenzweige keinen Punkt. | | | |
| x=0·325... | y=0, z= 4·011 | y=0 | z= + 4·011 | y= 0 | z=+ 4·011 |
| x=1 | y=0, z= 9 | y=2 | z=— 35 | y=—2, | z=— 35· |
| x=2 | y=0, z= 45 | y=2·78... | z= – 150·68.. | y=—2·78... | z=— 150·68.. |
| x=3 | y=0, z=149 | y=3·605... | z=— 501·... | y=—3·605... | z=— 501... |
| x=4 | y=0, z=381 | y=4·486... | z=—1327 | y=—4·486... | z=—1327 |
| x=5 | y=0, z=825 | y=5·403... | z=—2965·... | y=—5·403... | z=—2965·... |

so ersieht man hieraus, dass das $z$ sein Zeichen ändert,

1.) zwischen den beiden Substitutionswerthen:

$$u = 0\cdot325\ldots + 0.\sqrt{-1}, \quad u = 1+2\sqrt{-1}$$

und

2.) zwischen

$$u = 0{\cdot}325\ldots - 0.\sqrt{-1}\,, \quad u = 1 - 2\sqrt{-1}$$

Es müssen daher zwischen diesen beiden Systemen von Substitutionswerthen Wurzeln enthalten seyn. Versucht man daher $u = 0.4 + y\sqrt{-1}$ in $z = u^4 + 9u^2 - 6u + 5$ zu setzen, so hat man:

$$z = (0{\cdot}4)^4 + 9.(0{\cdot}4)^2 - 6.0{\cdot}4 + 5 + y\sqrt{-1}\,[4(0{\cdot}4)^3 + 18.0{\cdot}4 - 6] - y^2[6.(0{\cdot}4)^2 + 9]$$
$$- y^3\sqrt{-1}.0{\cdot}4 + y^4$$

welche für

$$y(4.0{\cdot}064 + 7{\cdot}2 - 6) - y^3.0{\cdot}4 = 0$$

reel wird, d. h. für $1{\cdot}456 = 0{\cdot}4y^2$, weil die andere Wurzel $y = 0$ nicht dem jetzt in Untersuchung stehenden Curvenzweig angehört. Aus letzterer Gleichung folgt:

$$y^2 = \frac{1{\cdot}456}{0{\cdot}4} = 3{\cdot}64\,, \quad y = \pm\,1{\cdot}9078\ldots$$

Es ist somit statt u zu substituiren $0{\cdot}4 \pm \sqrt{-1}\,.\,1{\cdot}9078\ldots$ was $z = -18{\cdot}93\ldots$ gibt, woraus man sieht, dass eine Wurzel liegt zwischen

$$u = 0{\cdot}325\ldots + 0.\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad u = 0{\cdot}4 + 1{\cdot}9078\ldots\sqrt{-1}$$

weil das Resultat der ersten Substitution $z = 4{\cdot}011\ldots$ und das Resultat der zweiten $z = -18{\cdot}93\ldots$ ist. Man hat hierdurch zwei nähere Grenzwerthe, und kann auf diese Art die Wurzeln in immer engere und engere Grenzen einschliessen, und wird diess auch thun, so lange, bis man mit Vortheil die HORNER'sche Methode benützen kann.

Ein Bild dieser betrachteten Curven gibt Figur 3. Die Curve (1) ist eine ebene, und entspricht dem ersten Curvenzweige. Sie hat nahe die Gestalt einer Kettenlinie, deren tiefster Punkt a, $x = 0{\cdot}325\ldots$ $z = 4{\cdot}011\ldots$ zu seinen Coordinaten hat. Keiner ihrer Punkte entspricht daher einer Wurzel der Gleichung.

Dann haben wir zwei Curvenzweige (die ich mit Professor SCHULZ conjugirte nenne), die sich im vorhin genannten Punkte a zu einer einzigen parabelähnlichen Curve vereinigen. Von diesem Vereinigungspunkte aus, der der höchste dieser Curve ist, und sich über der Horizontalebene befindet, senken sich beide Curvenzweige rasch nach abwärts und schneiden in zwei Punkten die Horizontalebene. Die Abscissen und Ordinaten dieser Durchschnittspunkte sind nichts anders als die reellen und imaginären Bestandtheile zweier conjugirten Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

Ich will jetzt, bevor ich noch die, negativen x entsprechenden, Curvenzweigen unserer Gleichung untersuche, dieselbe in zwei zerlegen, indem ich statt u, $x + y\sqrt{-1}$ setze, diess gibt:

$$z = x^4 + 9x^2 - 6x + 5 - y^2(6x^2 + 9) + y^4$$
$$y(4x^3 + 18x - 6 - 4xy^2) = 0$$

Die letzte Gleichung wird Null, entweder für $y=0$, oder für $2x^3+9x-3-2xy^2=0$. Ist $y=0$, so ist $z = x^4+9x^2-6x+5$, ihnen entspricht die Curve (1), deren horizontale

Projection die Abscissenaxe ist. Es ist dieselbe, die DESCARTES betrachtete, und die ich von nun an Hauptcurve nennen will.

Ist aber $2x^3+9x-3-2xy^2=0$, so ist $z=x^4+9x^2-6x+5-y^2(6x^2+9)+y^4$. Für positive x ist die horizontale Projection parabelähnlich, für negative x wollen wir sie jetzt construiren.

Es ist aus: $2x^3+9x-3-2xy^2=0$;

$$y^2=x^2+\frac{9}{2}-\frac{3}{2x}$$

Für kleine negative x wird y sehr gross, also auch z, so ist für

$$x=-0{\cdot}001,\quad y=\pm 38{\cdot}787\qquad z=2249984{\cdot}\ldots$$

so dass die Axe der y und die Axe der z Asymptoten sind, für die horizontale und für die verticale Projection der Curve.

Für $x=-1$ ist $y=\pm 2{\cdot}645\ldots\quad z=-\ 35$

$x=-2,\quad y=\pm 3{\cdot}041\ldots\quad z=-150{\cdot}\ldots$

u. s. f. Es liegen daher die zwei andern conjugirten imaginären Wurzeln so, dass ihre reellen Bestandtheile zwischen $-0{\cdot}001$ und $-1$ sich befinden, weil:

für $u=-0{\cdot}001\pm 38{\cdot}787\ldots\sqrt{-1}$ z positiv, und

für $u=-1\pm 2{\cdot}645\ldots\sqrt{-1}$, z negativ erscheint.

Die Figur 4 zeigt beiläufig den Lauf der beiden Curven. Sie vereinigen sich nirgends, sondern trennen sich immer weiter und weiter von einander, erstrecken sich rasch von oben nach abwärts, durchschneiden die Horizontalebene, und deuten somit auf imaginäre Wurzeln hin. Ihre horizontalen Projectionen sehen wie die Aeste einer Hyperbel aus.

Bevor ich ein zweites Beispiel durchführe, will ich bei Gleichungen mit lauter reellen Coefficienten zeigen, welcher Zusammenhang statt findet zwischen den höchsten und tiefsten Punkten der Hauptcurve und denen den conjugirten Curven. Es sey daher in

$$z=f(u)$$

statt u, $x+y\sqrt{-1}$ gesetzt, diess macht

$$z=f(x)+y\sqrt{-1}\,f'(x)-\frac{y^2}{2}f''(x)-\frac{y^3}{2.3}\sqrt{-1}\,f'''(x)+\ldots$$

oder in ihre zwei zerlegt:

$$z=f(x)-\frac{y^2}{2}f''(x)+\ldots$$

$$y\left(f'(x)-\frac{y^2}{2.3}f'''(x)+\ldots\right)=0$$

Wird $f'(x)=0$, so hat die letzte Gleichung $y^3$ zum Factor, und dieser weiset auf drei Wurzeln $y=0$ hin, wo eine der Hauptcurve angehört, die zwei andern aber auf die Vereinigung zweier conjugirten Curvenzweige deuten.

Alle höchsten und tiefsten Punkte der Hauptcurve sind also Punkte, von denen zwei conjugirte Curvenzweige auslaufen.

Ist für gewisse Werthe von x, $f'(x) = 0$ und $f'''(x) = 0$, so hat die zweite Gleichung der Curven den Factor $y^5$, man kann daher auf fünf sich allda vereinigende Punkte schliessen, u. s. f.

