VI. Ueber die Summen der Körperwinkel an Pyramiden.

Von

J. Riedl v. Leuenstern.

Mit einer Figurentafel.

Mitgetheilt am 8. Juni 1849 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Nachdem in der ersten Abtheilung dieser Untersuchung (Naturwiss. Abh. II. Bd. II. Theil S. 1) der Ausdruck und die Darstellung des Werthes einer Körperspitze in Theilen der Kugel gefunden worden, blieb in gegenwärtiger Fortsetzung die Anwendung jener Ergebnisse auf ganze Körper zu versuchen. Fürs erste lag der Gedanke nahe, dass es ein Gesetz geben dürfte, nach welchem sich bei geradlinigen Körpern, deren umgebende Flächen und Spitzen der Zahl und Form nach bekannt sind, alle Körperwinkel im Gesammtwerthe unmittelbar bestimmen liessen; etwa so wie man bei jeder geradlinigen Figur in der Ebene, aus der Zahl der Winkel, ohne selbe einzeln zu kennen, deren Summe in Bogentheilen genau anzugeben weiss.

Dass dieses nicht der Fall ist, dass aber gleichwohl für einzelne Gattungen der Körper gewisse Regeln bestehen, wodurch die Frage erledigt ist, wird in so weit es die Pyramiden betrifft, sich aus Gegenwärtigem ergeben. Im Allgemeinen: Je regelmässiger die Gestalt, desto leichter bestimmbar die Bedingungen der Summe; im Gegensatze zu den ebenen Flächen, welche ohne Unterschied, ob gleichseitig, gleichwinkelig, recht oder schief, alle unter einem Gesetze stehen.

Um allen die diesem Gegenstande Aufmerksamkeit schenken wollen, auf mehr als einem Wege volle Ueberzeugung von der Richtigkeit der Sätze zu verschaffen, sind von verschiedenen Pyramiden, in tabellarischer Zusammenstellung, berechnete Proben als Anhang beigefügt.

Da die aus Pyramiden zusammengesetzten Körper, Prismen und Parallelepipeden ausgenommen, mit diesen ihren Bestandtheilen zugleich als abgethan betrachtet werden können, so ist die einer dritten Mittheilung vorbehaltene Aufgabe: das Mass der Spitzen an prismatischen und dann an solchen Körpern zu bestimmen, die nicht in Pyramiden theilbar sind.

Die erste Abtheilung enthält:

1 bis 21: Allgemeine Sätze des vergleichenden Masses.

22 bis 35: Aufgaben zeichnender Darstellung: aus gegebenen Bestandtheilen einer dreikantigen Spitze die unbekannten zu finden.

---

36. Vier Punkte im Raume, wenn sie nur nicht alle in einer Ebene, auch nicht deren drei in einer geraden Linie liegen, geben weder mehr noch weniger als sechs Kanten, vier Dreiecke und vier Spitzen mit dreiseitigen Körperwinkeln. Die dadurch erzeugten einfachsten aller Körper sind also vierspitzig-vierflächig (*Tetrakro-Tetraedra*), und werden gewöhnlich dreiseitige Pyramiden genannt.

Man kann ihnen diesen Namen mit einigem Rechte streitig machen; indem der Begriff, Pyramide, eine entschiedene Spitze für den Scheitel, und diesem gegenüber, eine Grundfläche von anderer Art als die Seitenflächen vorauszusetzen scheint, während man beim Tetrakron in der Regel die Wahl hat, welche Spitze desselben man aufwärts richten, und auf welches Dreieck man es stellen will.

Noch ein Punkt mehr in der Ebene eines der vier Dreiecke, und die eigentlichen Pyramiden beginnen. Diese, obgleich in der That fünfspitzig-fünfflächig, behalten doch ganz zweckmässig ihre hergebrachte Benennung vierseitige Pyramiden, weil das Viereck auf welchem sie stehen, als Grundfläche, nicht als Seite gilt. Eben so die fünf-, sechs- und vielseitigen, aus demselben immer stärkern Grunde; ungeachtet sie beständig um eine Fläche und eine Spitze mehr haben, als der Name aussagt.

Die Reihe des ganzen Pyramidengeschlechtes aber als Anfangsgrenze zu eröffnen, ist eben die Funktion des Tetrakron, gleichwie selbe zu beschliessen dem Kegel gebührt; so dass Beide zwar streng genommen etwas anders sind, Beide aber auch als Pyramiden angesehen und behandelt werden können.

37. Die dreiseitige Pyramide ist unentbehrlich zur Ermittelung und Summirung mehrkantiger und besonders, ungleichseitiger Körperwinkel; denn so wie jede geradlinige Figur in der Ebene sich in eine Anzahl Dreiecke theilen lässt, aus deren Winkelsummen nach Abzug der etwaigen Umkreise in der Mitte, sich die Hauptsumme ergibt, eben so muss auch, da jeder von Ebenen begrenzte Körper in Tetrakro-Tetraeder theilbar ist, aus deren Summen die Hauptsumme seiner Spitzen folgen. Der Pentakro-Hexaeder (dreiseitige Doppelpyramide) zerfällt in zwei, der Hexakro-Pentaeder (dreiseitiges Prisma) in drei, der Hexakro-Oktaeder (aus acht Dreiecken) in vier, der Oktakro-Hexaeder (wozu ausser Kubus und Rhombalkubus, alle Parallelepipeden, Trapezoidal-Afterwürfel u. s. w. gehören) in fünf dreiseitige Pyramiden; oder, von der Mitte aus getheilt: der Letztgenannte in zwölf, der Dodekakro-Ikosaeder in zwanzig, der Ikosakro-Dodekaeder in sechsunddreissig u. s. w., welches alles wie bekannt, von ungleichkantigen und schiefen sowohl als von Regelkörpern gilt.

38. Wenn vier Dreiecke gegeben sind, welche nebst der allgemeinen Bedingung je-

des geradlinigen Dreiecks, auch noch dem Gesetze gemäss sind, dass jedes derselben mit jedem der drei andern eine gleiche Seite habe; so ist eine dreiseitige Pyramide gegeben.

Die Dreiecke sind entweder viererlei, von verschiedener Gestalt, in zahlloser Manigfaltigkeit; oder zwei derselben congruent. In diesem Falle müssen die beiden andern auch entweder unter sich congruent, oder gleichschenkelig oder beides seyn. Oder es sind drei congruent; dann sind sie auch gleichschenkelig und das vierte gleichseitig. Wenn alle vier congruent sind, so können sie entweder schief, gleichschenkelig oder gleichseitig seyn.

Erschöpfender ist die Eintheilung nach Kanten; nach dieser ergeben sich 24 Familien der dreiseitigen Pyramiden.

I. Sechserlei Kanten abcdef, geben viererlei schiefe Dreiecke: abc, aef, bfd, cde.

II. Fünferlei aabcde, ebenfalls viererlei schiefe: abc, aed, aeb, acd.

III. Fünferlei aabcde, viererlei; nämlich ein gleichschenkeliges: aae, und dreierlei schiefe: abc, acd, bde.

IV. Viererlei aabbcd, geben viererlei; nämlich ein gleichschenkeliges: aab, und dreierlei schiefe: abc, abd, bcd.

V. Viererlei aabbcd, viererlei; zwei gleichschenkelige: aab, bbd, und zwei schiefe: abc, bcd.

VI. Viererlei „ aabbcd, zweierlei Dreiecke, und zwar zwei congruente schiefe: abc, und noch zwei congruente schiefe: abd.

VII. Viererlei aaabcd, viererlei; zweierlei gleichschenkelige: aab, aad, und zweierlei schiefe: abc, adc.

VIII. Viererlei aaabcd, viererlei; dreierlei gleichschenkelige: aab, aac, aad, und ein schiefes: bcd.

IX. Viererlei aaabcd, viererlei und zwar ein gleichseitiges: aaa, und dreierlei schiefe: abc, abd, acd.

X. Dreierlei „ aabbcc, viererlei; dreierlei gleichschenkelige: aab, bbc, cca, und ein schiefes: abc.

XI. Dreierlei aabbcc, dreierlei Dreiecke; zweierlei gleichschenkelige: aac, bbc, und zwei congruente schiefe: abc.

XII. Dreierlei aabbcc, einerlei, und zwar vier congruente schiefe: abc (Fig. 25).

XIII. Dreierlei aaabbc, viererlei; dreierlei gleichschenkelige: aab, aac, bba, und ein schiefes: abc.

XIV. Dreierlei aaabbc, dreierlei; nämlich zwei congruente gleichschenkelige: aab, und noch zweierlei gleichschenkelige: aac, bbc.

XV. Dreierlei Kanten aaabbc, dreierlei und zwar ein gleichseitiges: aaa,
ein gleichschenkeliges: abb,
und zwei congruente schiefe: abc.

XVI. Dreierlei aaabbc, zweierlei Dreiecke; zwei congruente gleichschenkelige: aab,
und zwei congruente schiefe: abc.

XVII. Dreierlei aaaabc, viererlei; nämlich ein gleichseitiges: aaa,
zweierlei gleichschenkelige: aab, aac,
und ein schiefes: abc.

XVIII. Dreierlei aaaabc, zweierlei; zwei congruente gleichschenkelige: aab,
und noch zwei congruente gleichschenkelige: aac.

XIX. Zweierlei aaabbb, zweierlei Dreiecke; zwei congruente gleichschenkelige: aab,
und noch zwei congruente gleichschenkelige: abb.

