II. Ueber die Theorie des Grössten und Kleinsten.

Von

Professor Joseph Petzval.

Mitgetheilt am 4. Februar 1848 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

Wenn eine Theorie wie die des Grössten und Kleinsten auf alle praktisch mathematischen Wissenschaften vielfältigen Einfluss genommen, fast allgemein in Schulen gelehrt und eben desshalb nach verschiedenen Methoden von vielen Gelehrten behandelt worden ist, so lässt sich natürlich über dieselbe wesentlich Neues nur wenig oder gar nichts sagen; nicht so der Form nach, denn die wird sich den Bedürfnissen der Wissenschaft in den verschiedenen Zeiten gemäss stets anders und anders gestalten können, und es wird nicht nur jede Vereinfachung Dank verdienen, sondern auch jede wenigstens nicht complicirtere Darstellungsweise, die das Verdienst hat, den an und für sich schon sehr wichtigen Gegenstand an andere gleichfalls sehr wichtige Gegenstände der Wissenschaft anzuknüpfen dergestalt, dass sie alle gewissermassen zu einem unzertrennlichen Ganzen verbunden im Gedächtnisse um desto fester haften, denn diess ist das vorzüglichste Mittel Lehren die für sublim gegolten hatten, populär zu machen, und dieses dürfte im Wesentlichen das Verdienst des gegenwärtigen Aufsatzes seyn, wenn derselbe überhaupt eines hat. Er enthält die Theorie der Maxima und Minima in der Form, in welcher der Verfasser, der die Lehrkanzel der höhern Mathematik an der Wiener Universität bekleidet, dieselbe seinen Schülern vorzutragen pflegt. Die Kennzeichen der Existenz des Maximums oder Minimums einer Function mehrerer Variablen werden hier auf eine eigenthümliche Art entwickelt, durch die der Gegenstand mit andern sehr wichtigen Theorien, namentlich der der Flächen der zweiten Ordnung, der Theorie des Lichtes, der Schwingungen elastischer Körper in eine Formverwandtschaft tritt. Der Ausdruck dieser Kennzeichen findet sich eben dadurch zu einer Einfachheit herabgebracht, die nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint. Es wird nämlich bei einer Function von n Veränderlichen ein Maximum oder Minimum dann statt finden, wenn eine gewisse Gleichung des nten Grades, die stets nur lauter reele Wurzeln hat, lauter solche von einerlei Zeichen bietet, und zwar wenn sie sämmtlich positiv, ein Maximum, ein Minimum aber, wenn sie sämmtlich negativ sind. Dagegen wird man weder ein Maximum noch ein Minimum haben, wenn die eben erwähnte Gleichung des nten Grades positive und negative Wurzeln zugleich zulässt. Gebildet wird diese Gleichung des nten Grades durch das allbekannte gewöhnliche Verfahren der Elimination aus n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten, und da dieser Aufsatz im Wesentlichen und hauptsächlich jüngeren Liebhabern der mathematischen Studien namentlich aber seinen Schülern zugedacht ist, indem die Erfahrung vielfältig gelehrt hat, das ältere Gelehrte nicht gerne die ihnen geläufig gewordene Anschauungsweise mit einer andern vertauschen, die nicht ganz überwiegende Vortheile vor der ersteren gewährt, so werden denselben in einer angehängten Note die sehr interessanten Eigenschaften der Ausdrücke ins Gedächtniss zurückgerufen, zu denen man durch jenes Eliminationsverfahren gelangt; mit einem Worte, der Verfasser hat seinen Lesern eine gerundete Abhandlung über diesen Gegenstand geben wollen, in der gar nichts als die ersten Principien der Wissenschaft postulirt werden und ist erbötig, wenn diese Anklang finden sollte, in einer zweiten Denkschrift, die auf ähnliche Weise behandelte Theorie der Variationsrechnung folgen zu lassen.

Es sey u eine Function der n Variablen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, und es werden die Werthe dieser Letzteren gesucht, die u zu einem Maximum machen oder Minimum. Denkt man sich nun diese Werthe bereits gefunden und auch in die Function substituirt, dann aber x_1 in $x_1 + \xi_1$, x_2 in $x_2 + \xi_2 \ldots x_n$ in $x_n + \xi_n$ verwandelt, so dass

$$u = f(x_1 \ldots x_n) \quad \text{in} \quad u' = f(x_1 + \xi_1 \ldots x_n + \xi_n)$$

übergeht, so ist u nur dann ein wirkliches Maximum, wenn für noch so kleine und nach Willkühr positiv oder negativ gewählte Werthe der Zusätze $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ immer

(1) $$f(x_1 + \xi_1 \ldots x_n + \xi_n) < f(x_1 \ldots x_n)$$

und nur dann ein wirkliches Minimum, wenn für eben solche $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ immer die Relation

(2) $$f(x_1 + \xi_1 \ldots x_n + \xi_n) > f(x_1 \ldots x_n)$$

Statt findet.

Man hat aber nach TAYLOR's Formel für mehrere Variable:

(3) $$f(x_1 + \xi_1 \ldots x_n + \xi_n) = f(x_1 \ldots x_n) + \left(\frac{d}{dx_1}\xi_1 + \frac{d}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{d}{dx_n}\xi_n\right) f(x_1 \ldots x_n)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_1}\xi_1 + \frac{d}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{d}{dx_n}\xi_n\right)^2 f(x_1 + \theta\xi_1 \ldots x_n + \theta\xi_n)$$

oder wenn man die symbolischen Glieder, welche der zweite Theil dieser Gleichung enthält, in entwickelter Form niederschreibt und zugleich anstatt der mit f bezeichneten Function u setzt

(4) $$u' = u + \frac{du}{dx_1}\xi_1 + \frac{du}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{du}{dx_n}\xi_n +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx_1^2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx_2^2}\xi_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx_n^2}\xi_n^2 + \frac{d^2u}{dx_1 dx_2}\xi_1\xi_2 + \frac{d^2u}{dx_1 dx_3}\xi_1\xi_3 + \ldots$$

In der letzten Zeile dieser Formel muss man sich $x_1 + \theta\xi_1$ anstatt x_1, $x_2 + \theta\xi_2$ anstatt x_2, ... $x_n + \theta\xi_n$ anstatt x_n in den vorhandenen zweiten Differentialquotienten von u, nach geschehener Differentiation gesetzt denken. Soll nun irgend eine der beiden Relationen (1) oder (2) Statt finden, so muss für sehr kleine, übrigens aber willkührliche Werthe von $\xi_1 \dots \xi_n$

$$\frac{du}{dx_1}\xi_1 + \frac{du}{dx_2}\xi_2 + \dots + \frac{du}{dx_n}\xi_n = 0, \tag{5}$$

somit
$$\frac{du}{dx_1} = 0, \quad \frac{du}{dx_2} = 0, \dots \frac{du}{dx_n} = 0 \quad \text{seyn.} \tag{6}$$

Zudem ist im Falle des Maximums noch nothwendig, dass für unendlich klein werdende, sonst aber willkührliche $\xi_1 \dots \xi_n$ das Polynom von zwei Dimensionen nach diesen ins Unendliche abnehmenden Zusätzen:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx_1^2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx_2^2}\xi_2^2 + \dots + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx_n^2}\xi_n^2 + \frac{d^2u}{dx_1dx_2}\xi_1\xi_2 + \frac{d^2u}{dx_1dx_3}\xi_1\xi_3 + \dots \tag{7}$$

nur negativer Werthe fähig sey; im Falle des Minimums aber muss dasselbe Polynom blos positive Werthe bekommen. Die Bedingungen nun, unter welchen ein ähnliches Polynom entweder nur positiver oder nur negativer Werthe fähig ist auseinander zu setzen, ist der Zweck dieser Schrift.

Bezeichnen wir jetzt der Kürze wegen die zweiten Differentialquotienten von u für solche $x_1 \dots x_n$, die den Gleichungen (6) entsprechen, wie folgt:

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx_1^2} = (1,1), \quad \frac{d^2u}{dx_2^2} = (2,2), \dots \frac{d^2u}{dx_n^2} = (n,n), \\ \frac{d^2u}{dx_1dx_2} = (1,2), \quad \frac{d^2u}{dx_1dx_3} = (1,3), \dots \frac{d^2u}{dx_{n-1}dx_n} = (n-1,n),\end{gathered} \tag{8}$$

so wird das Polynom

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}(11)\xi_1^2 + \tfrac{1}{2}(22)\xi_2^2 + \dots + \tfrac{1}{2}(n,n)\xi_n^2 + \\ + (1,2)\xi_1\xi_2 + (1,3)\xi_1\xi_3 + \dots + (n-1,n)\xi_{n-1}\xi_n\end{gathered} \tag{9}$$

mit demjenigen Polynome, welches im Falle des Maximums stets negativ und im Falle des Minimums stets positiv seyn muss, dem (7) nämlich, stets einerlei Zeichen besitzen, da sich die Coefficienten in (9) von jenen in (7) nur darin unterscheiden, dass erstere Functionen von $x_1 \dots x_n$, letztere aber eben solche Functionen von $x_1 + \theta\xi_1 \dots x_n + \theta\xi_n$ sind, die somit beim unendlichen Abnehmen der Zusätze $\xi_1 \dots \xi_n$, gegen die ersteren convergiren, also mit ihnen einerlei Zeichen annehmen müssen. Der einzige Fall ist hier auszunehmen, wo sämmtliche Coefficienten (8) der Nulle gleich werden, und in welchen die Polynome (7) und (9) nicht nothwendig einerlei Zeichen haben. In diesem Falle wird man die TAYLOR'sche Reihe beim dritten Gliede mit der Ergänzung noch nicht abschliessen, sondern bis zu dem vierten, das nach den Zusätzen $\xi_1 \dots \xi_n$ von der dritten Ordnung ist, fortsetzen. Ist nun in diesem Letzteren auch nur ein von der Nulle verschiedener dritter Differentialquotient von u als Coefficient vorhanden, so kann offenbar weder den Bedingungen des Maximums noch denen des Minimums Genüge geleistet werden. Sind aber sämmtliche dritte Differentialquotienten der Nulle gleich, so hängt die Existenz eines Maximums oder Minimums von dem Verhalten der in der TAYLOR'schen Formel folgenden Summe der Glieder der vierten Ordnung ab, die sich in symbolischer Form so schreiben lässt:

(10) $$\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{d}{dx_1}\xi_1 + \frac{d}{dx_2}\xi_2 + \dots + \frac{d}{dx_n}\xi_n\right)^4 u$$

und nur negativer Werthe fähig seyn muss, wenn ein Maximum, aber nur positiver, wenn ein Minimum statt finden soll; u. s. w.

