III. Was sind die imaginären Grössen, und welcher ist ihr analytischer und geometrischer Sinn.

Von

Professor Joseph Arenstein.

Mitgetheilt am 1. October 1847 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

---

§. 1.

Die Mathematik vermag Nichts ausser dem Gebiete der Grössen. — Es ist aber wunderbar, mit welcher Fertigkeit sie sich dieser allenthalben bemächtigt. Erinnern wir uns nur der Netze, mit welchen sie Himmel und Erde umsponnen hat; jenes System von Linien, die sich auf Länge und Breite, Azimuth und Höhe beziehen; jener Abscissen und Ordinaten, Transversalen und Evoluten, und aller der logarithmischen und trigonometrischen Functionen, die als eben so viele Instrumente bereit liegen, um gebraucht zu werden. Diesen Instrumenten und Apparaten, die sämmtlich den Eindruck einer sinnreichen Maschine machen, verdanken wir die grösste Wohlthat, und den grössten Vorzug der Mathematik: dass wir nämlich lange vorher, ehe wir hinreichende Erfahrungen über das wirklich Existirende besitzen, schon die Möglichkeiten überschauen können, in deren Grenzen die Wirklichkeit liegen muss. Und doch sind diese Instrumente keine wirklich existirende Dinge, sondern nur zweckmässig erdachte künstliche Hilfsmittel, nützliche Fictionen, bequeme Gussformen des Denkens. Es fällt uns eben so wenig ein, sphärische Dreiecke an der Himmelskugel zu ziehen, wie das Moment der Trägheit auf der Decimalwage zu bestimmen. Warum sprechen wir denn wohl vom mathematischen Hebel, vom einfachen Pendel, von Wurflinien im luftleeren Raume. Warum, mit einem Wort, bedienen wir uns so vieler fingirter Hilfsgrössen? — Die Antwort liegt schon im Gesagten. Diese Fictionen nämlich leisten wirkliche Hilfe, ohne welcher wir den erwähnten Vorzug der Mathematik gar nicht ausbeuten könnten. — Zu diesen Hilfsgrössen nun gehören auch die sogenannten imaginären Grössen, und wir wollen uns hier mit der Entwicklung ihres Begriffes, ihrer Eigenschaften und ihres analytischen und geometrischen Sinnes befassen. —

Es ist ein ausschliessliches Privilegium der Mathematik, dass sich die Grenzen ihrer Grundbegriffe in demselben Verhältniss ausdehnen, in dem ihr Wirkungskreis zunimmt. — Wir wollen diesen Satz durch ein Beispiel erläutern. — Einst verstand man unter dem Worte „Zahl“ nur ganze positive Zahlen, und so lange man nicht mit Buchstaben, d. h. mit allgemeinen Grössen rechnete, also beiläufig bis zur Mitte des sechzehnten Jahrhunderts, mochten wohl auch die negativen Grössen in der Mathematik nicht so eingebürgert sein. Die erste Gleichung von der Form

$$x = a - b$$

wenn $b > a$ war, d. h. wenn sich die Subtraction in der angezeigte Ordnung nicht verrichten liess, musste auf den Begriff der negativen Grössen führen; gleichwie die erste Gleichung von der Form

$$a x = b$$

$$x = \frac{b}{a}$$

wenn b nicht sämmtliche Factoren von a enthielt, zu gebrochenen Zahlen oder Grössen führen musste. Und es war wohl der Mathematiker in keiner geringen Verlegenheit, der zuerst eine negative Zeit, Kraft oder Geschwindigkeit als Resultat seiner Rechnung erhielt. — Kaum hatte man sich mit den negativen und gebrochenen Grössen befreundet, als man etwa auf folgende Relation stiess:

$$a^m < x < (a + 1)^m$$

wo a und m ganze und positive Zahlen sind. Suchte man nun $\sqrt[m]{x}$, so passte diese weder unter die ganzen noch gebrochenen positiven oder negativen Zahlen, man stabilirte eine neue Classe von Zahlen, und nannte $\sqrt[m]{x}$, so oft x obiger Relation entsprach, eine irrationale Zahl oder Grösse. Diese verschiedenen Gattungen von Zahlen waren in der ursprünglichen Definition der „Zahl" nicht enthalten, und konnten es auch nicht seyn, denn da man nur mit positiven ganzen Zahlen rechnete, war auch in dem „Eine Zahl ist eine Mehrheit von Einheiten" blos $+1$ verstanden. Man beseitigte diese Schwierigkeit, indem man den Begriff der Einheit und somit auch den Umfang jener Definition erweiterte.

Einen ähnlichen Vorgang finden wir beim Potenziren. Man hatte einst eine Definition, die nur Potenzen mit ganzen positiven Exponenten umfasste. Unterdessen erschienen in einer vielleicht sehr einfachen Rechnung Ausdrücke wie:

$$a^{-m}, \quad a^{\frac{1}{m}}, \quad a^0,$$

denen man einen neuen Namen nicht geben konnte, weil sie alle Eigenschaften mit den Potenzen theilten, obwohl sie in jene Definition nicht eben passten. Die Mathematik nahm denselben Ausweg, und dehnte die eng gewordene Definition der Art aus, dass, wenn a und r was immer bedeuten, von $-\infty$ bis $+\infty$ die Erklärung des Ausdrucks a^r folgende sey: a zur rten Potenz erheben, heisst aus a durch die nächst höhere Operation eine Zahl so bilden, wie r gebildet ist aus der Einheit. — Durch diese Erklärung, die das Wurzelziehen als eine Art des Potenzirens erscheinen lässt, wird die Anzahl der Grundbegriffe um einen vermindert, nämlich um den einst isolirten und selbstständigen Begriff des Wurzelziehens, was die Wissenschaft einfacher und daher zugänglicher macht.

Beleuchten wir nun die Handlungsweise, welche die Mathematiker bei Aufnahme der erwähnten neuen Elemente in die Wissenschaft befolgten. — Als man unter dem Worte Zahl nur ganze und positive verstand, mussten schon Regeln existiren, wenigstens für die einfachen Operationen. Später, als bei Erweiterung der Begriffe die negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen hinzukamen, fiel es Niemanden ein, die schon begründeten Regeln zu ändern, noch weniger sie umzustossen, vielmehr wurde von den neuen Elementen, als jungen Bürgern des wissenschaftlichen Staates, gefordert: dass sie sich den bestehenden Regeln anschmiegen, und nur wenn neue Operationen oder Methoden, die neue Regeln bedingten, erfunden wurden, waren die später eingebürgerten Elemente besonders zu berücksichtigen. Man änderte z. B. keineswegs die Regeln der Multiplication, der negativen gebrochenen und irrationalen Zahlen wegen; man dehnte sie vielmehr auf diese, ja sogar auf die Zeichen $+$ und $-$ aus.

Wenn wir von diesem und dem ganz analogen Verfahren, welches die Mathematiker bei Annahme anderer neuer Grössen als log x, linea trig x, u. s. w. befolgten, eine allgemeine Regel abstrahiren wollen, so finden wir: dass man bei Annahme neuer Elemente das System der vor jenen bestandenen Regeln und Methoden unversehrt liess, vielmehr forderte, dass sich die neuen Elemente ihnen anschmiegen, jene Methoden hingegen, die nach den neuen Elementen entdeckt wurden, konnten nur dann als allgemein giltig anerkannt werden, wenn ihre Anwendbarkeit auch auf die neuen Elemente erwiesen war. — Die imaginären Grössen sind solche neue Elemente der Wissenschaft, junge Bürger im Saate der Quantitäten, und wir werden die eben abstrahirte Regel auf dieselben in aller Strenge anwenden.

