VII. Aufsuchung der reellen und imaginären Wurzeln einer Zahlengleichung höheren Grades.

Von

Simon Spitzer.

Mitgetheilt am 3. August 1849 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

1.

Vorwort.

Von

Dr. Leopold Carl Schulz v. Strasznitzki,

Professor der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute.

Die so einfache und ganz praktische Berechnungsart der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen nach HORNER's Vorgang (siehe Dr. SCHULZ V. STRASZNITZKI's neue Methode zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen. Wien, Heubner 1842) liess erwarten, dass auch die imaginären Wurzeln auf eine ähnliche Weise sich würden finden lassen, um so mehr als nach der HORNER'schen Methode die Substitution imaginärer Werthe eben so regelmässig und einfach geschieht wie die reeller. Mehrere Versuche in dieser Beziehung blieben fruchtlos, bis Hr. SPITZER, mein Freund und ehemaliger Schüler, ganz muthvoll die Berechnungsart der reellen Wurzeln auf die der imaginären übertrug, und durch einen einfachen Kunstgriff bei der Division der imaginären Coefficienten sich half. Ihm zunächst verdankt man die Berechnung der imaginären Wurzeln, sobald man sich nur einiger Massen in der Nähe derselben befindet.

Nachdem Hr. SPITZER mir seine Methode bekannt gab, die im nachfolgenden Aufsatze enthalten ist, gelang es mir ein Mittel anzugeben, um den Ort der imaginären Wurzeln zu finden, welches ich mir hier als Vorwort mitzutheilen erlaube, und somit legen wir beide die vollständige Lösung der Aufgabe: **Auffindung und Berechnung der imaginären Wurzeln der numerischen Gleichungen auf annäherungsweisem Wege mit jeder beliebigen Genauigkeit** dem mathematischen Publikum vor.

Ich will nach FOURIER's Vorgange die Auflösung der Gleichungen in zwei Arbeiten theilen, a) Trennung, b) Berechnung der Wurzeln, und zwar der ersteren hier mehr Raum gestatten, da der Aufsatz selbst sich zunächst um die zweite bewegt.

I. Trennung der imaginären Wurzeln.

Bekanntlich hat jede numerische Gleichung $f(x) = 0$, es seyen ihre Coefficienten reel oder imaginär, nothwendig einen Werth $x = u + v\sqrt{-1}$, der sie auf Null reducirt, wobei u und v reelle Werthe haben. Durch diese Substitution $x = u + v\sqrt{-1}$ gehe $f(x)$ in $\varphi(u, v) + \psi(u, v)\sqrt{-1}$ über, so hat man:

$$\varphi(u, v) = 0, \quad \psi(u, v) = 0$$

wobei wie gesagt, u und v reelle Werthe haben müssen. Es seyen α und β diese reellen Werthe, dass also:

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0; \quad \psi(\alpha, \beta) = 0$$

identische Gleichungen seyn werden. Nimmt man nun statt des bestimmten α das allgemein unbestimmte u, so hat die $\varphi(u, \beta) = 0$ mit einer Unbekannten nothwendig die reelle Wurzel $u = \alpha$, daher müssen, falls α eine einfache Wurzel ist, für die kleinsten Werthe von δ die Ausdrücke $\varphi(\alpha-\delta, \beta)$ und $\varphi(\alpha+\delta, \beta)$ verschiedene Zeichen haben, es muss also, wenn man dem u nach und nach alle Werthe gibt, das Resultat von $\varphi(u, \beta)$ sein Zeichen ändern, sobald u den Werth α passirt.

Eben so hat die Gleichung $\psi(\alpha, v) = 0$ nothwendig die reelle Wurzel $v = \beta$, und daher werden $\psi(\alpha, \beta-\rho)$ und $\psi(\alpha, \beta+\rho)$ für die kleinsten Werthe von ρ gewiss verschiedene Zeichen haben, wenn wir wieder den besondern Fall ausschliessen, dass β eine doppelte Wurzel sey.

Die Aufgabe nun, Werthe für u und v zu suchen, die $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ beide auf Null bringen, ist auf die Aufgabe zurückgeführt zwei Grenzwerthe für u zu finden, die bei demselben v das $\varphi(u, v)$ verschieden bezeichnet machen, und eben so zwei Grenzwerthe für v zu finden, die bei demselben u dem $\psi(u, v)$ entgegengesetzte Zeichen geben, dadurch werden die zu suchenden Werthe von u und v in bestimmte Grenzen eingeschlossen, die man immer enger setzen, und so u und v immer genauer bestimmen kann, wie diess durch ein Paar Beispiele sich ganz klar darstellen wird.

Beispiel 1. Es sey die Gleichung

$$f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + 31x + 26 = 0$$

substituirt man nach dem gewöhnlichen Horner'schen Verfahren statt x die Werthe

$$\begin{array}{lll} 1 + 2\sqrt{-1}, & 1 + 3\sqrt{-1}, & 1 + 4\sqrt{-1}, \\ 2 + 2\sqrt{-1}, & 2 + 3\sqrt{-1}, & 2 + 4\sqrt{-1}, \\ 3 + 2\sqrt{-1}, & 3 + 3\sqrt{-1}, & 3 + 4\sqrt{-1}, \end{array}$$

so hat man:

$$\begin{array}{lll} f(1+2\sqrt{-1}) = 52 + 52\sqrt{-1}; & f(1+3\sqrt{-1}) = 87 + 33\sqrt{-1}; & f(1+4\sqrt{-1}) = 220 - 40\sqrt{-1}; \\ f(2+2\sqrt{-1}) = 40 + 70\sqrt{-1}; & f(2+3\sqrt{-1}) = 0 + 0\sqrt{-1}; & f(2+4\sqrt{-1}) = 28 - 196\sqrt{-1}; \\ f(3+2\sqrt{-1}) = 24 + 172\sqrt{-1}; & f(3+3\sqrt{-1}) = -151 + 93\sqrt{-1}; & f(3+4\sqrt{-1}) = -312 - 180\sqrt{-1}. \end{array}$$

Wie man sieht, wechselt beim Uebergange von $f(1+3\sqrt{-1})$ auf $f(3+3\sqrt{-1})$ der reelle Theil sein Zeichen $(+87, -151)$, eben so wechselt beim Uebergange von

$f(2+2\sqrt{-1})$ auf $f(2+4\sqrt{-1})$ der imaginäre Theil sein Zeichen $(+70,\ -196)$, daher hat man die Vermuthung, dass der reelle Theil zwischen 1 und 3, und der imaginäre Theil zwischen 2 und 4 liege, und richtig ist, wie man sieht, $2+3\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung.

Beispiel 2. Es sey die Gleichung

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 58x^2 - 174x + 481 = 0$$

so hat man für $x = u + v\sqrt{-1}$, wobei:

	$v=2$	$v=3$	$v=4$	$v=5$	$v=6$	$v=7$
$u=0$	$265-300\sqrt{-1}$	$40-360\sqrt{-1}$	$-191-312\sqrt{-1}$	$-364-120\sqrt{-1}$	$-311+252\sqrt{-1}$	$40+840\sqrt{-1}$
$u=1$	$192-128\sqrt{-1}$	$27-162\sqrt{-1}$	$-120-160\sqrt{-1}$	$-165-110\sqrt{-1}$	$0+0\sqrt{-1}$	$507+182\sqrt{-1}$
$u=2$	$165+20\sqrt{-1}$	$0+0\sqrt{-1}$	$-147-56\sqrt{-1}$	$-192-160\sqrt{-1}$	$-27-324\sqrt{-1}$	$480-560\sqrt{-1}$
$u=3$	$184+192\sqrt{-1}$	$-41+198\sqrt{-1}$	$-272+96\sqrt{-1}$	$-425-150\sqrt{-1}$	$-392-576\sqrt{-1}$	$-41-1218\sqrt{-1}$

$$\text{Weil} \left\{ \begin{array}{l} f(2+2\sqrt{-1}) = 165+20\sqrt{-1} \ \text{und}\ f(2+4\sqrt{-1}) = -147-56\sqrt{-1} \\ f(1+3\sqrt{-1}) = 27-162\sqrt{-1} \ \text{und}\ f(3+3\sqrt{-1}) = -41+198\sqrt{-1} \end{array} \right\}$$

$$\text{so liegt die Wurzel} \left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen } 2+2\sqrt{-1} \text{ und } 2+4\sqrt{-1} \\ \text{zwischen } 1+3\sqrt{-1} \text{ und } 3+3\sqrt{-1} \end{array} \right.$$

und sie ist wirklich wie man sieht $2+3\sqrt{-1}$.

Aehnliche Bemerkungen lassen sich rücksichtlich der Wurzel $1+6\sqrt{-1}$ machen.

Beispiel 3. $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$; $x = u + v\sqrt{-1}$

	$v=0$	$v=1$	$v=2$	$v=3$	$v=4$	$v=5$	$v=6$
$u=-3$	$189+0.\sqrt{-1}$	$106-190\sqrt{-1}$	$-131-290\sqrt{-1}$	$-486-210\sqrt{-1}$	$-899+140\sqrt{-1}$	$-1286+850\sqrt{-1}$	$-1539+2010\sqrt{-1}$
$u=-.2$	$54+0.\sqrt{-1}$	$10-67\sqrt{-1}$	$-110-68\sqrt{-1}$	$-270+63\sqrt{-1}$	$-410+392\sqrt{-1}$	$-446+985\sqrt{-1}$	$-270+1908\sqrt{-1}$
$u=-1$	$11+0.\sqrt{-1}$	$-6-10\sqrt{-1}$	$-45+22\sqrt{-1}$	$-70+138\sqrt{-1}$	$-21+380\sqrt{-1}$	$186+790\sqrt{-1}$	$659+1410\sqrt{-1}$
$u=0$	$6+0\sqrt{-1}$	$4+5\sqrt{-1}$	$10+28\sqrt{-1}$	$60+87\sqrt{-1}$	$214+200\sqrt{-1}$	$556+385\sqrt{-1}$	$1194+660\sqrt{-1}$
$u=+1$	$9+0.\sqrt{-1}$	$10+2\sqrt{-1}$	$25-2\sqrt{-1}$	$90-18\sqrt{-1}$	$265-52\sqrt{-1}$	$634-110\sqrt{-1}$	$1305-198\sqrt{-1}$
$n=+2$	$14+0.\sqrt{-1}$	$6-4\sqrt{-1}$	$-6+7\sqrt{-1}$	$14-51\sqrt{-1}$	$126-152\sqrt{-1}$	$414-325\sqrt{-1}$	$-958-588\sqrt{-1}$
$u=+3$	$39+0.\sqrt{-1}$	$10+38\sqrt{-1}$	$-65+22\sqrt{-1}$	$-150-102\sqrt{-1}$	$-185-388\sqrt{-1}$	$-86-890\sqrt{-1}$	$255-1662\sqrt{-1}$

Weil $f(-1+\sqrt{-1}) = -6-10\sqrt{-1}$ und $f(0+\sqrt{-1}) = 4+5\sqrt{-1}$, so liegt die eine Wurzel zwischen $-1+\sqrt{-1}$ und $0+\sqrt{-1}$, macht man die Zwischensetzung $x = -0{\cdot}5+\sqrt{-1}$, so erhält man $f(-0{\cdot}5+\sqrt{-1}) = -1{\cdot}8125+1{\cdot}25\sqrt{-1}$, da nun $f(-0{\cdot}5+0{\cdot}5\sqrt{-1} = 4-1{\cdot}25\sqrt{-1}$, so schliesst man, dass die Wurzel zwischen $-0{\cdot}5+0{\cdot}5\sqrt{-1}$ und $-0{\cdot}5+1\sqrt{-1}$ liege; die fernern Substitutionen

$$f(-0{\cdot}5+0{\cdot}8\sqrt{-1}) = +0{\cdot}8371-0{\cdot}44\sqrt{-1}$$

$$\text{und} \quad f(-0{\cdot}5+0{\cdot}9\sqrt{-1}) = -0{\cdot}4464+0{\cdot}27\sqrt{-1}$$

geben uns die Wurzel durch $-0{\cdot}5+0{\cdot}8\sqrt{-1}$ in den ersten Decimalstellen genau bestimmt, für welche man nach fortgesetzter Arbeit $x = -0{\cdot}5+0{\cdot}866025\sqrt{-1}$ erhält.