Abstrahiren wir einstweilen von diesem Ausnahmsfalle, der sich ohnehin sehr selten ereignen wird in der mathematischen Praxis, und kehren wir zurück zu den Bedingungen, die erfüllt werden müssen, wenn das Polynom (9) für alle möglichen Werthe von $\xi_1 \dots \xi_n$ stets einerlei Zeichen beibehalten soll.

Führen wir zu diesem Behufe anstatt der $\xi_1 \dots \xi_n$ neue Variable ein durch folgende Substitution:

(11) $$\xi_1 = a_1 r, \quad \xi_2 = a_2 r, \dots \xi_n = a_n r.$$

Da der neu eingeführten Variablen $n+1$ an der Zahl, somit um eine mehr sind als der Alten, so wird man zwischen den Neuen noch eine beliebige Relation, der Willkührlichkeit von $\xi_1 \dots \xi_n$ unbeschadet, festsetzen können; etwa die folgende:

(12) $$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1;$$

also $$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = r^2.$$

Das Polynom (9) geht hierdurch über in

(13) $$\begin{aligned} r^2 [\tfrac{1}{2}(1,1)a_1^2 + \tfrac{1}{2}(2,2)a_2^2 + \dots + \tfrac{1}{2}(n,n)a_n^2 + \\ + (1,2)a_1a_2 + (1,3)a_1a_3 + \dots + (n-1,n)a_{n-1}a_n], \end{aligned}$$

und es handelt sich jetzt offenbar nur mehr um die Bedingungen, unter welchen der mit r^2 multiplicirte Ausdruck in (18), mit Rücksicht auf die Relation (12), stets einerlei Zeichen beibehält. In Folge dieser letzteren nun ist jener Factor von r_2 in den Werthen derer er fähig ist, beschränkt, so dass er weder nach der positiven Seite noch nach der negativen ins Unendliche wachsen kann.

Da nämlich der Gleichung (13) zufolge keine der neu eingeführten Variablen $a_1 \dots a_n$ ihren Zahlenwerthe nach die Einheit überschreiten kann, so wird auch der numerische Werth des Polynomes

(14) $$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(1,1)a_1^2 + \tfrac{1}{2}(2,2)a_2^2 + \dots + \tfrac{1}{2}(n,n)a_n^2 + \\ + (1,2)a_1a_2 + (1,3)a_1a_3 + \dots + (n-1,n)a_{n-1}a_n = A \end{aligned}$$

die Summe der in denselben vorkommenden Coefficienten nicht zu überschreiten vermögen, d. h. wenn die Summe der numerischen Werthe sämmtlicher Coefficienten:

$$\tfrac{1}{2}(1,1), \quad \tfrac{1}{2}(2,2), \dots \tfrac{1}{2}(n,n), \quad (1,2), \quad (1,3), \dots (n-1,n),$$

ohne Rücksicht auf ihr Zeichen S ist, so ist der Ausdruck (14) seinem Zahlenwerthe nach zwischen $+S$ und $-S$ enthalten. Hieraus lässt sich nun schliessen, dass derselbe, wenn er überhaupt positive Werthe anzunehmen vermag, auch wenigstens ein positives Maximum besitzen müsse, indem er ja nicht ins Unendliche wachsen kann; ist er aber negativer Werthe fähig, so besitzt er auch wenigstens ein negatives Minimum und umgekehrt, wenn man sämmtliche Maxima und Minima dieses Ausdruckes gerechnet und gefunden hätte, dass alle Maxima sowohl wie Minima negativ sind, so wäre unmittelbar zu schliessen, dass dieser Ausdruck gar keiner positiven Werthe fähig ist, weil, wenn er solche annehmen könnte, er auch noch ein positives Maximum besitzen müsste. Hätte man aber gefunden, dass alle die Maxima und Minima des Ausdruckes positiv sind, so wäre derselbe offenbar gar keiner negativer Werthe fähig. Der Ausdruck (7) wird somit für beliebige $\xi_1 \dots \xi_n$ stets einerlei Zeichen haben, wenn das mit A bezeichnete Polynom (14) mit Beibehaltung der Relation (12) lauter relative Maxima und Minima von einerlei Zeichen biethet.

Die Werthe nun von $a_1 \dots a_n$, die das A zu einem relativen Maximum oder Minimum machen, müssen der Gleichung

$$\frac{dA}{da_1}\delta a_1 + \frac{dA}{da_2}\delta a_2 + \dots + \frac{dA}{da_n}\delta a_n = 0 \tag{15}$$

für sehr kleine Werthe der Zusätze $\delta a_1 \dots \delta a_n$ genüge leisten. Ausserdem muss noch durch dieselben die nach der Charakteristik δ differenzirte Gleichung (12) erfüllt werden, d. h. es muss sein:

$$a_1 \delta a_1 + a_2 \delta a_2 + \dots + a_n \delta a_n = 0; \tag{16}$$

es hat diess eine Abhängigkeit der Variationen $\delta a_1 \dots \delta a_n$ zur Folge, so zwar, dass eine derselben durch die eben hingestellte Gleichung bestimmt, die übrigen $n-1$ aber ganz willkührlich sind; man wird daher eine derselben, etwa δa_1 aus (15) und (16) eliminiren, was am besten durch Multiplication der letzteren mit den noch unbestimmten Factor s und Subtraction von der ersteren geschieht, worauf dann s so gewählt wird, dass das zu eliminirende δa_1 den Coefficienten Null bekommt, somit wegfällt. Die in der Eliminations-Gleichung übrig bleibenden $\delta a_2 \dots \delta a_n$ sind sodann als ganz von einander unabhängig anzusehen, folglich der Coefficient einer jeden derselben für sich der Nulle gleich zu setzen. Dieses Verfahren durchgeführt gibt folgendes System von n Gleichungen:

$$\frac{dA}{da_1} = s a_1 \quad \frac{dA}{da_2} = s a_2 \quad \frac{dA}{da_3} = s a_3 \dots \frac{dA}{da_n} = s a_n, \tag{17}$$

welche in Verbindung mit (12) zur Bestimmung der Werthe der $n+1$ Unbekannten $a_1, a_2 \dots a_n$ und s gerade hinreichen. Entwickelt man die Differentialquotienten der Function A, so erhält man anstatt der (17):

$$\begin{array}{l} (1,1)\,a_1 + (1,2)\,a_2 + (1,3)\,a_3 + \dots + (1,n)\,a_n = s a_1 \\ (2,1)\,a_1 + (2,2)\,a_2 + (2,3)\,a_3 + \dots + (2,n)\,a_n = s a_2 \\ (3,1)\,a_1 + (3,2)\,a_2 + (3,3)\,a_3 + \dots + (3,n)\,a_n = s a_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n,1)\,a_1 + (n,2)\,a_2 + (n,3)\,a_3 + \dots + (n,n)\,a_n = s a_n. \end{array} \tag{18}$$

Es braucht hier kaum bemerkt zu werden, dass der Natur der Sache nach $(1,2) = (2,1)$, $(1,3) = (3,1)$ und überhaupt $(h,k) = (k,h)$ ist und somit diese Gleichungen des ersten Grades zu jener merkwürdigen, in den meisten mathematischen Untersuchungen wiederkehrenden Classe gehören, in denen die horizontalen und verticalen Reihen der Coefficienten beziehungsweise gleich sind. Man multiplicire dieselben der Reihe nach; die erste mit a_1, die zweite mit a_2 u. s. w., die $n$te mit a_n, addire sie und nehme auf die Gleichung (12) Rücksicht, so bekommt man, natürlich nur für solche Werthe von $a_1 \dots a_n$ die den Gleichungen (17) Genüge leisten, somit ein Maximum oder Minimum der Function A biethen,

$$A = s.$$

Die aus den Gleichungen (17) und (12) gezogenen Werthe von s sind also die Maxima und Minima der Function A selbst; und es wird diese Function nur positiver Werthe fähig seyn, wenn sämmtliche s positiv, nur negativer, wenn sämmtliche s negativ sind. Endlich wird A sowohl positiv als auch negativ seyn können, wenn es unter den Werthen von s positive und negative zugleich gibt. Da es sohin nur auf das s ankommt, so wollen wir uns dieses durch Elimination der Grössen $a_1 \dots a_n$ aus den Gleichungen (17) zu verschaffen suchen, und wollen zu diesem Zwecke den genannten Gleichungen folgende Form ertheilen:

$$(19)\quad \begin{array}{l} [(1,1)-s]\,a_1 + (1,2)\,a_2 + (1,3)\,a_3 + \dots + (1,n)\,a_n = 0. \\ (2,1)\,a_1 + [(2,2)-s]\,a_2 + (2,3)\,a_3 + \dots + (2,n)\,a_n = 0. \\ (3,1)\,a_1 + (3,2)\,a_2 + [(3,3)-s]\,a_3 + \dots + (3,n)\,a_n = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n,1)\,a_1 + (n,2)\,a_2 + (n,3)\,a_3 + \dots + [(n,n)-s]\,a_n = 0. \end{array}$$

Enthält die Function U nur eine einzige Veränderliche x_1, so reducirt sich das System der Gleichungen (19) auf die einzige:

$$(1,1) - s = 0$$

also

$$s = (1,1) = \frac{d^2 U}{d x_1^2},$$

somit A mit den zweiten Differentialquotienten von U zugleich positiv oder negativ. Der erste Fall gibt ein Minimum, der zweite ein Maximum wie bekannt.

Reducirt sich die Zahl der in U enthaltenen Variablen auf zwei, so hat man auch anstatt der Gleichungen (17) die zwei folgenden:

$$(20)\quad \begin{array}{l} [(1,1)-s]\,a_1 + (1,2)\,a_2 = 0. \\ (2,1)\,a_1 + [(2,2)-s]\,a_2 = 0. \end{array}$$

Eliminirt man aus beiden a_1 und a_2 oder vielmehr den Quotienten $\frac{a_2}{a_1}$, so erhält man folgende Gleichung des zweiten Grades in s:

$$[(1,1)-s]\,[(2,2)-s] - (1,2)^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$s^2 - s\,[(1,1)+(2,2)] + (1,1)(2,2) - (1,2)^2 = 0. \tag{21}$$

Der hieraus gezogene Werth von s:

$$s = \tfrac{1}{2}[(1,1)+(2,2)] \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}[(1,1)-(2,2)]^2 + (1,2)^2}$$

gibt uns die Ueberzeugung, dass die Wurzeln der (21) immer reel sind. Es lassen sich somit die Zeichen der Werthe von s schon aus den Zeichenwechseln und Zeichenfolgen in der Gleichung (21) erschliessen, ohne dass man diese letztere wirklich aufzulösen braucht. Es geben namentlich lauter in (21) vorhandene Zeichenwechsel ein Minimum, lauter Zeichenfolgen ein Maximum der Function u.