§. 2.

Als die mathematischen Wissenschaften so weit vorgeschritten waren, dass man Gleichungen vom zweiten Grade in allgemeiner Form auzulösen im Stande war, konnte sich leicht ergeben:

$$x^2 = -a$$

woraus

$$x = \sqrt{-a}$$

welcher Gleichung keinerlei durch Zahlen ausdrückbarer Werth entsprach. — In dieser Beziehung sind also die imaginären Grössen mit den ersten Elementen der Wissenschaft gleichzeitig; da man aber ihren Sinn nicht kannte, blieben sie lange aus den gewöhnlichen Rechnungsoperationen ausgeschlossen, gleichwie es mit den negativen Wurzeln der Gleichungen geschehen ist, die man lange *falsche Wurzeln* nannte. — So oft die Analysis auf eine Gleichung führte von der Form

$$x = \sqrt[2n]{-a}$$

wo n eine ganze positive oder negative Zahl ist, wurde x immer eine *imaginäre oder unmögliche Grösse* genannt. Die Worte „*imaginäre oder unmögliche Grösse*“ beziehen sich auf die materielle Natur und deren physische Eigenschaften nicht aber auf die Analysis; denn diese als solche kennt weder unmögliche Grössen, noch unmögliche Aufgaben. Für sie ist jede Grösse und jede Aufgabe nicht nur möglich, sondern sie existiren auch; nur die Repräsentation in der Natur fehlt dort, wo sich imaginäre Grössen als Resultat der Rechnung ergeben. Ja wir werden sogar Fälle aufzählen, wo selbst imaginäre Ausdrücke offenbaren wirklichen Sinn haben.

Es gibt kaum eine Erfindung, von der man, nachdem sie gemacht war, nicht gesagt hätte: „das hätte man schon längst wissen können.“ So ist es auch mit den imaginären Grössen. Ausser den unzähligen Wegen, auf welchen die operative Analysis maschinenmässig zum Begriff der imaginären Grössen führt, gibt es noch eine Art, nach welcher man die Nothwendigkeit der analytischen Existenz der imaginären Grössen auch „a priori“ einsehen kann; so zwar, dass man vom Reellen zum Imaginären auf zwei Arten gelangen kann: practisch, indem man, um nur ein Beispiel zu erwähnen, die Gleichung $x^2 = -a$ untersucht, und theoretisch, worauf Gauss zuerst aufmerksam gemacht hat, — wie folgt.

Der Umstand, dass den positiven Zahlen oder Grössen die negativen, den ganzen die gebrochenen, den rationalen die irrationalen gewissermassen entgegengesetzt sind, können mitunter als Fingerzeig dienen, dass vermuthlich auch den reellen Grössen ein solcher „*Pendant*“ entspreche. — Der Begriff des Positiven und Negativen findet nur dort Anwendung, wo das, was wir zählen oder einer Rechnung unterwerfen, ein Entgegengesetztes von der Art hat, dass man Gezähltes und Entgegengesetztes zusammenhält, oder was dasselbe ist, gleichzeitig denkt, dieses ein Aufheben, eine mathematische Vernichtung hervorbringt. Zugleich ist hier zu bemerken, dass wir selbst dann die negativen Grössen dulden, anwenden, als nothwendig erachten, wenn das Entgegengesetzte desjenigen, was wir eben zum Gegenstand einer Rechnung machen, in der physischen Natur nicht existirt. — Obige Hypothese: dass nämlich Positives und Negatives gleichzeitig denken, so viel heisse als beides vernichten, bedingt:

1) dass wir nicht mit materiellen Grössen, sondern mit Begriffen und Verhältnissen rechnen; denn zwei Thaler z. B. die jemand schuldet, werden wohl nie andre zwei Thaler, die er bei sich trägt, vernichten, obwohl er gleich einsehen muss, dass er nichts besitzt, wenn er den Thaler zweimal als Eigenthum und zweimal als passive Schuld g l e i c h z e i t i g d e n k t.

2. Dass die Gegenstände auf eine gewisse constante Weise in eine Reihe geordnet und dabei so beschaffen sind, dass, wenn die successiven Glieder der Reihe sind

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \ldots\ldots$$

b in demselben Verhältniss steht zu a wie c zu b, wie d zu c u. s. w. Bezeichnen wir eines dieser Verhältnisse, z. B. jenes, in welchem c zu d steht mit $+1$, so wird, um -1 zu erhalten, nicht weiter nöthig seyn, als dasselbe Verhältniss umgekehrt zu betrachten. — Nehmen wir an a, b, c ... seyen gleich weit entfernte Puncte einer geraden Linie AB, auf welcher sich ein Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit von A gegen B bewegt. Nennt man die Zeit, welche das Bewegliche braucht, um von einem Puncte zum nächsten zu gelangen, t, und ist die Zeit, in welcher der Körper in c war T, so wird die Zeit, in welcher derselbe in d seyn wird

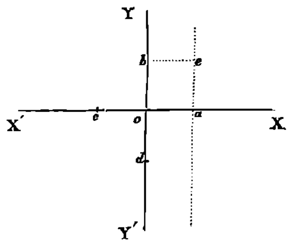
$$= T + t.$$

Wäre aber diese Zeit bekannt und es fragte sich, wann er in c war, so wird man t subtrahiren und haben:

$$T + t - t = T.$$

So oft nun die Gegenstände so geordnet sind, oder als so geordnet gedacht werden können und gleich sind, — denn diess fordert das numerisch gleiche Verhältniss $+1$ und -1, — so oft können wir nach Belieben von einem Puncte zum andern d. h. von einem Gegenstand zum andern übergehen, und zwar durch den Begriff des Positiven in der einen Richtung, z. B. vorwärts und mittels des Begriffes des Negativen in entgegengesetzter Richtung, also rückwärts, und das Maass eines solchen Ueberganges ist dann eben jener Werth des Verhältnisses $+1$ oder -1. Es ist bekannt, dass die Gegenstände, die als in eine Reihe geordnet gedacht werden können, Grössen von einer Dimension genannt werden.

Nehmen wir aber an, der Gegenstand einer Rechnung sey in einer Ebene, so ist leicht einzusehen, dass diess eine Grösse von zwei Dimensionen sey, denn bekanntlich wissen wir nicht viel von der Ausdehnung eines ebenen Gegenstandes, wenn wir dessen Länge und nicht zugleich auch seine Breite kennen. — Es sey nun das Papier diese Ebene; ziehen wir rechtwinklige Coordinaten-Axen und nennen jene x und y positiv, welche auf den Seiten ox und oy, jene aber negativ, die auf den Seiten O X′ und O Y′ liegen. — Wenn man jeweilig nur eine der Axendimensionen berechnet, so kann man mit dem Begriff des Positiven und Negativen von einem Punct zum andern gelangen. — Nimmt man daher die Linie oa als Einheit und macht, dass



$$oa = ob = co = od,$$

so ergibt sich der Sinn folgender Gleichungen sehr leicht:

$$x = 1\ ;\ x = -1$$
$$y = 1\ ;\ y = -1.$$

Will man hingegen von o auf e übergehen, so kommt man mit einer Gleichung nicht aus und muss zwei Gleichungen coexistiren lassen oder gleichzeitig denken; das heisst aber so viel als fordern:

1. Man nehme die Linieneinheit auf der Axe der positiven x einmal,

2. durch den Endpunct, also durch a, ziehe man eine Parallele zu Y Y′ und

3. auf dieser nehme man von a aus, auf der Seite der positiven y, die Linieneinheit einmal.