Bei Verfolgung der zweiten Wurzel ergibt sich:

$$\begin{cases} f(2+\sqrt{-1}) = 6+7\sqrt{-1} \\ f(2+2\sqrt{-1}) = -6-4\sqrt{-1} \end{cases} \text{ dann } \begin{cases} f(2+1\cdot5\sqrt{-1}) = -1\cdot1875-1\cdot875\sqrt{-1} \\ f(2+1\cdot4\sqrt{-1}) = +0\cdot2016+0\cdot280\sqrt{-1} \end{cases}$$

wodurch diese Wurzel mit $2+1\cdot4\sqrt{-1}$ in den ersten Decimalstellen bestimmt ist, für welche man $2+1\cdot4142135\sqrt{-1}$ findet.

II. Berechnung der imaginären Wurzeln.

Hat man durch das Vorhergehende die Wurzel $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ der Gleichung

$$\text{(I)} \quad f(x) = A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0,$$

wenigstens in den ersten Decimalen durch $p+q\sqrt{-1}$ bestimmt, so bildet man nach dem Horner'schen Verfahren die Gleichung:

$$f(x-p-q\sqrt{-1}) = A_m(x-p-q\sqrt{-1})^m + A_{m-1}(x-p-q\sqrt{-1})^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + A_2(x-p-q\sqrt{-1})^2 + A_1(x-p-q\sqrt{-1}) + A_0$$
$$= B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \ldots + B_2x^2 + B_1x + B_0 = 0 \quad \text{(II)}$$

Da die Wurzeln der Gleichung II um $p+q\sqrt{-1}$ kleiner sind, als die Wurzeln von I, so hat die Gleichung II die Wurzel $x=(\alpha-p)+(\beta-q)\sqrt{-1}$; da nach unserer Voraussetzung $\alpha-p<\frac{1}{10}$ und $\beta-q<\frac{1}{10}$, so sind alle numerischen Ausdrücke in x^2 kleiner als $\frac{1}{10^2}$ in x^3 kleiner als $\frac{1}{10^3}$ u. s. w. und man wird daher bei einer ersten Annäherung, x^2 und die höhern Potenzen von x vernachlässigen, und $B_1x+B_0=0$ also $x=-\frac{B_0}{B_1}$ setzen, da aber im Allgemeinen alle Coefficienten B_0, B_1, B_2 u. s. w. imaginäre Ausdrücke seyn werden, so sey $B_0=a+b\sqrt{-1}$, $B_1=c+d\sqrt{-1}$, daher

$$x=-\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=-\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{c^2+d^2}=-\left\{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}\right\}=\gamma+\delta\sqrt{-1}$$

Der Werth $\gamma+\delta\sqrt{-1}$ ist nur ein annäherungsweiser Probirwerth, um welchen man neuerdings die Wurzeln der letzten transformirten Gleichung zu vermindern hat. Die beiden Zeichen des Endresultates geben uns dann an, was die Grenzen der beiden Theile der Wurzel sind. Kurz man verfährt mit dem Werthe $\gamma+\delta\sqrt{-1}$ genau so wie bei der Horner'schen Methode bei reellen Wurzeln mit der Ziffer die die Division des letzten durch den vorletzten Coefficienten darbietet.

So wie man durch das hier geschilderte Verfahren die Werthe von u und v finden kann, die die Gleichung $f(x)=\varphi(u,v)+\psi(u,v)\sqrt{-1}=0$ auf Null reduciren, indem durch sie sowohl $\varphi(u,v)$ als $\psi(u,v)$ auf Null gebracht werden, so lassen sich auch die Werthe von u und v ohne weitere Beschwerde angeben, die $\psi(u,v)$ allein auf Null reduciren, und somit erscheint dadurch die Aufgabe gelöset, imaginäre Werthe von x anzugeben, die für das Polynom $f(x)$, dessen Coefficienten imaginär sind, reelle Resultate darbieten, eine Aufgabe, die vielleicht in der Folge von Bedeutung seyn wird.

2.

Aufsuchung der Wurzeln.

Von

Simon Spitzer.

Wenn eine Methode das auszeichnet, dass das ganze Verfahren, welches man dabei anwendet, in höchst einfacher systematischer Ordnung vor sich geht, dass jede Ziffer ihren präcisen Sinn hat, und dass zugleich die möglichste Kürze dabei erzielt ist, so verdient nach meinem Erachten der Weg, den Horner einschlug, die reellen Wurzeln höherer Gleichungen zu finden, als der gelungenste, den vorzüglichsten Rang unter allen andern.

Ich habe mich bemüht, nach derselben Methode die imaginären Wurzeln zu suchen, und wage es, dieses Wenige hier niederzulegen; vorerst aber will ich die Horner'sche Methode in Kürze vortragen.

Sehr oft kömmt man hierbei auf Divisionen eines Gleichungspolynoms durch $x-\alpha$, wir wollen eine solche Division nun machen, und dann aus dem Gefundenen ein Verfahren erschliessen, wie man dieselbe schematisch einfach verrichten kann.

$$\begin{array}{l}
(x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D):(x-\alpha) = x^3+(A+\alpha)x^2+[B+\alpha(A+\alpha)]x+\{C+\alpha[B+\alpha(A+\alpha)]\} \\
x^4-\alpha x^3 \\
- \quad + \\
\hline
(A+\alpha)x^3+Bx^2 \\
(A+\alpha)x^3-\alpha(A+\alpha)x^2 \\
- \qquad + \\
\hline
[B+\alpha(A+\alpha)]x^2+Cx \\
[B+\alpha(A+\alpha)]x^2-\alpha[B+\alpha(A+\alpha)]x \\
- \qquad\qquad + \\
\hline
\{C+\alpha[B+\alpha(A+\alpha)]\}x+D \\
\{C+\alpha[B+\alpha(A+\alpha)]\}x-\alpha\{C+\alpha[B+\alpha(A+\alpha)]\} \\
- \qquad\qquad\qquad + \\
\hline
D+\alpha\{C+\alpha[B+\alpha(A+\alpha)]\}
\end{array}$$

Wir erhalten also

$$x^3+(A+\alpha)x^2+[B+\alpha(A+\alpha)]x+\{C+\alpha[B+\alpha(A+\alpha)]\}$$

zum Quotienten, und

$$D+\alpha\{C+\alpha[B+\alpha(A+\alpha)]\}$$

zum Reste.

Schreibe ich mir daher die Coefficienten des gegebenen Polynoms der Ordnung nach an, und unter ihm der Ordnung nach die Coefficienten des Quotienten und den Rest, jedoch so, dass das 1ste, 2te, 3te, 4te Glied des Quotienten unter dem 1sten, 2ten, 3ten, 4ten Glied des Dividends, und der Rest unter seinem 5ten Gliede zu stehen kommt, so hat man:

$$\begin{array}{lllll} 1 & A & B & C & D \\ 1 & A+\alpha\,, & B+\alpha(A+\alpha)\,, & C+\alpha[B+\alpha(A+\alpha)] & D+\alpha\{C+\alpha[B+\alpha(A+\alpha)]\} \end{array}$$

Es ist also das erste Glied des Quotienten 1, das 2te Glied desselben erhält man, wenn man α zum 2ten Gliede des Dividendus addirt; das 3te Glied wird gebildet, wenn man das 2te Glied des Quotienten mit α multiplicirt, und zum 3ten Gliede des Dividendus addirt; das 4te Glied, wenn man das 3te Glied des Quotienten mit α multiplicirt, und zum 4ten Glied des Dividends addirt, und ebenso erhält man den Rest, wenn man das 4te Glied des Quotienten mit α multiplicirt, und zum 5ten Gliede des Dividends addirt.

1. **Beispiel.** $(x^4-7x^3+4x^2-6x-4):(x-5)$

Weil ich durch $x-5$ dividire, muss ich 5 substituiren, und man hat als 1stes Glied des Quotienten 1, als 2tes Glied $-7+5=-2$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -7 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & -2 \end{array}$$

-2 multiplicire ich mit 5 und addire das Product zu 4, dadurch ist:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -7 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -6 \end{array}$$

-6 multiplicire ich mit 5 und addire es zu -6

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -7 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -6 & -36 \end{array}$$

endlich multiplicire ich -36 mit 5 und addire es zu -4

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -7 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -6 & -36 & -184 \end{array}$$

der Quotient ist daher

$$x^3-2x^2-6x-36$$

und der Rest -184.

2. **Beispiel.** $(x^6+2x^4-7x^3+9x-4):(x-2)$

Hier muss ich mir den Dividend so geschrieben denken:

$$x^6+0.x^5+2x^4-7x^3+0.x^2+9x-4$$

und habe somit

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 2 & -7 & 0 & 9 & -4 \end{array}$$

und da ich durch $x-2$ dividire, habe ich 2 zu substituiren.

Das 1ste Glied des Quotienten ist 1, das 2te 2

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 2 & -7 & 0 & 9 & -4 \\ 1 & 2 \end{array}$$

Diese Zwei des Quotienten multiplicire ich mit 2, und addire sie zum nächsten Glied des Dividends

1	0	2	—7	0	9	—4
1	2	6				

Nun multiplicire ich 6 mit 2, und addire zu −7

1	0	2	—7	0	9	—4
1	2	6	5			

und so erhalte ich weiter

1	0	2	—7	0	9	—4
1	2	6	5	10	29	54

der Quotient ist:

$$x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 10x + 29$$

der Rest 54.

3. Beispiel. $(x^4 + 9x^3 - 26x^2 - 14x + 12) : (x - 3)$

1	9	—26	—14	12
1	12	10	16	60

Quotient: $x^3 + 12x^2 + 10x + 16$, Rest: 60, daher

1) $(x^4+9x^3-26x^2-14x+12) = (x-3)(x^3+12x^2+10x+16)+60$

Dividire ich den Quotienten

$$x^3 + 12x^2 + 10x + 16$$

durch $x-3$, so habe ich

1	12	10	16
1	15	55	181

also ist $x^2 + 15x + 55$ der Quotient, 181 der Rest, daher:

2) $(x^3+12x^2+10x+16) = (x-3)(x^2+15x+55)+181$

Dividire ich wieder diesen Quotienten durch $x-3$, so erhalte ich

1	15	55
1	18	109

also $x+18$ zum Quotienten, 109 zum Rest, wodurch:

3) $(x^2+15x+55) = (x-3)(x+18)+109$

wird. Und endlich $x+18$ durch $x-3$ dividirt, gibt:

1	18
1	21

1 zum Quotient, 21 zum Rest, mithin

4) $(x+18) = (x-3)+21$

Substituirt man den Werth der Gleichung 4) in die Gleichung 3), so erhält man:

$$x^2+15x+55 = (x-3)[(x-3)+21]+109 = (x-3)^2+21(x-3)+109$$

diess in 2) substituirt, gibt:

$$x^3 + 12x^2 + 10x + 16 = (x-3)[(x-3)^2 + 21(x-3) + 109] + 181$$
$$= (x-3)^3 + 21(x-3)^2 + 109(x-3) + 181$$

Diess in der Gleichung 1) substituirt, gibt:

$$x^4+9x^3-26x^2-14x+12 = (x-3)\,[(x-3)^3+21(x-3)^2+109(x-3)+181]+60$$
$$= (x-3)^4+21(x-3)^3+109(x-3)^2+181(x-3)+60$$

Wenn wir also das Polynom $x^4+9x^3-26x^2-14x+12$ durch $x-3$ dividiren, den daraus hervorgehenden Quotienten wieder, eben so den hieraus hervorgehenden Quotienten u. s. f., was sich in ununterbrochener Folge so schreiben lässt:

$$\begin{array}{llrrrr}
1) & 1 & 9 & -26 & -14 & 12 \\
2) & 1 & 12 & 10 & 16 & \underline{60} \\
3) & 1 & 15 & 55 & \underline{181} & \\
4) & 1 & 18 & \underline{109} & & \\
5) & 1 & \underline{21} & & &
\end{array}$$

— wo die erste Zeile das vorgelegte Polynom bezeichnet, die 2te Zeile den Quotienten und Rest aus dem Polynom der ersten Zeile durch $x-3$ dividirt, die 3te Zeile den Quotienten und Rest aus dem in der 2ten Zeile angeschriebenen Polynome $x^3+12x^2+10x+16$ durch $x-3$ dividirt u. s. f. —; so bilden die unterstrichenen Reste die Coefficienten des 2ten, 3ten, 4ten, 5ten Gliedes, des nach $x-3$ geordneten, aber dem gegebenen identisch gleichen Polynome.

Es soll

1) $x^5-12x^4+2x^3-16x^2+x+7$

nach $x-4$ geordnet werden.