XX. Zweierlei aaabbb, zweierlei und zwar ein gleichseitiges: aaa,
und drei congruente gleichschenkelige: abb.

XXI. Zweierlei aaaabb, dreierlei; ein gleichseitiges: aaa,
zwei congruente gleichschenkelige: aab,
und ein gleichschenkeliges: abb.

XXII. Zweierlei aaaabb, einerlei und zwar vier congruente gleichschenkelige: aab. (Fig. 24.)

XXIII. Zweierlei aaaaab, zweierlei; zwei gleichseitige: aaa,
und zwei congruente gleichschenkelige: aab.

XXIV. Einerlei „ aaaaaa, einerlei; vier gleichseitige: aaa (der Regeltetraeder).

39. Ist die Zahl der Seiten und Winkel eines geradlinigen Polygones gegeben, so kennt man auch sogleich, zuverlässig und mit aller Schärfe die Summe der Winkel. Die Frage scheint also natürlich: Ob aus den gegebenen Zahlen der Spitzen, Flächen und Kanten eines Polyeders, auch die Summe der Körperwinkel unmittelbar bekannt sey? Und obschon man leicht einsieht, dass das letztere Gesetz nicht so einfach und allgemein wie jenes seyn könnte, schon darum, weil in der ebenen Figur immer eben so viele Winkel als Seiten sind, im Körper dagegen bald mehr Spitzen als Flächen, bald umgekehrt, immer aber mehr Kanten; — weil ferner auch die geraden Linien, als Seiten der Flächen, etwas beständig gleichartiges und nur der Grösse nach verschieden sind, statt dass die Seitenflächen der Körper auf alle Weise veränderlich, oft auch in einem und demselben Körper vielerlei sind; — so liesse sich etwa doch eine Gleichheit der Summe, bei Körpern von einer gleichen Anzahl gleichartiger Flächen sowohl als Spitzen, und gleichmässig vertheilter Kanten vermuthen. Aber auch diese Gleichheit besteht in der

Regel nur bei vollkommener Aehnlichkeit; jede Aenderung der Bestandtheile ändert auch die Summe. Um jedoch die Ausnahmen aufzufinden, beschränkte ich die Frage vorläufig auf das Geschlecht der Pyramiden, bei welchem sich doch wenigstens der analoge Umstand findet, dass allgemein: die Zahl der Spitzen gleich jener der Flächen ist, und die Zahl der Kanten um zwei weniger als beide zusammen. Bei aller auch hier statt findenden Ungleichheit wird es wenigstens gelingen, zweierlei festzustellen. Erstens Erklärungsgründe für diesen Vorzug im Gebiete der Ebenen und für den scheinbaren Verfassungsfehler im Reiche der Körper; dann ein Gesetz, nach welchem jene Summe, bei einerlei Grundfläche und zunehmender Höhe wächst oder abnimmt, ein Grösstes und ein Kleinstes wird.

40. Zur Vergleichung sind die zwei einfachsten Bildungen zu wählen, aus denen sich alle übrigen zusammensetzen: das Dreieck und die Tetraederpyramide.

Es sey (Fig. 17) fs die Axe einer auf der Grundlinie ab aufzustellenden Reihe aller möglichen gleichschenkeligen Dreiecke, wobei demnach beständig $af = bf$ seyn und fs ins unendliche wachsend gedacht werden muss. Die Richtung nach dem letzten, unendlich entfernten Scheitel wird durch die senkrechten au, bu′ ausgedrückt, alle übrigen Punkte s auf der Axe sind mögliche Scheitel. Als Scheitel des ersten Dreiecks der Reihe, der innersten Grenze aller gleichschenkeligen, gilt der Punkt f; hier ist die Höhe Null, der Scheitelwinkel $afb = 180^0$, die beiden Grundwinkel $baf = abf$ gleich Null, also die Summe $= 180^0$. Die äusserste Grenze der Reihe ist da, wo die Höhe unendlich wird, der Scheitelwinkel eben daher gleich Null und die Grundwinkel $uab = u'ba = 90^0$. Zusammen $= 180^0$. Die beiden Extreme sind also gleich, und da es kein gleichschenkeliges Dreieck gibt, das nicht in dieser Reihe seinen Platz fände, da auch jeder Scheitelwinkel $(asf + bsf) = (uas + u'bs)$ die entsprechenden Grundwinkel $(saf + sbf)$ auf 180^0 ergänzt, so müssen alle möglichen gleichschenkeligen Dreiecke dieselbe Summe geben.

Rückt man den Punkt f aus der Mitte nach einer Seite hin, innerhalb ab, z. B. nach φ, welche Versetzung unendlichfach geschehen kann, so entsteht eine unendliche Menge Reihen von schiefen Dreiecken, und es ist kein schiefes Dreieck denkbar, das nicht in eine von diesen Reihen gehörte; so dass alle möglichen geradlinigen Dreiecke, deren jedes entweder gleichschenkelig oder schief seyn muss, innerhalb der Gesammtheit dieser Reihen, der Form nach begriffen sind.

Nun kann aber in jeder dieser Reihen gezeigt werden, dass die Summe an der innersten Grenze, im Dreiecke $a\varphi b = 180^0$, an der äussersten Grenze, wie oben, ebenfalls $= 180^0$, und in jedem dazwischen liegenden, die Seitenwinkel $(a\sigma\varphi + b\sigma\varphi = ua\sigma + u'b\sigma)$ durch die Grundwinkel $(\sigma a\varphi + \sigma b\varphi)$ auf 180^0 ergänzt werden. Es ist also die Summe der Winkel jedes geradlinigen Dreiecks gleich 180^0.

41. Ich nenne (Fig. 18) F den gemeinschaftlichen Fusspunkt einer unendlichen Reihe von Scheiteln, der auf der Grundfläche ABC errichteten senkrechten*) Pyramiden ASBC.

Die oberste Grenze wird durch die unendlich hohe Pyramide dargestellt, deren Körperwinkel am Scheitel, wegen der unendlich langen Kanten AU, BU′, CU″, Null wird, und deren Grundwinkel UABC, U′BCA, U″CAB (vergl. Mass d. K. W. 3 bis 9) mit den Bogen der ebenen Winkel A, B, C, der Grundfläche gemessen werden. Es ist also die Summe der Körperwinkel an dieser äussersten Grenze $= 180^0$.

An der untersten Grenze, wo die Höhe Null ist, und der Scheitel mit dem Fusspunkte zusammentrifft, sind die drei Körperwinkel am Grunde eben darum gleich Null; dagegen aber der Scheitelwinkel AFBC (v. Mass d. K. W. 5) und mit ihm die ganze Summe der vier Körperwinkel $= 360^0$.

Der Uebergang dieser Summen, von 180 bis 360 Kugelgraden, kann aber durchaus nur in unmerklichem Vorschritte geschehen. Wie die Höhe um ein unbestimmbar Kleines abnimmt, so muss sich die Summe um einen aliquoten Theil verändern und keine der unzähligen Pyramiden kann mit der zunächst folgenden eine gleiche haben; ja es könnte keine mit irgend einer andern der ganzen Reihe gleich seyn, es wäre denn, dass es noch inner den beiden Grenzen einen Wendepunkt gäbe, bei dem ein Grösstes oder Kleinstes der Summe einträte, und dass dann paarweise, die von diesem Punkte gleich weit verschiedenen gleich wären. Dieser Punkt bliebe also aufzusuchen.

Erwiesen ist bis hierher Folgendes: Die Summen der Körperwinkel an dreiseitigen senkrechten Pyramiden sind (zwischen 180 und 360 Kugelgraden) veränderlich.

42. Gegeben sey die Neigung $smc = M$, der drei Seitenflächen einer senkrechten Pyramide, gegen die gleichseitige Grundfläche (Fig. 19); zu finden die vier Körperwinkel.

Der unbekannte Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander ist:

$$bdc = ad'b = x;$$

Die Kanten des gleichseitigen Dreiecks der Grundfläche werden als Einheit angenommen. Die sechs ebenen Winkel an den Grundlinien der gleichschenkeligen Seitenflächen sind:

$$sab = sba = A; \text{ ferner die Linien:}$$

*) Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erinnern, dass unter senkrechten (oder vertikalen) Pyramiden solche verstanden sind, deren Fusspunkt des Scheitels, zugleich Schwerpunkt der Grundfläche ist.

$$bd = ad' = \text{Sin}\,A,$$
$$sm = \tfrac{1}{2}\,\text{Tang}\,A, \quad \text{und}$$
$$\text{Tang}\,A.\text{Cos}\,M = em = \sqrt{(\tfrac{1}{3})}, \quad \text{oder: } \text{Tang}\,A = \frac{\sqrt{(\frac{1}{3})}}{\text{Cos}\,M}; \quad \text{weil aber}$$
$$am = ad'.\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}, \quad \text{so ist}$$
$$\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{2\,\text{Sin}\,A};$$

Und da mithin x gefunden ist, so hat man für jeden der drei Körperwinkel an der Grundfläche den Werth $= x + 2M - 180^0$, und für die Spitze am Scheitel $= 3x - 180^0$; also die Summe $= 6x + 6M - 720^0$.