Analysirt man dieses Verfahren genauer, so findet sich, dass ausser der zweimaligen Anwendung des Begriffes des Positiven noch postulirt wird: dass die Axe der x senkrecht sey auf die Axe der y, und dass durch den Punct a zu YY' eine Parallele gezogen werde, oder dass YY' parallel zu sich selbst nach a vorgerückt werde. — Drücken wir nun dieses Postulat durch ein Symbol aus, z. B. durch *, so dass

$+$	die Richtung	oX
$-$	„ „	oX'
$+*$	„ „	oY
$-*$	„ „	oY' bedeute,

so wird

$+1$	den Punct	a
-1	„ „	c
$+*1$	„ „	b
$-*1$	„ „	d bedeuten.

Nimmt man aber an, dass

	$+1$	die Einheit der Entfernung	vorwärts bedeute, so folgt von
selbst, dass	-1	„ „ „ „	rückwärts,
	$+*1$	„ „ „ „	seitwärts und links,
	$-*1$	„ „ „ „	seitwärts und rechts

bezeichnet, und es wird nun die Analysis selbst erklären, was eigentlich das Symbol * sey.

Da nämlich keine der vier Richtungen oX oX' oY und oY' ein besonderes Vorrecht hat, so hätten wir die Richtung oY eben so gut für vorwärts nehmen und mit $+1$ bezeichnen können, als wir diess mit oX gethan; es ist also nicht abzusehen, warum es nicht möglich und erlaubt seyn sollte, die Modificationen, welche wir mit $+*$ und $-*$ ausgedrückt haben, zweimal nach einander anzuwenden. — Nehmen wir an, dass die Modification $+*$ auf die Linie oa angewendet werde. Hiedurch geht oa über in ob; denn wer von o aus nach a sieht, dem liegt b zur Linken. Wenden wir dieselbe Modification auf ob noch einmal an, so geht ob über in oc, denn wer von o aus nach b sieht, dem liegt c zur Linken. Wir bezeichneten aber früher oc mit -1 folglich ist

$$(+{*1})\times(+{*1}) = -1 \qquad (\alpha)$$

oder

$$(+{*1})^2 = -1$$

und hieraus:

$$+{*1} = \sqrt{-1} \qquad (\beta).$$

Wenn wir dieses Verfahren noch weiter fortsetzen und die Modification $+*1$ drei-, vier- u. s. w.-mal auf dieselbe Linie anwenden, so bekommen wir successiv die Puncte d, a, b, c, u. s. w., während aus (β) folgt:

$$*1 \,.\, *1 \,.\, *1 = *1 \,.\, (*1)^2 = -1 \,.\, \sqrt{-1} = \sqrt{-1} = -{*1} \qquad (\gamma)$$

$$*1 \,.\, *1 \,.\, *1 \,.\, *1 = (*1)^2\,(*1)^2 = -1 \,.\, -1 = (-1)^2 = +1 \qquad (\delta)$$

welche Resultate ganz mit den obigen Annahmen übereinstimmen, denn wir haben d, zu welchem (γ) gehört, wirklich mit $-{}^*1$, und a, zu welchem (δ) gehört, mit $+1$ bezeichnet.

Zu denselben Resultaten führt unmittelbar der Umstand, dass, wie wir bemerkten, keine der vier Richtungen ein besonderes Vorrecht hat., und dass, weil obige Zeichnung nur zur Versinnlichung der Sache dient und hier keinen essentiellen Werth hat, — da das Wort „Richtung" leicht mit dem allgemeineren „Verhältniss" vertauscht werden kann. — Hieraus folgt nämlich, dass wenn wir das früher mit $+{}^*$ bezeichnete Verhältniss jetzt durch $+1$ ausdrücken: nothwendig das frühere -1 jetzt in $+{}^*$ übergehe, oder mit andern Worten: $+1$ steht in demselben Verhältniss zu $+{}^*1$, in welchem $+{}^*1$ steht zu -1, d. h. $+{}^*1$ ist die mittlere Proportionale zwischen $+1$ und -1, es steht daher:

$$+1 : +{}^*1 = +{}^*1 : -1$$

und aus demselben Grund:

$$+1 : -{}^*1 = -{}^*1 : -1$$

aus beiden Proportionen folgt, was wir schon in (β) fanden:

$$+{}^*1 = \sqrt{-1}.$$

Aus dem Gesagten ist klar, dass

a) so oft die Gegenstände oder Grössen von der Art sind, dass sie nicht in eine Reihe, sondern nur in Reihen von Reihen geordnet werden können; dabei aber

b) so beschaffen sind, dass der Uebergang von einer Reihe in eine andere so geschieht, wie bei den Grössen von einer Dimension der Uebergang von einem Gliede zum nächsten; und wir endlich

c) keinerlei Postulate machen oder Hypothesen aufstellen wollen:

dass wir in diesem Falle ausser dem $+1$ und -1 noch die Einheiten $\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ brauchen, um den Uebergang von irgend einem Gliede des Systemes auf ein beliebiges anderes zu vermitteln und zu messen.

Da wir die vier Modificationen bisher nur auf die Einheit der Linien bezogen, so kann $\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ nur dazu dienen, um den Uebergang von einem Gliede der einen Reihe auf irgend eines der nächsten Reihe zu messen. Will man daher auf die zweite, dritte oder zwölfte Reihe übergehen, so wird man, je nachdem diese rechts oder links liegt, $\sqrt{-1}$ oder $-\sqrt{-1}$ mit 12 multipliciren, Es wird somit leicht zu ersehen seyn, welche Puncte durch folgende Gleichungen bezeichnet werden:

$$x = 4 \cdot (-\sqrt{-1}) = -4\sqrt{-1} \qquad (1)$$

$$x = 3 \cdot (+\sqrt{-1}) = 3\sqrt{-1} \qquad (2)$$

$$x = 6 \cdot \sqrt{-1} \times 2 \cdot (-\sqrt{-1}) = 12 \qquad (3)$$

$$x = 2 \cdot \sqrt{-1} \times 2 \cdot \sqrt{-1} = -4 \qquad (4).$$

Interpretiren wir die Gleichungen (3) und (4):

$6 \cdot \sqrt{-1}$ heisst: die Linieneinheit werde auf die oY 6 mal aufgetragen;

$6 \cdot \sqrt{-1} \times (-\sqrt{-1})$ heisst: die aufgetragene Linie rechts, also auf oX übertragen, und

$6 . \sqrt{-1} \times (-\sqrt{-1}) \times 2$ heisst: die auf oX übertragene Linie ebendort zweimal nehmen, wodurch man, wie es die Gleichung (3) fordert, auf denselben Punct gelangt, als wenn man die Linieneinheit zwölfmal auf oX aufgetragen hätte. Ebenso findet man

$2 . \sqrt{-1} = 2$ auf oY.

$2 . \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} =$ dieselbe Linie auf oX′ übertragen.

$2 . \sqrt{-1} \times 2 . \sqrt{-1} =$ dieselbe Linie eben dort zweimal genommen, wodurch man, ganz entsprechend der Gleichung (3), auf den Punct -4 kommt.