Ich substituire 4 in das Polynom 1), unterstreiche den Rest, dividire den Quotienten abermal durch $x-4$, d. h. ich substituire wieder 4, und fahre so fort, wodurch ich habe:

$$\begin{array}{rrrrrr}
1 & -12 & 2 & -16 & 1 & 7 \\
1 & -8 & -30 & -136 & -543 & -\underline{2165} \\
1 & -4 & -46 & -320 & -\underline{1823} & \\
1 & 0 & -46 & -\underline{504} & & \\
1 & 4 & -\underline{30} & & & \\
1 & \underline{8} & & & & \\
\underline{1} & & & & &
\end{array}$$

$$x^5-12x^4+2x^3-16x^2+x+7 = (x-4)^5+8(x-4)^4-30(x-4)^3-504(x-4)^2-1823(x-4)-2165$$

Wäre nun

1) $x^5-12x^4+2x^3-16x^2+x+7=0$

so müsste auch die mit ihr identische der Nulle gleich seyn, mithin

2) $(x-4)^5+8(x-4)^4-30(x-4)^3-504(x-4)^2-1823(x-4)-2165=0$

Wenn ich aber statt der Gleichung 2) jene aufschreibe, die daraus hervorgeht, wenn man durchgehends statt $x-4$, x setzt, nämlich:

3) $x^5+8x^4-30x^3-504x^2-1823x-2165=0$

so hat diese Gleichung Wurzeln, deren jede um 4 kleiner ist, als die Wurzeln der Gleichung 2), denn, gesetzt den Fall $x=6$ wäre eine Wurzel der Gleichung 2), so müsste

$$(6-4)^5+8(6-4)^4-30(6-4)^3-504(6-4)^2-1823(6-4)-2165$$

gleich Null seyn, allein genau dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir in der Gleichung 3) nicht $x = 6$ sondern $x = 2$ substituiren, folglich hat die Gleichung 3) Wurzeln, deren jede um 4 kleiner ist als die Wurzeln der Gleichung 2) sind, und da diese der 1) identisch gleich ist, so hat 3) jede Wurzel um 4 kleiner als 1).

Aufgabe. Es seyen die Wurzeln der Gleichung

$$1)\quad x^3 + x^2 - x - 5 = 0$$

um 1 zu vermindern

1	1	−1	−5
1	2	1	−4
1	3	4	
1	4		
1			

die verlangte Gleichung ist:

$$2)\quad x^3 + 4x^2 + 4x - 4 = 0$$

Es seyen die Wurzeln dieser Gleichung um 0·5 zu vermindern:

1	4	4	−4
1	4·5	6·25	−0·875
1	5·0	8·75	
1	5·5		
1			

die verlangte Gleichung ist:

$$3)\quad x^3 + 5{\cdot}5x^2 + 8{\cdot}75x - 0{\cdot}875 = 0$$

Jede Wurzel dieser Gleichung ist daher um 1·5 kleiner als die der Gleichung 1).

Wir wollen nun die Wurzeln der Gleichung 3) um 0·09 vermindern:

1	5·5	8·75	−0·875
1	5·59	9·2531	−0·042221
1	5·68	9·7643	
1	5·77		
1			

und erhalten als neue Gleichung:

$$4)\quad x^3 + 5{\cdot}77x^2 + 9{\cdot}7643x - 0{\cdot}042221 = 0$$

Es hat daher diese Gleichung jede Wurzel um 1·59 kleiner als die vorgelegte Gleichung 1).

Jetzt seyen die Wurzeln der Gleichung 4) um 0·004 zu vermindern

1	5·77	9·7643	−0·042221
1	5·774	9·787396	−0·003071416
1	5·778	9·810508	
1	5 782		
1			

die daraus hervorgehende Gleichung ist:

$$5)\quad x^3 + 5{\cdot}782x^2 + 9{\cdot}810508x - 0{\cdot}003071416 = 0$$

und diese hat jede Wurzel um 1·594 kleiner als 1).

Horner's Absicht geht eigentlich dahin, die Wurzeln der Gleichung immer um eine solche Zahl zu erniedrigen, dass das letzte von x freie Glied sich immer mehr und mehr der Nulle nähert. Denn ist das letzte Glied der resultirenden Gleichung so klein, dass es der Nulle gleich angenommen werden kann, so hat diese Gleichung eine Wurzel $x = 0$, und da jede ihrer Wurzeln um 1·594... kleiner ist als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, so muss diese $x = 1{\cdot}594\ldots$ zu ihrer Wurzel haben.

Ich will jetzt noch um so viel Zehntausendtel die Wurzeln der Gleichung 5) erniedrigen, als es möglich ist, unbeschadet dem Fortbestehen des negativen Zeichens des von x freien Gliedes. Sey α die Zahl der Zehntausendtel, so hätte ich diese zu 5·782 hinzu zu fügen, wodurch diese Zahl im Wesentlichen nicht geändert wird, dann habe ich $5{\cdot}782 + \alpha$ mit α zu multipliciren, wodurch nahe 6α Zehntausendtel herauskommen, die zur nächsten Zahl 9·81 ... addirt, dieselbe wieder nicht wesentlich ändern, diese Zahl 9·81 ... mit α multiplicirt sollte nahe 0·00307 ... geben, woraus man sieht, dass man α findet, wenn man 0·00307 .. : 9·81 .. und diess geht nahe 3 Zehntausendtel Mal, ich vermindere daher die Wurzeln der Gleichung 5) um 0·0003

1	5·782	9·810508	— 0·003071416
1	5·7823	9·81224269	— 0·000127743193
1	5·7826	9·81397747	
1	5·7829		
1			

Die Gleichung

$$6)\quad x^3 + 5{\cdot}7829x^2 + 9{\cdot}81397747x - 0{\cdot}000127743193 = 0$$

hat daher jede Wurzel um 0·0003 kleiner als 5) oder um 1·5943 kleiner als 1).

Da 9·813 ... in 0·000127 1 hunderttausendtelmal enthalten ist, so vermindere ich die Wurzeln dieser Gleichung um 0·00001; ich will aber jetzt anfangen, die überflüssigen Decimalstellen zu vernachlässigen.

1	5·7829	9·81397747	— 0·000127743193
1	5·7829	9·81403530	— 0·000029602840
1	5·7829	9·81409313	

$$7)\quad x^3 + 5{\cdot}7829x^2 + 9{\cdot}81409313x - 0{\cdot}000029602840 = 0$$

Jede Wurzel dieser Gleichung ist um 1·59431 kleiner als die von 1). 9·814.. geht in 0·0000296 ... 3 Milliontelmal, vermindert man daher ihre Wurzeln um 0·000003

1	5·7829	9·81409313	— 0·000029602840
1	5·7829	9·81411048	— 0·000000160509
1	5·7829	9·8141277	

u. s. f.

Man kann daher $x = 1{\cdot}594313$ als Wurzel der gegebenen Gleichung annehmen.

Um also eine Gleichung höheren Grades nach dieser Methode aufzulösen, verfahre man so:

Man setze in der vorgelegten Gleichung für x der Reihe nach 0, 1, 2, 3... werden die Resultate der Substitution für 2 aufeinanderfolgende Zahlen entgegengesetzt bezeichnet, so vermindere man die Wurzeln der vorgelegten Gleichung um die kleinere der beiden Substitutionszahlen, und hat auf diese Art die erste Ziffer der Wurzel. Um nun die 2te zu finden, was in den meisten Fällen das schwierigste ist, dividire man, so wie im vorhergehenden Beispiele gezeigt wurde, den Coefficient des letzten Gliedes durch den des vorletzten, so hat man beiläufig die Zahl, um die man die Wurzeln vermindern muss, eben so findet man die nächste Ziffer u. s. w.; hat die Gleichung keine positiven Wurzeln, so ändere man die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten Gliedes, wodurch sich die etwa darin enthaltenen negativen Wurzeln in positive verwandeln.

Die folgenden Musterbeispiele sollen dazu dienen, den Gang der Rechnung zu beleuchten, um die etwa dabei vorkommenden Schwierigkeiten zu beseitigen.

Es sey $x^3 - 18x^2 + 2x - 7 = 0$

$$\begin{array}{ll} x = 0, \ \text{Resultat} = & -7 \\ x = 1 & -22 \\ x = 2 & -67 \\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x = 17 & -262 \\ x = 18 & +29 \end{array}$$

also liegt zwischen 17 und 18 eine Wurzel der Gleichung

$$x = 17$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -18 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & -15 & -262\,* \\ & 16 & 257\,* & \\ & 33\,* & & \end{array}$$

Ich machte statt der Striche die Sternchen, und werde für das Künftige nicht mehr noch einmal die Endzahlen aufschreiben, sondern gleich darauf die Rechnung fortsetzen. Um die nächste Ziffer zu erhalten, sollte ich 262 : 257, diess geht mehr als einmal, aber ich weiss, dass $x < 18$ ist, und werde daher versuchen um 0·9 die Wurzel zu vermindern. Ueberhaupt ist das Unbestimmte, Schwankende bloss bei der Bestimmung der 2ten Ziffer.

$$x = 17{\cdot}9$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -18 & 2 & -7 \\ & -1 & -15 & -262\,* \\ & 16 & 257\,* & -3{\cdot}241\,* \\ & 33\,* & 287{\cdot}51 & \\ & 33{\cdot}9 & 318{\cdot}83\,* & \\ & 34{\cdot}8 & & \\ & 35{\cdot}7\,* & & \end{array}$$

So weit wäre der Gang der Rechnung bis jetzt. Nun dividire ich 3·241 durch 318·83. Diess geht 0·01 mal, also ist:

$$x = 17{\cdot}91$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -18 & 2 & -7 \\ & -1 & -15 & -262\,* \\ & 16 & 257\,* & -3{\cdot}241\,* \\ & 33\,* & 287{\cdot}51 & -0{\cdot}049129\,* \\ & 33{\cdot}9 & 318{\cdot}83\,* & \\ & 34{\cdot}8 & 319{\cdot}1871 & \\ & 35{\cdot}7\,* & 319{\cdot}5443\,* & \\ & 35{\cdot}71 & & \\ & 35{\cdot}72 & & \\ & 35{\cdot}73\,* & & \end{array}$$

Man sieht hieraus, dass man immer trachten muss, dass das letzte Glied negativ bleibt. Jetzt geht 3 hundert in 4 hundertel 1 zehntausendtelmal. Zugleich will ich bei den Coefficienten nicht weiter in den Decimalen gehen, als ich bereits gegangen, und statt die oben angeführte Rechnung ganz abzuschreiben, diess bloss mit der untersten Zahl jeder Spalte thun.

$$x = 17{\cdot}9101$$

1	35·73	319·5443	— 0·049129

Ich sollte 0·0001 mit 1 multipliciren und zu 35·73 addiren. Die Aenderung, welche 35·73 erfährt, ist so klein, dass ich sie vernachlässige, dann soll ich 35·73 mit 0·0001 multipliciren und zu 319·5443 addiren, ich brauche im Producte bloss 4 Decimalen, also streiche ich 73 weg, multiplicire bloss 1 mit 35 und addire es zu 319·5443, nehme aber auch die Correctur von 7, die dann erhaltene Zahl multiplicire ich mit 0·0001, vernachlässige diejenigen Ziffern, die mehr als eine 6te Decimalstelle geben, und ziehe sie ab von — 0·049129, und fahre auf diese Art fort; diess gibt:

$$x = 17{\cdot}9101$$

1	35·73	319·5443	— 0·049129
		319·5479	— 0·017174 *
		319·5515 *	

319 in 0·0171, oder vielmehr 3 in 17 geht 5 mal

$$x = 17{\cdot}91015374$$

1	35·73	319·5515	— 0·017174
		319·5533	— 0·001196
			— 0·000237
			— 0·000014

Sobald die Ziffer der Zahl 35·73 keinen Einfluss auf die nächste Zahl 319·5533 ausübt, verwandelt sich die ganze Operation in eine einfache Division.