Lassen wir ferner u eine Function dreier Variablen $x_1\ x_2\ x_3$ bedeuten, so hat man zwischen $a_1\ a_2\ a_3$ und s folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
[(1,1)-s]\,a_1 + (1,2)\,a_2 + (1,3)\,a_3 &= 0.\\
(2,1)\,a_1 + [(2,2)-s]\,a_2 + (2,3)\,a_3 &= 0.\\
(3,1)\,a_1 + (3,2)\,a_2 + [(3,3)-s]\,a_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Zur Elimination aus denselben bedienen wir uns der folgenden für diesen speciellen Fall sehr passenden, und nur leider der Zahl drei der Gleichungen ausschliesslich angehörenden, von CAUCHY zuerst gebrauchten Methode: Man dividire die erste Gleichung durch das Product $(1,2)(1,3)$, so dass man erhält:

$$[(1,1)-s]\,\frac{a_1}{(1,2)(1,3)} + \frac{a_2}{(1,3)} + \frac{a_3}{(1,2)} = 0$$

nun addire und subtrahire man zugleich vom ersten Theile dieser Gleichung das zur Symmetrie noch fehlende Glied $\frac{a_1}{(2,3)}$, und schreibe der Kürze wegen:

$$\frac{a_1}{(2,3)} + \frac{a_2}{(1,3)} + \frac{a_3}{(1,2)} = g, \tag{23}$$

so erhält man:

$$\left[s-(1,1)+\frac{(1,2)(1,3)}{(2,3)}\right]\frac{a_1}{(1,2)(1,3)} = g,$$

folglich:

$$a_1 = \frac{g\,(1,2)(1,3)}{s-(1,1)+\frac{(1,2)(1,3)}{(2,3)}}. \tag{24}$$

Auf gleiche Weise erhält man aus der zweiten der Gleichungen (22):

$$a_2 = \frac{g\,(1,2)(2,3)}{s-(2,2)+\frac{(1,2)(2,3)}{(1,3)}}, \tag{25}$$

und genau so aus der dritten derselben:

$$a_3 = \frac{g\,(1,3)(2,3)}{s-(3,3)+\frac{(1,3)(2,3)}{(1,2)}}. \tag{26}$$

Jetzt dividire man die (24) durch $(2,3)$, die (25) durch $(1,3)$, die (26) durch $(1,2)$, addire sie, nehme Rücksicht auf die (23) und lasse den gemeinschaftlichen

Factor g weg, so erhält man die Eliminiationsgleichung des dritten Grades in s und zwar in folgender Form:

$$(27)\quad 1=\frac{(1,2)\,(1,3)}{(2,3)\left[s-(1,1)+\frac{(1,2)(1,3)}{(2,3)}\right]}+\frac{(1,2)\,(2,3)}{(1,3)\left[s-(2,2)+\frac{(1,2)\,(2,3)}{(1,2)}\right]}+\frac{(1,3)\,(2,3)}{(1,2)\left[s-(3,3)+\frac{(1,3)(2,3)}{(1,2)}\right]},$$

oder wenn man

$$(28)\quad \begin{aligned}(1,1)-\frac{(1,2)\,(1,3)}{(2,3)}&=\mathrm{L},\\ (2,2)-\frac{(1,2)\,(2,3)}{(1,3)}&=\mathrm{M},\\ (3,3)-\frac{(1,3)\,(2,3)}{(1,2)}&=\mathrm{N},\end{aligned}$$

setzt und die Brüche wegschafft:

$$(29)\quad \frac{1}{(2,3)(1,2)(1,3)}(s-L)\,(s-M)\,(s-N)-\frac{1}{(2,3)^2}(s-M)\,(s-N)-$$
$$-\frac{1}{(1,3)^2}(s-L)\,(s-N)-\frac{1}{(1,2)^2}(s-L)\,(s-M)=0.$$

Dass alle drei Wurzeln dieser Gleichung reel sind, lässt sich auf folgende Weise darthun: Man nenne das Gleichungspolynom allgemein für ein beliebiges s, P und substituire anstatt s in demselben erst $-\infty$, dann die kleinste der Grössen L, M und N, sodann die nächst grössere, dann die grösste und endlich auch $+\infty$.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, mögen hier L, M und N wirklich in der Grössenordnung

$$L < M < N$$

stehen. So erhält man im Falle das Product

$$(30)\quad (2,3)\;(1,2)\;(1,3)$$

positiv ist, Werthe des Gleichungspolynoms P, den für s gemachten Substitutionen entsprechend, die aus folgenden Schema ersichtlich sind:

$$(31)\quad \begin{array}{llllll} s=-\infty, & L, & M, & N, & +\infty, \\ P=- & - & + & - & +, \end{array}$$

und wo bloss die Zeichen von P erscheinen. Man ersieht hieraus, dass bei dem Uebergange von der Substitution $s=L$ zur $s=M$, P das Zeichen ändere, somit liegt eine Wurzel der Gleichung (29) zwischen L und M; und aus demselben Grunde ist auch eine zweite zwischen M und N, und eine dritte zwischen N und $+\infty$ vorhanden. Wäre aber das Product (30) negativ, so müsste anstatt des Schema (31) folgendes andere niedergeschrieben werden:

$$\begin{array}{llllll} s=-\infty, & L, & M, & N & +\infty, \\ P=+ & - & + & - & -; \end{array}$$

und die drei Wurzeln der Gleichung (29) liegen eine zwischen $-\infty$ und L, die andere zwischen L und M, und die dritte zwischen M und N. Es braucht hier kaum erinnert zu werden, dass die Gültigkeit dieses Beweises der Realität der drei Wurzeln, nicht an die specielle Bedingung (30) geknüpft sey, und dass man denselben ebenso gut für eine jede andere zwischen L, M und N bestehende Rangordnung durchzuführen im Stande ist. Ja es können unter diesen Grössen sogar zwei gleiche vorkommen, etwa $L = M$; wo dann, wie aus der Gleichung (29) unmittelbar ersichtlich ist, ein Wurzel derselben $s = L$ ist, eine zweite zwischen L und N liegt, und die dritte, je nach der Beschaffenheit des Productes (30) sich entweder zwischen $-\infty$ und N oder zwischen N und $+\infty$ befindet. Hätte man endlich $L = M = N$, so enthielte das Gleichungspolynom P den Factor $(s-L)^2$. Man hat somit zwei gleiche Wurzeln L, die dritte offenbar auch reelle ist dann sehr leicht aus der Gleichung (29) selbst zu ziehen. Die bewiesene Realität der Wurzeln, von welchen die Rede ist, enthebt uns der Auflösung der Gleichung selbst, wir haben blos zu sehen auf die Anzahl der Zeichenfolgen und Zeichenwechsel in derselben. Im Falle nun lauter Zeichenwechsel vorhanden sind, hat man sämmtliche Werthe von s positiv, das heisst, alle Maxima und Minima der Function A positiv; diese letztere ist daher nur positiver Werthe fähig, was einem Minimum von u entspricht. Auf ähnliche Weise schliesst man, dass u ein Maximum sey, wenn die Gleichung (29) lauter Zeichenfolgen biethet, und weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn in derselben sowohl Zeichenwechsel, als auch Zeichenfolgen vorkommen.

Es sey uns hier noch erlaubt zu bemerken, dass im Falle gleicher Wurzeln die drei Gleichungen des ersten Grades (22) in a_1, a_2 und a_3 von einander verschieden zu seyn aufhören, indem sie in die einzige

$$\frac{a_1}{(2,3)} + \frac{a_2}{(1,3)} + \frac{a_3}{(1,2)} = 0$$

zusammenfallen.

Gehen wir jetzt zu dem allgemeinen System von n Gleichungen (19) zurück, so schliessen wir unmittelbar aus der Analogie mit den eben der Betrachtung unterworfenen drei speciellen Fällen, dass die Elimination der Grössen $a_1, a_2 \ldots a_n$ aus denselben höchst wahrscheinlich zu einer Gleichung des $n$ten Grades in s führen werde, dass diese letztere lauter reele Wurzeln besitzen, und somit so viele positive als Zeichenwechsel, so viele negative als Zeichenfolgen zulassen werde, und dass eigentlich die Existenz eines Maximums oder Minimums von u, lediglich von dem Umstande abhänge, ob in dieser letztgenannten Gleichung des $n$ten Grades lauter Zeichenfolgen oder lauter Zeichenwechsel sich vorfinden. Um diese Wahrscheinlichkeit durch einen strengen mathematischen Beweis zur Gewissheit zu erheben, was schon desshalb einigen Schwierigkeiten unterliegt, weil die Gleichung des $n$ten Grades, von der bewiesen werden soll, sie habe nur reelle Wurzeln, für ein allgemeines n gar nicht gebildet werden kann, wird es nicht unerspriesslich seyn, auf die bei der Elimination aus einem Systeme von n Gleichungen des 1sten Grades wie (19) vorkommenden Formen und ihre

Eigenschaften, wiewohl diese zum grössten Theil schon bekannt sind, aufmerksam zu machen, weil man sonst besorgen müsste, selbst den in der Analysis nicht ganz Unbewanderten unverständlich zu werden. Diess geschieht nun in der diesem Aufsatze angehängten Note, die die Auseinandersetzung des Eliminationsverfahrens aus n solchen Gleichungen des ersten Grades zwischen n Unbekannten zum Zwecke hat, und die man vorher durchzusehen beliebe. Es geht aus den dort durchgeführten Untersuchungen zunächst hervor, dass die Werthe der Unbekannten in einem System von Gleichungen wie:

$$\begin{array}{ll} & [(1,1)-s]a_1+(1,2)a_2+(1,3)a_3+\ldots+(1,n)a_n = [1], \\ & (2,1)a_1+[(2,2)-s]a_2+(2,3)a_3+\ldots+(2,n)a_n = [2], \\ (32) & (3,1)a_1+(3,2)a_2+[(3,3)-s]a_3+\ldots+(3,n)a_n = [3], \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (n,1)a_1+(n,2)a_2+(n,3)a_3+\ldots+[(n,n)-s] = [n], \end{array}$$

sämmtlich in Bruchform erscheinen, und dass allen diesen Brüchen ein gemeinschaftlicher Nenner zukomme, der ein algebraisches, aus den Coefficienten der eben aufgestellten Gleichungen gebildetes Polynom ist, dessen jedes Glied ein Product aus n Factoren vorstellt, die unter den Coefficienten eben dieser Gleichungen auf alle möglichen verschiedenen Weisen gewählt werden, so jedoch, dass in einem und demselben Gliede nie zwei Coefficienten aus derselben Horizontalreihe, und nie zwei solche aus derselben Verticalreihe zusammen vorkommen. Dieser gemeinschaftliche Nenner nun der Nulle gleich gesetzt, gibt diejenige Eliminationsgleichung s, deren wir benöthigen; und da den eben Gesagten nach das Product