Diess wäre also der Weg, auf welchem man zum Begriff der imaginären Grössen „a priori" gelangen kann, und er hat dabei den Vorzug, gleichzeitig nicht nur zu deren Kenntniss, sondern auch zu einer ihrer Eigenschaften und zu ihrem geometrischen Sinn zu führen. — Diese Eigenschaft wird ausgedrückt durch die Gleichungen (β), (γ) und (δ); der geometrische Sinn aber ist: die laterale Grösse. Zugleich ist einleuchtend: dass, wenn man statt den gebrauchten Ausdrücken: „positive, negative und imaginäre Einheit oder Grösse" gleich gesagt hätte: „gerade, entgegengesetzte, laterale Einheit oder Grösse" ... viel von dem Mysticismus, der lange die Erklärung der imaginären Grössen umhüllte und drückte, verschwunden wäre. —

§. 3.

Von den praktischen Wegen, den Wegen der analytischen Erfahrung, welche zu den imaginären Grössen führen, wollen wir einen besonders hervorheben, der sich hauptsächlich durch ungezwungene Eleganz auszeichnet. —

Wenn man die Reihen

$$\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots\cdots \tag{1}$$

$$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\cdots \tag{2}$$

vergleicht mit der Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\cdots \tag{3}$$

wo

$$e = 2{\cdot}718281 \ldots .$$

so bemerkt man leicht, dass zwischen den drei Reihen eine gewisse Verwandtschaft existirt; abstrahirt man nämlich vom Zeichen, so findet man, dass die $2n^{\text{ten}}$ Glieder der Reihe (3) die Reihe (1) bilden, während die Reihe (2) aus sämmtlichen $(2n+1)^{\text{ten}}$ Gliedern derselben Reihe besteht. — Man setze in (3) anstatt x ix und $-ix$:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{i^2 x^2}{1.2} + \frac{i^3 x^3}{1.2.3} + \frac{i^4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{i^5 x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\cdots$$

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1} + \frac{i^2 x^2}{1.2} - \frac{i^3 x^3}{1.2.3} + \frac{i^4 x^4}{1.2.3.4} - \frac{i^5 x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\cdots$$

Substituirt und addirt man diese Reihen und dividirt im ersten Fall durch $2i$, im zweiten durch 2, so hat man:

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{1} + \frac{i^2 x^3}{1.2.3} + \frac{i^4 x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\cdots \qquad (4)$$

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 + \frac{i^2 x^2}{1.2} + \frac{i^4 x^4}{1.2.3.4} + - \cdots\cdots \qquad (5).$$

Denkt man sich in diesen Reihen das i weg, so bemerkt man dieselben Glieder wie in (1) und (2), den Zeichenwechsel ausgenommen. Es liegt daher der Gedanke ziemlich nahe: es könnte das willkürliche i, welches nur in geraden Potenzen vorkommt, so gewählt werden, dass diese successiven Potenzen den gewünschten Zeichenwechsel hervorriefen. Will man auf diese Weise (4) und (5) in (1) und (2) übergehen lassen, so ist nothwendig, dass sey:

$$i^2 = -1\,;\; i^4 = 1\,;\; i^6 = -1\,;\; i^8 = 1\,;\; i^{10} = -1\,;\; \ldots\ldots \qquad (6).$$

Diese Gleichungen sind sämmtlich schon in der ersten enthalten:

$$i^2 = -1,$$

woraus

$$i = \sqrt{-1} \qquad (7).$$

Substituirt man diesen Werth wirklich in (4) und (5), so findet man, weil:

$(\sqrt{-1})^2 = -1$; $(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^4 = 1$; $(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^6 = -1$; $(\sqrt{-1})^7 = -\sqrt{-1}$; $(\sqrt{-1})^8 = 1$; $(\sqrt{-1})^9 = \sqrt{-1}$; $- \ldots\ldots$

oder allgemein, weil, wenn n ganz und positiv:

$$\left.\begin{aligned}
(\sqrt{-1})^{1+4n} &= \sqrt{-1}\\
(\sqrt{-1})^{2+4n} &= -1\\
(\sqrt{-1})^{3+4n} &= -\sqrt{-1}\\
(\sqrt{-1})^{4n} &= 1
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

wirklich die Reihen (1) und (2):

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots\cdots \quad (9)$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\cdots \qquad (10).$$

Diese Gleichungen werden uns zu verschiedenen Betrachtungen Veranlassung geben, mittlerweile interessiren sie uns nur insofern als sie auf die die Grösse i interpretirende Gleichung

$$i = \sqrt{-1}$$

geführt haben.

Man wird also sowohl auf dem theoretischen als auch auf dem practischen Wege gesetzmässiger algebraischer Substitution zur Kenntniss der imaginären Grössen gelangen können; ihre analytische Existenz kann daher nicht zweifelhaft seyn, und es bleibt uns nur zu untersuchen: welchen Platz sie im System der Wissenschaft einnehmen, in welchem Verhältniss sie zu den besonderen Bestandtheilen jener stehen, welche Modificationen sie nothwendig machen, und welche Vortheile sie versprechen. —

Beginnen wir unsere Untersuchung mit der Einführung der imaginären Grössen in die Theorie der Zahlen.

§. 4.

Die grosse Allgemeinheit der Sätze, welche die Theorie der Zahlen besonders auszeichnet, datirt nur von Einführung der imaginären Grössen in dieselbe. — Um diese Allgemeinheit zu erreichen, war durchaus nöthig, dass man jede Zahl von der Form

$$a + b\sqrt{-1}$$

wo a und b jede reelle Zahl bedeuten kann, zum Gegenstand der Untersuchung mache. — Nehmen wir den Ausdruck:

$$a + b\sqrt{-1}$$

als Symbol jeder Zahl an, so werden dadurch folgende Gattungen von Zahlen repräsentirt.

1. Alle reellen Zahlen, wenn nämlich $b = 0$, und zwar:
   - α) Die Nulle, wenn $a = 0$.
   - β) Die positiven Zahlen von 0 bis ∞.
   - γ) Die negativen Zahlen von $-\infty$ bis 0.
2. Die imaginären Zahlen, wenn nämlich b nicht $= 0$, und zwar:
   - α) Die rein imaginären Zahlen, wenn $a = 0$.
   - β) Die gemischten imaginären oder complexen Zahlen, wenn a nicht $= 0$.

In diesem so erweiterten Wirkungskreise der Theorie der Zahlen finden sich nur viererlei Einheiten vor:

$$+1, \quad -1, \quad \sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}.$$

Soll nämlich $b\sqrt{-1}$ eine imaginäre Zahl seyn, während b selbst reel ist, so muss diese Qualität von $\sqrt{-1}$ herkommen; dieser Factor ändert den numerischen Werth nicht, er lässt sich also so betrachten wie -1 in dem Producte $-1 \times a = -a$, d. h. als imaginäre Einheit. Man pflegt diese Einheit auch in compendiöserer Form durch i auszudrücken.

Auf ähnliche Weise wie man aus a durch Multiplication mit $+1$ und -1 zwei verschiedene Zahlen bilden kann, so wird man aus jeder Zahl von der Form

$a + b\sqrt{-1}$, den Fall ausgenommen, wenn $a = b = 0$, durch Multiplication mit $+1$, -1, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ vier verschiedene Zahlen erhalten, die **Nebenzahlen** genannt werden.