2. **Beispiel.** $x^4 + x^3 + x^2 - 60 = 0$

$$x = 1, \quad \text{Resultat} = 1 + 1 + 1 - 60 = -57$$
$$x = 2, \quad = 16 + 8 + 4 - 60 = -32$$
$$x = 3, \quad = 81 + 27 + 9 - 60 = 57$$

$$x = 2{\cdot}$$

1	1	1	0	— 60
	3	7	14	— 32 *
	5	17	48 *	
	7	31 *		
	9 *			

32 : 48 geht 0·6 mal

$$x = 2{\cdot}6$$

1	9	31	48	— 32
	9·6	36·76	70·056	

0·6 mal 70·056 ist grösser als 32, daher darf ich die Wurzel nicht um 0·6, sondern nur um 0·5 vermindern

1	9	31	48	— 32
	9·5	35·75	65·875	

ja es ist sogar $x = 2·5$ zu gross, weil 0·5 mal 65·875 grösser als 32 ist. Ich setze somit $x = 2·4$ und habe:

$$x = 2·49$$

1	1	1	0	— 60
	3	7	14	— 32*
	5	17	48*	— 7·2384*
	7	31*	61·904	
	9*	34·76	77·376*	
	9·4	38·68	81·310989	
	9·8	42·76*		
	10·2	43·7221		
	10·6*			
	10·69			

9 hundertel ist zu gross, ich setze $x = 2·48$

$$x = 2·48906685$$

1	10·6*	42·76*	77·376*	— 7·2384
	10·68	43·6144	80·865152	— 0·76918784*
	10·76	44·4752	84·423168*	— 0·00569863*
	10·84	45·3424	84·832134	— 0·00058395*
	10·92*	45·4407	85·241986*	— 0·00007247*
	10·929	45·5391	85·244724	— 0·00000428*
	10·938	45·6376*	85·2474*	— 0·00000002
	10·947	45.6382	85·2476	

3. Beispiel. $x^4 - 4x^3 + x + 4 = 0$

$x = 0$ Resultat 4
$x = 1$, 2
$x = 2$, . — 10

$$x = 1·23772905$$

1	— 4	0	1	4
	— 3	— 3	— 2	2*
	— 2	— 5	— 7*	0·3616*
	— 1	— 6*	— 8·192	0·07539841*
	0*	— 5·96	— 9·368*	0·00714095*
	0·2	— 5·88	— 9·540053	0·00028465*
	0·4	— 5·76*	— 9·711332*	0·00008868*
	0·6	— 5·7351	— 9·751065	0·00000049*
	0·8*	— 5·7093	— 9·790753*	0·00000000
	0·83	— 5·6826*	— 9·794716	
	0·86	— 5·6762	— 9·798679*	
	0·89	— 5·6697	— 9·798792	
	0·92*	— 5·6631*	— 9·798905*	
	0·927	— 5·6625	— 9·7994	
	0·934	— 5·6619		
	0·941			

Somit glaube ich zur Methode der Auffindung der imaginären Wurzeln übergehen zu können, und hier verfolge ich genau denselben Weg, den Horner bei der Auffindung der reellen betreten hat.

Ich vermindere die Wurzeln der Gleichung

1) $x^4 + 2x^2 + 25 = 0$

um $1 + \sqrt{-1}$ und habe somit:

1	0	2	0	25
	$1 + \sqrt{-1}$	$1 + \sqrt{-1}$	$2 + 2\sqrt{-1}$	$-4 + 4\sqrt{-1}$
	$2 + 2\sqrt{-1}$	$-1 + \sqrt{-1}$	$-2 + 2\sqrt{-1}$	$21 + 4\sqrt{-1}$ *
	$3 + 3\sqrt{-1}$	$2 + 2\sqrt{-1}$	$0 + 4\sqrt{-1}$	
	$4 + 4\sqrt{-1}$*	$2 + 2\sqrt{-1}$	$2 + 6\sqrt{-1}$	
		$-2 + 2\sqrt{-1}$	$-6 + 2\sqrt{-1}$	
		$2 + 6\sqrt{-1}$	$-4 + 12\sqrt{-1}$*	
		$3 + 3\sqrt{-1}$		
		$-3 + 3\sqrt{-1}$		
		$2 + 12\sqrt{-1}$*		

Die Gleichung, deren Wurzeln um $1 + \sqrt{-1}$ kleiner sind als die Wurzeln der gegebenen, ist:

2) $x^4 + (4 + 4\sqrt{-1})x^3 + (2 + 12\sqrt{-1})x^2 + (-4 + 12\sqrt{-1})x + (21 + 4\sqrt{-1}) = 0$

Die Wurzeln dieser Gleichung vermindere ich um $0{\cdot}4 + 0{\cdot}7\sqrt{-1}$

1	4 +	$\sqrt{-1}$. 4	2	$+\sqrt{-1}$. 12	− 4	$+\sqrt{-1}$ 12	21	$+\sqrt{-1}$ 4
	0·4	0·7	1·76	1·88	0·188	6·784	− 6·2736	7·6452
	4·4	4·7	−3·29	3·08	− 11·872	0·329	− 13·3791	− 10·9788
	0·4	0·7	0·47	16·96	− 15·684	19·113	1·3473	0·6664 *
	4·8	5·4	1·92	2·16	− 0·556	8·992		
	0·4	0·7	− 3·78	3·36	− 15·736	− 0·973		
	5·2	6·1	− 1·39	22·48	− 31·976	27·132*		
	0·4	0·7	2·08	2·44				
	5·6	6·8*	− 4·27	3·64				
			− 3·58	28·56*				

Es hat daher die Gleichung

3) $x^4 + (5{\cdot}6 + 6{\cdot}8\sqrt{-1})x^3 + (-3{\cdot}58 + 28{\cdot}56\sqrt{-1})x^2 + (-31{\cdot}976 + 27{\cdot}132\sqrt{-1})x + (1{\cdot}3473 + 0{\cdot}6664\sqrt{-1}) = 0$

Wurzeln, deren jede um $1{\cdot}4 + \sqrt{-1}\,.\,1{\cdot}7$ kleiner ist, als die Wurzeln von 1).

Um nun zu versuchen, um was ich jetzt am schicklichsten die Wurzeln verringern soll, dividire ich $1{\cdot}3473 + 0{\cdot}6664\sqrt{-1}$ durch $-31{\cdot}976 + 27{\cdot}132\sqrt{-1}$; und da wir solche Divisionen wiederholt verrichten müssen, so dividiren wir allgemein $a + b\sqrt{-1}$ durch $c + d\sqrt{-1}$ und erhalten:

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\sqrt{-1}$$

Da uns für jetzt bloss um die Zahl der Hundertel zu thun ist, der Nenner aber nahe ein Tausender ist, so genügt uns, die Producte ac, bd, bc, ad bloss auf Einheiten genau zu kennen. Suchen wir sie demungeachtet auf eine Decimalstelle genau, so haben wir:

−31·976	27·132	−31·976	27·132	−31·976	27·132
1·3473	0·6664	0·6664	1·3473	−31·976	27·132
32·0	16·3	19·1	27·1	959·3	542·6
9·6	1·6	1·9	8·1	32·0	189·9
1·2	1	2	1·1	28·7	2·7
2	bd=18·0	bc=−21·2	1	2·2	8
ac=−43·0			ad=36·4	2	d²=736·0
				c²=1022·4	

$$ac + bd = -25$$
$$bc - ad = -57{\cdot}6 \qquad 25 \quad : 1758{\cdot}4 = 0{\cdot}01$$
$$c^2 + d^2 = 1758{\cdot}4 \qquad 57{\cdot}6 : 1756{\cdot}4 = 0{\cdot}03$$

und daher vermindere ich die Wurzeln der Gleichung 3) um $0{\cdot}01 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}03$

1	5·6	6·8	−3·58..	28·56.	−31·976..	27·132.	1·3473.	0·6664...
	0·01	0·03	0·0561	0·0683	−0·037288	0·287966	−0·32877186	0·27308102
	5·61	6·83	−0·2049	0·1683	−0·863898	−0·111864	−0·81924306	−0·98631558
	0·01	0·03	−3·7288	28·7966	−32·877186	27·308102	0·19928508	−0·04683456
	5·62	6·86	562	686	−38784	290338		
	0·01	0·03	−2058	1686	−871014	−116352		
	5·63	6·89	−3·8784	29·0338	−33·786984	27·482088		
	0·01	0·03	563	689				
	5·64	6·92	−2067	1689				
			−4·0288	29·2716				

Die Gleichung

4) $x^4 + (5{\cdot}64 + \sqrt{-1}\; 6{\cdot}92)x^3 + (-4{\cdot}0288 + \sqrt{-1}\,.\,29{\cdot}2716)x^2 +$
$+ (-33{\cdot}786984 + \sqrt{-1}\,.\,27{\cdot}482088)x + (0{\cdot}19928508 - \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}04683456) = 0$

hat jede Wurzel um $1{\cdot}41 + \sqrt{-1}\,.\,1{\cdot}73$ kleiner als die Gleichung 1).

Um nun zu untersuchen, um wie viel Tausendtel man die Wurzeln dieser Gleichung verringern soll, damit das letzte Glied der daraus hervorgehenden, so nahe als möglich Null ist, dividire man wieder $0{\cdot}19928508 - 0{\cdot}04683456\sqrt{-1}$ durch $-33{\cdot}786984 + 27{\cdot}482088\sqrt{-1}$, und berechne die Producte ac, bd u. s. w. in 2 Decimalen

−33·7869	27·482	−33·786	27·482	−33·786	27·482
0·1992	−0·0468	−0·0468	0·1992	−33·786	27·482
3·38	1·10	1·35	2·75	1013·6	549·7
3·03	16	20	2·47	101·3	192·4
30	2	2	24	23·6	11·0
1	bd=−1·28	bc=1·57	ad=5·46	2·6	2·2
ac=−6·72				2	d²=755·3
				c²=1141·3	

$$ac + bd = -8{\cdot}00$$
$$bc - ad = -3{\cdot}89 \qquad 8{\cdot}00 : 1896{\cdot}6 = 0{\cdot}004$$
$$c^2 + d^2 = 1896{\cdot}6 \qquad 3{\cdot}89 : 1896{\cdot}6 = 0{\cdot}002$$

also vermindern wir die Wurzeln der Gleichung um $0{\cdot}004 + 0{\cdot}002\sqrt{-1}$, und wollen eben so wie früher die überflüssigen Decimalen vernachlässigen.

1	5·64	6.92	—4·0288	29·2716	—33·786984	27·482088	0·19928508	—0·04683456
	0·004	0·002	226	277	— 16080	117242	—0·13544674	0·11036516
	5·644	6·922	— 138	113	— 58621	— 8040	—0·05518258	—0·06772337
	0·004	0·002	—4·0200	29·3106	—33·861685	27·591290	0·00865576	—0·00419277
	5·648	6·924	226	277	— 16045	117398		
	0·004	0·002	— 138	113	— 58699	— 8022		
	5·652	6·926	—4·0112	29·3496	—33·936429	27·700666		
	0·004	0·002	226	277				
	5·656	6·928	— 138	113				
			—4·0024	29·3886				

Die Gleichung

$$x^4+(5\cdot656+6\cdot928\sqrt{-1})x^3+(-4\cdot0024+29\cdot3886\sqrt{-1})x^2+$$
$$+(-33\cdot936429+27\cdot700666\sqrt{-1})x+(0\cdot00865576-0\cdot00419277\sqrt{-1})=0$$

hat jede Wurzel um $1\cdot414+\sqrt{-1}\,.\,1\cdot732$ kleiner als die Gleichung 1).

Nun müssen wir wieder, um die nächste Ziffer zu finden $0\cdot00865576-0\cdot00419277\sqrt{-1}$ durch $-33\cdot936429+27\cdot700666\sqrt{-1}$ dividiren, und haben, wenn man bis auf 3 Decimalen geht:

— 33·936	27·700	— 33·936	27·700	— 33·936	27·7006
0·00865	— 0·00419	— 0·00419	0·00865	— 33·936	27·7006
0·271	0·111	0·136	0·222	1018·0	554·0
20	3	3	16	101·8	193·9
2	2	3	1	30·5	19·4
$ac=-0\cdot293$	$bd=-0\cdot116$	$bc=0\cdot142$	$ad=0\cdot239$	1·0	$d^2=767\cdot3$
				2	
				$c^2=1151\cdot5$	

$$ac+bd=-0\cdot409$$
$$bc-ad=-0\cdot097 \qquad 0\cdot409:1918\cdot8=0\cdot0002$$
$$c^2+d^2=1918\cdot8 \qquad 0\cdot097:1918\cdot8=0\cdot00005$$

die Wurzeln sind also zu vermindern um 0·002

1	5·656	6·928	—4·0024	29·3886	—33·936429	27·700666	0·00865576	—0·00419277
			11	14	— 800	5878	— 678744	554131
			—4·0013	29·3900	—33·937229	27·706544	0·00186832	0·00134854
			11	14	— 800	5878		
			—4·0002	29·3914	—33·938029	27·712422		
			11	14				
			—3·9991	29·3928				

und daher hat die Gleichung

$$x^4+(5\cdot656+6\cdot928\sqrt{-1})x^3+(-3\cdot9991+29\cdot3928\sqrt{-1})x^2+(-33\cdot938029+27\cdot712422\sqrt{-1})x$$
$$+(0\cdot00186832+0\cdot00134854\sqrt{-1})=0$$

jede Wurzel um $1\cdot4142+\sqrt{-1}\,.\,1\cdot7320$ kleiner als die Wurzeln der Gleichung 1) sind.