43. Gegeben die Seitenwinkel: $bsc = asc = asb = B$; zu finden der Körperwinkel $asbc = k$ (Fig. 19).

Da der Tangentenwinkel identisch ist mit $x = ad'b$, und folglich

$$\text{Sin}\,(\tfrac{1}{2}t) = \frac{1}{2\,\text{Sin}\,A} = \frac{1}{2\,\text{Cos}\,(\frac{1}{2}B)}, \quad \text{so ist:}$$

$$\text{Sin}\,(\tfrac{1}{6}w) = \frac{1}{2\,\text{Cos}\,(\frac{1}{2}B)}; \quad \text{und } k = w - 180^0 \text{ (vergl. Mass d. K. W. 11.)}$$

44. Oder auch, weil $2\,\text{Sin}\,(\frac{1}{2}B).\text{Cos}\,(\frac{1}{2}B) = \text{Sin}\,B$,

$$2\,\text{Cos}\,(\tfrac{1}{2}B) = \frac{\text{Sin}\,B}{\text{Sin}\,(\frac{1}{2}B)}; \quad \text{folglich für den Körperwinkel:}$$

$$\text{Sin}\,(\tfrac{1}{6}w) = \frac{\text{Sin}\,(\frac{1}{2}B)}{\text{Sin}\,B}.$$

45. Es besteht zwischen den Funktionen zweier Kreisbogen von (n) und von (3n) Graden, folgende Proportion (Th. d. Sehnenwinkel, Anhang). Setzt man:

$$\text{Cos}\,\varphi = \frac{\text{Sin}\,30^0}{\text{Sin}\,(n + 30^0)}; \quad \text{so verhält sich}$$

$$\text{Sin}\,(3n) : \text{Sin}\,(n + 30^0) = \text{Sin}^{\frac{1}{2}}(3\varphi).\text{Sin}^{\frac{3}{2}}(\varphi) \quad \frac{2\,\text{Cos}^3(\varphi)\,\text{Sin}\,\varphi}{\text{Sin}\,(2\varphi)};$$

Wünscht man nun den Körperwinkel einer dreikantigen, gleichseitigen Spitze unmittelbar, d. h. ohne ihn erst sechsfach nehmen zu müssen, wie bei 43 und 44; so findet sich hier eine Formel, welche zwar minder kurz und bequem als jene, aber in den Bruchtheilen der Sekunden, eben weil diese dann nur verdoppelt, nicht versechsfacht zu werden brauchen, etwas schärfer, jedenfalls in zweifelhaften Fällen die beste Probe ist. Es wird nämlich

$$2\varphi = B \quad \text{und}$$
$$6n = k \quad \text{angenommen, dann obige Gleichung reducirt:}$$

$$\text{Sin}\,(\tfrac{1}{2}k) = \frac{\sqrt{[\text{Sin}\,(1\tfrac{1}{2}B).\text{Sin}^3(\tfrac{1}{2}B)]}}{2\,\text{Cos}^3(\tfrac{1}{2}B)}.$$

46. Wenn nur zwei der gegebenen Seitenwinkel gleich sind (B, B, b), so verwandelt sich der letzte Ausdruck in:

$$\operatorname{Sin}(\tfrac{1}{2}k) = \frac{\sqrt{[\operatorname{Sin}(B+\tfrac{1}{2}b).\operatorname{Sin}(B-\tfrac{1}{2}b).\operatorname{Sin}^2(\tfrac{1}{2}b)]}}{2\operatorname{Cos}^2(\tfrac{1}{2}B).\operatorname{Cos}(\tfrac{1}{2}b)},$$

und findet seine Anwendung bei Berechnung der Körperwinkel an der Grundfläche senkrechter Pyramiden mit congruenten, gleichschenkeligen Seitenflächen. (38. XX.)

47. Sind aber bei einer dreikantigen Spitze alle drei Seitenwinkel verschieden (B, b, β), so findet man durch fernere Umgestaltung desselben Ausdrucks gleichfalls unmittelbar den Körperwinkel:

$$\operatorname{Sin}(\tfrac{1}{2}k) = \frac{\sqrt{\left[\operatorname{Sin}\left(\frac{B+b+\beta}{2}\right).\operatorname{Sin}\left(\frac{B+b-\beta}{2}\right).\operatorname{Sin}\left(\frac{B+\beta-b}{2}\right)\ \operatorname{Sin}\left(\frac{b+\beta-B}{2}\right)\right]}}{2\operatorname{Cos}(\tfrac{1}{2}B).\operatorname{Cos}(\tfrac{1}{2}b).\operatorname{Cos}(\tfrac{1}{2}\beta)}.$$

48. Wenn in diesem Falle die einzelnen Tangentenwinkel gefunden werden sollen, so muss auf ähnliche Art die einfache Formel (44) dazu eingerichtet werden. Es ist nämlich:

$$\frac{\operatorname{Sin}(\tfrac{1}{2}B)}{\operatorname{Sin}B} = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{Sin}^2(\tfrac{1}{2}B)}{\operatorname{Sin}^2 B}\right]}.$$

Setzt man nun: $\operatorname{Sin}(\tfrac{1}{2}B).\operatorname{Sin}(\tfrac{1}{2}B) = \operatorname{Sin}\left(\frac{B+b-\beta}{2}\right).\operatorname{Sin}\left(\frac{B+\beta-b}{2}\right)$,

ferner: $\operatorname{Sin}B.\operatorname{Sin}B = \operatorname{Sin}b.\operatorname{Sin}\beta$, so wird

$$\operatorname{Sin}(\tfrac{1}{2}t_B) = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{B+b-\beta}{2}\right).\operatorname{Sin}\left(\frac{B+\beta-b}{2}\right)}{\operatorname{Sin}b\ .\ \operatorname{Sin}\beta}\right]}.$$

49. Wie die (43.44) gefundenen Werthe dreikantiger, gleichseitiger Spitzen ergibt sich auch der allgemeine Ausdruck für jeden gleichseitigen Körperwinkel von (n) Kanten.

Das (n) seitige Regelvieleck, worauf die Axe der Spitze senkrecht steht, zerfällt von seiner Mitte aus, in (n) congruente Stammdreiecke, deren Winkel am Pole jeder $= \frac{1}{n}$ des Umkreises ist, so wie allen daraus entstehenden gleichschenkeligen Sehnendreiecken der gegebene Scheitelwinkel B gemeinschaftlich seyn muss.

Es sind demnach (n) gleiche Kugelausschnitte und eben so viele Theile der Spitze:

$$\operatorname{Sin}\left(\frac{1}{2n}w\right) = \frac{\operatorname{Sin}(\tfrac{1}{2}B).\operatorname{Sin}\left(\frac{360}{n}\right)}{\operatorname{Sin}B.\operatorname{Sin}\left(\frac{180}{n}\right)};\quad \text{oder auch:}$$

$$\operatorname{Sin}\left(\frac{1}{2n}w\right) = \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{360}{n}\right)}{2\operatorname{Cos}(\tfrac{1}{2}B).\operatorname{Sin}\left(\frac{180}{n}\right)} = \frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{180}{n}\right)}{\operatorname{Cos}(\tfrac{1}{2}B)};$$

und der Körperwinkel: $k = w - (n-2)\,180^0$.

50. Eben so können auch der *Körperwinkel* und die *Zahl der Kanten* einer gleichseitigen Spitze gegeben und *die Seitenwinkel zu finden* seyn.

Aus einfacher Umkehrung des vorigen wird jeder

$$\mathrm{Cos}\,(\tfrac{1}{2}B) = \frac{\mathrm{Cos}\left(\frac{180}{n}\right)}{\mathrm{Sin}\left(\frac{k + (n-2)\,180^0}{2n}\right)}.$$

Es sey z. B. eine *eilfkantige, gleichseitige Spitze* gefordert, deren Mass genau $\frac{1}{9}$ *der Kugelfläche* sey; so dass neun congruente Kugelausschnitte dieser Form, obgleich sie sich, ihrer Kanten und Seitenflächen wegen, durchaus nicht in eine Kugelgestalt zusammenfügen, doch einer aus demselben Strahle gebildeten Kugel an Körperinhalt gleich seyen.

Da $k = 80^0$ und $n = 11$ gegeben sind, so werden die Seitenwinkel:

$$\mathrm{Cos}\,(\tfrac{1}{2}B) = \frac{\mathrm{Cos}\,(16^0.\,21'.\,49\tfrac{1}{11}'')}{\mathrm{Sin}\,(77^0.\,16'.\,21\tfrac{9}{11}'')};\ \text{oder:}$$

$$B = 20^0.\,44'.\,33'',\,15$$

(Aehnliche Beispiele sind bei: vergl. Mass d. K. W. 13.)