2. **Beispiel.** $z = u^4 - 9u^3 - 9u + 1000$

Sucht man aus $x^4 - 9x^3 - 9x + 1000 = 0$ die Maxima- und Minimawerthe, so sind diess Vereinigungspunkte dreier Curvenzweige. Man hat hiefür

$$4x^3 - 27x^2 - 9 = 0$$

und diese Gleichung besitzt die einzige reelle Wurzel

$$x = 6{\cdot}7986781\ldots$$

Setzt man nun $u = x + y\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$z = x^4 - 9x^3 - 9x + 1000 - y^2(6x^2 - 27x) + y^4$$
$$y\,[4x^3 - 27x^2 - 9 - y^2(4x - 9)] = 0$$

und diese zerfallen in die zwei Systeme von Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} z = x^4 - 9x^3 - 9x + 1000 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} z = x^4 - 9x^3 - 9x + 1000 - y^2(6x^2 - 27x) + y^4 \\ y^2(4x - 9) = 4x^3 - 27x^2 - 9 \end{cases}$$

Um die Curve des Systems (1) zu construiren, gebe ich dem x der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, . . ; −1, −2, −3, . . . und erhalte so

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| für | $x = 0$, | $z = 1000$ | | | |
| | $x = 1$, | $z = 983$ | für | $x = -1$, | $z = 1019$ |
| | $x = 2$, | $z = 926$ | | $x = -2$, | $z = 1106$ |
| | $x = 3$, | $z = 811$ | | $x = -3$, | $z = 1351$ |
| | $x = 4$, | $z = 644$ | | | |
| | $x = 5$ | $z = 455$ | | | |
| | $x = 6$, | $z = 298$ | | | |
| | $x = 6{\cdot}798\ldots$ | $z = 247{\cdot}\ldots$ | | | |
| | $x = 7$ | $z = 251$ | | | |
| | $x = 8$, | $z = 416$ | | | |

und für die Curven des Systems (2)

| | | |
|---|---|---|
| $x = 0$, | $y = \pm 1$, | $z = 1001$ |
| $x = 1$, | $y = \pm 2{\cdot}529\ldots$ | $z = 1158$ |
| $x = 2$, | $y = \pm 9{\cdot}219\ldots$ | $z = 10701$ |
| $x = 2{\cdot}25$, | $y = \pm \infty$, | $z = \infty$ |

Für Werthe von x zwischen 2·25 und 6·798 . . . wird y imaginär, für grössere Werthe von x erhalten wir zwei neue Curvenzweige, die folgende Coordinaten haben:

| | | |
|---|---|---|
| $x = 6{\cdot}798\ldots$ | $y = 0$, | $z = +\ 247{\cdot}\ldots$ |
| $x = 7$ | $y = \pm 1{\cdot}4509\ldots$ | $z = +\ 129{\cdot}\ldots$ |
| $x = 8$ | $y = \pm 3{\cdot}6771\ldots$ | $z = -\ 1672{\cdot}\ldots$ |

Da für

$$u = 7 \pm \sqrt{-1}\ .\ 1{\cdot}4509\ldots \quad z \text{ positiv, und für}$$

$$u = 8 \pm \sqrt{-1}\ .\ 3{\cdot}6771\ldots \quad z \text{ negativ wird,}$$

so liegen zwei conjugirte imaginäre Wurzeln zwischen diesen beiden Systemen von Substitutionswerthen.

Nun untersuche ich noch die Curvenzweige des Systems (2), die negative x haben,

$$\begin{array}{llll} \text{für} & x = -1\,, & y = \pm\, 1{\cdot}7541\ldots & z = \phantom{-}926{\cdot}\ldots \\ & x = -2\,, & y = \pm\, 2{\cdot}9605\ldots & z = \phantom{-}499{\cdot}\ldots \\ & x = -3\,, & y = \pm\, 4{\cdot}1403\ldots & z = -669{\cdot}\ldots \end{array}$$

Hieraus sehen wir, dass für

$$u = -2 \pm \sqrt{-1}\,.\,2{\cdot}9605\ldots \quad z \text{ positiv, und für}$$

$$u = -3 \pm \sqrt{-1}\ .\ 4{\cdot}1403\ldots \quad z \text{ negativ ist,}$$

es müssen daher zwei conjugirte imaginäre Wurzeln zwischen ihnen liegen. Will man die Wurzeln zwischen engere Grenzen einschliessen, so versuche man $x = -2{\cdot}5$ zu setzen, suche das dazugehörige y und z, und sehe, ob letztes positiv oder negativ ist. Im ersten Falle ist dann der reelle Theil zwischen $-2{\cdot}5$ und $-3$, im zweiten zwischen $-2$ und $-2{\cdot}5$ u. s. f.

Ein interessantes Beispiel ist folgendes:

$$3) \quad z = u^4 - 4u^3 + 14u^2 - 20u + 12$$

welche für $u = x + y\sqrt{-1}$ übergeht in:

$$z = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 12 - y^2(6x^2 + 12x + 14) + y^4$$

$$y\,[4x^3 - 12x^2 + 28x - 20 - y^2(4x-4)] = 0$$

und wenn man noch $x - 1$ in der zweiten Gleichung als Factor heraushebt, und durch 4 dividirt:

$$z = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 12 - y^2(6x^2 + 12x + 14) + y^4$$

$$y\,(x-1)\,(x^2-2x+5-y^2) = 0$$

Die letzte Gleichung wird Null für $y = 0$ oder $x - 1 = 0$ oder $y^2 = x^2 - 2x + 5$, und es zerfallen daher die zwei letzten Gleichungen in folgende Systeme von Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} z = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 12 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} z = 3 - 8y^2 + y^4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} z = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 12 - y^2(6x^2 - 12x + 14) + y^4 \\ y^2 = x^2 - 2x + 5 \end{cases}$$

Wir wollen nun zuerst das System der Gleichungen (1) untersuchen:

$$\begin{array}{llll} \text{für} & x = 0 & \text{ist} & z = 12 \\ & x = 1 & & z = 3 \text{ ein tiefster Punkt} \\ & x = 2 & & z = 12 \\ & x = 3 & & z = 51 \\ & x = 4 & & z = 156 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{für} & x = -1\,, & z = 51 \\ & x = -2\,, & z = 156 \\ & x = -3\,, & z = 387 \end{array}$$

In Figur 5 zeigt (1) diese Curve, ihr niedrigster Punkt ist noch oberhalb der horizontalen Ebene, keiner ihrer Punkte entspricht daher einer Wurzel.

Das System der Gleichungen (2) entspricht einer Curve, deren sämmtliche Punkte in einer Ebene liegen, die senkrecht auf der Ebene der ersten Curve ist. $x = 1$ ist die Abscisse jeder ihrer Punkte, und wir haben

für $y = 0$, $z = 3$ einen höchsten Punkt
$y = \pm 1$, $z = -4$
$y = \pm 2$, $z = -13$, das sind die Coordinaten, welche zweien
$y = \pm 3$ $z = 12$ tiefsten Punkten zukommen.
$y = \pm 4$, $z = 131$

Wir sehen hieraus, dass zwischen 1 und $1 \pm \sqrt{-1}$ zwei, und auch zwischen $1 \pm 2\sqrt{-1}$ und $1 \pm 3\sqrt{-1}$ zwei conjugirte Wurzeln liegen. Diese zwei Curvenzweige, die mit (2) bezeichnet sind, vereinigen sich in ihrem höchsten Punkt a, von diesem senken sie sich nach abwärts, und bilden in den Punkten $x = 1$, $y = \pm 2$ Minima.

Merkwürdiger Weise sind diess genau dieselben Punkte, die wir erhalten würden, wenn wir die Maxima und Minima von $u^4 - 4u^3 + 14u^2 - 20u + 12 = 0$ suchten, denn die Gleichung $4u^3 - 12u^2 + 28u - 20 = 0$ hat die drei Wurzeln

$$u = 1 \quad u = 1 + 2\sqrt{-1}\,, \quad u = 1 - 2\sqrt{-1}$$

die, wenn man wieder die reelle Grösse als Abscisse, die imaginäre als Ordinate betrachtet, zu den oben bemerkten drei Punkten führen.

Construiren wir endlich noch das letzte System von Gleichungen

$$z = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 12 - y^2(6x^2 - 12x + 14) + y^4$$
$$y = x^2 - 2x + 5$$

Die horizontale Projection ist eine Hyperbel. Es ist

für $x = 0$, $y = \pm 2{\cdot}236 \ldots z = -33$
$x = 1$, $y = \pm 2$ $z = -13$ ein höchster Punkt
$x = 2$, $y = \pm 2{\cdot}236 \ldots z = -33$
$x = 3$, $y = \pm 2{\cdot}828 \ldots z = -141$
$x = 4$, $y = \pm 3{\cdot}605 \ldots z = -481$

für $x = -1$, $y = \pm 2{\cdot}828 \ldots z = -141$
$x = -2$, $y = \pm 3{\cdot}605 \ldots z = -481$
$x = -3$, $y = \pm 4{\cdot}472 \ldots z = -1293$

Auch diese Curve ist in Figur 5 construirt und mit (3) bezeichnet.

Betrachten wir endlich noch die Gleichungen von der Form

$$z = u^n + 1$$

so ist, für $n = 2$

$$\begin{matrix} z = x^2 + 1 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} z = 1 - y^2 \\ x = 0 \end{matrix}$$

für $n = 3$

$$\begin{matrix} z = x^3 + 1 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} z = 1 - 8x^3 \\ y = x\sqrt{3} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} z = 1 - 8x^3 \\ y = -x\sqrt{3} \end{matrix}$$

für $n = 4$

$$z = x^4 + 1 \quad z = y^4 + 1 \quad z = 1 - 4x^4 \quad \text{und} \quad z = 1 - 4x^4$$
$$y = 0 \qquad x = 0 \qquad y = x \qquad\qquad y = -x$$

u. s. f. Sie entsprechen lauter ebenen Curven, und zwar n an der Zahl, geben construirt die verschiedenen Wurzeln der negativen Einheit, und zeigen deutlich ihren Zusammenhang mit der Kreistheilung. Eben dasselbe gilt auch für die Gleichungen $z = u^n - 1$.

---

## 2.

## Betrachtungen über die imaginären Maximum- und Minimumwerthe einer Function.

So wie man bisher die Maxima und Minima einer Function suchte, sah man ganz ab von den imaginären Werthen, die die abgeleitete Function auf Null brachten. Diess ist auch natürlich, denn für die Hauptcurve haben sie keinen Sinn, die conjugirten Curven betrachtet man nicht.

Ich will nun die Bedingungen aufsuchen, unter welchen ein imaginärer Werth von u eine reelle Function $z = f(u)$ zu einem Grössten oder Kleinsten macht, das heisst mit andern Worten: ich will die höchsten und tiefsten Punkte der conjugirten Curvenzweige finden.