— 33·938	27·712	— 33·938	27·712	— 33·938	27·712
0·001868	0·001348	0·001348	0·001868	— 33·938	27·712
0·0339	0·0277	0·0339	0·0277	1018·1	554·2
271	83	102	222	101·8	194·0
20	11	13	16	30·5	19·4
2	2	2	2	1·0	3
ac = —0·0632	bd = 0·0373	bc = —0·0456	ad = 0·0517	2	d^2 = 767·9
				c^2 = 1151·6	

$$ac + bd = -0{\cdot}0259$$
$$bc - ad = -0{\cdot}0973 \qquad 0{\cdot}0259 : 19195 = 0{\cdot}00001$$
$$c^2 + d^2 = 1919{\cdot}5 \qquad 0{\cdot}0973 : 1919{\cdot}5 = 0{\cdot}00005$$

Wir vermindern die Wurzeln daher um $0{\cdot}00001 + 0{\cdot}00005\sqrt{-1}$

1	5·656	6·928	—3·9991	29·3928	—33·938029	27·712422	0·00186832	0·00134854
			1	1	— 40	294	— 33940	27713
			— 3	3	— 1470	—200	— 138563	— 169698
			—3·9993	29·3932	—33·939539	27·712516	0·00014329	—0·00007131
					— 15	3		
						— 2		
					—33·9410	27·7126		

Da beim nächsten Gliede der Coefficient von x^2 keinen Einfluss mehr hat, so ist bloss $0{\cdot}00014329 - 0{\cdot}00007131\sqrt{-1}$ **durch** $-33{\cdot}9410 + 27{\cdot}7126\sqrt{-1}$ **zu dividiren.**

— 33·9410	27·7126	— 33·9410	27·7126	— 33·941	27·712
0·0001432	— 0·0000713	— 0·00007131	0·0001432	— 33·941	27·712
0·00339	0·00194	0·00237	0·00277	1018·2	554·2
136	3	3	111	101·8	194·0
10	1	1	8	30·5	19·4
1	bd = —0·00198	bc = 0·00241	ad = 0·00396	1·3	3
ac = —0·00486				c^2 = 1151·8	d^2 = 767·9

$$ac + bd = -0{\cdot}00684 \qquad 0{\cdot}00684 : 1919{\cdot}7 = 0{\cdot}0000035\dot{6}$$
$$bc - ad = -0{\cdot}00155 \qquad 108$$
$$c^2 + d^2 = 1919{\cdot}7 \qquad 12$$
$$0{\cdot}00155 : 1919{\cdot}7 = 0{\cdot}00000081$$
$$2$$

Es ist daher

$$x = 1{\cdot}41421356 + \sqrt{-1}\,.\,1{\cdot}7320581$$

eine Wurzel der vorgelegten Gleichung.

Die Hauptschwierigkeit liegt hier bloss in der Auffindung der ersten Ziffern. Sind diese einmal gefunden, so hat man mit gar keinen Schwierigkeiten mehr zu kämpfen, da das ganze Uebrige nach einem leichten, sich immer gleich bleibenden Verfahren vor sich geht.

Wie ich aber zu den ersten Ziffern gelange, mögen folgende Beispiele zeigen.

1) $x^4 + 9x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = 0$,	Resultat 5
$x = 1$,	9
$x = 2$,	45
$x = -1$,	21

Für $x=0$ kömmt das kleinste Resultat, ich vermuthe daher, dass eine Wurzel sehr nahe an Null liegt, wenigstens scheint mir, dass sie näher an 0 ist, als an irgend eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots -1, -2, -3 \ldots$ Es liesse sich diess auch gewissermassen aus dem CAUCHY'schen Beweis „Jede Gleichung hat wenigstens eine Wurzel, die die Form $p+q\sqrt{-1}$ hat" rechtfertigen. Denn es heisst daselbst: Setze ich in der Gleichung statt x, $p+q\sqrt{-1}$, wo p und q die verschiedensten Werthe haben, so wird für jeden andern Werth von p und q das Resultat der Substitution verschieden ausfallen, folglich auch der Modulus des Resultats. Unter allen diesen Moduli wird einer der kleinste seyn, und jene speciellen Werthe von p und q, die diesen kleinsten Modulus erzeugen, sind die der Wurzel.

In unserm Falle erscheint für $x=0$ das kleinste Resultat, welches daher den kleinsten Modulus hat, daher ist wahrscheinlich $x=0$ nahe ein Wurzelwerth.

Sey allgemein $x=\alpha$, die das kleinste Resultat erzeugende Zahl, und $x=\alpha+h$ eine Wurzel, so ist:

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(\alpha)$$

wenigstens ist der Fehler nicht bedeutend, da bloss die dritten und höhern Potenzen von h vernachlässigt sind. Nun ist $f(\alpha+h)=0$, weil $\alpha+h$ eine Wurzel der Gleichung ist, somit

$$f(\alpha) + hf'(\alpha) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(\alpha) = 0$$

woraus sich h bestimmen lässt; es ist alsdann $x=\alpha+h$ ein angenäherter Werth der Wurzel. Man vermindere sodann die Wurzeln der Gleichung um diese Zahl, und verfahre so, wie früher gezeigt wurde. In unserm Beispiele ist:

$$f(x) = x^4 + 9x^2 - 6x + 5, \quad f'(x) = 4x^3 + 18x - 6, \quad f''(x) = 12x^2 + 18$$

$$f(0) = 5, \quad f'(0) = -6, \quad f''(0) = 18, \quad \text{und daher}$$

$$5 - 6h + 9h^2 = 0$$

$$h^2 - \tfrac{6}{9}h = -\tfrac{5}{9}, \quad h = \tfrac{1}{3} + \sqrt{\tfrac{1}{9} - \tfrac{5}{9}}, \quad h = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\sqrt{-1}, \quad \text{daher} \quad x = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\sqrt{-1}$$

wenn ich bloss den positiven Werth der Wurzel berücksichtige.

Ich vermindere daher die Wurzeln der Gleichung um $0{\cdot}3 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}6$, diess gibt:

1	0		9		−6		5	
	0·3	$\sqrt{-1}$. 0·6	0·09	$\sqrt{-1}$. 0·18	2·619	$\sqrt{-1}$. 0·108	−1·0791	$\sqrt{-1}$ 1·6038
	0·6	1·2	− 0·36	0·18	−0·216	5·238	−3·2076	− 2·1582
	0·9	1·8	8·73	0·36	−3·597	5·346	0·7133	− 0·5544
	1·2	2·4	0·18	0·36	2·457	0·324		
			− 0·72	0·36	−0·648	4·914		
			8·19	1·08	−1·788	10·584		
			0·27	0·54				
			− 1·08	0·54				
			7·38	2·16				

0·7133	— 0·5544	— 1·788	10·584	— 1·788	10·584
— 1·788	10·584	— 0·5544	0·713	— 1·788	10·584
0·71	5·54	0·89	1·41	1·79	105·84
50	28	9	11	1·25	5·29
6	4	bc=0·98	3	14	84
ac=—1·27	bd=—5·86		ad=7·55	1	4
				c^2 = 3·19	d^2=112·01

$$ac + bd = -\ 7·13$$
$$bc - ad = -\ 6·57 \qquad 7·13 : 115·20 = 0·06$$
$$c^2 + d^2 = -115·20 \qquad 6·57 : 115·20 = 0·05$$

$$x = 0·36 + \sqrt{-1}\,.\,0·65$$

1	1·2	2·4	7·38..	2·16..	—1·788...	10·584...	0·7133....	—0·5544....
	0·06	0·05	0·0766	0·1470	0·439986	0·142200	—0·08799084	0·66557130
	1·26	2·45	—0·1225	0·0630	—0·118500	0·366655	—0·55464275	—0·07332570
	6	5	7·3331	2·3700	—1·466514	11·092855	0·07066641	0·03784560
	1·32	2·50	792	1550	437238	155460		
	6	5	— 1250	660	— 129550	364365		
	1·38	2·55	7·2873	2·5910	—1·158826	11·612680		
	6	5	828	1530				
	1·44	2·60	— 1275	690				
			7·2426	2·8130				

— 1·1588	11·612	— 1·158	11·612	ac + bd = 0·356
0·0706	0·03784	0·0378	0·0706	bc — ad = — 0·865
0·081	0·348	0·035	0·813	
1	81	8	7	
ac=—0·082	9	1	1	
	bd=0·438	bc=—0·044	ad=0·821	

Da ac + bd positiv ist, so habe ich die Wurzeln der letzten Gleichung um zu viel vermindert, und ich muss daher statt $0·06 + \sqrt{-1}\,.\,0·05$ bloss $0·05 + \sqrt{-1}\,.\,0·05$ substituiren, dadurch ist aber:

$$x = 0·35 + \sqrt{-1}\,.\,0·65$$

1	1·2.	2·4.	7·38.	2·16..	—1·788...	10·584..	0·7133.	— 0·5544....
	0·05	0·05	625	1225	366000	117250	— 7696250	55336250
	1·25	2·45	— 1225	625	— 117250	366000	— 55336250	— 7696250
	0·05	0·05	7·3200	2·3450	—1·539250	11·067250	0·08297500	— 0·07800000
	1·30	2·50	650	1250	363000	126750		
	0·05	0·05	— 1250	650	— 126750	363000		
	1·35	2·55	7·2600	2·5350	—1·303000	11·557000		
	0·05	0·05	675	1275				
	1·40	2·60	— 1275	675				
			7·2000	2·7300				

— 1·303	11·557	—1·303	11·557	— 1·303	11·557
0·0829	— 0·078	0·078	0·08297	— 1·303	11·557
0·104	0·809	0·091	0·924	1·30	115·57
3	92	10	23	39	11·56
1	bd=—0·901	bc=0·101	10	c^2=1·69	5·78
ac=—0·108			1		58
			ad=0·958		8
					d^2=133·57

$$ac + bd = -1{\cdot}009$$
$$bc - ad = -0{\cdot}857 \qquad 1{\cdot}009 : 135{\cdot}26 = 0{\cdot}007$$
$$c^2 + d^2 = 135{\cdot}26 \qquad 0{\cdot}857 : 135{\cdot}26 = 0{\cdot}006$$

$$x = 0{\cdot}357 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}656$$

1	1·40.	2·60.	7·2000	2·7300	—1·303000	11·557000	0·08297500	—0·07800000
	0·007	0·006	98	182	50359	19296	— 888427	8133623
	1·407	2·606	— 156	84	— 16540	43165	— 6971677	761509
	0·007	0·006	7·1942	2·7566	—1·269181	11·619461	0·00437396	—0·00427886
	1·414	2·612	99	183	50319	19484		
	0·007	0·006	— 157	85	— 16700	43130		
	1·421	2·618	7·1884	2·7834	—1·235562	11·682075		
	0·007	0·006	99	183				
	1·428	2·624	— 157	85				
			7·1826	2·8102				

— 1·2355	11·682	— 1·235	11·682	— 1·2355	11·6820
0·00437	— 0·004278	— 0·00427	0·004373	— 1·2355	11·6820
0·0049	0·0467	0·0049	0·0467	1·24	116·82
4	23	2	35	25	11·68
1	8	1	8	4	7·01
ac=—0·0054	1	bc=0·0052	ad=0·0510	1	93
	bd=—0·0499			c²=1·54	2
					d²=136·46

$$ac + bd = -0{\cdot}0553 \qquad 0{\cdot}0553 : 138 = 0{\cdot}0004$$
$$bc - ad = -0{\cdot}0458 \qquad 0{\cdot}0458 : 138 = 0{\cdot}0003$$
$$c^2 + d^2 = 138{\cdot}00$$

$$x = 0{\cdot}3574 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}6563$$

1	1·428	2·624	7·1826	2·8102	—1·235562	11·682075	0·00437396	—0·00427886
			6	10	2873	1124	— 49341	467414
			— 8	4	— 843	2155	— 350561	— 37006
			7·1824	2·8116	—1·233532	11·685354	0·00037494	0·00002522
			6	10	2873	1125		
			— 8	4	— 844	2155		
			7·1822	2·8130	—1·231503	11·688634		
			6	10				
			— 8	4				
			7·1820	2·8144				