51. Wenn eine Anzahl (n) gleicher gonyometrischer Werthe, für jeden Punkt einer aufsteigenden geraden, *aus einem veränderlichen Winkel* (y) in Verbindung mit *einem beständigen* (C) erzeugt wird:

$$f\,(n,\ C,\ y)$$

indem sich dieser Ausdruck von der untersten Grenze einer veränderlichen Reihe bis zur obersten gleichförmig wiederholt, von Stufe zu Stufe fortbildet; wenn zugleich eben so viele von dem veränderlichen Winkel (z) abhängig, auf dieselbe Weise mit (n) und dem beständigen Winkel (C) verbunden:

$$f\,(n,\ C,\ z)$$

von der obersten Grenze derselben Reihe zur untersten entgegen rücken und beide diese veränderlichen Ausdrücke, an jeder Stufe zusammen die Summe

$$\Sigma = f\,(nCy + nCz)$$

geben; wenn ferner y und z so beschaffen sind, dass die Bogenfunktionen im Gegensatze bei dem einen abnehmen, in dem Masse als sie bei dem andern wachsen:

$$\Sigma = f\,(nCy - nCz)$$

und endlich, abgesehen von den grössten oder kleinsten Werthen dieser Summe an beiden Grenzen der Reihe, noch *ein Wendepunkt* (wie bei 41 vorläufig angedeutet) *für ein Grösstes oder Kleinstes, innerhalb dieser Grenzen* zu suchen ist, so hat man:

$$d\Sigma = nCdy - nCdz,$$

und für den Ort des Wendepunktes:

$$nCdy - nCdz = 0;\ \text{folglich:}$$

$$y = z.$$

Oder: **Die Summe ist inner den Grenzen am Kleinsten oder Grössten dort, wo die beiden veränderlichen einander gleich werden.**

Nun ist bei allen aus gleichschenkeligen Seitendreiecken gebildeten Pyramiden, die nach aufwärts zunehmende Funktion, von welcher die Werthe der Körperwinkel abhängen:

$$\text{Cos}\, M = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\text{Tang}\, y}; \quad \text{(bei 42)}$$

und die nach aufwärts abnehmende, gemeinschaftlich wirkende

$$\text{Sin}\left(\tfrac{1}{2}t\right) = \frac{1}{2\,\text{Sin}\, y} = \frac{1}{2\,\text{Cos}\left(\tfrac{1}{2}z\right)}; \quad \text{(bei 43)}$$

wo (y) als Winkel an der Grundlinie des gleichschenkeligen Dreiecks wachsen muss, wenn der Scheitelwinkel (z) abnimmt, und umgekehrt; die Körperwinkel sind daher an dem Punkte der Reihe wo $y = z$ wird, am Wendepunkte ihrer Summen, und dieser Ort ist das gleichseitige Dreieck. Und da bei allen senkrechten Pyramiden, welche auf Regelvielecke von (n) Seiten gegründet sind, der (2 n) fache Tangentenwinkel der aufgerichteten Kanten, mehr dem (2 n) fachen Tangentenwinkel der Grundkanten, nach Abzug von $(2n - 2)$ Viertelkugeln, gleich ist der Summe aller $(n + 1)$ Spitzen derselben, so ist auch:

Der Wendepunkt der Summen der Körperwinkel in jeder Reihe senkrechter, auf Regelvielecken errichteter Pyramiden dort, wo die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke werden.

52. Bei der ganzen Reihe senkrechter, dreiseitiger Pyramiden (38. XX) lässt sich das wechselseitige **Zu- und Abnehmen der Neigungswinkel** (M und x, nach 42) **für jeden verlangten Punkt anschaulich darstellen.**

Man errichte in der unbestimmt verlängerten Axe es (Fig. 20) die Höhen (1, 2, 3,...) in willkührlichen Zwischenräumen. Der letzte Höhenpunct (hier 9), drückt die unendliche Höhe dadurch aus, dass er statt in der Axe, in den drei vertikal gewordenen Kanten steht, weil sich diese nur in der unendlichen Ferne schneiden können; beim Anfange der Reihe (1) ist die Höhe Null, oder wenn man will, unendlich klein. Die Grundfläche sey so gestellt, dass eine Kante ab in dem Punkte m, und dadurch eine ganze Seitenfläche, das Dreieck sab in den von m nach allen Punkten der Axe gezogenen Linien m2, m3, m4,... aufgehe, damit die Neigung M durch 2mc, 3mc, 4mc... und eben so der Winkel der Gegenkante sc mit der Grundebene, durch mc2, mc3, mc4,... dargestellt sey. Desswegen zeigen sich auch statt dreier Vertikalen, a9, b9, c9, nur zwei, indem die beiden erstern nur **eine** Linie bilden.)

Der Halbkreis von m nach c begreift die Punkte, in welche der Schnitt von m her auf die Gegenkante (oder deren Verlängerung über den Scheitel hinaus) rechtwinkelig fällt, und jeder Punkt dieses Halbkreises wird dadurch zum Scheitel eines Neigungswinkels x.

Der erste Werth von x (an der untersten Grenze der Reihe) trifft mit (m) selbst zusammen, und ist = 180°; wie es sich in dem grössern Kreise zeigt, der eine Grundkante der Pyramide zum Durchmesser hat, dessen Mitte in m liegt, seine Ebene aber so gewendet gedacht werden muss, dass die gleichschenkeligen Dreiecke: (1, m, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3) deren Scheitelwinkel die abnehmenden x darstellen, in den Sehnen (1, m), (2, m), (3, m), ... des obgedachten Halbkreises stufenweise verschwinden.

Jede dieser Sehnen, z. B. (7, m) ist identisch mit der Axe eines der genannten gleichschenkeligen Dreiecke (7, 7, 7), welche den entsprechenden Neigungswinkel x der Pyramide (c, 7, m) halbirt, während jeder Durchmesser (7, m, 7) des grössern Kreises die beständige Grundlinie ab vertritt.

Es nehmen also die durch Zeichnung dargestellten Winkel (2, 2, 2), (3, 3, 3)... bis (9, c, 9) genau so ab, wie die veränderliche Neigung x, von der untersten Grenze der Pyramidenreihe, wo x = 180°, bis zur Gegengrenze mit unendlicher Höhe, wo x = (9, c, 9) = 60° wird.

53. Dieselbe Reihe senkrechter Tetraederpyramiden *mit gleichseitiger Grundfläche* ist auszugweise der Gegenstand der beigefügten *Tabelle A. Zu bemerken ist darunter:*

I. Der Punkt der unendlichen Höhe; Summe gleich 2 rechten Winkeln. Von hier aus ununterbrochene Abnahme derselben bis:

II. Das Minimum aller Summen der Körperwinkel senkrechter, gleichseitig-dreieckiger Pyramiden ist am Regeltetraeder; dort ist (nach 51.) der Wendepunkt, nach welchem diese Gesammtwerthe wieder zunehmen, und zwar bis ans Ende der Reihe.

III. Eine der zwanzig Centralpyramiden: dces, ecfs, fcgs, u. s. w. im Regelikosaeder (Fig. 28). Die Summe aller zwölf Spitzen dieses Regelkörpers ist gleich der zwanzigfachen Summe einer Centralpyramide, weniger 8 rechten Winkeln.

IV. Summe einer Eckpyramide des Regelhexaeders: asbd, (Fig. 27). Der Scheitel ist die rechtwinkelige Spitze des Kubus; die Grundfläche das gleichseitige Dreieck aus Diagonalen des Stammquadrates.

Dieser ist ähnlich die Centralpyramide des Regeloktaeders: acbs, bcds, u. s. w. (Fig. 26) und ihr achtfacher Werth, weniger 8 rechten Winkeln, ist gleich der Summe aller sechs Spitzen dieses Körpers.

V. Summe einer Eckpyramide des Regeldodekaeders: psqr, u. s. w. (Fig. 29.)

Der Scheitel derselben ist eine Spitze des Regelkörpers; die Grundfläche aus drei Medianen (Diagonalen des Regelfünfecks). Die zwanzigfache Spitze am Scheitel, ist also gleich der Summe des Regelkörpers.

VI. Eine der vier Centralpyramiden des Regeltetraeders: acbd, bcde, dcea, ecab. (Fig. 27.) Alle vier zusammen, weniger 4 rechten Winkel geben die Summe II. Addirt man dazu noch die Summen aller vier Eckpyramiden IV, so erhält man 8 rechte Winkel, die Summe des Kubus.

VII. Hier wird die Höhe Null und die Summe am grössten, gleich 4 rechten Winkeln.

54. Bei den Quadratpyramiden, Tabelle B, ist zu erwähnen, dass das Maximum derselben an beiden Enden der Reihe ist; VIII und XI gleich 4 rechten Winkeln. Von:

VIII. ist die Summe ununterbrochen abnehmend bis:

IX. Das Minimum aller Summen der Körperwinkel aller senkrechten Pyramiden, mit dem Quadrat als Grundfläche, ist am halben Regeloktaeder: asbde. (Fig. 26.) Hier ist das gleichseitige Dreieck als Seitenfläche, und folglich nach dem allgemeinen Gesetze (51.) der Wendepunkt. (Es ist die egyptische Musterpyramide, das Bild der Unerschütterlichkeit; der einfache Regelkörper mit einer Hälfte als Grundfeste in die Erde versenkt.)

Diese Summe verdoppelt, gibt das sechsfache ihres Scheitelwinkels und ist somit gleich der Summe aller Spitzen des Oktaeders.

Das Zunehmen ist von hier aus beständig bis an die unterste Grenze.

X. Jede der sechs Centralpyramiden des Regelhexaeders: acheg, bcgas u. s. w. (Fig. 27.) Alle sechs Summen derselben zusammengenommen müssen 16 rechten Winkeln gleich seyn, weil sie die acht Spitzen des Kubus nebst der Centralsumme enthalten.

XI. Die Höhe Null; die Summe wie oben.

55. Die Fünfeckpyramiden, Tabelle C, erreichen an der obersten Grenze bei:

XII. Das Maximum mit 6 rechten Winkeln, und nehmen ab bis XIV.

XIII. Die zwölf Centralpyramiden, aus welchen der Regeldodekaeder besteht: bcdefa u. s. w. (Fig. 29) geben zusammengenommen, nach Abzug von 8 rechten Winkeln den zwanzigfachen Betrag der Spitze des genannten Regelkörpers (V. Tabelle A.) und folglich die Summe seiner Körperwinkel.