Denken wir uns die Aufgabe bereits gelöst, und $x + y\sqrt{-1}$ gebe die horizontale Projection eines solchen Punktes an, z seine Höhe; oder was dasselbe ist, x sey die Abscisse, y die Ordinate und z die dritte Coordinate dieses Punktes. Für den nächsten Punkt dieser Curve sey das x in $x + \xi$, das y in $y + \eta$, das z in $z'$ übergegangen, es bedeuten also $\xi$ und $\eta$ äusserst kleine Zuwächse, und daher ist

$$z' = f[(x + y\sqrt{-1}) + (\xi + \eta\sqrt{-1})]$$

und wenn man entwickelt:

$$z' = f(x+y\sqrt{-1}) + (\xi+\eta\sqrt{-1})f'(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2.3}(\xi+\eta\sqrt{-1})^3 f'''(x+y\sqrt{-1}) + \ldots$$

oder

$$z' - z = (\xi+\eta\sqrt{-1})f'(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2.3}(\xi+\eta\sqrt{-1})^3 f'''(x+y\sqrt{-1}) + \ldots$$

Hätte nun $f'(x+y\sqrt{-1})$ irgend einen Werth, positiv oder negativ, reel oder imaginär, so würde, wenn man nach der entgegengesetzten Richtung der Curve ginge, sehr nahe das Entgegengesetzte *) für $z'-z$ herauskommen, allein ist diess der Fall, so kann offenbar weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinden, also muss, falls ein Maximum oder Minimum existirt

$$f'(x+y\sqrt{-1}) = 0$$

seyn. Ist aber diess Null, so wird

$$z'-z = \frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2.3}(\xi+\eta\sqrt{-1})^3 f'''(x+y\sqrt{-1}) + \ldots$$

und nun betrachten wir das Glied $\frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1})$, weil diess durch seine Grösse das Zeichen von $z'-z$ bestimmt.

Drei Fälle sind hier zu unterscheiden:

1) Falls für den unmittelbar nächsten Punkt $\xi=0$ wäre, was jederzeit dann stattfindet, wenn der Krümmungshalbmesser für die horizontale Projection des Punktes parallel zur Achse der x ist, hierdurch wird

$$z'-z = -\frac{1}{2}\eta^2 f''(x+y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2.3}\eta^3\sqrt{-1}\, f'''(x+y\sqrt{-1}) + \ldots$$

Ist nun $f''(x+y\sqrt{-1})$ reel und positiv, so wird $z'-z$ negativ bleiben, wenn man auch nach der entgegengesetzten Richtung der Curve geht, und man hat in diesem Falle ein Maximum, ist aber $f''(x+y\sqrt{-1})$ reel und negativ, so hat man ein Minimum.

2) Falls für den unmittelbar nächsten Punkt $\eta=0$ ist, was stattfindet, wenn der Krümmungshalbmesser für die horizontale Projection des Punktes parallel zur Axe der y ist. Hier wird alsdann:

$$z'-z = \frac{1}{2}\xi^2 f''(x+y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2.3}\xi^3 f'''(x+y\sqrt{-1}) + \ldots$$

Ist nun $f''(x+y\sqrt{-1})$ reel und positiv, so wird, weil $z < z'$ ein Minimum, und wenn $f''(x+y\sqrt{-1})$ reel und negativ, ein Maximum stattfinden.

3) Falls für den unmittelbar nächsten Punkt $\frac{1}{2}(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(x+y\sqrt{-1})$ reel wird, so wird, wenn es positiv ist, z ein Minimum, und wenn es negativ ist, ein Maximum seyn.

Hat man also die Maximum- und Minimumwerthe einer Function

$$z = f(u)$$

zu bestimmen, so verfahre man auf folgende Art. Man bilde sich die Gleichung

$$f'(u) = 0$$

und suche ihre Wurzeln, — seyen die reellen

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4, \ldots$$

*) Um die geometrische Bedeutung der Imaginären vollkommen klar zu haben, verweise ich auf einen kleinen Aufsatz, den ich vor einem Jahre in den »Berichten über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften (Band IV, S 96.)« gab.

und die imaginären

$$\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}\,,\quad \alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}\,,\quad \alpha_3+\beta_3\sqrt{-1}\,,\quad \alpha_4+\beta_4\sqrt{-1}\,,\ldots.$$

man bilde sich dann $f''(u)$, substituire in demselben zuerst die reellen Werthe $a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots$, und sehe ob $f''(u)$ positiv oder negativ wird. Im ersten Falle kann man auf Minimum-, im zweiten auf Maximumwerthe schliessen. Hernach substituire man auch die imaginären Werthe und sehe, ob $f''(u)$ reel oder imaginär werde. Wird es reel, so kann es positiv oder negativ seyn, und in beiden Fällen findet zugleich ein Maximum oder Minimum der Curve $z=f(u)$ und der Abscisse oder Ordinate ihrer Projection statt. Wird $f''(u)$ aber imaginär, so suche man $\xi$ und $\eta$ für den nächsten Punkt, und versuche ob $(\xi+\eta\sqrt{-1})^2 f''(u)$ hiefür reel wird, weil auch alsdann, wenn es positiv ist, ein Minimum, und wenn es negativ ist, ein Maximum vorhanden ist. (Ich vermuthe sogar, dass alle diese Sätze auch dann noch stattfinden, wenn $f''(x+y\sqrt{-1})$ imaginär ist, wenn nur der reelle Theil der prädominirende ist.)

Es ist sehr leicht die Untersuchungen hierüber fortzusetzen, und auf Maxima und Minima mit mehreren Veränderlichen auszudehnen, da der Weg, den man hierzu einschlagen muss, ganz derselbe ist. Als Beispiel nehme ich die schon früher betrachtete Gleichung

$$z=u^4-4u^3+14u^2-20u+12=f(u)$$

Es ist hier $f'(u)=4u^3-12u^2+28u-20=0$, und hieraus folgt:

$$u=1\,,\quad u=1+2\sqrt{-1}\,,\quad u=1-2\sqrt{-1}$$

Substituirt man diese Werthe in $z$, so erhält man $3$, $-13$, $-13$ und in

$$f''(u) = 12u^2-24u+28$$

so erhält man die Resultate $16$, $-32$, $-32$

Es entspricht daher $x=1$, $y=0$, $z=3$ einem tiefsten Punkt der Curve (1), deren Gleichungen

$$\begin{aligned}z&=x^4-4x^3+14x^3-20x+12\\ y&=0\end{aligned}$$

sind, und einem höchsten Punkt der Curve (2), deren Gleichungen folgende sind:

$$\begin{aligned}z&=3-8y^2+y^4\\ x&=1\end{aligned}$$

Ferner entsprechen die zwei Punkte

$$\begin{cases}x=+\ 1\\ y=+\ 2\\ z=-13\end{cases}\qquad\begin{cases}x=+\ 1\\ y=-\ 2\\ z=-13\end{cases}$$

zweien tiefsten Punkten derselben Curve (2), deren Gleichungen

$$\begin{aligned}z&=3-8y^2+y^4\\ x&=1\end{aligned}$$

sind, und zweien höchsten Punkten der Curven (3), die die Gleichungen

$$\begin{aligned}z&=x^4-4x^3+14x^2-20x+12-y^2(6x^2-12x+14)+y^4\\ y^2&=x^2-2x+5\end{aligned}$$

haben. Alle diese hier aufgeschriebenen Gleichungen gingen bekanntlich aus $z = f(u)$ hervor. Man kann unmöglich das Ineinandergreifen der Curven in ihren höchsten und tiefsten Punkten übersehen, aber dass diess so stattfinden müsse, bewies auf eine äusserst interessante Weise Herr Professor Schulz, der auch die Güte hatte, dasselbe im Vorworte hierzu mitzutheilen.

---

## 3.

## Aufsuchung der reellen und imaginären Wurzeln höherer numerischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Ein einziges Beispiel genügt, die ganze Methode gehörig zu beleuchten. Es seyen also gegeben die zwei Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 - 10 = 0 \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 98 = 0 \end{cases}$$

Ich setze, um zuerst die Grenzwerthe zu entdecken, $z = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 98$, gebe dem x in der andern Gleichung $x^2 + 4xy - 2y^2 - 10 = 0$ der Reihe nach die Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots -1, -2, -3, \ldots$ suche aus ihr beiläufig die zugehörigen reellen Werthe von y, substituire beide in z, construire die Curve, und schliesse wie früher auf die Existenz von Wurzeln, wenn z für zwei verschiedene aber demselben Curvenzweig angehörige Substitutionen entgegengesetzt bezeichnet erscheint.