1·2315	11·6886	— 1·2315	11·6886	— 1·2315	11·6886
0·00037	0·0000252	0·000025	0·000374	— 1·2315	11·6886
0·00037	0·00023	0·00002	0·00350	1·23	116·89
8	6	1	81	25	11·69
ac=—0·00045	bd=0·00029	bc=—0·00003	4	4	7·01
			1	c²=1·52	93
			ad=0·00436		9
					1
					d²=136·62

$ac + bd = -0·00016$	$0·00016 : 138·14 = 0·000001$
$bc - ad = -0·00439$	$0·00439 : 138·14 = 0·00003$
$c^2 + d^2 = 138·14$	

$$x = 0·35740 + \sqrt{-1}\,.\,0·65633$$

1	1·428	2·624	7·1820	2·8144	−1·231503	11·688634	0·00037494	0·00002522
			−1		−84	215	−35066	−3695
			7·1819	2·8144	−1·231587	11·688849	0·00002428	−0·00001173
					−84	215		
					−1·231671	11·689064		

−1·231671	11·689064	−1·231671	11·689064	−1·231671	11·689064
0·00002428	−0·00001173	−0·00001173	0·00002428	−1·231671	11·689064
0·00002463	0·00011689	0·00001232	0·00023378	1·232	116·891
492	1169	123	4676	246	11·689
25	818	86	234	37	7·013
10	35	4	93	1	934
ac = −0·00002990	bd = −0·00013711	bc = 0·00001445	ad = 0·00028381	1	104
				$c^2 = 1·517$	1
					$d^2 = 136·632$

	0·00016701	138·149 = 0·000001208
	2886	
$ac + bd = -0·00016701$	123	
$bc - ad = -0·00026936$	0·00026936	138·149 = 0·000001949
$c^2 + d^2 = 138·149$	13121	
	688	
	136	

$$x = 0·357401208 + \sqrt{-1}\,.\,0·656331949$$

Diess ist eine Wurzel der Gleichung $x^4 + 9x^2 - 6x + 5 = 0$. Die ihr conjugirte ist: $x = 0·357401208 - \sqrt{-1}\ 0·656331949$, daher muss das Gleichungspolynom theilbar seyn durch:

$$(x - 0·357401208)^2 + (0·656331949)^2$$

und diess ist, wenn man die Rechnung vollzieht:

$$x^2 - 0·714802416x + 0·558507243$$

Dividiren wir wirklich, so erhalten wir:

$$x^2 + 0·714802416x + 8·952435251$$

zum Quotienten, welcher gleich Null gesetzt, die andern 2 Wurzeln gibt.

Wir wollen in dem folgenden Beispiele alle Hilfsrechnungen auf die Seite machen, damit der Gang der Hauptrechnung nicht gestört wird.

$$2)\quad x^4 - 9x^3 - 9x + 1000 = 0$$

$$\begin{array}{lll}
x = 5 & \text{Resultat} & 5^4 - 9.5^3 - 45 + 1000 = 455 \\
x = 6 & & 6^4 - 9.6^3 - 54 + 1000 = 298 \\
x = 7 & & 7^4 - 9.7^3 - 63 + 1000 = 251 \\
x = 8 & & 8^4 - 9.8^3 - 72 + 1000 = 416
\end{array}$$

Für $x = 7$ erscheint das kleinste Resultat, welches jedoch noch sehr weit von der Nulle entfernt ist, ich werde daher hier die reellen und imaginären Nebenwerthe von 7 substituiren, nämlich

$$\begin{array}{llll}
6{\cdot}5\,, & 6{\cdot}5 + 0{\cdot}5\sqrt{-1}\,, & 6{\cdot}5 + 1\sqrt{-1}\,, & 6{\cdot}5 + 1{\cdot}5\sqrt{-1} \\
7 & 7 + 0{\cdot}5\sqrt{-1} & 7 + 1\sqrt{-1} & 7 + 1{\cdot}5\sqrt{-1} \\
7{\cdot}5 & 7{\cdot}5 + 0{\cdot}5\sqrt{-1} & 7{\cdot}5 + 1\sqrt{-1} & 7{\cdot}5 + 1{\cdot}5\sqrt{-1}
\end{array}$$

und die Wurzeln der Gleichung um jene Zahl vermindern, die substituirt ein Resultat gibt, das unter allen Gefundenen den kleinsten Modulus besitzt.

Die Substitutionen lassen sich am einfachsten so machen: Ich suche zuerst jene Gleichung, deren Wurzeln um 6·5 kleiner sind, als die der vorgelegten:

1	−9	0	−9	1000
1	−2·5	16·25	−114·63	254·9*
1	4	9·75	−51·25*	
1	10·5	78*		
1	17*			

Diese ist

$$x^4 + 17x^3 + 78x^2 - 51{\cdot}25x + 254{\cdot}9 = 0$$

und nun substituire ich hierin der Reihe nach

$$0\,,\quad 0{\cdot}5\sqrt{-1}\,,\quad 1\sqrt{-1}\,,\quad 1{\cdot}5\sqrt{-1}$$

Die hieraus erhaltenen Werthe sind Resultate der Substitutionen $6{\cdot}5$, $6{\cdot}5 + 0{\cdot}5\sqrt{-1}$, $6{\cdot}5 + 1\sqrt{-1}$, $6{\cdot}5 + 1{\cdot}5\sqrt{-1}$.

Diese Rechnungen durchgeführt geben:

$0{\cdot}5\sqrt{-1}$

1	17	0·5	78		−51·25		254 9	
			−0·25	8·5	−4·25	38·88	−19·44	−27·75
			77·75	8·5	−55·5	38·88	235·46	−27·75

$1\sqrt{-1}$

1	17	1	78		−51·25		254·9	
			−1	17	−17	77	−77·	−68·25
			77	17	−68·25	77	177·9	−68·25

$1{\cdot}5\sqrt{-1}$

1	17	1·5	78		−51·25		−254·9	
			−2·25	25·5	−38·25	113·63	−170·45	−134·25
			75·75	25·5	−89·5	113·63	84·45	−134·25

Jetzt bilde ich die Gleichung, deren Wurzeln um 7 kleiner sind als die der gegebenen, und substituire dann in dieser dieselben Zahlen 0, $0·5\sqrt{-1}$, $1\sqrt{-1}$, $1·5\sqrt{-1}$, und endlich mache ich diess auch mit 7·5 und stelle dann die Resultate in einem Schema übersichtlich auf:

1	— 9	0	— 9	1000
1	— 2	— 14	— 107	251*
1	5	21	40*	
1	12	105*		
1	19*			

$0·5\sqrt{-1}$

1	19	0·5	105		40		251	
			—0·25	9·5	— 4·75	52·38	— 26·19	17·63
			104·75	9·5	35·25	52·38	224·81	17·63

$1\sqrt{-1}$

1	19	1	105		40		251	
			—1	19	—19	104	—104	21
			104	19	21	104	147	21

$1·5\sqrt{-1}$

1	19	1·5	105		40		251	
			—2·25	28·5	—42·75	154·13	—231·2	—4·13
			102·75	28·5	— 2·75	154·13	19·8	—4·13

1	— 9	0	— 9	1000
1	— 1·5	— 11·25	— 93.38	299·65*
1	6	33·75	159·75*	
1	13·5	135*		
1	21*			

$0·5\sqrt{-1}$

1	21	0·5	135		159·75		299·65	
			—0·25	10·5	- 5·25	67·38	—33·69	77·25
			134·75	10·5	154·5	67·38	265·96	77·25

$1\sqrt{-1}$

1	21	1	135		159·75		299·65	
			—1	21	—21	134	—134	138·75
			134	21	138·75	134	165·65	138·75

$1·5\sqrt{-1}$

1	21	1·5	135		159·75		299·65	
			—2·25	31·5	—47·25	199·13	—298·70	168·75
			132·75	31·5	112·5	199·13	0·95	168·75

Schema.

	0		$0{\cdot}5\sqrt{-1}$		$1\sqrt{-1}$		$1{\cdot}5\sqrt{-1}$	
6·5	254·9	+ 0	235·46	− 27·75	177·9	− 68·25	84·45	− 134·25
7	251	+ 0	224·81	+ 17·63	147	+ 21	19·8	− 4·13
7·5	299·65	+ 0	265·96	+ 77·25	165·65	+ 138·75	0·95	+ 168·75

Man sieht hieraus, dass für $x = 7 + 1{\cdot}5\sqrt{-1}$ ein Resultat erscheint, das den kleinsten Modulus hat, ich vermindere daher die Wurzeln der vorgelegten Gleichung um $7 + 1{\cdot}5\sqrt{-1}$, und habe

1	− 9		0		− 9		1000	
	7	1·5	−14	10·5	−113·75	52·5	−938	196·875
	− 2	1·5	− 2·25	− 3	− 11·25	− 24·375	− 42·1875	−201·0
	7	1·5	−16·25	7·5	−134	28·125	19·8125	− 4·125*
	5	3	35	21	99·75	252		
	7	1·5	− 4·5	7·5	− 54·0	21·375		
	12	4·5	14·25	36	− 88·25	301·5*		
	7	1·5	84	31·5				
	19	6 *	− 6·75	18				
			91·5	85·5*				

− 88·25	301·5	−88·25	301·5	−88·25	301·5
19·8125	− 4·125	− 4·125	19·8125	−88·25	301·5
883	1206	353	3015	7060	9045.
794	30	9	2714	706	302
70	6	2	241	18	151
1	2	bc = 364	3	4	d^2 = 90903
ac = −1748	bd = −1244		1	c^2 = 7788	
			ad = 5974		

$$
\begin{aligned}
ac + bd &= -\ 2992 \\
bc - ad &= -\ 5610 \qquad 2992 : 98691 = 0{\cdot}03 \\
c^2 + d^2 &= \ 98691 \qquad 5610 : 98691 = 0{\cdot}05
\end{aligned}
$$

$$x = 7{\cdot}03 \quad + \sqrt{-1}\,.\,1{\cdot}55$$

1	19	6	91·5	85·5	−88·25	301·5	19·8125	−4·125
	0·03	0·05	5709	1815	2·753052	2·598990	− 2·69485794	9·26062230
	19·03	6·05	− 3025	9515	− 4·331650	4·588420	−15·43437050	−4·49142990
	0·03	0·05	91·7684	86·6330	−89·828598	308·687410	1·68327156	0·64419240*
	19·06	6·10	5718	1830	2·761056	2·633070		
			− 3050	9530	− 4·388450	4·601760		
			92·0352	87·7690	−91·455992	315·922240*		

Man sieht schon hieraus, dass der reelle Theil 7·03 zu gross ist, ich setze daher $x = 7{\cdot}02 + \sqrt{-1}\,.\,1{\cdot}55$, und führe die Rechnung wie folgt weiter:

$$x = 7{\cdot}029547 \quad + \sqrt{-1}\,.\,1{\cdot}555457$$

1	19	6	91·5	85·5	- 88·25	301·5	19·8125	—4·125
	0·02	0·05	3804	1210	1·831558	1·721440	— 1·81444084	6·15600670
	19·02	6·05	—3025	4510	— 4·303600	4·578895	—15·39001675	—4·53610210
	0·02	0·05	91·5779	86·0720	—90·722042	307·800335	2·60804241	—2·50509540*
	19·04	6·10	3808	1220	1·833074	1·742920	— 83575189	2·83842576
	0·02	0·05	—3050	9520	— 4·357300	4·582685	— 1·57690320	— 46430661
	19·06	6·15	91·6537	87·1460	—93·246268	314·125940*	0·19538732	—0·13097625*
	0·02	0·05	3812	1230	826813	795359	— 4623263	15835930
	19·08	6·20*	—3075	9530	— 441866	459341	— 12668744	— 3698610
			91·7274	88·2220*	—92·861321	315·380640	0·02246725	—0·00960305*
			1717	558	828079	796720	— 369822	1267232
			— 310	954	— 442622	460044	— 1584040	— 462277
			91·8681	88·3732	—92·475864	316·637404*	0·00292863	—0·00155350*
			1717	558	46078	44343	— 64719	221772
			—310	954	— 35474	36862	— 221772	— 64719
			92·0088	88·5244	—92·465260	316·718609	0·00006372	0·00001703*
			1717	558	4608	4435		
			—310	954	— 3548	3686		
			92·1495	88·6756*	—92·45466	316·79981*		
			95	31	368	354		
			—25	76	— 443	461		
			92·1565	88·6863	—92·45541	316·80796		
			10	3	37	35		
			— 2	8	— 44	46		
			92·164	88·697	—92·4561	316·8160*		
					6	6		
					— 6	6		
					—92·4561	316·8172		