Setzt man in

$$a + b\sqrt{-1}$$

$-\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-1}$, so hat man

$$a - b\sqrt{-1}$$

die **conjugirte Zahl** der ersteren. — Hieraus folgt:

a) dass die conjugirte Zahl einer reellen Zahl sie selbst sey; und

b) dass Summe und Product zweier conjugirter Zahlen immer reel sey.

Das Product zweier conjugirter Zahlen wird ihre **Norm** (Norma) genannt. Sind $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$ diese Zahlen, so wäre ihre Norm: $a^2 + b^2$. Die Norm einer reelen Zahl ist somit ihre zweite Potenz. — Die Kenntniss der Norm und deren Anwendung gewähren in vielen Fällen vortheilhafte Anwendungen.

Setzt man in den Nebenzahlen

$$a + b\sqrt{-1} \qquad (1)$$
$$-a - b\sqrt{-1} \qquad (2)$$
$$-b + a\sqrt{-1} \qquad (3)$$
$$b - a\sqrt{-1} \qquad (4)$$

$-\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-1}$, so hat man die conjugirten Zahlen

$$a - b\sqrt{-1} \qquad (5)$$
$$-a + b\sqrt{-1} \qquad (6)$$
$$-b - a\sqrt{-1} \qquad (7)$$
$$b + a\sqrt{-1} \qquad (8)$$

und es ist die gemeinschaftliche Norm für alle acht Ausdrücke

$$a^2 + b^2$$

Wäre

$$a = b; \quad \text{oder} \quad a = 0; \quad \text{oder} \quad b = 0;$$

so würden von obigen acht Ausdrücken vier wegfallen.

Aus den gegebenen Definitionen folgt:

1. **Dem Producte zweier complexer Zahlen ist conjugirt das Product aus den Zahlen, die jenen conjugirt sind.** Sind die complexen Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ und $a' + b'\sqrt{-1}$, so ist ihr Product:

$$(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1}) = aa' + a'b\sqrt{-1} + ab'\sqrt{-1} - bb'.$$

Nennt man die diesem Producte conjugirte Zahl C, so hat man:

$$C = aa' - a'b\sqrt{-1} - ab'\sqrt{-1} - bb',$$

den gewählten zwei Zahlen aber sind conjugirt: $a - b\sqrt{-1}$ und $a' - b'\sqrt{-1}$, nennen wir ihr Product C', so ist:

$$C' = (a - b\sqrt{-1})(a' - b'\sqrt{-1}) = aa' - a'b\sqrt{-1} - ab'\sqrt{-1} - bb'$$

d. h. wie wir behauptet:

$$C = C'$$

Dasselbe gilt von jeder beliebigen Anzahl von Factoren; denn hätte man die drei complexen Zahlen:

$$a + b\sqrt{-1}\,,\quad a' + b'\sqrt{-1}\,,\quad a'' + b''\sqrt{-1}$$

so wäre ihr Product nach Obigem

$$C \times (a'' + b''\sqrt{-1})$$

oder

$$C' \times (a'' - b''\sqrt{-1})$$

d. h. der Fall ist auf den früheren, wo nur zwei Factoren vorkamen, zurückgeführt, und gestattet die Anwendung derselben Argumentation u. s. w.

2. Die Norm des Productes zweier complexer Zahlen ist gleich dem Producte ihrer Normen.

Sind z. B. die complexen Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ und $a' + b'\sqrt{-1}$, ihr Product $= C$, so ist dessen Norm N:

$$N = (aa' - bb')^2 + (a'b + ab')^2$$

die Normen aber der zwei Zahlen $a^2 + b^2$ und $a'^2 + b'^2$, und ihr Nroduct N'

$$N' = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = a^2a'^2 + b^2a'^2 + a^2b'^2 + b^2b'^2$$

das heisst:

$$N = N'$$

Auch dieser Satz lässt sich auf eine beliebige Anzahl Factoren ausdehnen, so dass man allgemein sagen kann:

Die Norm des Productes ist gleich dem Producte der Normen, und für den Fall gleicher Factoren:

Die Norm der nten Potenz ist gleich der nten Potenz der Norm der Wurzel.

Diesen zwei Sätzen ganz analog und daher nicht besonders zu beweisen sind folgende:

3. Dem Quotienten zweier complexer Zahlen ist conjugirt der Quotient aus dem jenen zwei Zahlen conjugirten.

4. Die Norm des Quotienten zweier complexer Zahlen ist gleich dem Quotienten der Normen jener Zahlen.

Diese beiden Sätzen können ebenfalls auf mehrere Formen ausgedehnt werden.

Endlich ist hier noch zu bemerken, dass man $a + b\sqrt{-1}$ eine ganze rationale complexe Zahl nennt, wenn a und b ganz und rational sind.

§. 5.

Eine ganze complexe Zahl heisst zusammengesetzt, wenn man sie in zwei von der Einheit verschiedene Formen zerlegen kann; ist diess nicht möglich, so ist sie eine complexe Primzahl.

Hieraus folgt: dass man jede zusammengesetzte reelle Zahl zugleich als eine zusammengesetzte complexe Zahl berechnen kann. Es ist sogar nicht unmöglich, manche reelle Primzahl in complexe Factoren zu zerlegen, also als zusammengesetzt darzustellen, und zwar wird man das können bei allen Primzahlen von der Form:

$$(4n + 1)$$

wo n jede ganze reelle Zahl, die >0 bezeichnet, und ausserdem noch bei der Zahl: 2. — Man findet auf diese Weise:

$$\begin{aligned}
2 &= (1 + \sqrt{-1})\,(1 - \sqrt{-1}) = 1^2 - (\sqrt{-1})^2\\
5 &= (2 + \sqrt{-1})\,(2 - \sqrt{-1}) = 2^2 - (\sqrt{-1})^2\\
13 &= (3 + 2\sqrt{-1})\,(3 - 2\sqrt{-1}) = 3^2 - (2\sqrt{-1})^2\\
17 &= (4 + \sqrt{-1})\,(4 - \sqrt{-1}) = 4^2 - (\sqrt{-1})^2\\
69 &= (5 + 2\sqrt{-1})\,(5 - 2\sqrt{-1}) = 5^2 - (2\sqrt{-1})^2\\
37 &= (6 + \sqrt{-1})\,(6 - \sqrt{-1}) = 6^2 - (\sqrt{-1})^2\\
41 &= (5 + 4\sqrt{-1})\,(5 - 4\sqrt{-1}) = 5^2 - (4\sqrt{-1})^2\\
53 &= (7 + 2\sqrt{-1})\,(7 - 2\sqrt{-1}) = 7^2 - (2\sqrt{-1})^2\\
21 &= (6 + 5\sqrt{-1})\,(6 - 5\sqrt{-1}) = 6^2 - (5\sqrt{-1})^2\\
73 &= (8 + 3\sqrt{-1})\,(8 - 3\sqrt{-1}) = 8^2 - (3\sqrt{-1})^2\\
89 &= (8 + 5\sqrt{-1})\,(8 - 5\sqrt{-1}) = 8^2 - (5\sqrt{-1})^2
\end{aligned}$$

u. s. w.