$$(33)\qquad [(1,1)-s][(2,2)-s][(3,3)-s]\ldots[(n,n)-s],$$

welches nach s dem n ten Grade angehört, darin erscheint und höhere darin nicht erscheinen können, so ist auch die Gleichung in s vom Grade n, und folglich nur mehr darzuthun, dass dieselbe unter der Voraussetzung, dass allgemein

$$(hk) = (kh)$$

ist, somit die Verticalreihen der Coefficienten mit den Horizontalreihen identisch, stets nur lauter reele Wurzeln zulasse. Der Beweis, den wir hier beibringen wollen, ist auf eine zuerst von CAUCHY in der Theorie der Flächen der zweiten Ordnung vorgetragene und von diesem grossen Mathematiker bei einem Systeme von drei Gleichungen mit drei Unbekannten in Anwendung gebrachte Analysis gegründet, die im Folgenden besteht: Die Eliminationsgleichung in s, auf die man bei der Auflösung der Gleichungen

$$\begin{array}{ll} & [(1,1)-s]a_1+(1,2)a_2+(1,3)a_3 = 0, \\ (34) & (2,1)a_1+[(2,2)-s]a_2+(2,3)a_3 = 0, \\ & (3,1)a_1+(3,2)a_2+[(3,3)-s]a_3 = 0 \end{array}$$

stösst, ist vom dritten Grade, hat somit drei Wurzeln, die wir mit

$$s',\ s'',\ s'''$$

bezeichnen wollen; einem jeden dieser Werthe von s entspricht nun aber ein System von Werthen von a_1, a_2 und a_3, wir erhalten daher drei solche Systeme, die wir mit

$$\begin{matrix} a_1', & a_1'', & a_1''' \\ a_2', & a_2'', & a_2''' \\ a_3', & a_3'', & a_3''' \end{matrix} \tag{35}$$

bezeichnen wollen. Substituiren wir nun in der ersten der Gleichungen (34) anstatt s, a_1, a_2, a_3 das erste System der erhaltenen Werthe, d. h. s', a_1', a_2', a_3', dann auch das zweite, nämlich: s'', a_1'', a_2'', a_3'', so kommen wir zu folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} [(1,1)-s']\,a_1' + (1,2)\,a_2' + (1,3)\,a_3' &= 0, \\ [(1,1)-s'']\,a_1'' + (1,2)\,a_2'' + (1,3)\,a_3'' &= 0, \end{aligned} \tag{36}$$

und aus diesen das Symbol (11) eliminirend und zu diesen Zweck die erste mit a_1'', die zweite mit a_1' multiplicirend und von der ersteren abziehend:

$$(s''-s')\,a_1'a_1'' + (1,2)\,[a_2'a_1'' - a_1'a_2''] + (1,3)\,[a_3'a_1'' - a_1'a_3''] = 0. \tag{37}$$

Behandeln wir nun auf dieselbe Weise die zweite und dritte der Gleichungen (34), so gelangen wir zu noch zwei ähnlichen Gleichungen, wie die (37) nämlich:

$$\begin{aligned} (s''-s')\,a_2'a_2'' + (2,3)\,[a_3'a_2'' - a_2'a_3''] + (2,1)\,[a_1'a_2'' - a_2'a_1''] &= 0, \\ (s''-s')\,a_3'a_3'' + (3,1)\,[a_1'a_3'' - a_3'a_1''] + (3,2)\,[a_2'a_3'' - a_3'a_2''] &= 0, \end{aligned} \tag{38}$$

und diese zu (37) addirt, mit Rücksicht auf die Relationen:

$$(1,2) = (2,1), \quad (2,3) = (3,2), \quad (3,1) = (1,3),$$

führen zu:

$$(s''-s')\,[a_1'a_1'' + a_2'a_2'' + a_3'a_3''] = 0; \tag{39}$$

und es ist an und für sich klar, dass wir genau denselben Weg verfolgend, noch zu folgenden zwei anderen Gleichungen geführt werden:

$$\begin{aligned} (s'''-s'')\,[a_1''a_1''' + a_2''a_2''' + a_3''a_3'''] &= 0; \\ (s'-s''')\,[a_1'''a_1' + a_2'''a_2' + a_3'''a_3'] &= 0; \end{aligned} \tag{40}$$

soweit die CAUCHY'sche Analyse. Von dem Resultate derselben, nämlich den Gleichungen (39) und (40) macht POISSON Gebrauch, um die Realität der drei Wurzeln s', s'', s''' der Gleichung des dritten Grades abzuleiten, die wir oben auf einem andern Wege dargethan haben. Wäre nämlich, sagt POISSON, ein Paar imaginäre Wurzeln, etwa s' und s'' in der Eliminationsgleichung, von welcher die Rede ist, vorhanden, so würde ihnen die Form

$$s' = p + q\sqrt{-1}, \quad s'' = p - q\sqrt{-1} \tag{41}$$

zukommen; dieselbe Form müssten dann offenbar auch die beiden entsprechenden Systeme von Werthen für a_1, a_2 und a_3 erhalten, etwa

$$
\begin{aligned}
a_1' &= \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, & a_1'' &= \alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1}.\\
a_2' &= \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}, & a_2'' &= \alpha_2 - \beta_2\sqrt{-1}.\\
a_3' &= \alpha_3 + \beta_3\sqrt{-1}, & a_3'' &= \alpha_3 - \beta_3\sqrt{-1}.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Nun erhält man aber durch Substitution der Werthe (41) und (42) in die Gleichung (39)

$$-2q\sqrt{-1}\,[\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2] = 0, \tag{43}$$

eine Gleichung, der nur Genüge geleistet werden kann durch die Voraussetzung

$$q = 0,$$

indem die andere

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 = 0$$

unzulässig ist, denn sie gäbe:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0,$$

und somit auch

$$
\begin{aligned}
a_1' = a_2' = a_3' &= 0,\\
a_1'' = a_2'' = a_3'' &= 0,
\end{aligned}
$$

was der Gleichung

$$a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = 1,$$

aus welcher eben die Werthe von a_1', a_2', a_3' hervorgegangen gedacht werden müssen, widerspricht. Es lehrt nämlich der unmittelbare Anblick der Gleichungen (34), dass sie die Werthe der Unbekannten a_1, a_2, a_3 zu liefern ungeeignet seyen, und nur die Quotienten $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_1}$ bestimmen, die dann in die Gleichung

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

substituirt, erst die Werthe dieser Unbekannten geben.

Derselbe Beweis nun der Realität sämmtlicher Wurzeln lässt sich auch gerade auf dieselbe Weise bei derjenigen Eliminationsgleichung des nten Grades führen, der wir begegnen bei einem Systeme von n Gleichungen mit n Unbekannten von folgender Form:

$$
\begin{aligned}
&[(1,1)-s]\,a_1 + (1,2)\,a_2 + (1,3)\,a_3 + \ldots + (1,n)\,a_n = 0\\
&(2,1)\,a_1 + [(2,2)-s]\,a_2 + (2,3)\,a_3 + \ldots + (2,n)\,a_n = 0\\
&(3,1)\,a_1 + (3,2)\,a_2 + [(3,3)-s]\,a_3 + \ldots + (3,n)\,a_n = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(n,1)\,a_1 + (n,2)\,a_2 + (n,3)\,a_3 + \ldots + [(n,n)-s]\,a_n = 0,
\end{aligned} \tag{44}
$$

und unter der Voraussetzung, dass die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coefficienten gegenseitig gleich sind, man also ganz allgemein habe:

$$(h,k) = (k,h). \tag{45}$$

Dass die Eliminationsgleichung in s dem nten Grade angehöre, haben wir früher dargethan, sie wird also n Wurzeln besitzen, die wir der Reihe nach mit

$$s = s',\ \ s'',\ \ s''',\ \ldots\ s^{(n)} \tag{46}$$

bezeichnen wollen; setzen wir darunter imaginäre voraus, so können solche nur paarweise vorhanden seyn, weil alle Coefficienten in (44), und somit auch in der daraus gefolgerten Eliminationsgleichung reel sind. Es seyen also s′ und s″ ein solches Paar zusammengehöriger imaginärer Wurzeln, so kömmt ihnen die Form zu:

$$s' = p + q\sqrt{-1}, \quad s'' = p - q\sqrt{-1}. \tag{47}$$

Nun wird man aber in die Gleichungen (44) anstatt s alle unter (46) vorkommenden n Werthe der Reihe nach substituiren können, wird für jeden derselben ein System von Werthen für die Quotienten

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \ldots \frac{a_n}{a_1}$$

ableiten, und endlich mittelst der Gleichung

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$$

die Werthe der Unbekannten $a_1 \ldots a_n$ selbst bestimmen, wird so n Systeme solcher Werthe erhalten, die wir bezüglich und so wie sie den Werthen von s entsprechen, andeuten werden durch:

$$\begin{array}{l} a_1 = a_1', \ a_1'', \ a_1''', \ldots a_1^{(n)}; \\ a_2 = a_2', \ a_2'', \ a_2''', \ldots a_2^{(n)}; \\ a_3 = a_3', \ a_3'', \ a_3''', \ldots a_3^{(n)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = a_n', \ a_n'', \ a_n''', \ldots a_n^{(n)}. \end{array} \tag{48}$$

Da aber die beiden ersten Werthe von s der Voraussetzung nach imaginär sind, und von der Form (47), so werden offenbar auch die beiden ersten Systeme von Werthen (48) imaginär ausfallen und derselben Form angehörend, d. h. nur im Zeichen des mit $\sqrt{-1}$ verbundenen Gliedes unterschieden, man wird somit setzen können:

$$\begin{array}{ll} a_1' = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}. & a_1'' = \alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1}. \\ a_2' = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}. & a_2'' = \alpha_2 - \beta_2\sqrt{-1}. \\ a_3' = \alpha_3 + \beta_3\sqrt{-1}. & a_3'' = \alpha_3 - \beta_3\sqrt{-1}. \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_n' = \alpha_n + \beta_n\sqrt{-1}. & a_n'' = \alpha_n - \beta_n\sqrt{-1}. \end{array} \tag{49}$$