XIV. Das Minimum der Summen aller möglichen senkrechten Pyramiden, welche auf das Regelfünfeck errichtet sind, ist gleichfalls (nach 51.) hier, wo das Seitendreieck gleichseitig wird, nämlich an der Eckpyramide des Regelikosaeders: dsefgh, (Fig. 28.), deren Scheitel eine Spitze des Regelkörpers, die Seiten ihrer Grundfläche aber dessen umgebende fünf Kanten sind.

Der Scheitelwinkel derselben, zwölfmal, ist also der Summe des Ikosaeders gleich. Weiter nehmen die Summen wieder zu bis an die unterste Grenze.

XV. Summe einer Centralpyramide: dcefgh, (Fig. 28) des Regelikosaeders. Diese hat die Grundfläche mit XIV gemeinschaftlich. Der Abstand ihrer beiden Scheitel ist der Halbmesser der umschriebenen Kugel des Regelkörpers. Beide zusammen sind gleich dem fünffachen Betrage einer dreiseitigen Centralpyramide (III. Tabelle A.); oder, nach Abzug von 2 rechten Winkeln, der Viertelsumme der Ikosaederspitzen.

XVI. Hier wird die Höhe Null und die Summe das kleinere Maximum der Reihe, gleich 4 rechten Winkeln.

56. Die Reihe der Regelsechseckpyramiden, Tabelle D, fängt an bei:

XVII. mit dem Maximum aller Summen, gleich einer ganzen Kugel oder 8 rechten Winkeln, und vermindert selbe beständig bis:

XVIII. Hier wäre (nach 51.) der Wendepunkt, wenn es einen solchen geben könnte; denn an dieser untersten Grenze ist es das gleichseitige Dreieck, welches die Stelle der Seitenfläche vertritt. Das Minimum ist also hier aus doppelter Ursache, und zwar gleich 4 rechten Winkeln.

57. Zur Siebeneckpyramide, Tabelle E, erinnere ich nur, dass der Wendepunkt, welcher schon beim Sechseck mit der Grenze der ganzen Reihe zusammentrifft, bei dieser und allen mehrseitigen Regelvieleckpyramiden, aus immer stärkern Grunde gar nicht mehr bestehen kann, indem von hier an gleichseitige Dreiecke unmöglich werden.

XIX. Die Summe wird an der obern Grenze allgemein gleich $(2n - 4)$, und an der untern

XX. gleich 4 rechten Winkeln seyn.

58. Die Tabelle F. enthält Proben aus der Reihe der Pyramiden mit vier congruenten, gleichschenkeligen Dreiecken (38. XXII. Fig. 24.), welche wie sich leicht zeigen lässt, an beiden äussersten Grenzen die Summe der Körperwinkel gleich Null haben.

Wenn die Dreiecke gleichschenkelig und rechtwinkelig sind, erhebt sich die Spitze, welche den Scheitel bilden soll, nicht über die Grundfläche; folglich keine Pyramide, sondern nur Grenze, und zugleich ein Kleinstes, indem jede Spitze einen Seitenwinkel von 90^0 und zwei zu 45^0 hat, woraus sich für alle vier Spitzen die Körperwinkel gleich Null ergeben. (XXIII, Tabelle F.) Ueber diese Grenze hinaus, mit stumpfen Winkeln, ist die Pyramide noch weniger möglich; die Kanten lassen sich gar nicht im Scheitel vereinen.

Die Gegengrenze ist da, wo in jedem Dreiecke zwei rechte Winkel sind, und der dritte Null; vier Kanten aber unendlich lang. Auch hier ist ein Kleinstes, weil die Summe gleich viermal Null wird (XXI, Tabelle F), wie im vorigen Falle.

Es muss also zwischen diesen beiden Kleinsten ein Wendepunkt für ein Grösstes der Summe zu finden seyn; derselbe wird aber auf ganz anderm

Wege als für die senkrechten Pyramiden (51.) gesucht werden müssen, obschon beide Ergebnisse in einer Pyramide zusammen treffen, die zwei verschiedenen Reihen angehört.

59. Bei Entfaltung jeder Pyramide auf die Ebene eines ihrer Dreiecke, müssen die Seiten zur Bildung der Kanten so geordnet seyn, dass zwei gleiche, im Scheitel jedes Winkels der Grundfläche aufzurichtende zusammentreffen:

$$as' = as'', \quad bs' = bs''', \quad cs'' = cs'''; \quad \text{(Fig. 24. 25)}$$

Da aber bei den hier untersuchten Pyramiden die Congruenz aller vier Dreiecke vorausgesetzt ist, so werden die Gegenwinkel der Kanten, als Seitenwinkel der Spitzen auch gleiche Körperwinkel erzeugen:

$$\begin{array}{ccccccc} s'a'b' & = & c'b'a' & = & b'c's''' & = & a's''c' \\ b'a'c' & = & a'b's' & = & s''c'a' & = & c's'''b' \\ c'a's'' & = & s'''b'c' & = & a'c'b' & = & b's'a' \\ \hline A & = & B & = & C & = & S; \end{array}$$

Es hat also:

Jede aus vier congruenten Dreiecken gebildete Pyramide auch vier congruente Körperwinkel; die Dreiecke mögen gleichseitig, gleichschenkelig oder schief seyn.

60. Es erhellet auch aus obiger Zusammenstellung, dass jede der vier Spitzen von ebendenselben drei Winkeln, *welche einem Dreiecke angehören* und folglich $= 180^0$ sind, als Seitenwinkeln umgeben ist, so dass der Perimeter des entsprechenden Kugelausschnittes bei allen 180^0 beträgt.

Da aber nach dem isoperimetrischen Gesetze, unter allen Kugelausschnitten von gleicher Bogensumme, der gleichseitige am grössten ist; so ist auch·

Die Summe der Körperwinkel an Pyramiden aus vier congruenten Dreiecken dann ein Grösstes, wenn diese gleichseitig sind; (XXII. Tabelle F.)

es findet sich also wie wir sehen,

im Regeltetraeder, erstens: *das Maximum der Summen aller Pyramiden mit vier congruenten Spitzen*, so wie auch

zweitens: (nach 51) *das Minimum der Summen aller senkrechten Pyramiden auf gleichseitiger Grundfläche.*

61. Es seyen zu einer dreiseitigen Pyramide (Fig. 22)

gegeben zwei Kanten ab, bc, *der von ihnen eingeschlossene Winkel* b, *ihre beiden Gegenwinkel am Scheitel*: $b's'c'$, $b's''a'$, *und der Fusspunkt* f' des Scheitels auf ihrer Ebene;

zu finden die vier Körperwinkel und die senkrechte Höhe.

Da von jedem der Dreiecke bcs', bas'', eine Seite und ihr Gegenwinkel bekannt sind, so sind es auch ihre umschriebenen Kreise; werden diese Dreiecke auf die Ebene abc gelegt, so begegnen sich die zwei senkrechten aus s′ und s″ auf b′c′ und a′b′, im Fusspunkte; denn sobald man eines der Seitendreiecke (z. B. b′c′s) um die Grundkante (b′c′) drehend aufrichtet und in einem Halbkreise ſortbeweget bis es wieder auf der Ebene abc liegt, so muss die senkrechte s′m mit f′m und ihrer Verlängerung zusammentreffen und s′ nach z′ kommen; sonst könnte der Scheitelpunkt, wenn er auf diesem Wege bis zu seinem Orte im Raume anlangt, nicht senkrecht über f′ stehen. Die Punkte also, welche diesen beiden senkrechten und den umschriebenen Kreisen gemeinschaftlich angehören, sind die Orte des Scheitels, s′, s″ auf der Entfaltungsebene. Drei Dreiecke sind damit vollständig bestimmt; das vierte folgt aus denselben. Die Höhe der Pyramide ist die dritte Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypothenuse gleich ist der vom Scheitel auf die Grundlinie eines Seitendreiecks gezogenen senkrechten, s′m, die zweite aber, dem senkrechten Abstande mf′ des Fusspunktes, von derselben Grundlinie.

Zur Lösung ist also zuerst a′b′c′ zu errichten und f′ (nach Angabe) festzustellen; dann die senkrechten f′m, f′n, f′r, unbestimmt verlängert zu ziehen.

Auf b′c′ wird an beiden Enden der Erfüllungswinkel des gegebenen Scheitelwinkels: $c'b'o' = b'c'o' = (90^0 - s')$, und eben so auf der zweiten Seite: $a'b'o'' = b'a'o'' = (90^0 - s'')$ errichtet, und aus den Durchschnittspunkten o′, o″, mit o′b′ und o″b′ Kreise beschrieben, welche jene senkrechten in s′ und s″ schneiden, so wie s‴ im Durchschnitte zweier Kreise steht, welche aus a′ mit a′s″ und aus c′ mit c′s′ geführt werden. Dass dieser letzte Durchschnitt genau in der verlängerten f′r liege, ist die Probe des Verfahrens.

Aus den nunmehr gefundenen zwölf Seitenwinkeln werden (nach 22, 23, 24, vergl. M. d. K.) leicht die Tangentenwinkel und Körperwinkel gefunden.