Aus $x^2 + 4xy - 2y^2 - 10 = 0$ folgt:

$$y = x \pm \sqrt{\frac{3x^2 - 10}{2}}$$

Diess wird reel für $3x^2 \gtreqqless 10$; $3x^2 = 10$ gibt $x = \pm 1{\cdot}82574\ldots$, es ist daher folgendes unser

**Substitutionsschema.**

| | 1. Curvenzweig | | 2ter Curvenzweig | |
|---|---|---|---|---|
| für $x = 1{\cdot}825\ldots$ | $y = 1{\cdot}825\ldots$ | $z = -55$ | $y = 1{\cdot}825$ | $z = -55$ |
| $x = 2$ | $y = 1$ | $z = -72$ | $y = 3$ | $z = 0$ |
| $x = 3$ | $y = 0{\cdot}084$ | $z = -68$ | $y = 5{\cdot}915$ | $z = 403$ |
| $x = 4$ | $y = -0{\cdot}358$ | $z = -49$ | $y = 8{\cdot}358$ | $z = 1205$ |
| $x = 5$ | $y = -0{\cdot}700$ | $z = -18$ | y und z werden für noch grössere x immer grösser und grösser. | |
| $x = 6$ | $y = -1$ | $z = 28$ | | |
| $x = 7$ | $y = -1{\cdot}276$ | $z = 92$ | | |
| $x = 8$ | $y = -1{\cdot}539$ | $z = 175$ | | |

$x = 2$, $y = 3$ macht $z = 0$, also ist diess ein System von Wurzelwerthen. Zwischen $x = 5$ und $x = 6$ ändert z sein Zeichen, also muss zwischen beiden ein Wurzelwerth liegen, ich versuche daher

$$x = 5{\cdot}5, \quad \text{diess gibt} \quad y = -0{\cdot}854 \quad \text{und} \quad z = 2{\cdot}90$$

daher liegt x zwischen 5 und 5·5, versuche ich endlich noch

$$x = 5{\cdot}4, \quad \text{so erhalte ich} \quad y = -0{\cdot}824, \quad z = -1{\cdot}617$$

Es sind daher bis in die erste Decimalstelle richtig $x = 5{\cdot}4$, $y = -0{\cdot}8$. Um nun die nächstfolgenden Decimalen zu erhalten, verfolge ich wieder denselben Weg, den ich bei der Aufsuchung der imaginären Wurzeln höherer Gleichungen verfolgte. Ich bilde nämlich eine neue Gleichung, deren eine Unbekannte um 5·4, und deren andere um —0·8 kleiner ist, als die Unbekannten der vorgelegten Gleichung, und zwar auf folgende Art: Ich ordne die beiden gegebenen Gleichungen etwa nach x, betrachte einstweilen bloss dieses x als unbekannt, und vermindere dasselbe nach der bekannten Weise der Horner'schen Substitution um 5·4; und erhalte so:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $4y$ | $-2y^2-10$ | 1 | $3y$ | $3y^2$ | $-98$ |
| | $4y+5{\cdot}4$ | $21{\cdot}6y+29{\cdot}16$ | | $3y+5{\cdot}4$ | $16{\cdot}2y+29{\cdot}16$ | $16{\cdot}2y^2+87{\cdot}48y+157{\cdot}464$ |
| | $4y+10{\cdot}8^*$ | $-2y^2+21{\cdot}6y+19{\cdot}16^*$ | | $3y+10{\cdot}8$ | $3y^2+16{\cdot}2y+29{\cdot}16$ | $16{\cdot}2y^2+87{\cdot}48y+59{\cdot}464^*$ |
| | | | | $3y+16{\cdot}2^*$ | $16{\cdot}2y+58{\cdot}32$ | |
| | | | | | $3y^2+32{\cdot}4y+87{\cdot}48^*$ | |

die zwei Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} x^2+x(4y+10{\cdot}8)-2y^2+21{\cdot}6y+19{\cdot}16=0 \\ x^3+x^2(3y+16{\cdot}2)+x(3y^2+32{\cdot}4y+87{\cdot}48)+16{\cdot}2y^2+87{\cdot}48y+59{\cdot}464=0 \end{cases}$$

Würden die Gleichungen (1) durch $x=\alpha$, $y=\beta$ identificirt werden, so müssten nothwendig die Gleichungen (2) identisch werden durch die Substitution $x=\alpha-5{\cdot}4$, $y=\beta$. Und nun vermindere ich das y in beiden Gleichungen um —0·8, und zwar dadurch, dass ich es bei jedem Gliede $4y+10{\cdot}8$, $-2y^2+21{\cdot}6y+19{\cdot}16$, $3y+16{\cdot}2$, $3y^2+32{\cdot}4y+87{\cdot}48$, $16{\cdot}2y^2+87{\cdot}48y+59{\cdot}464$, thue; dadurch erhalte ich:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 10·8 | —2 | 21·6 | 19·16 | 1 | 3 | 16·2 | 3 | 32·4 | 87·48 | 16·2 | 87·48 | 59·464 |
| | 4 | 7·6* | —2 | 23·2 | 0·60* | | 3 | 13·8* | 3 | 30·0 | 63·48* | 16·2 | 74·52 | —0·152* |
| | | | —2 | 24·8* | | | | | 3 | 27·6* | | 16·2 | 61·56* | |

Die zwei Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} x^2+x(4y+7{\cdot}6)-2y^2+24{\cdot}8y+0{\cdot}60=0 \\ x^3+x^2(3y+13{\cdot}8)+x(3y^2+27{\cdot}6y+63{\cdot}48)+16{\cdot}2y^2+61{\cdot}56y-0{\cdot}152=0 \end{cases}$$

haben also Wurzeln, deren eine Unbekannte x um 5·4, und deren andere Unbekannte y um —0·8 kleiner sind als die Wurzeln der vorgelegten Gleichungen (1).

Da also in (3) x sowohl als y kleiner als 0·1 sind, so kann ich für einen Augenblick die 2ten und höheren Potenzen der Unbekannten vernachlässigen, diess gibt:

$$\begin{aligned} 7{\cdot}6x + 24{\cdot}8y &= -0{\cdot}60 \\ 63{\cdot}48x + 61{\cdot}56y &= 0{\cdot}152 \end{aligned}$$

und da solche Gleichungen uns wiederholt aufzulösen vorkommen, so wollen wir allgemeine Formeln für solche Gleichungen aufstellen. Man hat nämlich, wenn

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

ist,

$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'} \qquad y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}$$

Suchen wir also die Producte, die im Nenner vorkommen bis auf Einheiten, und die im Zähler vorkommen bis auf die erste Decimale, so ist:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 63·48 | 61·56 | 24·8 | 61·56 | 63·48 | 0·152 |
| 24·8 | 7·6 | 0·152 | — 0·6 | — 0·6 | 7·6 |
| 1270 | 431 | 2·5 | b'c = —36·9 | a'c = —38·0 | 1·1 |
| 254 | 37 | 1·2 | | | 1 |
| 50 | ab' = 468 | bc' = 3·7 | | | ac' = 1·2 |
| a'b = 1574 | | | | | |

$bc' - b'c = 40·6 \qquad 40·6 : 1106 = 0·03$

$a'c - ac' = -39·2 \qquad 39·2 : 1106 = 0·03$

$a'b - ab' = 1106$

Wir vermindern daher bei beiden Gleichungen auf dieselbe Weise, das x um 0·03 und das y um —0·03, machen beide Operationen unmittelbar nach einander, und zeigen die Verrichtung der ersten durch ein, die der zweiten durch zwei Sternchen an, und haben alsdann:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7·6. | —2 | 24·8.. | 0·60.. | 1 | 3 | 13·8. | 3 | 27·6. | 63·48. | 16·2. | 61·56.. | —0·152... |
| | | 0·03 | | 0·12 | 0·2289 | | | 0·03 | | 0·09 | 0·4149 | 0·09 | 0·8307 | 1·916847 |
| | 4 | 7·63 | —2 | 24·92 | 0·8289* | | 3 | 13·83 | 3 | 27·69 | 63·8949 | 16·29 | 62·3907 | 1·764847* |
| | | 0·03 | —2 | 24·98 | 0·0795** | | | 0·03 | | 9 | 4158 | 16·29 | 61·9020 | —0·092213** |
| | 4 | 7·66* | —2 | 25·04** | | | 3 | 13·86 | 3 | 27·78 | 64·3107* | 16·29 | 61·4133** | |
| | 4 | 7·54** | | | | | | 0·03 | 3 | 27·69 | 63·4800** | | | |
| | | | | | | | 3 | 13·89* | 3 | 27·60** | | | | |
| | | | | | | | 3 | 13·80** | | | | | | |

Die zwei Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} x^2 + x(4y + 7·54) - 2y^2 + 25·04y + 0·0795 = 0 \\ x^3 + x^2(3y + 13·8) + x(3y^2 + 27·6y + 63·48) + 16·29y^2 + 61·4133y - 0·092213 = 0 \end{cases}$$

haben Wurzeln, deren eine Unbekannte x um 5·43, und deren andere Unbekannte y um —0·83 kleiner sind, als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung (1).

Da jetzt x sowohl als y kleiner als 0·01 sind, so kann man wieder einstweilen die zweiten und höheren Potenzen vernachlässigen, und erhält als Näherungsgleichungen

$$\begin{aligned} 7·54x + 25·04y &= -0·0795 \\ 63·48x + 61·4133y &= 0·092213 \end{aligned}$$

Rechnen wir jetzt die Producte, die im Nenner des Resultates erscheinen, bis auf Einheiten, und die im Zähler erscheinen bis auf die zweite Decimale, so hat man:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 63·48 | 61·4133 | 25·04 | 61·413 | 63·48 | 0·0922 |
| 25·04 | 7·54 | 0·0922 | —0·0795 | — 0·0795 | 7·54 |
| 1270 | 430 | 2·25 | 4·30 | 4·44 | 0·64 |
| 317 | 31 | 5 | 55 | 57 | 5 |
| 2 | 2 | bc' = 2·30 | 3 | 3 | ac' = 0·69 |
| a'b = 1589 | ab' = 463 | | b'c = —4·88 | a'c = —5·04 | |

| | | |
|---|---|---|
| bc′—b′c = | 7·18 | 7·18 : 1126 = 0·006 |
| a′c—ac′ = — | 5·73 | 5·73 : 1126 = 0·005 |
| a′b—ab′ = | 1126 | |