Es bleiben also unzerlegbare Primzahlen ausser der Einheit:

3, 7, 11, 19, 23, 31, u. s. w.

oder allgemein: alle von der Form

$$(4n + 3)$$

wo n jede ganze reele Zahl bedeuten kann, welche $\geqq 0$. — Wäre eine Zahl von dieser Form, z. B. q zerlegbar, so müsste seyn:

$$q = (a + b\sqrt{-1})\ (a' + b'\sqrt{-1})$$

hieraus folgt aber nach §. 4:

$$q = (a - b\sqrt{-1})\ (a' - b'\sqrt{-1}),$$

und beide Gleichungen multiplicirend:

$$q^2 = (a^2 + b^2)\ (a'^2 + b'^2),$$

da q eine reelle Primzahl ist, so kann man q^2 nur auf eine einzige Art in zwei von der Einheit verschiedene Factoren zerlegen, nämlich $q^2 = q \cdot q$. Es muss also auch der zweite Theil der letzten Gleichung dieselbe Eigenschaft haben, daher:

$$q = a^2 + b^2 \text{ und } q = a'^2 + b'^2,$$

das heisst:

$$q = a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2;$$

da nun q von der Form $(4n + 3)$ ist, so muss auch $a^2 + b^2$ und $a'^2 + b'^2$ von derselben Form seyn; diess ist aber unmöglich, weil die Summe zweier Quadrate nie von der Form $(4n + 3)$ seyn kann, folglich ist obige Behauptung richtig.

Bei den complexen Zahlen dient folgender Satz zum Unterscheiden der Zusammengesetzten von den Primzahlen.

Jede ganze complexe Zahl $a + b\sqrt{-1}$ ist entweder eine Primzahl, oder nicht, je nachdem ihre Norm eine reelle Primzahl ist, oder nicht.

Haben zwei complexe Zahlen ausser der Einheit keinen gemeinschaftlichen Divisor, so heissen sie relative Primzahlen. Unter mehreren gemeinschaftlichen Divisoren ist derjenige grösser, dessen Norm die grössere ist. Gibt es einen solchen gemeinschaftlichen Divisor, so gibt es deren noch drei andere, nämlich seine Nebenzahlen. Zwischen den Zahlen z. B.

$$2+4\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad 4+6\sqrt{-1}$$

ist ganz sicher 2 ein gemeinschaftlicher Divisor, aber nicht minder sind es: -2, $2\sqrt{-1}$, und $-2\sqrt{-1}$, so dass man im erweiterten Felde der Arithmetik *) immer von vier grössten gemeinschaftlichen Divisoren sprechen muss. Dividirt man im gewählten Beispiel wirklich, so erhält man:

$$\begin{array}{cc} 1+2\sqrt{-1} & 2+3\sqrt{-1} \\ -1-2\sqrt{-1} & -2-3\sqrt{-1} \\ 2-\sqrt{-1} & 3-2\sqrt{-1} \\ -2+\sqrt{-1} & -3+2\sqrt{-1}. \end{array}$$

Die complexen Zahlen sind entweder gerade, oder halbgerade, oder ungerade.

α) $a+b\sqrt{-1}$ ist gerade, wenn man es durch 2 theilen kann, was möglich ist, wenn a sowohl als b gerade ist; z. B. $4+6\sqrt{-1}$.

β) $a+b\sqrt{-1}$ ist halbgerade, wenn es weder durch 2 noch durch $1+\sqrt{-1}$ theilbar ist, d. h. wenn a und b ungerade ist; z. B. $3+5\sqrt{-1}$.

γ) $a+b\sqrt{-1}$ ist ungerade, wenn es durch $(1+\sqrt{-1})$ nicht theilbar ist, d. h. wenn a gerade und b ungerade, oder wenn b gerade und a ungerade ist; z. B. $3+6\sqrt{-1}$ oder $4+\sqrt{-1}$.

Die Norm der geraden complexen Zahlen ist immer von der Form:

$$2^m(4n+1),$$

wo m ganz, positiv und >1 ist; — der halbgeraden:

$$8n+2;$$

der ungeraden endlich:

$$4n+1.$$

Das Gesagte wird genügen, um zu zeigen, welche Allgemeinheit die Sätze der Theorie der Zahlen durch Einführung der imaginären Grössen erhalten. — Zugleich sind in dem angeführten Satze die in den Grenzen der Arithmetik vorkommenden Haupteigenschaften der Imaginären ausgesprochen. Betrachten wir nun Letztere in der allgemeinen Grössenlehre.

---

*) Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass wir die grössten Eroberungen hierin dem berühmten Gauss verdanken.

§. 6.

Vergleiche man die Formeln (9) und (10) des §. 3.

$$\frac{C^{x\sqrt{-1}} - C^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$\frac{C^{x\sqrt{-1}} + C^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

mit den Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ in demselben Paragraphe, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \frac{C^{x\sqrt{-1}} - C^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \\ \cos x &= \frac{C^{x\sqrt{-1}} + C^{-x\sqrt{-1}}}{2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und es kann auffallend erscheinen, dass $\sin x$ und $\cos x$ als reelle Grössen durch imaginäre ausgedrückt werden, und diesen gleich sind, oder wenigstens zu seyn scheinen. Unterdessen das Auffallende verschwindet, sobald man bedenkt, dass in diesen Gleichungen das Imaginäre wirklich nur scheinbar vorhanden ist. Entwickelt man nämlich die für $C^{x\sqrt{-1}}$ und $C^{-x\sqrt{-1}}$ im angezogenen Paragraphe gegebenen Werthe, und verrichtet die angezeigten Operationen, so verschwindet das Imaginäre aus dem zweiten Theil der Gleichungen (1), und es bleiben bloss die Reihen für $\sin x$ und $\cos x$. — Obige Gleichungen sind also nur sogenannte symbolische Gleichungen, die aber oft von grossen Nutzen sind, sowohl in Bezug auf die Kürze der Rechnungen, die sie gewähren, als auch in Hinsicht der Symmetrie, die sie herbeiführen. — Uebrigens war vorauszusehen, dass der Versuch $\sin x$ und $\cos x$ durch exponentielle Functionen zu geben, nothwendig auf imaginäre Resultate führen müsse. Denn $\sin x$ und $\cos x$ sind periodische Functionen, deren Werth für jeden reellen Werth in x nur zwischen -1 und $+1$ variren kann, während C^x und C^{-x} Functionen sind, welche bei wachsenden oder abnehmendem x unendlich wachsen oder abnehmen können; daher werden Ausdrücke, wie:

$$\left.\begin{aligned} \frac{C^x - C^{-x}}{2} &= \tfrac{1}{2}\left(C^x - \frac{1}{C^x}\right) \\ \frac{C^x + C^{-x}}{2} &= \tfrac{1}{2}\left(C^x + \frac{1}{C^x}\right) \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

in ihrer reelen Gestalt auf keine Weise dazu dienen, um $\sin x$ und $\cos x$ auszudrücken; da wir dieses doch verlangten, so antwortet die Analysis mit imaginären Resultaten. In dieser Hinsicht gleicht die Analysis jenen Maschinen im Münzarsenale, welche die zu grossen oder zu kleinen Metallstücke selbst aussondert und vom Prägstock entfernt. — So oft man ihr eine unmögliche oder absurde Aufgabe stellt, so oft erhält man eben solche Resultate. — Verlangt man z. B. einen Kreis, der drei parallele Linien zu gleicher Zeit tangirt; so erhält man wohl einen Kreis, aber einen imaginären. — Wir bemerken hier also eine merkwürdige Eigenschaft der imaginären Grössen: sie sind nämlich in Bezug auf Repräsentation in der materiellen Natur die Telegraphen des Unmöglichen oder Absurden.

