II. Note über die zweiwerthigen Functionen.

Von

Simon Spitzer.

Mitgetheilt am 22. September 1848 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Lagrange suchte eine Function von 3 Grössen α, β, γ, welche bei allen möglichen Vertauschungen derselben bloss 2 Werthe annimmt. Er fand eine solche, sie ist: $(\alpha + k\beta + k^2\gamma)^3$, wo k eine imaginäre dritte Wurzel aus Eins ist. Dadurch war er im Stande, die Auflösung einer Gleichung des dritten Grades auf die Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades zu reduciren.

Dann suchte er eine Function von 4 Grössen α, β, γ, δ, welche bei allen möglichen Vertauschungen derselben bloss 3 Werthe annimmt. Auch eine solche fand er, sie ist: $(\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2$, durch sie war er im Stande, Gleichungen des vierten Grades auf Gleichungen des dritten zurückzuführen.

Endlich suchte er auch eine Function von 5 Grössen α, β, γ, δ, ε, welche bei allen möglichen Vertauschungen derselben bloss 4 Werthe annimmt, doch hier war sein Suchen vergebens, er fand keine.

Cauchy setzte diese Untersuchungen weiter fort, fand aber auch keine, ja er bewies hernach sogar, dass es eine solche Function nicht geben könne.

Der von ihm hierüber aufgestellte merkwürdige Satz lautet: Wenn eine Function von m Grössen bei allen möglichen Vertauschungen der Elemente weniger als p Werthe annimmt, wo p die grösste Primzahl unter den Zahlen 2, 3, 4, (m—1), m ist, so ist die Function entweder zweiwerthig, oder symmetrisch.

Für $m = 5$ heisst der Satz:

Wenn eine Function von 5 Grössen bei allen möglichen Vertauschungen der Elemente weniger als 5 Werthe annimmt, so ist diese Function entweder zweiwerthig oder symmetrisch.

Eine zweiwerthige Function von 5 Grössen kennt man nicht, ich suchte lange eine solche, um diese Lücke in der Theorie der höhern Gleichungen auszufüllen, und da ich keine fand, zweifelte ich an der Existenz einer solchen Function, und wagte es, zu versuchen, ob ich denn nicht beweisen könne, dass eine zweiwerthige Function von 5 Grössen unmöglich sey.

Ich fand zuerst, dass wenn eine Function von m Grössen bei allen möglichen Vertauschungen der Elemente weniger als p Werthe annimmt, die Function sich alsdann nicht ändert, wenn ich 3, 5, 7, 9... Elemente nach einem einfachen Permutationsgesetze vertausche, sie sich aber ändern könne, wenn ich diese Vertauschung mit 2, 4, 6, 8... Elementen vornähme. Ich glaubte, durch combinirte Vertauschungen von 3, 5, 7, 9... Elementen der Function eine solche hervorbringen zu können, die sich von der gegenen bloss in der Stellung zweier Elemente unterscheidet. Wäre mir diess gelungen, so würde ich daraus geschlossen haben, dass die Function nur symmetrisch seyn könne, weil sie bei einer Vertauschung von zwei Elementen ungeändert geblieben.*)

Da mir dieser Weg nichts nützte, nahm ich an, es gebe eine zweiwerthige Function von 5 Grössen, nämlich:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = A; \quad \varphi(\beta, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon) = B$$

alsdann ist: $$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) + n \cdot \varphi(\beta, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon) = A + nB$$

auch eine zweiwerthige Function, denn durch Vertauschung zweier Elemente geht sie über in $B + nA$, und durch abermalige Vertauschung zweier Elemente wieder in $A + nB$, und da n beliebig ist, so wird es, wenn es eine gibt, auch unendlich viele geben. Unter den unendlich vielen zweiwerthigen Functionen gibt es auch solche, deren zwei Werthe bloss entgegengesetzt bezeichnet sind, z. B. die Function

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) - \varphi(\beta, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon) = A - B.$$

welche bei allen möglichen Vertauschungen bloss die Werthe $A-B$ und $B-A$ annimmt.

Diese Function nun finde ich nothwendig, einer aufmerksamen Betrachtung zu unterziehen, weil sich durch dieselbe die Form der zweiwerthigen Function von 5 Grössen erschliessen lässt; ich schreibe daher:

$$(1) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) - \varphi(\beta, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon) = A - B$$

$$(2) \quad \varphi(\beta, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = B - A$$

wo (2) aus (1) bloss durch Umtauschung der zwei Elemente α und β entsteht.

Ich sage, diese Function erfüllt ihre Bedingung, wenn sie einen der Factoren $\alpha-\beta$ oder $\beta-\alpha$ hat, denn durch Vertauschung von α und β nimmt sie den entgegengesetzten Werth an. Aber aus demselben Grunde muss sie einen der Faktoren $\alpha-\gamma$ oder $\gamma-\alpha$ haben, weil auch durch Vertauschung der zwei Elemente α und γ die geänderte Function entstehen soll, und eben so muss auch $\alpha-\delta$, $\alpha-\varepsilon$, $\beta-\gamma \ldots$ oder $\delta-\alpha$, $\varepsilon-\alpha$ $\gamma-\beta \ldots$ in der Function erscheinen, also kann man:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)$$

setzen, woraus man sogleich sieht, wie eine zweiwerthige Function von m Grössen zu formen ist.

---

*)
$$\begin{array}{l} \varphi(1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots m) \\ \varphi(5, 1, 2, 3, 4, 6 \ldots m) \\ \varphi(4, 5, 1, 2, 3, 6 \ldots m) \\ \varphi(3, 4, 5, 1, 2, 6 \ldots m) \\ \varphi(2, 3, 4, 5, 1, 6 \ldots m) \end{array}$$

Ich habe hier eine ungerade Anzahl, nämlich 5 Elemente nach einem einfachen Permutationsgesetze vertauscht. Diese 5 Functionen können nicht alle von einander verschieden sein, weil die Function nur zweiwerthig ist, es müssen daher wenigstens zwei einander gleich seyn, sind aber zwei einander gleich, so sind alle einander gleich. — Ist aber die Anzahl der Elemente, die ich nach einem einfachen Permutationsgesetze permutire, eine gerade, z. B. 6, so könnte man eben so schliessen, wie vorher, nur am Ende folgete nicht immer, dass wenn zwei Complexionen einander gleich sind, alle einander gleich seyn müssen; denn wäre z. B. die erste der dritten gleich, so wäre sie auch der fünften gleich, aber nicht nothwendig, der zweiten, vierten oder sechsten.