Nun substituiren wir in jede der Gleichungen (44) eher das erste, dann auch das zweite System von Werthen für s; a_1, $a_2 \ldots a_n$, und bekommen diese zwei Substitutionen in der Ersten derselben ausführend:

$$\begin{array}{l} [(1,1) - s']\, a_1' + (1,2)\, a_2' + (1,3)\, a_3' + \ldots\ldots + (1,n)\, a_n' = 0, \\ [(1,1) - s'']\, a_1'' + (1,2)\, a_2'' + (1,3)\, a_3'' + \ldots\ldots + (1,n)\, a_n'' = 0, \end{array} \tag{50}$$

und hieraus durch Elimination des Symboles (1,1), also Multiplication der ersten Gleichung mit a''_1, der zweiten mit a'_1 und Subtraction derselben:

$$(s''-s')a'_1a''_1 + (1,2)\,[a'_2a''_1 - a'_1a''_2] + (1,3)\,[a'_3a''_1 - a'_1a''_3] + \dots \tag{51}$$
$$\dots + (1,n)\,[a'_na''_1 - a'_1a''_n] = 0.$$

Aehnliche Gleichungen liefern dieselben Substitutionen in die übrigen der Gleichungen (44) ausgeführt, die man übrigens auf kürzerem Wege aus der (51) erhalten kann, genau auf dieselbe Weise wie die übrigen der Gleichungen (44) aus der ersten hervorgehen, nämlich durch Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3, ... n, insofern als sie sowohl in den Symbolen (1,1), (1,2) .... als auch als Stellenzeiger erscheinen nach einem einfachen Permutationsgesetze, nach welchem der Einser an die Stelle des Zweier, der Zweier an die Stelle des Dreier u. s. w., und endlich n an die Stelle von Eins tritt. Machen wir von dieser Vertauschungsweise n—1 mal Gebrauch, so geht uns die (51) der Reihe nach über in die Gleichungen:

$$\begin{aligned}&(s''-s')a'_2a''_2 + (2,3)\,[a'_3a''_2 - a'_2a''_3] + (2,4)\,[a'_4a''_2 - a'_2a''_4] + \dots + (2,1)\,[a'_1a''_2 - a'_2a''_1] = 0,\\ &(s''-s')a'_3a''_3 + (3,4)\,[a'_4a''_3 - a'_3a''_4] + (3,5)\,[a'_5a''_3 - a'_3a''_5] + \dots + (3,2)\,[a'_2a''_3 - a'_3a''_2] = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &(s''-s')a'_na''_n + (n,1)[a'_1a''_n - a'_na''_1] + (n,2)\,[a'_2a''_n - a'_na''_2] + \dots + (n,n-1)\,[a'_{n-1}a''_n - a'_na''_{n-1}] = 0.\end{aligned} \tag{52}$$

Jetzt addire man alle diese Gleichungen (51) und (52) und bemerke, dass der mit einem Factor wie (1,2) verbundenen Glieder zwei erscheinen, und auch nicht mehr erscheinen können, weil der Coefficient (1,2) nur in zwei Gleichungen vorhanden ist. Eben so wird es auch andere mit dem Factor (h, k) versehene Glieder zwei geben, weil der Coefficient (h, k) nur in zwei Gleichungen vorkömmt, in der kten nämlich und in der hten; die Summe aber dieser Glieder ist offenbar Null, wie die unmittelbare Ansicht der zu addirenden Gleichungen lehrt; man erhält somit die sehr einfache Gleichung:

$$(s''-s')\,(a'_1a''_1 + a'_2a''_2 + a'_3a''_3 + \dots + a'_na''_n) = 0. \tag{53}$$

Setzt man hier anstatt der in dieser Gleichung vorkommenden Grössen ihre unter (47) und (49) vorausgesetzten Werthe, die s'' und s' für ein Paar zusammengehörender imaginärer Wurzeln nehmend, so bekommt man:

$$-2q\sqrt{-1}\,(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \dots + \alpha_n^2 + \beta_n^2) = 0, \tag{54}$$

eine Gleichung, welcher nur durch $q = 0$ Genüge geleistet werden kann, indem

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \dots + \alpha_n^2 + \beta_n^2 = 0$$

unzulässig ist, indem es

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \dots = a_n = \beta_n = 0$$

gibt, somit auch

$$a'_1 = a'_2 = a'_3 = \dots = a'_n = 0,$$

was nicht seyn kann, da die Werthe dieser letztern Grössen dem Gange der Rechnung nach, den wir zur ihrer Ermittlung eingeschlagen haben, die Gleichung

$$a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 + \ldots\ldots + a_n'^2 = 1$$

erfüllen müssen.

Unter den Wurzeln der Eliminationsgleichung des n ten Grades befinden sich daher gar keine imaginären; man wird also aus den in derselben vorhandenen Zeichenwechseln und Zeichenfolgen die Anzahl der positiven und jene der negativen zu erkennen vermögen und hieraus auf die Existenz oder Nichtexistenz eines Maximums oder Minimums schliessen. Unser vorzüglichstes Augenmerk muss daher auf die Bildung dieser Gleichung des n ten Grades gerichtet seyn, und wir bitten Behufs derselben die nachfolgende Note einzusehen, und finden uns nur noch veranlasst zu bemerken, dass die eben vorgetragene Verallgemeinerung des Beweises der Realität der Wurzeln einem äusserst talentvollen jungen Manne, den Hrn. Simon Spitzer gelungen sey.

Note.

Man sucht die Werthe der n Unbekannten $a_1 \ldots a_n$ die den n Gleichungen des ersten Grades:

$$\left.\begin{array}{l} (1,1)\,a_1 + (1,2)\,a_2 + (1,3)\,a_3 + \ldots\ldots + (1,n)\,a_n = [1] \\ (2,1)\,a_1 + (2,2)\,a_2 + (2,3)\,a_3 + \ldots\ldots + (2,n)\,a_n = [2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n,1)\,a_1 + (n,2)\,a_2 + (n,3)\,a_3 + \ldots\ldots + (n,n)\,a_n = [n] \end{array}\right\} \quad (1)$$

Genüge leisten. Unter (1,1), (1,2), (2,1) u. s. w. beliebige Coefficienten verstanden, die in der Regel von einander verschieden sind. Multipliciren wir, um diese Werthe aufzufinden, diese Gleichungen der Reihe nach mit den noch unbestimmt gelassenen Factoren $q_1, q_2 \ldots q_n$, addiren sie, und wählen dann letztere so, dass die Coefficienten von $a_2 \ldots a_n$ in der durch Addition erhaltenen Gleichung der Nulle gleich werden; der Multiplicator aber von a_1 von der Nulle verschieden ausfällt, so erhalten wir einerseits zur Bestimmung von $q_1 \ldots q_n$ die $n-1$ Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (1,2)\,q_1 + (2,2)\,q_2 + \ldots\ldots + (n,2)\,q_n = 0, \\ (1,3)\,q_1 + (2,3)\,q_2 + \ldots\ldots + (n,3)\,q_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1,n)\,q_1 + (2,n)\,q_2 + \ldots\ldots + (n,n)\,q_n = 0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Andererseits erhält man für a_1 unmittelbar den Werth in Form eines Bruches:

$$a_1 = \frac{[1]\,q_1 + [2]\,q_2 + \ldots\ldots + [n]\,q_n}{(1,1)q_1 + (2,1)q_2 + \ldots + (n,1)q_n}; \quad (3)$$

und nun behaupten wir, dass uns nur die Kenntniss des Nenners dieses Bruches nothwendig sey; und dass wir daraus allsogleich nicht bloss den Zähler desselben, sondern auch zugleich sämmtliche Zähler der Brüche für $a_2 \ldots a_n$ ohne Anstand abzuleiten vermögen. Vor Allem ist es klar, dass die Gleichungen (2) nicht eigentlich die Grössen $q_1 \ldots q_n$, sondern vielmehr die Relationen $\frac{q_2}{q_1}, \frac{q_3}{q_1} \ldots \frac{q_n}{q_1}$ liefern werden, dass somit eine dieser Grössen, etwa q_1 willkührlich, die andern aber durch dieselbe bestimmt und ihr proportional sind, dass man also den Werth dieser Einen willkührlichen so wird annehmen können, dass sämmtliche $q_1 \ldots q_n$ nicht in Bruchform sondern als ganze Polynome erscheinen, in denen sämmtliche Coefficienten der Gleichungen (1) bis auf die ersten die darin offenbar nicht vorhanden seyn können, da sie auch in den Gleichungen (2) nicht erscheinen, vorkommen werden. Hieraus folgt zunächst, dass man den Zähler des Werthes von a_1 aus dem bekannt vorausgesetzten Nenner unmittelbar wird ableiten können, indem man die ersten Coefficienten:

$$(1,1)\ (2,1)\ (3,1)\ \ldots\ (n,1)$$

bezüglich in die mit eckigen Klammern bezeichneten zweiten Gleichungstheile:

$$[1]\ [2]\ [3]\ \ldots\ [n]$$

verwandelt. Es ist ferner dieser Nenner ein ganzes Polynom, welches, wie man aus den Gleichungen (2) unmittelbar ersieht, die nicht unmerkwürdige Eigenschaft hat, sich alsogleich in die Nulle zu verwandeln, sobald in demselben anstatt der vorkommenden ersten Coefficienten bezüglich die zweiten oder die dritten, oder überhaupt eine andere Coefficientenreihe substituirt wird. Umgekehrt hätte man auf beliebigen Wege eine mit dieser Eigenschaft begabte ganze Function sämmtlicher Coefficienten aufgefunden, die sich also unmittelbar auf Null reducirt, wenn anstatt irgend einer Coefficientenreihe irgend eine andere gesetzt wird, so ist auch das Problem der Elimination gelöst, und man hat die Werthe sämmtlicher Unbekannten. In der That, um den Werth von a_1 zu erhalten, wird man das gefundene Polynom nach den ersten Coefficienten ordnen, und wird die Multiplicatoren von $(1,1)\ (2,1) \ldots (n,1)$ bezüglich mit $q_1\ q_2 \ldots q_n$ bezeichnen, wird mit denselben die Gleichungen (1) der Reihe nach multipliciren und addiren; so fallen der vorausgesetzten Eigenschaft des Polynomes zufolge $a_2\ a_3 \ldots a_n$, indem sie beim Addiren die Coefficienten Null bekommen, hinweg; und für a_1 bekömmt man geradezu den Werth (3), dessen Zähler aus dem Nenner auf die früher erwähnte Weise abgeleitet wird.