Endlich errichtet man die Halbkreise $m\varphi's'$, $n\varphi''s''$, $r\varphi s'''$, und noch aus m, n, r, mit den Strahlen f′m, f′n, f′r, die Kreisbogen $f'\varphi'$, $f'\varphi''$, $f'\varphi$, so ist die verlangte Höhe der aufgerichteten Pyramide: $fs = \varphi's' = \varphi''s'' = \varphi s'''$, in deren Uebereinstimmung gleichfalls die Probe genauer Darstellung liegt.

62. Gegeben die Grundfläche: a′b′c′, noch eine Kante: c′s′, und die ihr anliegenden Seitenwinkel s′ und s″, am Scheitel; (Fig. 22.) zu finden die Körperwinkel, die Höhe und den Fusspunkt.

Die umschriebenen Kreise der verlangten entfalteten Dreiecke werden (wie in 61) aus den Punkten o′, o″, auf den Sehnen b′c′, a′b′, errichtet, auf dem ersten derselben aber mit der gegebenen Linie c′s′ der Punkt s′ bestimmt, die Kante b′s′ gezogen und mit dieser durch den Bogen s′s″ der zweite Kreis in s″ durchschnitten, wodurch die sechste Kante a′s″ gefunden ist; dann aus a′c′, a′s″ und c′s′ das letzte Dreieck a′c′s‴ gebildet, womit alle Seitenwinkel dargestellt und alle Körperwinkel gegeben sind.

Der Fusspunkt ist der gemeinschaftliche Durchschnitt der senkrechten $s'z'$, $s''z''$, $s'''z$, in f', deren genaues Zusammentreffen für die Richtigkeit der Zeichnung bürgt. Die Höhe ergibt sich (wie bei 61) aus den durch die Bogen $f'\varphi'$, $f'\varphi''$, $f'\varphi$, bestimmten $\varphi's' = \varphi''s'' = \varphi s'''$.

63. Gegeben die Grundfläche: $a'b'c'$, der Fusspunkt f' und die Höhe $= fs$;
zu finden die Körperwinkel der Pyramide: asbc. (Fig. 22.)

Da hier gar kein Seitenwinkel des Scheitels bekannt ist, und folglich auch keiner der drei umschriebenen Kreise, so müssen aus den Durchschnitten der senkrechten Höhen jedes Seitendreiecks mit der gegebenen Höhe der Pyramide, die Entfaltungspunkte des Scheitels s', s'', s''' entstehen.

Zu diesem Ende werden (wie bei 61) die senkrechten $f'm$, $f'n$, $f'r$ gezogen und verlängert, dann drei in f' rechtwinkelige Dreiecke $mf'\sigma'$, $nf'\sigma''$, $rf'\sigma$ errichtet, und $\sigma'f' = \sigma''f' = \sigma f' = fs$ gemacht; so sind die Hypothenusen:

$$m\sigma' = ms', \quad n\sigma'' = ns'', \quad r\sigma = rs''',$$

die erforderlichen Höhen der Dreiecke, woraus die fehlenden Kanten, Seitenwinkel, und aus diesen die Körperwinkel, leicht zu ermitteln sind.

64. Jede dreiseitige Pyramide ist mit einem Hexakro-Oktaeder verwandt, der sich mehr oder minder dem Regelkörper nähert, indem wenigstens zwei und zwei seiner acht Dreiecke congruent seyn müssen. Ich nenne ihn mit der Pyramide verwandt, weil er

Erstens, aus derselben durch vier Schnitte gebildet wird.

Wenn man nämlich (Fig. 23) jede der sechs Kanten in der Mitte theilt und die zwölf Verbindungslinien auf der Oberfläche der Pyramide zieht, so werden durch die daraus entstehenden vier Dreiecke, welche mit den vier Ebenen des Stammkörpers (ABCD) parallel sind, und zwar:

Dreieck	fhk	parallel mit	ACB
	ghi		ADB
	eki		ADC
„	efg		BDC

vier unter sich congruente, der Stammpyramide ähnliche Körper abgeschnitten:

$$(eAfg) = (eBki) = (gChi) = (fDkh) = \tfrac{1}{8}(ABCD)$$

und nach dieser Trennung bleibt ein aus 6 Spitzen, 8 Flächen und 12 Kanten bestehender Körper (efghik) übrig.

65. Zweitens, weil in diesem Körper eben so vielerlei congruente Dreiecke sind als in der Stammpyramide, und zwar von jeder Art doppelt; immer die gegenüberstehenden. Denn es ist:

Dreieck	fhk	congruent mit	ieg
„	ghi	„	kef
	eki		hgf
	efg		hik;

wären demnach schon in der Pyramide zwei oder drei congruente Dreiecke, so hätte der erzeugte Oktaeder deren vier oder sechs. Ein schiefer Tetraeder aus vier congruenten gibt einen Afteroktaeder aus acht congruenten Dreiecken, und aus dem Regeltetraeder entsteht ein Regeloktaeder.

66. Drittens, weil eben durch diese Gegenstellung congruenter Dreiecke auch je vier gleiche Seitenwinkel, in derselben Ordnung um die Gegenspitzen gereihet sind, so wird durch:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Winkel} & hfk & = & eig \\ „ & kfe & = & gih \\ & efg & = & hik \\ „ & gfh & = & kie \end{array}\right\} \text{ die Spitze } f = i; \text{ ferner durch}$$

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Winkel} & gei & = & khf \\ & iek & = & fhg \\ & kef & = & ghi \\ „ & feg & = & ihk \end{array}\right\} \text{ die Spitze } e = h; \text{ endlich durch}$$

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Winkel} & ige & = & fkh \\ & egf & = & hki \\ „ & fgh & = & ike \\ „ & hgi & = & ekf \end{array}\right\} \text{ die Spitze } g = k.$$

Und folglich sind in dem verwandten Oktaeder jeder dreiseitigen Pyramide die gegenüberstehenden Körperwinkel gleich.

67. Viertens ist der Körperinhalt jeder der vier abgeschnittenen Pyramiden, einem Achttheile der Stammpyramide, und mithin der verwandte Oktaeder (als Rest) dem halben Körperinhalte seiner Pyramide gleich.

Der Regeltetraeder ist in diesem Sinne die Stammpyramide des Regeloktaeders, und es folgt hieraus, dass sich Tetraeder und Oktaeder bei gleichen Kanten verhalten wie 1 zu 4.

68. Fünftens: Wenn die Körperwinkel der Pyramide bekannt sind, findet man daraus unmittelbar die Summe der sechs vierkantigen Spitzen des verwandten Oktaeders.

Denn es ist die Summe der vier Körperwinkel (Fig. 23) $A + B + C + D$ gleich den sechs Diedern: $(\Delta e + \Delta f + \Delta g + \Delta h + \Delta i + \Delta k)$ weniger 270 Kugelgraden. (vergl. M. d. K. W. 10.)

$$\begin{array}{c}\text{Nun aber sind die}\\ \text{Körperwinkel}\end{array} \left\{\begin{array}{lcll} f & = & \Delta f - A - D; & \text{weil } A = (Dfkh) \text{ und } D = (Afeg) \\ g & = & \Delta g - A - C; & \text{weil } A = (Cghi) \text{ und } C = (Agfe) \\ h & = & \Delta h - C - D; & \\ i & = & \Delta i - B - C; & \qquad\qquad \text{u. s. w.} \\ k & = & \Delta k - B - D; & \\ e & = & \Delta e - A - B; & \end{array}\right.$$

Zusammen also: $\Sigma = A + B + C + D + 720^\circ - 3(A+B+C+D)$; oder

$\Sigma = 720^\circ - 2(A+B+C+D)$. Es ist also:

Die Summe der sechs Spitzen des verwandten Oktaeders gleich 8 rechten, weniger der doppelten Summe seiner Stammpyramide.

So ist z. B. die Summe der vierseitigen Pyramide (Fig. 26. asbde), welche den halben Regeloktaeder bildet, mehr der Summe des Regeltetraeders, gleich der Halbkugel oder 4 rechten Winkeln. (II. Tab. A.; IX. Tab. B.)

69. **Gegeben ein Parallelogramm (abdc) (Fig. 21), und in dessen Ebene ein Punkt (e), gleichviel ob inner oder ausser der vier Seiten; zu finden die Körperwinkel der Tetraederpyramide, deren vier Dreiecke hierdurch bestimmt sind.**

Die gedachten vier Dreiecke entsprechen der in 38 ausgedrückten Forderung, nach welcher jede der sechs Kanten als Seite in zwei Dreiecken erscheinen muss, und sind daher offenbar zur Bildung einer solchen Pyramide zureichend; nur müssen, nachdem eines derselben, z. B. (abe) als Grundfläche angenommen worden, die übrigen so gewendet werden, dass (ced) nach (ae′b), (edb) nach (ed′b) und (ace) nach (ac′e) zu stehen kommen.

Dieses geschieht, indem $bd' = be' = ed$, dann $ae' = ac' = ec$, endlich $ed' = ec' = bd$ gemacht werden.

Zur Darstellung der Körperwinkel hätte man also nach geschehener Versetzung

an der Grundfläche,	für a, die Seitenwinkel:	c′ae,	eab,	bae′,
	b	e′ba,	abe,	ebd′,
	„ e	d′eb,	bea,	aec′
und am Scheitel,		ae′b,	bd′e,	ec′a;

und allgemein, nach den ursprünglich gegebenen Linien, ohne Vorbereitung:

für a die Seitenwinkel:	aec,	eab,	dce,
b	edc,	abe,	bed,
e	ebd,	bea,	eac,
s	ced,	edb,	ace.