Rechnung zur Bestimmung der 3ten Decimalziffer:

—93·246	314·12	—93·24	314·1	—93·24	314·125
2·608	—2·505	— 2·505	2·608	—93·24	314·125
186	628	186	628	8392	94238
56	157	47	188	280	3141
ac=—242	2	bc=233	2	19	1256
	bd=—787		ad=818	4	31
				c²=8695	6
					2
					d²=98674

$$ac + bd = -\,1029$$
$$bc - ad = -\;\;585 \qquad 1029 : 107369 = 0{\cdot}009$$
$$c^2 + d^2 = 107369 \qquad 585 : 107369 = 0{\cdot}005$$

Rechnung zur Bestimmung der 4ten Decimale:

−92·475	316·63	−92·475	316·63	−92·475	316·637
0·195	−0·1309	−0·130	0·1953	−92·475	316·637
9·2	31·7	9·2	31·7	8322	94991
8·3	9·5	2·8	28·4	185	3166
5	3	bc=12·0	1·6	37	1900
ac=−18·0	bd=−41·5		1	6	190
			ad=61·8	c^2=8550	9
					2
					d^2=100258

$ac + bd = -59·5$

$bc - ad = -49·8$ 59·5 : 108808 = 0·0005

$c^2 + d^2 = 108808$ 49·8 : 108808 = 0·0004

Rechnung zur Bestimmung der 5ten Decimale:

−92·45	316·799	−92·454	316·799	−92·454	316·799
0·0224	−0·0096	−0·0096	0·02246	−92·454	316·799
1·85	2·84	0·83	6·33	8321	95040
18	19	5	63	185	3168
4	bd=−3·03	bc=0·88	12	37	1900
ac=−2·07			2	5	221
			ad=7·10	c^2=8548	28
					3
					d^2=100360

$ac + bd = -5·10$

$bc - ad = -6·22$ 5·10 : 108908 = 0·00004

$c^2 + d^2 = 108908$ 6·22 : 108908 = 0·00005

Zur Bestimmung der 6ten Decimale:

−92·456	316·816	−92·456	316·816	−92·456	316·816
0·00292	−0·001553	−0·00155	0·002928	−92·456	316·816
0·185	0·317	0·092	0·634	8321	95045
83	158	46	284	185	3168
2	16	5	6	37	1901
ac=−0·270	1	bc=0·143	2	5	253
	bd=−0·492		ad=0·926	c^2=8548	3
					2
					d^2=100372

$ac + bd = -0·762$

$bc - ad = -0·783$ 0·762 : 108920 = 0·000007

$c^2 + d^2 = 108920$ 0·783 : 108920 = 0·000007

Zur Bestimmung der letzten Ziffer hat man:

−92·4561	316·8172	−92·4561	316·8172
0·00006372	0·00001703	0·00001703	0·00006372
0·005547	0·003168	0·000925	0·019009
277	2218	647	950
64	9	3	221
2	bd=0·005395	bc=−0·001575	6
ac=−0·005890			ad=0·020186

$$0{\cdot}000495 : 108920 = 0{\cdot}00000000455$$
$$=59$$
$$5$$

$$ac + bd = -\ 0{\cdot}000495$$
$$bc - ad = -\ 0{\cdot}021761 \qquad 0{\cdot}021761 : 108920 = 0{\cdot}0000001998$$
$$c^2 + d^2 = 108920$$
$$10869$$
$$1066$$
$$=86$$

Es ist daher

$$x = 7{\cdot}029547004 55 + \sqrt{-1} \,.\, 1{\cdot}5554571998$$

eine Wurzel der vorgelegten Gleichung.

Ich will endlich noch eine Wurzel der Gleichung sechsten Grades bestimmen.

$$3) \quad x^6 + x + 1 = 0$$

$x = 0$,	Resultat	1
$x = 1$,		3
$x = 2$,		67
$x = -1$,		1
$x = -2$,		63

In der Gleichung $f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) = 0$ setze ich statt x Null oder -1, also z. B. 0

$$f(x) = x^6 + x + 1\,, \quad f'(x) = 6x^5 + 1\,, \quad f''(x) = 30x^4$$
$$1 + h = 0, \quad h = -1$$

woraus man sieht, dass man auf $x = -1$ zu substituiren geführt wird.

$$1 - 5h + 15h^2 = 0$$

$$h^2 - \frac{1}{3}h = -\frac{1}{15}, \quad h = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{36} - \frac{1}{15}} = \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{25-60}{900}} = \frac{1}{6} + \sqrt{-\frac{35}{900}}$$

also ist h nahe gleich $\frac{1}{6} + \frac{6}{30}\sqrt{-1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\sqrt{-1}$ oder nahe $0{\cdot}2 + 0{\cdot}2\sqrt{-1}$, daher

$$x = -0{\cdot}8 + 0{\cdot}2\sqrt{-1}$$

Um den negativen reellen Werth von x zu vermeiden, transformire ich die vorgelegte Gleichung so, dass die Wurzeln entgegengesetzt bezeichnet werden. Die aufzulösende Gleichung ist demnach:

$$x^6 - x + 1 = 0$$

$$x = 0{\cdot}8 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}2$$

1	0		0		0		0		−1		1	
	0·8	0·2	0·64	0·16	0·480	0·256	0·3328	0·3008	0·20608	0·30720	−0·696576	0·286976
	1·6	0·4	−4	16	−64	120	−752	832	−7680	5152	−71744	−0·174144
			0·60	0·32	0·416	0·376	0·2576	0·3840	−0·87072	0·35872	0·231680	0·112832*
			1·28	32	1·440	0·768	1·3312	1·2032	1·03040	1·53600		
			−8	32	−192	360	−3008	3328	−38400	25760		
			1·80	0·96	1·664	1·504	1·2880	1·9200	−0·22432	2·15232*		

Nimmt man durchgehends bloss die zwei ersten Decimalen, so hat man die Summe $-0{\cdot}22\,.\,0{\cdot}23 + 2{\cdot}15\,.\,0{\cdot}11$ positiv, daher ist 0·8 zu gross, versuchen wir also

$$x = 0{\cdot}7 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}2$$

1	0		0		0		0		−1		1	
	0·7	0·2	0·49	0·14	0·315	0·196	0·1813	0·2002	0·08687	0·17640	−0·674471	0·140854
	1·4	0·4	−4	14	−56	90	−572	518	−5040	2482	−40244	−0·192706
			0·45	0·28	0·259	0·286	0·1241	0·2520	−0·96353	0·20122	0·285285	−0·051852*
			98	28	945	588	7252	8008	0·43435	88200		
			−8	28	−168	270	−2288	2072	−25200	12410		
			1·35	0·84	1·036	1·144	0·6205	1·2600	−0·78118	1·20732*		

Jetzt ist der reelle Theil von x nicht mehr zu gross, aber der imaginäre Theil vielleicht zu klein, versuchen wir daher

$$x = 0{\cdot}7 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}3$$

1	0		0		0		0		−1		1	
	0·7	0·3	0·49	0·21	0·280	0·294	0·1078	0·2898	−0·01148	0·23520	−0·778596	0·161196
	1·4	0·6	−9	21	−126	120	−0·1242	462	−0·10080	−492	−69084	−333684
			0·40	0·42	0·154	0·414	−0·0164	0·3360	−1·11228	0·23028	0·152320	−0·172488*
			98	42	840	882	0·4312	1·1592	− 5740	1·17600		
			−18	42	−378	360	−0·4968	0·1848	−50400	−2460		
			1·20	1·26	0·616	1·656	−0·0820	1·6800	−1·67368	1·38168*		

wodurch sich der imaginäre Theil zu gross zeigt, weil $1{\cdot}67\ \ 0{\cdot}17 - 1{\cdot}38\,.\,0{\cdot}15$ positiv ist. Es scheint also, als ob $x = 0{\cdot}7 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}2$ substituirt werden sollte; wir substituiren es auch wirklich; doch muss ich bemerken, dass um die nächste Ziffer zu erhalten, ich keinen so grossen Werth auf das Resultat der Division lege, weil beide, Divisor und Dividend, noch viel zu starken Schwankungen ausgesetzt sind, wie man aus den drei letzten Rechnungen genügend ersieht.

$$x = 0{\cdot}7 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}2$$

1	0		0		0		0		—1		1	
	0·7	0·2	0·49	0·14	0·315	0·196	0·1813	0·2002	0·08687	0·17640	—0·674471	0·140854
	1·4	0·4	—4	14	—56	90	—572	518	—5040	2482	—40244	—0·192706
	2·1	0·6	0·45	0·28	0·259	0·286	0·1241	0·2520	—0·96353	0·20122	0·285285	—0·051852*
	2·8	0·8	98	28	945	588	7252	8008	43435	88200		
	3·5	1·0	—8	28	—168	270	—2288	2072	—25200	12410		
	4·2	1·2*	1·35	0·84	1·036	1·144	0·6205	1·2600	—0·78118	1·20732*		
			1·47	42	1·890	1·176	1·8130	2·0020				
			—12	42	—336	540	—5720	5180				
			2·70	1·68	2·590	2·860	1·8615	3·7800*				
			1·96	56	3·150	1·960						
			—16	56	—560	900						
			4·50	2·80	5·180	5·720*						
			2·45	70								
			—20	70								
			6·75	4·20*								

—0·7811	1·2073	—0·78118	1·2073	—0·7811	1·2073
0·2852	—0·0518	—0·0518	0·2852	—0·7811	1·2073
0·156	0·060	0·039	0·241	0·547	1·207
62	1	1	96	62	241
4	1	bc = 0·040	6	1	8
ac = — 0·222	bd = — 0·062		ad = 0·343	c^2 = 0·610	d^2 = 1·456

$$ac + bd = -0{\cdot}284 \qquad 0{\cdot}284 : 2{\cdot}066 = 0{\cdot}1$$
$$bc - ad = -0{\cdot}303 \qquad 0{\cdot}303 : 2{\cdot}066 = 0{\cdot}1$$
$$c^2 + d^2 = 2{\cdot}066$$

Ich sollte somit den reellen und imaginären Theil um 0·1 vermehren, allein diess würde wahrscheinlich $ac + bd$ und $bc - ad$ positiv machen, ich vermehre daher beide Theile bloss um 0·09.

$$x = 0{\cdot}7906671 \qquad \overset{0{\cdot}01}{+\sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}2905069}$$