Wir müssen also jetzt wieder vermindern, das $x$ um 0·006, das $y$ um —0·005, und wenn man in der Rechnung mit den Decimalen nicht weiter gehen will, als bis zur sechsten, so hat man folgendes:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 7·54. | —2 25·04. 0·0795.. | 1 | 3 13·80. | 3 27·60 63·4800.. | 16·29. 61·4133.. —0·092213 |
| | 0·006 | 24 45276 | | 0·006 | 18 82836 | 18 165708 0·381377 |
| | 4 7·546 | —2 25·064 0·124776* | | 3 13·806 | 3 27·618 63·562836 | 16·308 61·579008 0·289164* |
| | 0·006 | —2 25·074 —0·000594** | | 0·006 | 18 82872 | 16·308 61·497468 —0·018323** |
| | 4 7·552* | —2 25·084** | | 3 13·812 | 3 27·636 63·645708* | 16·308 61·415928** |
| | 4 7·532** | | | 0·006 | 3 27·621 63·507603** | |
| | | | | 3 13·818* | 3 27·606** | |
| | | | | 3 13·803** | | |

Die zwei angenäherten Werthe sind jetzt $x = 5{\cdot}436$, $y = -0{\cdot}835$, und die zwei angenäherten Gleichungen:

$$7{\cdot}532x + 25{\cdot}084y = 0{\cdot}000594$$

$$63{\cdot}507603x + 61{\cdot}415928y = 0{\cdot}018323$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 63·5076 | 61·4159 | 25·084 | 61·4159 | 63·5076 | 0·018323 |
| 25·084 | 7·532 | 0·018323 | 0·000594 | 0·000594 | 7·532 |
| 1270 | 430 | 0·251 | 0·031 | 0·032 | 0·128 |
| 318 | 31 | 200 | 5 | 5 | 9 |
| 5 | 2 | 8 | b′c=0·036 | a′c=0·037 | ac′=0·137 |
| a′b=1593 | ab′=463 | bc′=0·459 | | | |

| | | |
|---|---|---|
| bc′—b′c = + | 0·423 | 0·423 : 1130 = 0·0003 |
| a′c—ac′ = — | 0·100 | 0·100 : 1130 = 0·00008 |
| a′b—ab′ = | 1130 | |

Vermindern wir daher jetzt bloss das $x$ um 0·0003, so haben wir:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 7·532. | —2 25·084. —0·000594 | 1 | 3 13·803. | 3 27·606 63·507603 | 16·308. 61·415928 —0·018323 |
| | 0·0003 | 0·0012 2260 | | 0·0003 | 0·0009 4141 | 0·0009 9282 0·019053 |
| | 4 7·5323 | —2 25·0852 0·001666* | | 3 13·8033 | 3 27·6069 63·511744 | 16·3089 61·424210 0·000730* |
| | 0·0003 | | | 0·0003 | 0·0009 4141 | |
| | 4 7·5326* | | | 3 13·8036 | 3 27·6078 63·515885* | |
| | | | | 0·0003 | | |
| | | | | 3 13·8039* | | |

Jetzt sind die zwei angenäherten Werthe: $x = 5{\cdot}4363$, $y = -0{\cdot}8350$ und die zwei Näherungsgleichungen:

$$7{\cdot}5326x + 25{\cdot}0852y = -0{\cdot}001666$$

$$63{\cdot}515885x + 61{\cdot}424210y = -0{\cdot}000730$$

aus denen man findet:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 63·515 | 61·4241 | 25·0852 | 61·4241 | 63·515 | 7·5326 |
| 25·0852 | 7·5326 | —0·000730 | —0·001666 | —0·001666 | —0·000730 |
| 1270 | 430 | 0·0175 | 0·0614 | 0·0635 | 0·0053 |
| 318 | 31 | 8 | 368 | 381 | 2 |
| 5 | 2 | bc' = —0·0183 | 37 | 38 | ac' —0·0055 |
| a'b = 1593 | ab' = 463 | | 4 | 4 | |
| | | | b'c = —0·1023 | a'c = —0·1058 | |

$$bc'—b'c = 0·0840 \qquad 0·0840 : 1130 = 0·00007$$
$$a'c—ac' = — 0·1003 \qquad 0·1003 : 1130 = 0·00008$$
$$a'b—ab' = 1130$$

Vermindern wir also x um 0·00007 und y um — 0·00008, so haben wir:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 7·5326. | —2 25·0852. | 0·001666 | 1 | 3 13·8039. | 3 27·6078. | 63·515885 | 16·3089. | 61·424210 | 0·000730 |
| | 0·00007 | 0·00028 | 527 | | 0·00007 | 0·00021 | 966 | 0·00021 | 1932 | 4446 |
| | 4 7·53267 | —2 25·08548 | 0·002193* | | 3 13·80397 | 3 27·60801 | 63·516851 | 16·30911 | 61·426142 | 0·005176* |
| | 0·00007 | —2 25·08564 | 0·000187** | | 0·00007 | 0·00021 | 966 | 16·30911 | 61·424838 | 0·000262** |
| | 4 7·53274* | —2 25·08580** | | | 3 13·80404 | 3 27·60822 | 63·517817* | 16·30911 | 61·423534** | |
| | 4 7·53242** | | | | 0·00007 | 3 27·60798 | 63·515609** | | | |
| | | | | | 3 13·80411* | 3 27·60774** | | | | |
| | | | | | 3 13·80387** | | | | | |

Die zwei angenäherten Werthe sind jetzt: $x = 5·43637$, $y = — 0·83508$, und die zwei Correctionsgleichungen, aus denen man die letzten Ziffer zu bestimmen hat:

$$7·53242x + 25·08580y = — 0·000187$$
$$63·515609x + 61·423534y = — 0·000262$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 25·08580 | 61·4235 | 63·5156 | 7·53242 |
| —0·000262 | —0·000187 | —0·000187 | —0·000262 |
| 0·00502 | 0·00614 | 0·00635 | 0·00151 |
| 150 | 491 | 508 | 45 |
| 5 | 43 | 44 | 1 |
| bc' = —0·00657 | b'c = —0·01148 | a'c = —0·01187 | ac' = —0·00197 |

| | | |
|---|---|---|
| | 0·000491 | 1130 = 0·000000434 |
| a'b—ab' = 1130 | 39 | |
| bc'—b'c = 0·000491 | 5 | |
| a'c—ac' = — 0·00990 | 0·00990 | 1130 = 0·00000876 |
| | 86 | |
| | 7 | |

daher ist

$$x = 5·43637043 \quad , \quad y = — 0·83508876$$

weil die Gleichungen, die herauskommen, wenn man die x der vorgelegten Gleichung um 5·43637043, und die y um — 0·83508876 vermindert, die zwei Wurzeln $x = 0$, $y = 0$ haben.

2. Beispiel.

$$x^3 — 2x^2 + 4xy — y^3 = 0$$
$$x^2 + y^2x — y^2 = 0$$

Hier suche ich wieder aus der zweiten Gleichung y, und setze die erste gleich z, diess gibt

$$z = x^3 - 2x^2 + 4xy - y^3$$

$$y = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x}}$$

für $x = 0$ ist $y = 0$ und $z = 0$, also ist $x = 0$, $y = 0$ ein System von Wurzelwerthen.

$x = 1$ ist $y = \pm\infty$ und $z = \mp\infty$

$x > 1$ ist $y$ imaginär.

Suchen wir nun, was für die Werthe von $x$ zwischen 0 und 1 für Resultate kommen:

| | 1ster Curvenzweig | | 2ter Curvenzweig | |
|---|---|---|---|---|
| x=0·1 | y=0·105 | z= 0·022 | y=—0·105 | z=— 0·060 |
| x=0·2 | y=0·223 | z= 0·095 | y=—0·223 | z=— 0·240 |
| x=0·3 | y=0·358 | z= 0·231 | y=—0·358 | z=— 0·537 |
| x=0·4 | y=0·516 | z= 0·432 | y=—0·516 | z=— 0·944 |
| x=0·5 | y=0·707 | z= 0·686 | y=—0·707 | z=— 1·436 |
| x=0·6 | y=0·948 | z= 0·918 | y=—0·948 | z=— 1·926 |
| x=0·7 | y=1·278 | z= 0·854 | y=—1·278 | z=— 2·128 |
| x=0·8 | y=1·788 | z=— 0·768 | y=—1·788 | z=— 0·768 |
| x=0·9 | y=2·846 | z=—13·689 | y=—2·846 | z= 11·907 |

Von einem Wurzelsystem liegt x zwischen 0·7 und 0·8, und y zwischen 1·2 und 1·7
von einem andern System x „ 0·8 „ 0·9 y —1·7 —2·8

Um nun das erste zu berechnen, versuchen wir

$x = 0·75$, dafür ist $y = 1·5$ und $z = 0·42$

Nehmen wir daher

$x = 0·78$, dafür ist $y = 1·6629$, $z = -0·15$

es liegt daher $x$ zwischen 0·75 und 0·78 und $y$ zwischen 1·5 und 1·66.

Versuchen wir endlich

$x = 0·77$, dafür ist $y = 1·6055$ und $z = 0·0768$.