70. Es muss erwähnt werden, dass unter allen möglichen Aufgaben, Pyramiden auf obige Art aus Parallelogrammen abzuleiten, zwei Ausnahmsfälle und noch zwei äusserste Fälle vorkommen können, in welchen die Pyramide nicht darzustellen ist.

1. Wenn (e) auf einer Linie des Vierecks stünde, gäbe es nur drei Dreiecke, und wäre es
2. auf zweien dieser Linien, d. h. auf einer Ecke; dann hätte man nur zwei Dreiecke, also in beiden Fällen keine Pyramide.
3. Ist die Figur ein Quadrat oder gleichseitiger Rhombus und (e) im Durchschnitte der Diagonalen, so sind die Winkel um diesen Punkt vier rechte und es erscheint statt einer eigentlichen Pyramide, nur die innerste Grenze einer Reihe, wo die Höhe sowohl als die Körperwinkel Null werden. (XXIII. Tab. F.)
4. Dasselbe würde sich an der äussersten Grenze ergeben, wenn nämlich (e) in unendlicher Entfernung, ausser dem Vierecke befindlich wäre. (XXI. Tab. F.)

Tabelle A.

Senkrechte Pyramiden; gleichseitiges Dreieck als Grundfläche.

Seitenwinkel, und zwar einer an der Grundfläche, beständig = 60°; der eine am Scheitel, dann zwei gleiche am Fusse	Körperwinkel am Scheitel	Körperwinkel am Fusse, jeder einzeln und alle drei	Summen der vier Körperwinkel	
0.° 0.′ 0,″0 90. 0. 0,0	0.° 0′ 0,″0	60.° 0.′ 0,″0 180. 0. 0,0	180.° 0.′ 0,″0	I.
10. 0. 0,0 85. 0. 0,0	0.45.31,07	54.27.43,96 163.23.11,88	164. 8.42,95 ...	
20. 0. 0,0 80. 0. 0,0	3. 4.11,26 ...	49.20.14,36 148. 0.43,08	151. 4.54,34 ...	
30. 0. 0,0 75. 0. 0,0	7. 2.37,30 ...	44.32.56,53 ... 133.38.49,60 ...	140.41.26,90 ...	
40. 0. 0,0 70. 0. 0,0	12.52.48.70 ...	40. 1.56,98 ... 120. 5.50,96 ...	132.58.39,66 ...	
50. 0. 0,0 65. 0. 0,0	20.53.51,90 ...	35.43.47,50 ... 107.11.22,51 ...	128. 5.14,42 ...	
59.59.40,0 60. 0.10,0	31.34.46,30 ...	31.35.19,0 94.45.57,0 ...	126.20.43,30 ...	
60. 0. 0,0 60. 0. 0,0	31.35.10,80 ...	31.35.10,80 ... 94.45.32,40 ...	126.20.43,20 ...	II.
60. 0.20,0 59.59.50,0	31.35.35,4 ..	31.35. 2,64 ... 94.35. 7,92	126.20.43,32	
63.26. 5,83 ... 58.16.57,08 ...	36. 0.0,0	30.11.22,8 ... 90.34. 8,4 ...	126.34. 8,4 ...	III.
66. 0. 0,0 57. 0. 0,0	39.34.53,40	29. 9.11,39 ... 87.27.34,17 ...	127. 2.27,56 ...	
70. 0. 0,0 55. 0. 0,0	45.42.18,26 ...	27.32.41,53 ... 82.38. 4,60 ...	128.20.22,86 ...	
80. 0. 0,0 50. 0. 0,0	64.28.28,27 ...	23.32.17,0 70.36.51,0	135. 5.19.26 ...	
90. 0. 0,0 45. 0. 0,0	90. 0. 0,0	19.28.16,41 ... 58.24.49,23 ...	148.24.49,23 ...	IV.
100. 0. 0,0 40. 0. 0,0	126.23.28,93 ...	15.10.37,56 ... 45.31.52.69 ...	171.55.21,63 ...	
108. 0. 0,0 36. 0. 0,0	169.41.42,46 ...	11.11.23,26 ... 33.34. 9,80 ...	203.15.52,26 ...	V.
109.28.16,35 ... 35.15.51,82 ...	180. 0. 0,0	10.31.43,6 31.35.10,8 ...	211.35.10,8 ...	VI.
110. 0. 0,0 35. 0. 0,0	183.57.27,76 ...	10.14. 5,87 ... 30.42.17,67 ...	213.39.45,43 ...	
120. 0. 0,0 30. 0. 0,0	360. 0. 0,0 ...	0. 0. 0,0	360. 0. 0,0	VII.

Tabelle B.

Senkrechte Pyramiden; Quadrat als Grundfläche.

Seitenwinkel, A. am Scheitel, B = C am Fusse, D. an der Grundfläche beständig = 90°	Körperwinkel am Scheitel	Körperwinkel am Fusse, jeder und alle 4	Summen der Körperwinkel	
A = 0.° 0.′ 0,″0 B = C = 90. 0. 0,0	0.° 0.′ 0,″0	90.° 0.′ 0,″ 360. 0. 0,0	360.° 0.′ 0,″0	VIII.
10. 0. 0,0 85. 0. 0,0	1.45.15,40..	80.24. 0,88.. 321.36. 3,53..	323.21.18,93..	
20. 0. 0,0 80. 0. 0,0	7. 7.36,08..	71.28.11,61.. 285.52.46,44..	293. 0.22,52..	
30. 0. 0,0 75. 0. 0,0	16.28. 7,34..	63. 1.57,50.. 252. 7.50,0 ..	268.35.57,34..	
40. 0. 0,0 70. 0. 0,0	30.27. 1,28..	54.55.26,96.. 219.41.47,84..	250. 8.49,13..	
48.56.22,5 .. 65.31.48,7 ..	47.48.41 ..	47.48.41 191.14.44	239. 3.25	*)
50. 0. 0,0 65. 0. 0,0	50.14. 7,80..	46.58. 8,78.. 187.52.35,13..	238. 6.42,93..	
59.59.40,0 60. 0.10,0	77.52. 0,40..	38.56.49,12.. 155.47.16,50..	233.39.16,91..	
60. 0. 0,0 60. 0. 0,0	77,53. 5,56..	38.56.32,78.. 155.46.11,14..	233.39.16,70..	IX.
60. 0.20,0 59.59.50,0	77.54.11,35..	38.56.16,44.. 155.45. 5,76..	233.39.17,12..	
70. 0. 0,0 55. 0. 0,0	117.26.19,83..	30.28.20,51.. 121.53.22,06..	239.19.41,89..	
70.31.43,62.. 54.44. 8.18..	120. 0. 0,0	30. 0. 0,0 120. 0. 0,0	240. 0. 0,0	X.
80. 0. 0,0 50. 0. 0,0	179. 1.25,45..	20.39.56,15.. 82.39.44,62..	261.41.10,08..	
90. 0. 0,0 45. 0. 0,0	360. 0. 0,0	0. 0. 0,0	360. 0. 0,0	XI.

*) Hier sind alle 5 Körperwinkel gleich.

Da bei den dreiseitigen Pyramiden dort wo der Wendepunkt ist auch diese Gleichheit statt findet; so wurde dieser Ort bei den vierseitigen, und wie weit entfernt er vom Wendepunkte IX ist, in der Absicht bemerkt, um (nach 51) zu zeigen, dass letzterer nur von der Gleichseitigkeit der Dreiecke, nicht aber von dem gleichen Werthe der Spitzen abhängt.

Tabelle C.

Senkrechte Pyramiden; Regelfünfeck als Grundfläche.

Seitenwinkel A. am Scheitel, B = C am Fusse, D. an der Grundfläche beständig = 108°	Körperwinkel am Scheitel	Körperwinkel am Fusse, jeder und alle 5	Summen der Körperwinkel	
A = 0.° 0.′ 0,″0 B = C = 90. 0. 0,0	0.° 0.′ 0,″0	108.° 0.′ 0,″0 540. 0. 0,0	540.° 0.′ 0,″	XII.
10. 0. 0,0 85. 0. 0,0	3. 1.24,11 ..	94.46. 9,94 .. 473.51.39,48 ..	476 53. 3,59 ..	
20. 0. 0,0 80. 0. 0,0	12.20.58,22 ..	82.22.43,65 .. 411.53.38,25 ..	424.14.36,47 ..	
30. 0. 0,0 75. 0. 0,0	28.49.45,40 ..	70.28.57,11 .. 352.24.45,57 ..	381.14.30,97 ..	
40. 0. 0,0 70. 0. 0,0	54.13.13,60 ..	58.43. 0,32 .. 293.35. 1,60 ..	347.48.15,20 ..	
41.48.37,25 69. 5.41,37	60. 0. 0,0	56.33.54,2 282.49.31,0 ..	342.49.31,0 ..	XIII.
50. 0. 0,0 65. 0. 0,0	92. 5. 0,0	46.33.42,20 .. 232.48.31,04 ..	324.53.31,04 ..	
60. 0. 0,0 60. 0. 0,0	150.56.53,75 ..	32.56.39,91 .. 164.43.19,57 ..	315.40.13,32 ..	XIV.
63.26. 5,83 .. 58.16.57,08 ..	180. 0. 0,0	27.26. 5,6 .. 137.10.28,0 ..	317.10.28,0 ..	XV.
70. 0. 0,0 55. 0. 0,0	269.46.36,96 ..	12.54.10,13 .. 64.30.50,69 ..	334.17.27,65 ..	
72. 0. 0,0 54. 0. 0,0	360. 0. 0,0	0. 0. 0,0	360. 0. 0,″0	XVI.