Wenn man die ersten der Gleichungen (1) mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, dann die Gleichungen addirt und subtrahirt, so erhält man

$$C^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x \;\ldots\ldots\; (3)$$
$$C^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x \;\ldots\ldots\; (4)$$

Diese Gleichungen zeigen, gleich jenen (9) und (10), §. 3, eigentlich nur an, in welche Function die C^x gebende Reihe übergeht, wenn x imaginär wird. Hier geschieht also der Uebergang vom Reelen zum Imaginären (per definitionem), und es wird unsere Aufgabe seyn, bei jeder Function zu zeigen, welche Modificationen sie erleiden, wenn die Variable imaginär wird.

Da obige Gleichungen (3) und (4) aus jenen (9) und (10) §. 3 leicht fliessen, so kann man sie als gesetzmässige Folgerungen betrachten, und sie haben dabei den Vorzug, von sehr schmiegsamer Form zu seyn, nämlich:

$$f(x\sqrt{-1}) = \varphi(x) + \sqrt{-1}\,.\,\psi(x),$$

wo f, ρ, ψ unbestimmte Functionen bedeuten, die von einander verschieden seyn können. Wir werden daher im Folgenden:

1.) Jede imaginäre Grösse auf diese Form bringen.

2.) Solche Ausdrücke ableiten, in denen $\sqrt{-1}$ nur scheinbar vorkommt, wie (9) und (10) §. 3.

3.) Untersuchen, in wiefern sich die Eigenschaften der Functionen ändern, wenn die Variable imaginär wird. — Eine solche Eigenschaft wäre z. B. die der Potenz

$$x^m \,.\, y^m = (xy)^m.$$

Nimmt man ohne allen Beweis ganz einfach an: dass diese Eigenschaft auch dann bestehe, wenn x und y imaginär wird, so ist diese Annahme eben nur willkührlich, alles analytischen Grundes baar. — In dieser Hinsicht ist es auffallend, wie viel bis in neuere Zeit mit imaginären Grössen gerechnet wurde, ohne dass man nur versucht hätte, ob und in wiefern man dazu berechtigt sey. Der zweite der eben erwähnten Puncte wird zum bezüglichen analytischen Sinne, der dritte zu den Eigenschaften der imaginären führen.

§. 7.

Dem in der Arithmetik gebrauchten Ausdruck „complexe Zahl" entspricht hier die „complexe Grösse" oder das „imaginäre Binom," worunter man also einen Ausdruck versteht von der Form:

$$a + b\sqrt{-1},$$

wo a und b reele Grössen sind. Von solchen Ausdrücken lässt sich sagen:

1.) Wenn

$$a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1} \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

so ist nothwendig

$$a = a' \qquad b = b' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Denn aus (1) folgt:

$$a - a' = (b' - b)\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und hieraus

$$(a - a')^2 = -(b' - b)^2 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

oder

$$(a - a')^2 + (b' - b)^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Da zwei Quadrate sich nicht aufheben können, so kann ihre Summe nicht $= 0$ seyn, ausser man hätte:

$$(a - a')^2 = 0 \quad \text{und} \quad (b' - b)^2 = 0,$$

das ist:

$$a = a' \quad \text{und} \quad b' = b.$$

Dieser Satz begreift auch den Fall in sich, wenn:

$$a + b\sqrt{-1} = 0 = 0 + 0\sqrt{-1},$$

wo nothwendig:

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = 0,$$

denn wäre diess nicht der Fall, so könnte man aus $a + b\sqrt{-1} = 0$ folgern:

$$b\sqrt{-1} = -a,$$

$$\sqrt{-1} = -\frac{a}{b},$$

was absurd ist.

2.) Jede complexe Grösse (jedes imaginäre Binom) lässt sich auf die Form bringen.

$$r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

wo r jede reele Grösse, und φ jeden reelen Bogen (wir verstehen innere Kreisbögen, wenn anderes nicht ausdrücklich bemerkt wird), bezeichnen kann. Um diess zu beweisen, setzen wir, es wäre schon:

$$a + b\sqrt{-1} = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \quad . \; . \quad (7)$$

Die Annahme wird gerechtfertigt seyn, wenn sie zu keinem Absurden führt. —

Nach dem Satz 1.) haben wir:

$$a = r\cos\varphi \qquad b = r\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Erhebt man zur zweiten Potenz und addirt, so hat man, weil $\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$

$$a^2 + b^2 = r^2.$$

Dividirt man aber, so ist, weil $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tang}\varphi$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a},$$

so dass die Werthe von r und φ durch die Gleichungen gegeben sind:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Diese Gleichungen kann man immer auswerthen, denn, was auch a und b bedeuten mag, so wird es doch immer möglich seyn, eine Zahl zu finden, die $=\sqrt{a^2+b^2}$ ist. Da ferner die Tangente jeden möglichen Werth annehmen kann von $-\infty$ bis $+\infty$, so kann man auch den dem φ entsprechenden Werth immer finden. Ja es wird sogar für φ unzählige Werthe geben, denn wenn die Tangente $\frac{b}{a}$ zu φ gehört, so gehört sie auch zu $\varphi+2n\pi$, wo n jede ganze Zahl ist. Somit ist die Annahme gerechtfertigt.

Die Grösse

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

heisst der Modulus des imaginären Binoms. Obwohl nun gleich ersichtlich ist: dass zwischen Norm und Modulus eine grosse Verwandtschaft herrscht, — es besteht nämlich die Gleichung:

$$\text{Modulus} = \frac{\text{Norma}}{\sqrt{\text{Norma}}} = \sqrt{\text{Norma}},$$

so wird doch in der Arithmetik mit unverhältnissmässig grösserm Erfolg der Begriff der Norm, in der allgemeinen Grössenlehre hingegen jener des Modulus angewendet.

3.) Der Modulus des Productes ist gleich dem Producte der Moduli.

Sind zwei Factoren $a+b\sqrt{-1}$ und $a'+b'\sqrt{-1}$, ihr Modulus r und r', und der Modulus des Productes R, so ist:

$$rr' = R;$$

Denn nach 2.) haben wir:

$$a+b\sqrt{-1} = r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$a'+b'\sqrt{-1} = r'(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\sin\varphi')$$

multiplicirend:

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) &= rr'\cos\varphi\cos\varphi' + \sqrt{-1}\,rr'\sin\varphi\cos\varphi' \\ &\quad - rr'\sin\varphi\sin\varphi' + \sqrt{-1}\,rr'\sin\varphi'\cos\varphi \\ &= rr'(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') \\ &\quad + \sqrt{-1}\,rr'(\sin\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\varphi) \\ &= rr'(\cos(\varphi+\varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi')).\end{aligned}$$

Der Modulus des ersten Theiles ist nach der Annahme rr', jener des zweiten Theiles wird erhalten, wenn man $rr'\cos(\varphi+\varphi')$ und $rr'\sin(\varphi+\varphi')$ zum Quadrat erhebt, addirt, und aus der Summe die Wurzel auszieht. Man findet:

$$r^2r'^2[\cos(\varphi+\varphi')^2+\sin(\varphi+\varphi')^2] = rr'^2 = R^2,$$

folglich

$$R = rr'.$$

Da a' und b' ganz willkührlich sind, so kann man sie so wählen, dass

$$a' = a \quad \text{und} \quad b' = b.$$

Da hiedurch das Product in eine zweite Potenz übergeht, da ferner was von zwei Factoren bewiesen worden, auch für deren mehrere gilt, so ist klar, dass obiger Satz nur ein specieller Fall des folgenden allgemeinen ist:

Der Modulus der $n$ten Potenz ist gleich der $n$ten Potenz des Modulus der Wurzel.