Auf dieselbe Art verfährt man, um sich den Werth von irgend einer andern etwa der zweiten Unbekannten a_2 zu verschaffen; man ordnet nämlich dasselbe Polynom nach dem zweiten Coefficienten und benennt die Multiplicatoren von $(1,2)\ (2,2)\ (3,2) \ldots (n,2)$ beziehlich mit $q'_1 q'_2 q'_3 \ldots q'_n$, multiplicirt die Gleichungen (1) der Reihe nach mit diesen letztern, und addirt sie; so bekömmt offenbar a_2 das oftgenannte Polynom, die übrigen Unbekannten $a_1 a_3 \ldots a_n$, aber, die Nulle zum Multiplicator; sohin erscheint der Werth von a_2 genau in derselben Form wie der von a_1, sein Zähler wird genau auf dieselbe Weise aus dem Nenner abgeleitet, der noch übrigens die Eigenschaft hat, der gemeinschaftliche Nenner der Werthe sämmtlicher Unbekannten zu seyn. Es handelt sich also lediglich um die Auffindung des Polynoms, welches die Eigenschaft besitzen soll, sich alsogleich auf die Nulle zu reduciren, wenn in demselben anstatt irgend einer Coefficientenreihe eine andere substituirt wird; dieses letztere verschafft man sich aber auf folgende Weise: Man betrachtet die Zahlen:

$$1\ 2\ 3\ \ldots\ n$$

als combinatorische Elemente, und bildet aus denselben alle möglichen Permutationen; z. B. wenn die Zahl der Gleichungen und somit auch die der Unbekannten drei ist, so formt man folgende Gruppen:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

In jeder derselben gibt man dem ersten combinatorischen Elemente zum Begleiter die Einheit, dem zweiten die Zahl 2, dem dritten die Zahl 3, und schliesst das combinatorische Element, sammt den Begleiter in eine Klammer ein, so:

$$(1,1)(2,2)(3,3),\ (1,1)(3,2)(2,3),\ (2,1)(1,2)(3,3),\ (2,1)(3,2)(1,3),\ (3,1)(1,2)(2,3),$$
$$(3,1)\ (2,2)\ (1,3),$$

so hat man alle Glieder, aus denen das gesuchte Polynom besteht, wenn man nur, so wie sich's von selbst versteht, den Symbolen (1,1) (1,2) . . . die Bedeutungen beilegt, die ihnen in den Gleichungen (1) zukommen. Von diesen Gliedern ist nun die Hälfte mit dem Zeichen $+$, die andere Hälfte mit dem Zeichen $-$ zu nehmen, welches aber dieser beiden Zeichen einem jeden Gliede zukomme, wird auf folgende Weise entschieden: Man achte auf den Umstand, ob in zwei verschiedenen Factoren eines und desselben Gliedes ein höheres combinatorisches Element einen niederern Begleiter hat, als ein niederes in dem andern Factor, dem ein höherer Begleiter zugegeben ist. Man wird diesen Umstand ganz schicklich eine Compensation nennen können, wenn es uns überhaupt erlaubt ist, eine neue Benennung anstatt der von KRAMMER eingeführten, dem wir diese Theorie verdanken, und der diesen Umstand eine Variation genannt hat, zu substituiren aus der Ursache, weil wir den Namen Variation zur Bezeichnung eines ganz andern Begriffes benöthigen. Um die Sache durch ein Beispiel zu erläutern, so bieten die zwei Factoren

$$(1,2) \qquad (2,3)$$

keine Compensation, dagegen in den beiden andern

$$(1,3) \qquad (2,1)$$

eine Compensation vorhanden ist, indem die überwiegende Grösse des combinatorischen Elementes im zweiten Factor durch den anderseits in überwiegender Grösse vorhandenen Begleiter im ersten Factor gewissermassen aufgehoben wird. Offenbar können nun in einem und demselben Gliede der Compensationen mehrere vorkommen, und das Glied bekommt das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Anzahl der in demselben vorhandenen Compensationen eine gerade ist, oder ungerade. Nach dieser Regel wäre das gesuchte Polynom in dem früher angenommenen Beispiel dreier Gleichungen folgendes:

$$(1,1)(2,2)(3,3)-(1,1)(3,2)(2,3)-(2,1)(1,2)(3,3)+(2,1)(3,2)(1,3)+(3,1)(1,2)(2,3)$$
$$-(3,1)(2,2)(1,3).$$

Die Zahlen der in den einzelnen Gliedern vorhandenen Compensationen sind beziehlich
0 1 1 2 2 3

Genau auf dieselbe Weise verfährt man bei n Gleichungen mit n Unbekannten, und bekömmt offenbar einen desto längeren Ausdruck, je grösser die Zahl n ist; seine einzelnen Glieder sind Producte aus n Factoren, jeder dieser Factoren ist einer andern Horizontalreihe und zugleich auch einer andern Verticalreihe der Coefficienten aus den Gleichungen (1) entnommen, so zwar, dass kein Glied zwei Factoren aus derselben Horizontalreihe oder zwei solche aus derselben Verticalreihe besitzen kann. Man wird daher auch ohne Hülfe der Permutationsrechnung sich sämmtliche Glieder des gesuchten Polynomes verschaffen können, wenn man auf folgende Weise vorgeht: Man bilde die Summen der horizontalen Coefficientenreihen und multiplicire sie untereinander; man bilde ferner auch die Summen von sämmtlichen Verticalreihen und multiplicire sie ebenfalls unter einander und nehme endlich diejenigen Glieder, die beiden Producten gemeinschaftlich sind; die Zeichen jedoch dieser so genommenen Glieder müssen wie früher gesagt wurde, gemäss der Anzahl der vorkommenden Compensationen bestimmt werden. Der Beweis, dass das so gebildete Polynom die Eigenschaft besitze, sich auf die Nulle zu reduciren, wenn anstatt einer beliebigen Coefficientenreihe jede beliebige andere gesetzt wird, lässt sich auf folgende Weise führen: Die Verwandlung irgend einer Coefficientenreihe, z. B. der ersten in irgend eine andere z. B. die kte, reducirt sich nach der angenommenen Bezeichnung einfacher Weise auf die Verwandlung des Begleiters 1 in allen Gliedern, in welchen derselbe vorkömmt in den Begleiter k; es ist also nur zu zeigen, dass diese letztere das Polynom auf Null reducire. Hat man nun nicht vergessen, dass in einem jeden Gliede des Polynoms der Begleiter 1 nur in einem einzigen Factor, der Begleiter k auch nur in einem einzigen vorkömmt, so erschliesst man leicht, dass nach der Verwandlung von 1 in k in einem jeden Gliede zwei Factoren vorkommen werden, die mit dem Begleiter k behaftet sind. Man wird ferner zu einem jeden Gliede des Polynoms ein anderes ihm entsprechendes finden, das sich von den erstern bloss in der Beschaffenheit derjenigen Factoren unterscheidet, in denen die Begleiter 1 und k vorkommen; hat man z. B. das Glied:

(4) $$(\alpha,1) \ldots\ldots (\beta,k) \ldots\ldots$$

so wählt man zu denselben das im Polynome offenbar auch vorhandene

(5) $$(\beta,1) \ldots\ldots (\alpha,k) \ldots\ldots$$

welches sich von den erstern nur in der Beschaffenheit der dem Auge ersichtlich gemachten vier Factoren $(\alpha,1)$ (β,k) $(\beta,1)$ (α,k) unterscheidet; so dass die mit ..... bezeichneten Stellen in der einen und mit der andern Gruppe auf gleiche Weise besetzt sind. Die Verwandlung von 1 in k wird nun offenbar diese beiden Gruppen identisch machen; es lässt sich überdiess zeigen, dass dieselben im Polynome mit entgegengesetzten Zeichen erscheinen, und sich somit nach geschehener Verwandlung von 1 in k aufheben müssen, woraus unmittelbar folgt, dass die sämmtlichen Glieder des Polynomes sich zu zwei durch die Verwandlung von 1 in k auf Nulle reduciren werden; es ist daher nur noch zu zeigen, dass je zwei solche Glieder wie die hingestellten immer entgegengesetzte Zeichen haben müssten, und hiezu ist wieder bloss darzuthun, dass die Differenz der Compensationszahlen in je zwei solchen Gliedern eine ungerade sey. Ist also die Anzahl der Compensationen in (4) N, in der Gruppe (5) N′, so muss bewiesen werden, dass N′—N eine ungerade Zahl sey.

In der Gruppe (4) haben wir gleich zu Anfang den Factor $(\alpha,1)$, dann folgt eine Abtheilung von $k-2$ Factoren der Anzahl nach, die wir mit I bezeichnen wollen, dann der Factor (β,k), und endlich eine zweite Abtheilung von $n-k$ Factoren, welche II heissen mag; so dass wir auch die Gruppe (4) so schreiben können:

$$(\alpha,1)\ \mathrm{I}\ (\beta,k)\ \mathrm{II}. \tag{6}$$

Die Gruppe (5) wird dann auf ähnliche Weise geschrieben werden; nämlich:

$$(\beta,1)\ \mathrm{I}\ (\alpha,k)\ \mathrm{II}. \tag{7}$$

Setzen wir nun voraus:

1. Die Factoren in den Abtheilungen I und II bloss und ohne Rücksicht auf $(\alpha,1)$, (β,k), $(\beta,1)$, (α,k), die wir somit in (6) und (7) vor der Hand ganz ausgelassen denken, bilden Compensationen λ an der Zahl, so ist λ sowohl ein Bestandtheil von N als auch von N′.
2. Der Factor $(\alpha,1)$ gebe mit denjenigen combinirt, die sich in der Abtheilung I befinden, μ Compensationen, was nur daher rühren kann, dass μ Factoren in dieser Abtheilung I höhere Elemente besitzen als α; und woraus wieder folgt, dass in den übrigen Factoren $\varkappa-2-\mu$ an der Zahl mindere Elemente als α vorfindig sind. Es erscheint somit μ als Bestandtheil von N und $\varkappa-2-\mu$ als Theil von N′.
3. Der Factor $(\alpha,1)$, verglichen mit denen, die der Abtheilung II zufallen, biete ν Compensationen, so ist ν ein integrirender Theil von N und N′.
4. Der Factor $(\beta,\varkappa)$, verglichen mit den in I enthaltenen, biete σ Compensationen; so ist σ ein Theil von N, während $\varkappa-2-\sigma$ als Theil von N′ erscheint.
5. Derselbe Factor $(\beta,\varkappa)$ verglichen mit der Abtheilung II zeige τ Compensationen, so gehört τ als Theil zu N und N′.
6. Es wird endlich $(\alpha,1)$ mit $(\beta,\varkappa)$ entweder eine Compensation bilden, wenn nämlich $\alpha>\beta$, oder nicht, wenn $\alpha<\beta$; im ersten Falle bietet $(\beta,1)$ mit $(\alpha,\varkappa)$ keine Compensation, im zweiten Falle ist zwischen diesen zwei Factoren eine vorhanden. Wir haben also im ersten Falle:

$$N=\lambda+\mu+\nu+\sigma+\tau+1,$$
$$N'=\lambda+\varkappa-2-\mu+\nu+\varkappa-2-\sigma+\tau,$$

also

$$N'-N=2\varkappa-4-2\mu-2\sigma-1;$$

im zweiten Falle aber

$$N=\lambda+\mu+\nu+\sigma+\tau,$$
$$N'=\lambda+\varkappa-2-\mu+\nu+\varkappa-2-\sigma+\tau+1.$$

somit

$$N' - N = 2\varkappa - 4 - 2\mu - 2\sigma + 1,$$

also in jedem Falle $N' - N$ eine ungerade Zahl; und folglich N' ungerade, wenn N gerade ist; und umgekehrt; somit stets zwei zusammengehörige Glieder des Polynomes wie (4) und (5) mit entgegengesetzten Zeichen behaftet, und somit das Polynom durch die Verwandlung von 1 in α in Nulle übergehend. Es hat also das nach der früher auseinandergesetzten Regel construirte Polynom wirklich die Eigenschaft zu verschwinden, wenn anstatt jeder beliebigen Coefficientenreihe jede beliebige andere gesetzt wird.