Tabelle D.

Senkrechte Pyramiden; Regelsechseck als Grundfläche.

Seitenwinkel A. am Scheitel, B = C am Fusse, D an der Grundfläche beständig = 120°	Körperwinkel am Scheitel	Körperwinkel am Fusse, jeder und alle 6	Summen der Körperwinkel	
A = 0.° 0.′ 0,″0 B = 90. 0. 0,0	0.° 0.′ 0,″0	120.° 0.′ 0,″0 720. 0. 0,0	720.° 0.′ 0,″	XVII.
10. 0. 0,0 85. 0. 0,0	4.34.30,99 ..	103.19.50,79 .. 619.59. 4,74 ..	624.33.35,73 ..	
20. 0. 0,0 80. 0. 0,0	18.49. 9,45 ..	87.34.16,43 .. 525.25.38,62 ..	544.14.48,07 ..	
30. 0. 0,0 75 0. 0,0	44.32.17,30 ..	72. 7. 7,75 .. 432.42.46,50 ..	477.15. 3,80 ..	
40. 0. 0,0 70. 0. 0,0	85.56.31,99 ..	56 9.44,05 .. 336.58.24,30 ..	422.54.56,29 ..	
45 0. 0,0 67.30. 0,0	115.23.30,76 ..	47.32.42,25 .. 285.16.13,55 ..	400.39.44,32 ..	
50. 0. 0,0 65. 0. 0,0	154.14.24,0	37.58. 8,98 .. 227.48.53,92 ..	382. 3.17,92 ..	
53. 0. 0,0 63.30. 0,0	184.46. 0,0	31.21.18,64 .. 188. 7.51,84 ..	372.53.51,84 ..	
55. 0. 0,0 62.30. 0.0	210. 8.39,12 ..	26.16.22,12 .. 157.38.12,77 ..	367.46.51,89 ..	
60. 0. 0 0 60. 0. 0,0	360. 0. 0,0	0. 0. 0,0	360. 0. 0,0	XVIII.

Tabelle E.

Senkrechte Pyramiden; Regelsiebeneck als Grundfläche.

Seitenwinkel A am Scheitel, B = C am Fusse, D an der Grundfläche beständig = 128°.34.′17,″142..	Körperwinkel am Scheitel	Körperwinkel am Fusse, jeder und alle 7	Summen der Körperwinkel	
A = 0.° 0.′ 0,″0 B = 90. 0. 0,0	0.° 0.′ 0,″0	128.°34.′17,″142.. 900. 0. 0,0	900.° 0.′ 0,″0	XIX.
10. 0. 0,0 85. 0. 0,0	6.24.59,0 ..	108.33.12,24.. 759.52.25,84..	766.17.24,84..	
20. 0. 0,0 80. 0. 0,0	26.37. 3,65..	89.25. 3,09.. 625.55.21,68..	652.32.25,33..	
30. 0. 0,0 75. 0. 0,0	64. 9. 3,16..	70. 7.15,66.. 490.50.49,66..	554.59.52,83..	
40. 0. 0,0 70. 0. 0,0	128.55.11,10..	48.47.56,55.. 341.35.35,91..	470.30.47,02..	
45. 0. 0,0 67.30. 0,0	180.59.28,07..	35.45.58,31.. 250.21.48,18..	431.21.16,26..	
50. 0. 0,0 65. 0. 0,0	272.53.32,17..	16.29.12,81.. 115.24.29,69..	388.18. 1,87..	
51.25.42,857.. 64.17. 8,571..	360. 0. 0,0	0. 0. 0,0	360. 0. 0,0	XX.

Tabelle F.

Schiefe Tetraeder, oder Pyramiden aus vier congruenten, gleichschenkeligen Dreiecken.
(als Krystalle: Tartaroide genannt; nach Haidinger.)

Seitenwinkel A.	 B = C.	Körperwinkel, jeder einzelne	Summen der Körperwinkel	
0.° 0.′ 0,″	90.° 0.′ 0,″	0.° 0.′ 0,″0	0.° 0.′ 0,″0	XXI.
10. 0. 0,0	85. 0. 0,0	9. 9.40,22.	36.38.40,88..	
20. 0. 0,0	80. 0. 0,0	16.44.54,27	65.59.37,07..	
30. 0. 0,0	75. 0. 0,0	22.51. 0,50	91.34. 1,99..	
40. 0. 0,0	70. 0. 0,0	27.27.47,72	109.51.10,90..	
50. 0. 0,0	65. 0. 0,0	30.28.19,20	121.53.16,79..	
60. 0. 0,0	60. 0. 0,0	31.35.10,80..	126.20.43,20..	XXII.
70. 0. 0,0	55. 0. 0,0	30.10. 4,61..	120.40.18,43 .	
80. 0. 0,0	50. 0. 0,0	24.34.42,50..	98.18.50,00..	
85. 0. 0,0	47.30. 0,0	18.34.54,85..	74.19.39,42..	
90. 0. 0,0	45. 0. 0,0	0. 0. 0,0	0. 0. 0,0	XXIII.

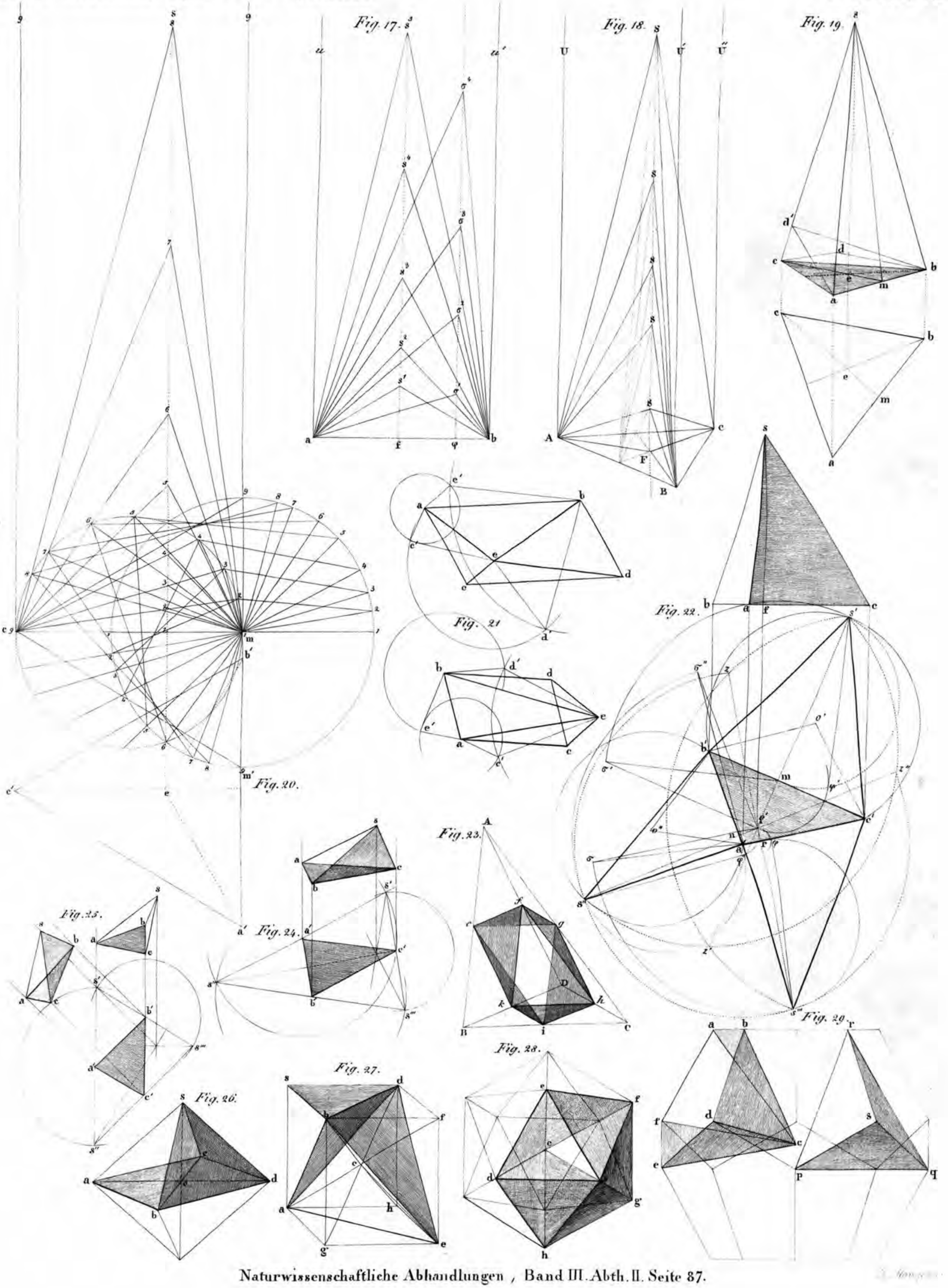

Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23. Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26. Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.