Es ist daher

$x = 0·77\ldots$, $y = 1·6\ldots$

Vermindern wir also bei beiden Gleichungen zuerst das $y$ um 1, so hat man, wenn man beide Gleichungen wie folgt aufschreibt:

$$1)\quad x^3 - 2x^2 + 4x\,(y+0) - y^3 + 0y^2 + 0y + 0 = 0;\quad x^2 + x(y^2+0y+0) - y^2 = 0$$

$$\begin{array}{c|c|cc|cccc||c|ccc|ccc}
1 & -2 & 4y & 0 & -y^3 & 0.y^2 & 0.y & 0 & 1 & y^2 & 0.y & 0 & -y^2 & 0.y & 0 \\
 & & 4y & 4^* & -1 & -1 & -1 & -1^* & & 1 & 1 & 1^* & -1 & -1 & -1^* \\
 & & & & -1 & -2 & -3^* & & & 1 & 2^* & & -1 & -2^* & \\
 & & & & -1 & -3^* & & & & & & & & &
\end{array}$$

alsdann folgende zwei neue Gleichungen:

$$2)\quad x^3 - 2x^2 + x\,(4y+4) - y^3 - 3y^2 - 3y - 1 = 0;\quad x^2 + x(y^2+2y+1) - y^2 - 2y - 1 = 0$$

Würden die Wurzeln der ersten Gleichungen $x = \alpha$, $y = \beta$ seyn, so würden die Wurzeln unserer neu gebildeten Gleichung 2) seyn: $x = \alpha$, $y = \beta - 1$.

Jetzt vermindern wir das x um 0·7, das y um 0·6, diess führt auf:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −2 | 4 | 4.. | −1 | −3 | −3 | −1... |
| | −1·3 | 4 | 3·09 | −1 | −3 | −0·2. | 1·163* |
| | −0·6 | 4 | 2·67* | −1 | −3·6 | −2·36 | −0·253** |
| | 0·1* | 4 | 5·07** | −1 | −4·2 | −4·88** | |
| | | | | −1 | −4·8** | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | −1 | −2 | −1.. |
| | 1 | 2 | 1·7 | −0·3 | −0·6. | 0·19* |
| | 1 | 2 | 2·4* | −0·3 | −0·78 | −0·278** |
| | 1 | 2·6 | 3·96** | −0·3 | −0·96** | |
| | 1 | 3·2** | | | | |

die zwei Gleichungen:

$$3)\quad x^3+0{\cdot}1x^2+x(4y+5{\cdot}07)-y^3-4{\cdot}8y^2-4{\cdot}88y-0{\cdot}253=0;$$
$$x^2+x(y^2+3{\cdot}2y+3{\cdot}96)-0{\cdot}3y^2-0{\cdot}96y-0{\cdot}278=0$$

welche das x um 0·7 und das y um 1·6 kleiner haben, als die Gleichungen (1).

Um nun zu finden, um was man zweckmässig diese Gleichungen vermindern soll, bilden wir uns die Näherungsgleichungen

$$5{\cdot}07x-4{\cdot}88y=0{\cdot}253$$
$$3{\cdot}96x-0{\cdot}96y=0{\cdot}278$$

und suchen aus ihnen das y. Da wir den Correctionswerth von x, der 0·07 ist, schon kennen, so haben wir:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3·96 | 5·07 | 3·96 | 5·07 | |
| − 4·88 | −0·96 | 0·253 | 0·278 | a′c−ac′=− 0·407 |
| 15·84 | 4·56 | 0·792 | 1·014 | a′b−ab′=−14·46 |
| 3·17 | 30 | 198 | 355 | 0·407 : 14·46 = 0·02 |
| 31 | ab′= −4·86 | 12 | 40 | |
| a′b=−19·32 | | a′c=1·002 | ac′=1·409 | |

Wir müssen also vermindern, das x der Gleichungen 3) um 0·07 und das y derselben um 0·02. Verrichten wir ferner alle Hilfsrechnungen auf der Seite, damit der Gang der Hauptrechnung ungestört vor sich gehen könne, so haben wir:

$$x=0{\cdot}773572 \qquad y=1{\cdot}625681$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0·1 | 4 | 5·07.. | −1 | −4·8 | −4·88 | −0·253... |
| | 0·17 | 4 | 5·0819 | −1 | −4·8 | −4·60.. | 0·102733* |
| | 0·24 | 4 | 5·0987* | −1 | −4·82 | −4 6964 | 0·008805** |
| | 0·31* | 4 | 5·1787** | −1 | −4·84 | −4·7932** | 0·024343917* |
| | 0·313 | 4 | 5·179639 | −1 | −4·86** | −4·7812.. | 0·000316292** |
| | 0·316 | 4 | 5·180587* | −1 | −4·86. | −4·805525 | 0·002916666* |
| | 0·319* | 4 | 5·200587** | −1 | −4·865. | −4·829875** | 0·000018186** |
| | 0·3195 | 4 | 5·200747 | −1 | −4·870 | −4·827875 | 0·000382418* |
| | 0·3200 | 4 | 5·200907* | −1 | −4·875** | −4·830800 | −0·000004288** |
| | 0·3205* | 4 | 5·203307** | −1 | −4·875 | −4·833726** | 0·000006119* |
| | 0·32057 | 4 | 5·203329 | −1 | −4·8756 | −4·833446 | 0·000001285** |
| | 0·32064 | 4 | 5·203351* | −1 | −4·8762 | −4·833836 | |
| | 0·32071* | 4 | 5·203671** | −1 | −4·8768** | −4·834226** | |
| | 0·320712 | 4 | 5·203672 | −1 | −4·8768 | −4·834218 | |
| | 0·320714 | 4 | 5·203673* | −1 | −4·87688 | −4·834223 | |
| | 0·320716* | 4 | 5·203677** | −1 | −4·87696 | −4·834228** | |
| | | | | −1 | −4·87704** | | |
| | | | | −1 | −4·87704 | | |
| | | | | −1 | −4·877041 | | |
| | | | | −1 | −4·877042 | | |
| | | | | −1 | −4·877043** | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3·2 | 3·96 | −0·3 | −0·96. | −0·278. |
| | 1 | 3·2 | 4·03 | −0·23 | −0·736. | 0·0041* |
| | 1 | 3·2 | 4·10* | −0·23 | −0·7406 | −0·010712** |
| | 1 | 3.22 | 4·1644** | −0·23 | −0·7452** | 0·0017902* |
| | 1 | 3·24** | 4·1674 | −0·227 | −0·73548. | −0·001892875** |
| | 1 | 3·24 | 4·1704* | −0·227 | −0·736615 | 0·000200688* |
| | 1 | 3·24 | 4·186625** | −0·227 | −0·737750** | −0·000241946** |
| | 1 | 3·245 | 4·187125 | −0·2265 | −0·737587 | 0·000051329* |
| | 1 | 3·250** | 4·187625* | −0·2265 | −0·737723 | −0·000007682** |
| | 1 | 3·250 | 4·189575** | −0 2265 | −0·737859** | 0·000000698* |
| | 1 | 3·250 | 4·189645* | −0·22643 | −0·737631. | −0·000000040** |
| | 1 | 3·2506 | 4·189905** | −0·22643 | −0·737649 | |
| | 1 | 3·2512** | 4·189907 | −0·22643 | −0·737667** | |
| | 1 | 3·2512 | 4·189909* | −0·226428 | −0·737661 | |
| | 1 | 3·25128 | 4·189912** | −0·226428 | −0·737661** | |
| | 1 | 3·25136** | | | | |
| | 1 | 3·25136 | | | | |
| | 1 | 3·25136 | | | | |
| | 1 | 3·251361 | | | | |
| | 1 | 3·251362** | | | | |

**Rechnung zur Bestimmung der 3ten Decimalen:**

$$\begin{aligned} 5{\cdot}1787x - 4{\cdot}7932y &= -\ 0{\cdot}008805 \\ 4{\cdot}1644x - 0{\cdot}7452y &= 0{\cdot}010712 \end{aligned}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4·1644 | 5·1787 | —4·7932 | —0·7452 | 4·1644 | 5·1787 |
| — 4·7932 | —0·7452 | 0·010712 | —0·008805 | —0·008805 | 0·010712 |
| 16·66 | 3·62 | 0·0479 | 0·0059 | 0·0333 | 0·0518 |
| 2·91 | 20 | 33 | 6 | 33 | 36 |
| 37 | 3 | bc′=—0·0512 | b′c=0·0065 | a′c=—0·0366 | 1 |
| 1 | ab′=—3·85 | | | | ac′=0·0555 |
| a′b=—19·95 | | | | | |

bc′—b′c = —0·0577  0·0577 16·10 = 0·003
a′c—ac′ = —0·0921  0·0921 16·10 = 0·005
a′b—ab′ = 16·10

**Rechnung zur Bestimmung der 4ten Decimalen:**

$$\begin{aligned} 5{\cdot}200587x - 4{\cdot}829875y &= -\ 0{\cdot}000316292 \\ 4{\cdot}186625x - 0{\cdot}737750y &= 0{\cdot}001892875 \end{aligned}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4·186625 | 5·200587 | —4·829875 | —0·737750 | 4·186625 | 5·200587 |
| —4·829875 | —0·737750 | 0·001892875 | —0·000316292 | —0·000316292 | 0·001892875 |
| 16·74 | 3·64 | 0·00483 | 0·00022 | 0·00125 | 0·00520 |
| 3·34 | 16 | 386 | 1 | 4 | 416 |
| 8 | 4 | 43 | b′c=0·00023 | 2 | 47 |
| 4 | ab′=—3·84 | 1 | | a′c=—0·00131 | 1 |
| a′b=—20·20 | | bc′=—0·00913 | | | ac′=0·00984 |

bc′—b′c = — 0·00936  0·00936 16·36 = 0·0005
a′c—ac′ = — 0·01115  0·01115 16·36 = 0·0006
a′b—ab′ = —16·36