Dasselbe Polynom, derselbe gemeinschaftliche Nenner der Werthe sämmtlicher Unbekannten hat noch andere merkwürdige Eigenschaften, und unter andern die sich nicht zu verändern, wenn die Horizontal- und Verticalreihen der Coefficienten unter einander vertauscht werden. Dass sich durch eine solche Vertauschung die einzelnen Glieder des Nenners nicht ändern, folgt unmittelbar aus der Art der Bildung derselben und namentlich aus dem Umstande, dass man sie alle erhält, wenn man das Product aus den Summen der Horizontalreihen, so wie auch jenes aus den Summen der Verticalreihen bildet und die beiden Producten gemeinschaftlichen Glieder nimmt; allein auch die Zeichen der einzelnen Glieder bleiben dieselben, wenn man Horizontal- und Verticalreihen der Coefficienten mit einander vertauscht. Um diess zu beweisen, bemerken wir vorerst, dass nach der angenommenen Bezeichnungsweise die oben erwähnte Vertauschung der Coefficientenreihen lediglich dadurch bewerkstelligt wird, dass man in einem jeden Factor an die Stelle des combinatorischen Elementes den Begleiter, und umgekehrt setzt, oder mit andern Worten, die eingeklammerten zwei Zahlen unter einander verwechselt, dass ferner dadurch die Anzahl der in einem jeden Gliede vorhandenen Compensationen durchaus gar keine Aenderung leide, indem je zwei Factoren, wie etwa (1,3) und (5,2), die eine Compensation darbieten, auch nach ihrer Umänderung in (3,1) und (2,5) eine solche darbieten werden; so wie zwischen zwei Factoren, wo keine Compensation statt fand, auch nach der Umänderung keine statt finden wird; woraus endlich folgt, dass durch die viel erwähnte Umänderung in dem in Rede stehenden Nenner lediglich die positiven Glieder unter sich, und die negativen wieder unter sich ihre Stellen vertauschen, und folglich der Nenner selbst ganz ungeändert bleibe.

Es kommt also bei der Auflösung eines Systems von n Gleichungen linearer Form mit n Unbekannten nur auf die Bildung eines einzigen Polynoms des gemeinschaftlichen Nenners an, aus welchem dann unmittelbar ohne bedeutenden Müheaufwand sämmtliche n Zähler der Werthe der Unbekannten durch blosse Vertauschung abgeleitet werden. Die Bildung dieses Nenners aber ist zwar, so lange n eine geringe Zahl ist, etwa 2 oder 3, eine durchaus wenig mühsame, wird es aber, sobald n zu einer grössern Zahl heranwächst, indem die Anzahl der Glieder, aus welchen besagter Nenner zusammengesetzt ist, mit n ungemein rasch wächst, und gleich der Permutationszahl aus n combinatorischen Elementen, d. h.

$$= n.(n-1)(n-2)\ \ldots\ldots 2.1$$

wird, während ausserdem noch jedes dieser Glieder als ein Product erscheint, von einer stets grösser werdenden Anzahl, nämlich n Factoren. Das Formen solcher aus sehr vielen Gliedern bestehenden Polynome erheischt nur eine gewisse bestimmte Ordnung im Operiren, die die Sicherheit gibt, dass man alle Glieder gebildet, keines ausgelassen, und auch keines zweimal hingeschrieben habe, und dass man überdiess auch in keinem Gliede das Zeichen verfehlt hat. Ueber diese hier zu beobachtende Ordnung wird es erspriesslich seyn, einige Worte zu sagen.

Das Zusammenzählen der Glieder des bereits gebildeten Polynoms, die $n(n-1)\ldots$ $\ldots 2.1$ an der Zahl vorhanden seyn müssen, liefert zwar ein Kennzeichen der Richtigkeit der Operation, aber kein genügendes, indem dadurch weder Wiederholungen noch falsche Zeichen vermieden werden, dass aber wirklich der in Rede stehende Nenner die angezeigte Anzahl von Gliedern in sich schliesse, geht unter andern auch aus dem Umstande hervor, dass er zusammengesetzt ist aus allen möglichen Producten von n Factoren, die sich aus den Coefficienten der n Gleichungen bilden lassen, unter der Bedingung, dass jeder Factor einer andern horizontalen und zugleich einer andern Verticalreihe der Coefficienten entnommen werde. In der That, nehmen wir Behufs der Bildung aller dieser möglichen Producte, den ersten Factor aus der ersten Horizontalreihe, so kann diess, weil da n disponible Coefficienten vorhanden sind, auf n verschiedene Arten geschehen; hat man aber einen bestimmten von ihnen adoptirt, so wird man den zweiten Factor aus der zweiten Horizontalreihe nur auf $(n-1)$ verschiedene Arten wählen können, weil man den derselben Verticalreihe angehörigen, der gestellten Bedingung gemäss wegzulassen genöthigt ist, eben so wird der dritte Factor aus der dritten Horizontalreihe nur auf $(n-2)$ verschiedene Arten u. s. w. bis zu dem letzten Factor, der aus der letzten Horizontalreihe nur auf eine Weise wählbar ist. Diess gibt aber nur offenbar verschiedene Producte $n:(n-1)(n-2)\ldots 2.1$ an der Zahl, die sich freilich in speciellen Fällen bei gewissen unter den Coefficienten vorhandenen Relationen, und namentlich dann, wenn darunter der Nulle gleiche vorkommen, auf eine geringere Zahl reduciren können; die Discussion jedoch dieser Fälle wollen wir an diesem Orte unterlassen. — Bekanntlich etablirt man vieles der combinatorischen Elemente durch den Umstand, dass man sie durch Zahlen ausdrückt, eine Rangordnung, indem man dasjenige Element, welches durch die höhere Zahl angedeutet ist, von höherem Range voraussetzt, es hat diess den wesentlichen Vortheil, dass man bei der Bildung von Combinationsformen aus den einzelnen Elementen keine auslassen kann, indem man bei der Einreihung derselben der natürlichen Rangordnung folgt. Man findet daher auch für gut, unter den aus combinatorischen Elementen zusammengesetzten Gruppen, eine ähnliche Rangordnung zu etabliren, und schreibt demnach derjenigen Gruppe oder Complexen, die von der Linken gegen die Rechte zu gezählt, an einer früheren Stelle ein höheres Element trägt, einen höheren Rang zu. Es ist demnach diejenige Gruppe von höherem Range, welche, so lange wenigstens die Zahl der combinatorischen Elemente, die in dieselbe eingehen, nicht die einzifferige Zahl 9 übersteigt, als Zahl im decadischen System betrachtet, einen höheren numerischen Werth ausweist.

Hat man nun, um den erwähnten Nenner zu bilden, aus n Elementen alle möglichen Permutationen zu formen, so wird man gut thun, hierbei auf die Rangordnung der Gruppen Rücksicht zu nehmen, zuerst die dem Rang nach die niederste, d. h.

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, .\, .\, .\, n$$

hinzuschreiben, und hieraus stets die nächst höhern, also diejenige, die in der möglichst grössten Anzahl von Anfangsstellen, mit der bereits aufgeschriebenen übereinstimmt, abzuleiten, dergestalt, dass zwischen die zwei Gruppen keine eingeschaltet werden kann, die aus denselben Elementen geformt, höher im Range als die erste und niederer im Range als die zweite ist. Diess bezweckt man aber so: Man untersucht, welches von der Rechten gegen die Linke zugehend, das erste Element sey, anstatt dessen aus dem folgenden, d. h. rechts sich befinde, ein höheres gesetzt werden kann. Hat man diess entdeckt, so schreibt man die vorangehenden, d. h. links vorhandenen Elemente in umgeänderter Ordnung nieder; anstatt des bezeichneten Elementes aber setzt man aus dem folgenden das höhere, und so deren mehrere vorhanden sind, das nächst höhere, und lässt die übrigen Elemente nach ihrer Rangordnung folgen. Auf diese Weise erhält man, wenn $n = 4$ ist, folgende Complexionen, 24 an der Zahl:

$$\begin{array}{c}
1 . 2 . 3 . 4 \\
1 . 2 . 4 . 3 \\
1 . 3 . 2 . 4 \\
1 . 3 . 4 . 2 \\
1 . 4 . 2 . 3 \\
1 . 4 . 3 . 2 \\
2 . 1 . 3 . 4 \\
2 . 1 . 4 . 3 \\
2 . 3 . 1 . 4 \\
2 . 3 . 4 . 1 \\
2 . 4 . 1 . 3 \\
2 . 4 . 3 . 1 \\
3 . 1 . 2 . 4 \\
3 . 1 . 4 . 2 \\
3 . 2 . 1 . 4 \\
3 . 2 . 4 . 1 \\
3 . 4 . 1 . 2 \\
3 . 4 . 2 . 1 \\
4 . 1 . 2 . 3 \\
4 . 1 . 3 . 2 \\
4 . 2 . 1 . 3 \\
4 . 2 . 3 . 1 \\
4 . 3 . 1 . 2 \\
4 . 3 . 2 . 1
\end{array}$$