1	4·2.	1·2.	6·75..	4·20..	5·180...	5·720...	1·8615....	3·7800	—0·78118.....	1·20732.....	0·285285......	—0·051852......
	4·29	1·29	3861	1161	631800	423198	48497418	60974982	1563051924	4387251600	— 95723997084	162211531716
	4·38	1·38	—1161	3861	—423198	631800	—60974982	48497418	—4387251600	1563051924	—162211531716	—95723997084
	4·47	1·47	7·0200	4·7022	5·388602	6·774998	1·73672436	4·87472400	—1·0635999676	1·8023503524	0·027349471200	0·014635534632*
	4·56	1·56	3942	1242	656100	469854	50173632	71108568	1374637500	5478791400	—24988959179	—15488242812
	4·65	1·65	—1242	3942	—469854	656100	—71108568	50173632	—5478791400	1374637500	0·002360512021	—0·000852708180*
	4·74	1·74*	7·2900	5·2206	5·574848	7·900952	1·52737500	6·08754600	—1·4740153576	2·4876932424*	— 976478842	1508436700
	4·74	1·75	4023	1323	680400	517968	51635520	81893880	—748089236	112026755	—1257030584	— 813732368
	4·74	1·76	—1323	4023	—517968	680400	—81893880	51635520	—1·5488242812	2·4988959179	0·000127002595	—0·000158003848*
	4·74	1·77	7·5600	5·7552	5·737280	9·099320	1·22479140	7·42284000*	—753824794	101493721	—97840460	151172338
	4·74	1·78	4104	1404	704700	567540	—10452385	5805236	—1·6242067606	2·5090452900*	0·000029162135	—0·000006831510*
	4·74	1·79	—1404	4104	—567540	704700	1·12026755	7·48089236	5140852	45624727	—11414617	17640386
	4·74	1·80*	7·8300	6·3060	5·874440	10·371560*	—10533034	5735558	—38020606	4534044	—15120331	— 9783957
			4185	1485	—69204	80825	1·01493721	7·53824794	—1·6274647360	2·5140611671	0·000002627187	0·000001024919*
			—1485	4185	5·805236	10·452385	—10613506	5665406	542887	4568008	— 163071	252012
			8·1000	6·8730*	—69678	80649	0·90880215	7·59490200*	—3806673	452406	—2268104	—1467635
			—175	474	5·735558	10·533034	335762	642124	—1·630728522	2·519081581 *	0·000000196012	—0·000000190704
			8·0825	6·9204	—70152	80472	—535104	279802	54188	457393		
			—176	474	5·665406	10·613506	0·90680873	7·60412126	—1·630674334	2·519538974		
			8·0649	6·9678	—70626	80294	33583	64262	5420	45743		
			—177	474	5·594780	10·693900*	—53552	27986	—1·63062013	2·51999640 *		
			8·0472	7·0152	4808	4268	0·9048118	7·6133460	632	5337		
			—178	474	—3557	4007	3359	6431	—4574	542		
			8·0294	7·0626	5·596031	10·702075	—5359	2799	—1·63065955	2·52005519		
			—179	474	481	427	0·902811	7·622576 *	63	533		
			8·0115	7·1100*	—356	401	335	643	—457	54		
			28	11	5·59728	10·71035	0·903146	7·623219	—1·6306989	2·5201138 *		
			—9	24	48	43	33	64	1	8		
			8·0134	7·1135	—36	40	0·90347	7·62385	—68	8		
			2	1	5·5984	10·7186	3	6	—1·6307056	2·5201154		
			—1	2	5	4	0·9037	7·6244 *	—6	1		
			8·014	7·116	—4	4	—1	1	—1·630711	2·520116		
					5·599	10·726 *	0·9036	7·6245				

Nachdem ich die Wurzeln dieser Gleichung um $0{\cdot}79 + \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}29$ vermindert habe, muss ich, um die Ziffer der nächsten Decimale zu bestimmen, das letzte Glied durch das vorletzte dividiren, diess führt auf folgende Rechnung

—1·47401	2·48769	—1·47401	2·48769	—1·47401	2·48769
0·02734	0·01463	0·01463	0·02734	—1·47401	2·48769
0·0295	0·0249	0·0147	0·0497	1·4740	4·9754
103	99	59	174	5896	9950
4	14	8	7	1032	1990
ac = —0·0402	1	bc = —0·0214	1	59	174
	bd = 0·0363		ad = 0·0679	c^2 = 2·1727	14
					2
					d^2 = 6·1884

$$ac + bd = -0{\cdot}0039 \qquad 0{\cdot}0039 : 8{\cdot}3611 = 0{\cdot}0004$$

$$bc - ad = -0{\cdot}0893 \qquad 0{\cdot}0893 : 8{\cdot}3611 = 0{\cdot}01$$

$$c^2 + d^2 = 8{\cdot}3611$$

woraus ich sehe, dass ich genöthigt bin, den imaginären Theil der Wurzel noch um 0·01 zu vermehren, welches ich hier nahe über 0·29 setze.

Zur Bestimmung der 3ten Decimalstelle hat man alsdann:

−1·624206	2·50904	−1·62420	2·50904	−1·62420	2·50904
0·002360	−0·00085	−0·00085	0·00236	−1·62420	2·50904
0·0032	0·0020	0·0013	0·0050	1·6242	5·0181
5	1	1	8	9745	1·2545
1	bd=−0·0021	bc=0·0014	1	325	225
ac=—0·0038			ad=0·0059	65	1
				3	$d^2=6·2925$
				$c^2=2·6380$	

$$ac + bd = -0·0059 \qquad 0·0059 : 8·9332 = 0·0006$$
$$bc - ad = -0·0045 \qquad 0·0045 : 8·9332 = 0·0005$$
$$c^2 + d^2 = 8·9332$$

wir haben somit $x = 0·7906 + \sqrt{-1}\,.\,0·3005$.

Zur Bestimmung der 5ten Decimalstelle haben wir:

−1·63072	2·51908	−1·63072	2·51908	−1·63072	2·51908
0·000127	−0·000158	−0·000158	0·000127	−1·63072	2·51908
0·000163	0·000252	0·000163	0·000252	1·631	5·038
33	126	82	50	978	1·260
11	20	13	18	49	25
ac=−0·000207	bd=−0·000398	bc=0·000258	ad=0·000320	1	23
				$c^2=2·659$	$d^2=6·346$

$$ac + bd = -0·000605 \qquad 0·000605 : 9·005 = 0·00006$$
$$bc - ad = -0·000062 \qquad 0·000062 : 9·005 = 0·000006$$
$$c^2 + d^2 = 9·005$$

Zur Bestimmung der 6ten Decimalstelle haben wir:

−1·63062	2·5199	−1·630	2·5199	−1·63062	2·5199
0·00002916	−0·00000683	−0·00000683	0·00002916	−1·63062	2·5199
0·0000326	0·0000151	0·0000098	0·0000504	1·631	5·040
147	20	13	226	978	1·260
2	1	bc=0·0000111	3	49	25
1	bd=−0·0000127		1	1	23
ac=—0·0000476			ad=0·0000734	$c^2=2·659$	2
					$d^2=6·350$

$$ac + bd = -0·0000648 \qquad 0·0000648 : 9·009 = 0·000007$$
$$bc - ad = -0·0000623 \qquad 0·0000623 : 9·009 = 0·000006$$
$$c^2 + d^2 = 9·009$$

Zur Bestimmung der 7ten Decimalstelle haben wir:

−1·63069	2·5201	−1·63069	2·5201
0·000002627	0·000001024	0·000001024	0·000002627
0·00000326	0·00000252	0·00000163	0·00000504
98	5	3	151
3	1	bc = −0·00000166	5
1	bd = 0·00000258		1
ac = −0·00000428			ad = 0·00000661

$$ac + bd = -\,0{\cdot}00000170 \qquad 0{\cdot}00000170 : 9{\cdot}009 = 0{\cdot}0000001$$
$$bc - ad = -\,0{\cdot}00000827 \qquad 0{\cdot}00000827 : 9{\cdot}009 = 0{\cdot}0000009$$
$$c^2 + d^2 = 9{\cdot}009$$

Zur Bestimmung der letzten Decimalen haben wir:

−1·630711	2·520116	−1·630711	2·520116	−1·63071	2·52011
0·0000001960	−0·0000001907	−0·0000001907	0·0000001960	−1·63071	2·52011
0·0000001631	0·0000002520	0·0000001631	0·0000002520	1·6307	5·0402
1467	2268	1467	2268	9784	1·2601
98	18	11	151	489	504
ac = −0·0000003196	bd = −0·0000004806	bc = 0·0000003109	ad = 0·0000004939	11	3
				c^2 = 2·6591	d^2 = 6·3510

$$0{\cdot}0000008002 : 9{\cdot}0101 = 0{\cdot}0000000888$$
794
73

$$ac + bd = -\,0{\cdot}0000008002$$
$$bc - ad = -\,0{\cdot}0000001830$$
$$c^2 + d^2 = 9{\cdot}0101$$

$$0{\cdot}0000001830 : 9{\cdot}0101 = 0{\cdot}0000000203$$
28
1

somit sind

$$x = 0{\cdot}7906671888 \pm \sqrt{-1}\,.\,0{\cdot}3005069203$$

zwei Wurzeln der Gleichung $x^6 - x + 1 = 0$

Verfahren bei gleichen Wurzeln.

Ein Beispiel wird uns am besten wieder auf den Weg leiten, den wir hierbei einzuschlagen haben. Es sey

$$1)\quad x^4 - 10x^2 + 25 = 0$$

welche die zwei gleichen Wurzeln $x = \sqrt{5}$ besitzt. Ich vermindere die Wurzeln dieser Gleichung um 2, so ist:

1	0	−10	0	25
1	2	− 6	−12	1 *
1	4	2	− 8 *	
1	6	14*		
1	8 *			

$$2)\quad x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$$

Die Wurzeln dieser vermindere ich um 0·2

1	8	14	—8	1
1	8·2	15·64	—4·872	0·0256 *
1	8·4	17·32	—1·408 *	
1	8·6	19·04 *		
1	8·8*			

so ist

$$3)\quad x^4 + 8{\cdot}8x^3 + 19{\cdot}04x^2 - 1{\cdot}408x + 0{\cdot}0256 = 0$$

und die Wurzeln dieser um 0·03

1	8·8	19·04	—1·408	0·0256
	8·83	19·3049	—0·828853	0·00073441 *
	8·86	19·5707	—0·241732 *	
	8·89	19·8374 *		
	8·92			

wodurch

$$4)\quad x^4 + 8{\cdot}92x^3 + 19{\cdot}8374x^2 - 0{\cdot}241732x + 0{\cdot}00073441 = 0$$

wird. Die Wurzeln dieser vermindere ich um 0·006, so ist:

1	8·92	19·8374	—0·241732	0·00073441
	8·926	19·890956	—0·122386264	0·000000092416 *
	8·932	19·944548	—0·002718976*	
	8·938	19·998176*		
	8·944 *			

Wenn wir auch noch um mehrere Zehntausendtel die Wurzeln der Gleichung erniedrigen wollten, z. B. um α, so müsste man so verfahren: Zuerst 1 mit α multipliciren und zu 8·944 addiren, dadurch bleibt 8·944 fast ungeändert, diese Zahl nun wieder mit α Zehntausendtel multiplicirt, und zu 19·998... addirt, gibt wieder nahe dieselbe Zahl 19·998... dieses soll nun mit α multiplicirt zu —0·00271... und dieses mit α multiplicirt zur letzten Zahl hinzugefügt werden. Dann wird wieder von Neuem begonnen, 1 mit α multiplicirt zu $8{\cdot}944 + \alpha$ addirt, das Product mit α multiplicirt zu 19·99... addirt, die Summe mit α multiplicirt zu — 0·0027... addirt.

Da aber die Gleichung zwei gleiche Wurzeln besitzt, so muss, wenn man die Wurzeln der Gleichung um eben diese vermindert, die Coefficienten der zwei letzten Glieder der Nulle gleich werden, wie z. B. in unserm Falle $x^4 + Ax^3 + Bx^2 = 0$ werden, denn diese hat zwei gleiche Wurzeln $x = 0$, und ich kann nicht, um eine folgende Decimalziffer zu erhalten, das letzte Glied durch das vorletzte dividiren, weil das vorletzte immer viel zu starken Aenderungen unterworfen ist. Da aber das drittletzte Glied 19·99... durch zweimalige Multiplication von α zu —0·002718... hinzugefügt, auch nahe Null geben soll, so dient uns diess dazu, das α zu finden. Wir brauchen daher nur 0·002718... durch 19·998... zu dividiren, die Hälfte davon gibt die gesuchte Zahl, um die wir vermindern müssen, damit nahe die zwei letzten Glieder Null werden.

Wir wollen nun diess gleich auf unser Beispiel anwenden:

$$0{\cdot}002718 : 19{\cdot}998 = 0{\cdot}00013,\quad \text{mithin } \alpha = 0{\cdot}00006$$
$$718$$

$$x = 2{\cdot}23606$$

1·	8·944	19·998176	—0·002718976	0·000000092416
		19·998712	—0·001519053	0·000000001273 *
		19·99924	—0·0003190 *	
		19·9997 *		

$$0{\cdot}0003191 : 19{\cdot}9997 = 0{\cdot}000015$$

1191
191

$$x = 2{\cdot}236067$$

1	8·944	19·9997	—0·00031910	0·000000001273
			—0·00017911	0·000000000019 *
			—0·0000392 *	

$$0{\cdot}0000392 : 19{\cdot}9 = 0{\cdot}000002$$

$$x = 2{\cdot}236068$$

1	8·944	19·9997	—0·00031910	0·000000001273
			—0·00015911	0·000000000000 *

Ganz eben so muss man verfahren bei der Aufsuchung der gleichen imaginären Wurzeln, oder auch bei Gleichungen, deren Wurzeln nahe einander gleich sind.

Ich erlaube mir zum Schlusse die Bemerkung hinzu zu fügen, dass diese Methode eben so gut anwendbar ist, wenn einer oder mehrere der Coefficienten der vorgelegten Gleichung imaginär sind.