**Rechnung zur Bestimmung der 5ten Decimalen:**

$$\begin{aligned} 5{\cdot}203307x - 4{\cdot}833726y &= -\ 0{\cdot}000018186 \\ 4{\cdot}189575x - 0{\cdot}737859y &= 0{\cdot}000241946 \end{aligned}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4·189575 | 5·2033 | —4·833726 | —0·737859 | 4·189575 | 5·203307 |
| —4·833726 | —0·7378 | 0·0002419 | —0·0000181 | —0·0000181 | 0·0002419 |
| 16·76 | 3·64 | 0·000967 | 0·000007 | 0·000042 | 0·001041 |
| 3·34 | 16 | 193 | 6 | 33 | 208 |
| 12 | 4 | 5 | b′c=0·000013 | a′c=—0·000075 | 5 |
| 1 | ab′=—3·84 | 4 | | | 5 |
| a′b=—20·23 | | bc′=—0·001169 | | | ac′=0·001259 |

bc′—b′c = — 0·001182  0·001182 16·39 = 0·00007
a′c—ac′ = — 0·001334  0·001334 16·39 = 0·00008
a′b—ab′ = —16·39

**Rechnung zur Bestimmung der 6ten Decimalen:**

$$\begin{aligned} 5{\cdot}203671x - 4{\cdot}834226y &= 0{\cdot}000004288 \\ 4{\cdot}189905x - 0{\cdot}737667y &= 0{\cdot}000007682 \end{aligned}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4·189 | 5·203 | —4·834226 | —0·737667 | 4·189905 | 5·203671 |
| —4·834 | —0·737 | 0·000007682 | 0·00000428 | 0·000004288 | 0·000007682 |
| 16·76 | 3·64 | 0·0000338 | 0·0000029 | 0·0000167 | 0·0000364 |
| 3·34 | 16 | 29 | 1 | 8 | 31 |
| 12 | 4 | 3 | $b'c = -0·0000030$ | 3 | 4 |
| 2 | $ab' = -3·84$ | $bc' = -0·0000370$ | | $a'c = 0·0000178$ | $ac' = 0·0000399$ |
| $a'b = -20·24$ | | | | | |

$$bc' - b'c = -\ 0·0000340 \qquad 0·0000340 \quad 16·40 = 0·000002$$
$$a'c - ac' = -\ 0·0000221 \qquad 0·0000221 \quad 16·40 = 0·000001$$
$$a'b - ab' = -16·40$$

Rechnung zur Bestimmung der letzten Decimalen:

$$5·203677x - 4·834228y = -0·000001285$$
$$4·189912x - 0·737661y = 0·000000040$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4·189912 | 5·203677 | —4·8342 | —0·737661 | 4·189912 | 5·203677 |
| —4·834228 | —0·737661 | 0·000000040 | —0·000001285 | —0·000001285 | 0·00000004 |
| 16·760 | 3·642 | $bc' = -0·000000193$ | 0·000000738 | 0·000004190 | $ac' = 0·000000208$ |
| 3·351 | 156 | | 147 | 838 | |
| 125 | 36 | | 58 | 334 | |
| 16 | 3 | | 4 | 21 | |
| 1 | $ab' = -3·837$ | | $b'c = 0·000000947$ | $a'c = -0·000005383$ | |
| $a'b = -20·253$ | | | | | |

$$bc' - b'c = -0·000001140 \qquad 0·000001140 \quad 16·416 = 0·0000000694$$
$$a'c - ac' = -\ 0·000005591$$

| | |
|---|---|
| 0·000001140 | 16·416 = 0·0000000694 |
| 155 | |
| 7 | |
| 0·000005591 | 16·416 = 0·0000003406 |
| 666 | |
| 10 | |

daher ist:

$$x = 0·7735720694; \quad y = 1·6256813406$$

Es ist ganz klar, dass diess auch der Weg ist, die imaginären Wurzeln bei solchen Gleichungen zu berechnen, denn die Verminderung der Unbekannten um etwas Imaginäres, ist wie aus meinem frühern Memoire zu sehen, eben so einfach, wie geschehe sie um etwas Reelles. Nur mit der Bestimmung der ersten Ziffern wird es einige Schwierigkeiten haben, die man aber ganz so beseitigt, wie ich sie ursprünglich bei der Aufsuchung der imaginären Wurzeln höherer Gleichungen mit Einer Unbekannten beseitigte. Man wird nämlich aus dem Substitutionsschema sehen, für welche Werthe von x und y das z am kleinsten wird. Diese Werthe, die ich $x'$ und $y'$ nennen will, beachte man, setze dann in der einen der beiden Gleichungen, z. B. in $\varphi(x, y) = 0$ statt x diesen kleinsten Werth $x'$ und $\xi_1\sqrt{-1}$, wo $\xi_1$ eine kleine Grösse ist, so dass man man hat: $\varphi(x + \xi_1\sqrt{-1},\ y) = 0$ und suche, welche Werthe von y diese Gleichung befriedigen. Jener Werth, der nahe an $y'$ liegt, aber im Allgemeinen imaginär ist, und $x' + \xi_1\sqrt{-1}$ setze man in die zweite gegebene Gleichung $z = \psi(x, y)$ statt x und y. Alsdann setze man statt x,

$x' + \xi_2\sqrt{-1}$, $x' + \xi_3\sqrt{-1}$ u. s. w., wo $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ nicht weit auseinander liegende Zahlen sind, berechne die zugehörigen y und z. Jene Werthe von x und y sind alsdann am nächsten den Wurzelwerthen, welche das kleinste z hervorbringen (z ist am kleinsten, wenn sein Modulus am kleinsten ist), um diese vermindere man die vorgelegte Gleichung, und fahre dann fort, genau nach dem Wege, der mir bei Aufsuchung der reellen Wurzeln zur Richtschnur gedient.

Ja selbst bei drei höheren Gleichungen mit drei Unbekannten, vier mit vier Unbekannten u. s. w. wird man so verfahren können, wie ich hier bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten verfuhr. Man wird nämlich zuerst Grenzwerthe suchen, dann jede der Gleichungen ordnen, etwa zuerst nach x, dann nach y, dann nach z u. s. f. und die Wurzeln um die kleinen Grenzwerthe vermindern; alsdann sich Näherungsgleichungen des ersten Grades bilden, aus ihnen die Correctionen berechnen, wieder um diese die Wurzeln vermindern u. s. f.

Die Grenzwerthe findet man z. B. für drei Gleichungen $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x,y,z) = 0$, $\varphi_3(x,y,z) = 0$ auf folgende Weise. Man setze

$$u = \varphi_1(x,y,z) \;,\quad \varphi_2(x,y,z) = 0 \;,\quad \varphi_3(x,y,z) = 0,$$

gebe dem x successive die aufeinanderfolgenden Werthe $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, substituire dieselben in $\varphi_2(x,y,z) = 0$, $\varphi_3(x,y,z) = 0$, suche aus ihnen beiläufig die zugehörigen reellen Werthe von y und z, und heisse sie $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ Man substituire alsdann ein System zusammengehöriger Werthe $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \ldots$ in $u = \varphi_1(x,y,z)$. Wird dasselbe für zwei verschiedene Substitutionen, die aber einer und derselben Reihenfolge angehören, verschieden bezeichnet, so kann man ganz so, wie vorher auf Wurzelwerthe schliessen.

Diess führt uns auch dahin, die Grenzen der imaginären Wurzeln zweier höhern Gleichungen auf folgende Weise aufzufinden. Man setze in den beiden gegebenen Gleichungen $\varphi_1(x,y)=0$, $\psi_1(x,y) = 0$ statt $x = p+q\sqrt{-1}$, und statt y, $p'+q'\sqrt{-1}$, zerlege jede Gleichung in zwei bloss reelle Bestandtheile enthaltende, so hat man von vier Gleichungen die Grenzwerthe der reellen Wurzeln zu finden, was man auf die eben erklärte Art thun kann.

---

## Note
### über die imaginären Maxima- und Minimawerthe einer Function.

Man kann auch die höchsten und tiefsten Punkte der conjugirten Curven dadurch finden, dass man untersucht, welche Punkte derselben eine horizontale Berührungslinie haben. Nun ist, wenn $z = f(u)$ ist, die Gleichung der Tangente:

$$\zeta - z = \frac{dz}{du}(v - u)$$

und setzt man statt v, $\xi + \eta\sqrt{-1}$, statt u, $x + y\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\zeta - z = f'(x + y\sqrt{-1})[\xi + \eta\sqrt{-1} - x - y\sqrt{-1}]$$

und, wenn man statt $f'(x+y\sqrt{-1})$, $P + Q\sqrt{-1}$ setzt:

$$\zeta - z = (P + Q\sqrt{-1})[\xi + \eta\sqrt{-1} - x - y\sqrt{-1}]$$

oder

$$\zeta - z = P(\xi - x) + P(\eta - y)\sqrt{-1} + Q(\xi - x)\sqrt{-1} - Q(\eta - y)$$

oder endlich:

$$P(\eta - y) + Q(\xi - x) = 0\ ;\quad \zeta - z = P(\xi - x) - Q(\eta - y)$$

Seyen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, die diese Gerade mit den drei Axen macht, so ist nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie:

$$\cos^2\alpha = \frac{P^2}{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)}\ ;\quad \cos^2\beta = \frac{Q^2}{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)}\ ;\quad \cos^2\gamma = \frac{P^2+Q^2}{1+P^2+Q^2}$$

und diese Gerade ist mit der Ebene xy parallel, wenn $\gamma = 90^0$ ist, d. h. wenn $P = 0$ und $Q = 0$, und folglich $f'(x+y\sqrt{-1}) = 0$ ist.