In jeder dieser Complexion fügt man nun zum ersten Element den Begleiter 1. zum zweiten den Begleiter 2, zum dritten den Begleiter 3, zum vierten 4 hinzu, schliesst jedes sammt seinem Begleiter in eine Klammer ein, und hat so alle Glieder, aus welchen der Nenner besteht, bis auf das Zeichen. Um letzteres zu bestimmen, beachtet man die Anzahl der Compensationen in einer jeden Gruppe, und schreibt überall, wo diese Gerade ist, das Zeichen $+$, und wo sie Ungerade ist, das Zeichen Minus. Man wäre hierbei, da es so leicht ist, eine Compensation zu übersehen, der Gefahr ein Zeichen zu irren ausgesetzt, wenn nicht eine sehr in die Augen fallende Regelmässigkeit in der Aufeinanderfolge derselben sich hier kund gäbe. Namentlich sieht man bei dem früher angeführten aus 6 Gliedern bestehenden Nenner, der einem Systeme von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten angehört, auf ein positives, zwei negative, dann zwei positive, und endlich ein negatives Glied folgen. Diese regelmässige Aufeinanderfolge von positiven und negativen Gliederpaaren gewahrt man auch bei dem gemeinschaftlichen Nenner, der vieren Gleichungen mit 4 Unbekannten angehört, und der so aussieht:

$$
\begin{array}{l}
+\ (1.1)\ (2.2)\ (3.3)\ (4.4) \\
-\ (1.1)\ (2.2)\ (4.3)\ (3.4) \\
-\ (1.1)\ (3.2)\ (2.3)\ (4.4) \\
+\ (1.1)\ (3.2)\ (4.3)\ (2.4) \\
+\ (1.1)\ (4.2)\ (2.3)\ (3.4) \\
-\ (1.1)\ (4.2)\ (3.3)\ (2.4) \\
-\ (2.1)\ (1.2)\ (3.3)\ (4.4) \\
+\ (2.1)\ (1.2)\ (4.3)\ (3.4) \\
+\ (2.1)\ (3.2)\ (1.3)\ (4.4) \\
-\ (2.1)\ (3.2)\ (4.3)\ (1.4) \\
-\ (2.1)\ (4.2)\ (1.3)\ (3.4) \\
+\ (2.1)\ (4.3)\ (3.3)\ (1.4) \\
+\ (3.1)\ (1.2)\ (2.3)\ (4.4) \\
-\ (3.1)\ (1.2)\ (4.3)\ (2.4) \\
-\ (3.1)\ (2.2)\ (1.3)\ (4.4) \\
+\ (3.1)\ (2.2)\ (2.3)\ (1.4) \\
+\ (3.1)\ (4.2)\ (1.3)\ (2.4) \\
-\ (3.1)\ (4.2)\ (2.3)\ (1.4) \\
-\ (2.1)\ (1.2)\ (2.3)\ (3.4) \\
+\ (4.1)\ (1.2)\ (3.3)\ (2.4) \\
+\ (4.1)\ (2.2)\ (1.3)\ (3.4) \\
-\ (4.1)\ (2.2)\ (3.3)\ (1.4) \\
-\ (4.1)\ (3.2)\ (1.3)\ (2.4) \\
+\ (4.1)\ (3.2)\ (2.3)\ (1.4)
\end{array}
$$

und findet sich natürlich zur Vermuthung angeregt, diese regelmässige Aufeinanderfolge sey eine allgemeine gültige, in der Natur der Sache begründete, man brauche daher die Anzahl der Complexionen gar nicht zu beachten, sondern immer auf zwei negative Glieder zwei positive folgen zu lassen. Eine nähere Untersuchung jedoch bringt uns sehr bald zur Kenntniss einer Ausnahme von dieser Regel, denn schon bei 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten stösst man bei der Bildung aller Permutationen aus 5 Elementen auf folgende Gruppen, die 23ste, 24ste und 25ste im Range,

$$
\begin{array}{c}
1 \, . \, 5 \, . \, 4 \, . \, 2 \, . \, 3 \\
1 \, . \, 5 \, . \, 4 \, . \, 3 \, . \, 2 \\
2 \, . \, 1 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5
\end{array}
$$

Diese liefern zum gemeinschaftlichen Nenner folgende drei Glieder:

$$
\begin{array}{c}
-\ (1\,.\,1)\ (5\,.\,2)\ (4\,.\,3)\ (2\,.\,4)\ (3\,.\,5) \\
+\ (1\,.\,1)\ (5\,.\,2)\ (4\,.\,3)\ (2\,.\,4)\ (3\,.\,5) \\
-\ (2\,.\,1)\ (1\,.\,2)\ (3\,.\,3)\ (4\,.\,4)\ (5\,.\,5)
\end{array}
$$

deren Compensationszahlen bezüglich 5 . 6 . 1 sind, die somit die Zeichen —, +, — tragen. Es findet also beim Uebergange vom 24sten zum 25sten Glied eine Unterbrechung der obern ähnlichen Regelmässigkeit statt, von da an weiter jedoch kehrt jene Regelmässigkeit wieder, und leidet nur eine Ausnahme beim Uebergange von der 48sten zur 49sten Gruppe, was übrigens an und für sich klar ist aus dem Umstande, dass bei allen zwischen die 24ste und 49ste Gruppe fallenden Complexionen das erste Element 2 ist, und nur die übrigen 1 . 3 . 4 . 5 ihre Stellen verwechseln, sonach dieselben Zeichenbeziehungen wie die permutirten Elemente 1 . 2 . 3 . 4 darbieten müssen; es wäre demnach nicht uninteressant zu untersuchen, sowohl woher die regelmässige Aufeinanderfolge der Zeichenpaare, als auch die bei gewissen Gliedern stattfindende Ausnahme von derselben rühre. Diese Untersuchung, in der Form, in welcher sie von Herrn JOSEPH KOLBE, Assistenten der k. k. polytechnischen Schule, durchgeführt worden ist, fügen wir hier noch an.

„Eine gut geordnete Gruppe von n Elementen bietet keine Compensation dar. Die erste an dieser Gruppe vorzunehmende Permutation nimmt nur auf die zwei letzten Stellen einen Einfluss, und bringt eine Gruppe hervor, in welcher man Eine Compensation findet. In der dritten Gruppe sind die drei letzten Plätze anders als in der zweiten besetzt, sie enthält eine Compensation; die nächste an ihr vorzunehmende Permutation vertauscht nur die zwei letzten Elemente, und erzeugt so eine neue Compensation, also enthält die vierte Gruppe deren zwei. Es soll nun untersucht werden, nach welchem Gesetze die Ordnungszahl einer bestimmten Gruppe und die Anzahl der Compensationen, die sie enthält, zusammenhängen."

„Betrachten wir irgend eine Complexion von n Elementen, in welcher jedes von den r letzten Elementen grösser als das ihm folgende Element seyn soll. Die Anzahl der Compensationen, welche die $n-r$ vorangehenden Elemente unter sich darbieten, wollen wir mit u, und die Anzahl der Compensationen zwischen den $n-r$ ersten und den r letzten Elementen mit v bezeichnen. Die Anzahl z derjenigen Compensationen, die zwischen den r letzten Elementen stattfinden, ist zufolge der Stellung dieser Elemente

$$z = r-1+r-2+r-3+\ldots+2+1 = \frac{r(r-1)}{2};$$

also die Anzahl aller in der betrachteten Gruppe vorkommenden Compensationen

$$N = u+v+\frac{r(r-1)}{2}.\text{“}$$

„Die nächste Gruppe wird aus der so eben betrachteten bekanntlich auf folgende Art abgeleitet. Die $n-r-1$ ersten Stellen bleiben unberührt; an die $n-r$te Stelle tritt eines von jenen Elementen, die früher die r letzten Stellen einnahmen, und zwar dasjenige, welches um so wenig als möglich höher ist, als das früher an der $(n-r)$ten Stelle gestandene. Die bisher noch nicht verwendeten r Elemente werden nun so an einander gereiht, dass jedes von ihnen niedriger als sein Nachfolger ist. — Aus der Art dieses Vorganges ergibt sich Folgendes. Die Compensationen, deren Anzahl wir mit u bezeichneten, finden sich sämmtlich in der neuen Gruppe wieder vor. Was die v Compensationen betrifft, die früher zwischen den $n-r$ ersten und den r letzten Elementen stattfanden, so kommt zu ihnen Eine neue hinzu, indem das Element, das früher an der $n-r$ten Stelle stand, einem höhern aus den nachfolgenden Platz macht. Die z Compensationen aber, die früher in den r letzten Stellen stattfanden, gehen jetzt alle verloren, denn die r letzten Elemente in der neuen Gruppe geben gar keine Compensationen. Daher ist die Anzahl der Compensationen der neuen Gruppe $N' = u+v+1$, und somit die Anzahl der Compensationen, die man bei dem Uebergange von der zuerst betrachteten auf die nächste Gruppe verliert,

$$N - N' = d = \frac{r(r-1)}{2} - 1.\text{“}$$

„Der kleinste Werth, den wir in dieser Untersuchung dem r geben können, ist offenbar 1; diesen Werth hat r, so oft das letzte Element höher als das vorletzte ist, also in jeder Gruppe, deren Ordnungszahl ungerade ist. Für $r=1$ wird aber $d=-1$, also wird beim Uebergange von der ersten auf die zweite, von der dritten auf die vierte.., von der 9ten auf die 10te... Gruppe stets Eine Compensation gewonnen. Für $r=2$ wird $d=0$, und für jeden Werth des r, der grösser als 2 ist, wird d positiv, und zwar für $r=2$ und $r=3$ eine gerade Zahl. Daraus folgt, dass die Gruppen Nr. 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13... von beliebig vielen Elementen eine gerade, die Gruppen Nr. 2, 3, 6, 7, 10, 11... eine ungerade Anzahl von Compensationen enthalten. Diese regelmässige Abwechselung von zwei auf einander folgenden Gruppen der ersten Art mit zweien der zweiten Art wird aber unterbrochen, sobald r oder $r-1$ durch 4 theilbar ist, denn in diesem Falle ist d eine ungerade Zahl. Dieser Fall tritt ein, wenn die 4, 5, 8, 9.... letzten Elemente einer Gruppe in umgekehrter Rangordnung neben einander stehen. Man sieht nun, dass (setzen wir eine recht bedeutende Anzahl von Elementen voraus) nach der ersten Gruppe immer zwei mit einer ungeraden Anzahl von Compensationen und zwei mit einer geraden Anzahl derselben abwechseln; die 22ste und 23ste Gruppe haben 5, die 24ste 6, die 25ste aber Eine Compensation. Von hier an herrscht wieder der regelmässige Gang wie früher, eine Unterbrechung aber findet jedesmal dann wieder statt, wenn die vier oder fünf, acht oder neun... letzten Elemente der ersten Gruppe auf alle möglichen Arten ohne Berührung der früheren Elemente versetzt worden sind. Es ist $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40320$, $9! = 362880$, demnach haben wir jede 24ste Gruppe mit Ausnahme der 720sten, 1440sten, 2160sten, 2880sten u. s. f. bis zur 40320sten als diejenigen zu bezeichnen, nach welchen eine Unterbrechung jener einfachen Abwechselung statt hat."

Jedenfalls wird, wenn man auch nicht Lust hat, sich die hier gerechneten Zahlen zu merken, das Geschäft der Bildung des Nenners schon dadurch ungemein erleichtert, dass man bei je auf einander folgenden 24 Gliedern eine regelmässige Aufeinanderfolge der Zeichenpaare voraussetzen, und nur beim Uebergange vom 24sten auf das 25ste Glied, nach der Zahl der Compensationen, und hiermit zusammenhängend nach den Zeichen zu forschen hat.