Für dieselben Werthe von P und Q ist merkwürdigerweise $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; man kann sie bestimmen, wenn man die Zähler und die Nenner der sie darstellenden Brüche in Beziehung auf x differenzirt, diess gibt:

$$\cos^2\alpha = \frac{P\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}y'\right)}{(1+2P^2+2Q^2)\left[P\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}y'\right) + Q\left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dy}y'\right)\right]}$$

was wieder auf $\frac{0}{0}$ führt, wenn man $P = 0$ und $Q = 0$ setzt. Differenzirt man daher nochmals, so erhält man, wenn man gleich $P = 0$, $Q = 0$ setzt,

$$\cos^2\alpha = \frac{\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}y'\right)^2}{\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}y'\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dy}y'\right)^2}$$

und ebenso

$$\cos^2\beta = \frac{\left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dy}y'\right)^2}{\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}y'\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dy}y'\right)^2}$$

woraus sich dieselben Folgerungen machen lassen, die ich früher machte.

Es bliebe höchstens noch zu zeigen übrig, dass

$$\zeta - z = f'(x+y\sqrt{-1})[\xi + \eta\sqrt{-1} - x - y\sqrt{-1}]$$

wirklich die Gleichung der Tangente ist. Hierzu scheint folgender Weg geeignet.

Die Gleichung $z = f(u)$ gibt:

$$1)\quad \begin{cases} z = f(x) - \frac{y^2}{2} f''(x) + \frac{y^4}{2.3.4} f''''(x) - \ldots \\ y \left\{ f'(x) - \frac{y^2}{2.3} f'''(x) + \ldots \right\} = 0 \end{cases}$$

und $\frac{dz}{du} = f'(u)$ gibt:

$$f'(x+y\sqrt{-1}) = f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \ldots + y\sqrt{-1} \left\{ f''(x) - \frac{y^2}{2.3} f''''(x) + \ldots \right\}$$

Die Gleichungen der Tangente an (1) sind:

$$\zeta - z = \left\{ f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \ldots \right\} (\xi - x) - y \left\{ f''(x) - \frac{y^2}{2.3} f''''(x) + \ldots \right\} (\eta - y)$$

$$y \left\{ f''(x) - \frac{y^2}{2.3} f''''(x) + \ldots \right\} (\xi - x) + \left\{ f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \ldots \right\} (\eta - y) = 0$$

Die zweite mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, und zur ersten addirt, gibt:

$$\zeta - z = \left\{ f'(x) - \frac{y^2}{2} f'''(x) + \ldots \right\} [\xi - x + (\eta - y)\sqrt{-1}]$$
$$+ y\sqrt{-1} \left\{ f''(x) - \frac{y^2}{2} f''''(x) + \ldots \right\} [\xi - x + (\eta - y)\sqrt{-1}]$$

oder

$$\zeta - z = f'(x+y\sqrt{-1}) \,.\, [\xi - x + (\eta - y)\sqrt{-1}]$$

wie gezeigt werden sollte.

---

Und nun schliesse ich mit der Hoffnung, vielleicht bald wieder zu diesem Gegenstande zurückkehren zu können, um die Anwendungen zu zeigen, die man von all dem hier Mitgetheilten auf transcendente Gleichungen machen kann.

Sollte irgend Gutes dieser Aufsatz enthalten, so gebührt der Dank hiefür einzig und allein meinem Lehrer Hrn. Professor SCHULZ. Er war es, der mich stets in dieser Wissenschaft leitete, und mit seinem Rathe unterstützte. Ohne ihn hätte ich diese Arbeit wohl nie zu Stande gebracht.

---

## Verbesserung.

Seite 158 Zeile 5 sollte statt des Satzes »Hernach substituire man auch die imaginären Werthe, und sehe, ob $f''(u)$ reel oder imaginär werde« folgender stehen: »Hernach substituire man jene der imaginären Werthe $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, welche $z = f(u)$ reel machen, in $f''(u)$, und sehe ob es reel oder imaginä werde.«

Fig. 2.

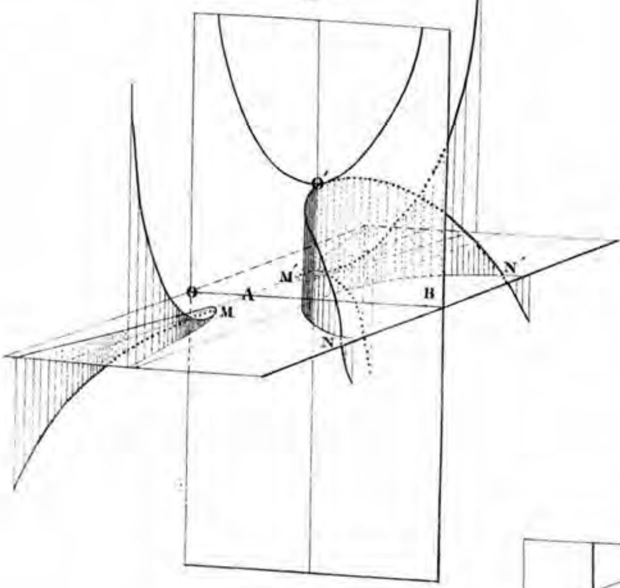


Fig. 1.

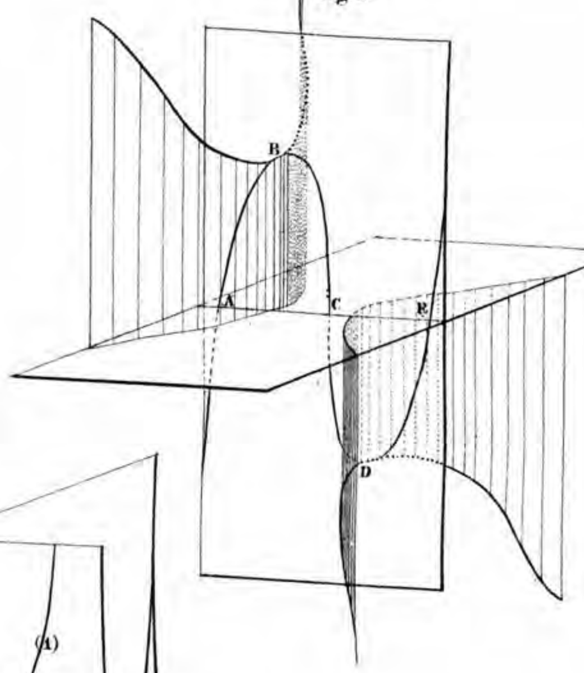


Fig. 5.

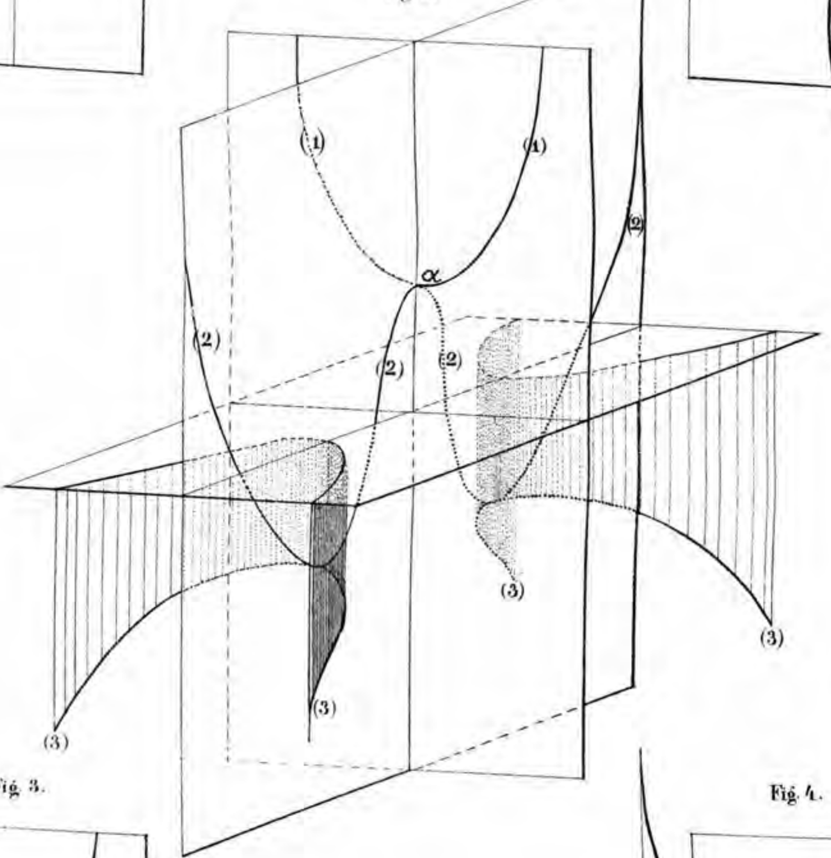


Fig. 3.

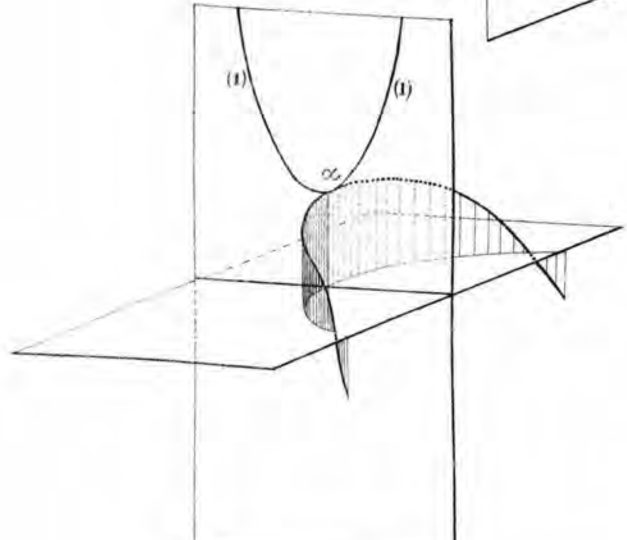


Fig. 4.