4.) Der Modulus der Summe ist kleiner oder höchstens gleich der Summe der Moduli.

Sind die Summanden: $a + b\sqrt{-1}$ und $a' + b'\sqrt{-1}$, ihre Sinne S, die Moduli r und r', der Modulus von s aber ρ, so muss:

$$\rho \leqq \nu + \nu'.$$

Denn es ist immer:

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{-1} + a' + b'\sqrt{-1} &= r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + r'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi') \\ &= r\cos\varphi + r'\cos\varphi' + \sqrt{-1}(\sin\varphi + r'\sin\varphi'). \end{aligned}$$

Der Modulus des zweiten Theiles ist:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{[(r\cos\varphi + r'\cos\varphi')^2 + (r\sin\varphi + r'\sin\varphi')]} \\ \rho &= \sqrt{[r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\varphi - \varphi')]}. \end{aligned}$$

Den einen Fall also ausgenommen, wenn $\varphi = \varphi'$, daher $\cos(\varphi - \varphi') = 1$, somit unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat stehe, und folglich

$$\rho = r + r'$$

ist in jedem andern Fall:

$$\rho < r + r'.$$

Endlich ist klar, dass der Modulus einer reelen Grösse immer die Grösse selbst ist. Denn jede reele Grösse kann man sich unter der Form denken:

$$a + 0\sqrt{-1},$$

und hievon der Modulus:

$$\sqrt{a^2} = a.$$

Wir wollen nun sehen, welche Folgerungen sich aus den begründeten Sätzen ziehen lassen.

Der erste Satz wird dazu dienen, um, so oft wir $2n$ Gleichungen haben, selbe auf n zu reduciren. Es seyen vier Gleichungen:

$$A = 0; \quad B = 0; \quad C = 0; \quad D = 0 \quad . \; . \; . \quad (11)$$

man wird sie in zwei zusammenziehen können:

$$A + B\sqrt{-1} = 0; \quad C + D\sqrt{-1} = 0 \quad . \; . \; . \quad (12)$$

(wo man A, B, C, D willkührlich vertauschen kann), denn aus (12) folgt $A = B = C = D = 0$; also dasselbe wie in (11). Diese Eigenschaft ist aber kein Monopol der Imaginären, sie kommt allen Grössen zu, die durch einander nicht ausdrückbar sind. Solche Grössen wären z. B. 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, u. s. w. Hat man also n Gleichungen, so braucht man n solche Factoren, multiplicirt jede Gleichung mit einem derselben, und addirt sämmtliche Producte, wodurch die n Gleichungen in eine einzige zusammenschmelzen. — Nehmen wir die obigen vier Gleichungen, und als Factoren 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{3}$, so haben wir die Gleichung:

$$A + B\sqrt{-1} + C\sqrt{2} + D\sqrt{3} = 0 \quad . \; . \; . \quad (13)$$

woraus auch nothwendig folgt:

$$A = B = C = D = 0.$$

Bei der Wahl der Factoren muss man die Vorsicht gebrauchen, nicht solche zu wählen, die schon in der mit ihnen zu multiplicirenden Gleichung vorkommen. Denn ist z. B. $\sqrt{2}$ in einigen Gliedern von C schon enthalten (der Fall wenn $\sqrt{2}$ in allen Gliedern von C vorkommt, kann hier nicht in Betracht kommen, denn man würde diessfalls mit $\sqrt{2}$ die Gleichung dividiren), so werden diese Glieder durch Multiplication mit $\sqrt{2}$ rational, und werden sich nicht mehr wie früher aufheben können, folglich würde aus (13) nicht folgen $C = 0$.

Damit man aber immer gewiss sey, solche Factoren gewählt zu haben, die durch einander nicht ausdrückbar sind, braucht man sich nur des Satzes zu erinnern:

Wenn $\sqrt[k]{a}$ (wo a und k ganze Zahlen sind), durch ganze Zahlen nicht ausdrückbar ist, so kann dieses auch durch keinerlei Bruch vollständig Statt finden.

Denn, könnte man $\sqrt[k]{a}$ durch irgend einen Bruch vollständig geben, so wäre:

$$\sqrt[k]{a} = \frac{p}{q},$$

wo $\frac{p}{q}$ als auf die kleinste Benennung gebracht angenommen wird. — Erhebt man zur k ten Potenz, so ist

$$a = \frac{p^k}{q^k},$$

d. h. a als ganze Zahl wäre einem wahren Bruch gleich.

Der zweite der angeführten Sätze bietet nun den namhaften Vortheil, $a + b\sqrt{-1}$ immer in die viel schmiegsamere Form $r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\rho)$ bringen zu können, dessen Nutzen wir im folgenden Paragraphe zu bemerken Gelegenheit haben werden.

§. 8.

Gehen wir nun zu den einfachen Operationen, und betrachten zuerst die Form:

$$a + b\sqrt{-1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

dann jene:

$$r(\cos\rho + \sqrt{-1}\sin\varphi) \quad . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Vor allem müssen wir uns hier darauf berufen, dass man jede imaginäre Grösse, jeden imaginären Ausdruck auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ bringen kann.. Der einzige Weg, sich hievon zu überzeugen, ist die Induction; — wir könnten höchstens noch hinzusetzen: Am Anfang des vierten Paragraphes haben wir dargethan, wie in der Form $a + b\sqrt{-1}$ alle reelen und imaginären, also alle nur denkbaren Zahlen begriffen sind. Nun geht man aber beim Rechnen immer von Zahlen aus, man wird also auf Nichts kommen können, was nicht in eine der im angezogenen Paragraph angeführten Zahlenkategorien passte, d. h. was nicht die Form $a + b\sqrt{-1}$ annehmen könnte. — Es sei z. B.

$$(a + b\sqrt{-1})^m.$$

Um dieser Potenz obige Form zu geben, werden wir sie nach Newtons Formel entwickeln, und sodann die reelen Theile von den mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten absondern.

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m + ma^{m-1}b\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3\sqrt{-1} +$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots m} b^m (\sqrt{-1})^m,$$

wo $(\sqrt{-1})^m$, dessen Exponent immer gleich ist mit dem Exponenten von b, das Zeichen des letzten Gliedes bestimmt. — Nennt man die Summen der reelen Glieder P, jene der mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Q, so ist:

$$P = a^m - \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 - \ldots$$

$$Q = ma^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-4)}{1.2.3.4.5}a^{m-5}b^5 - \ldots$$

und folglich:

$$(a+b\sqrt{-1})^m = P + Q\sqrt{-1} \quad \ldots \quad (3)$$

welcher Ausdruck schon die gewünschte Form hat. — Die hier befolgte Verfahrungsweise kann in jedem Fall, wenn es sich darum handelt, einen imaginären Ausdruck auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ zu bringen, mit Erfolg angewendet werden. — Wäre z. B.

$$\sqrt[m]{(a+b\sqrt{-1})}$$

in dieser Form darzustellen, so wird man wieder, weil

$$\sqrt[m]{(a+b\sqrt{-1})} = (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$$

nach NEWTON's Formel entwickeln und finden:

$$\sqrt[m]{(a+b\sqrt{-1})} = P' + Q'\sqrt{-1} \quad \ldots \quad (4)$$

Dass man auch Monome, wie $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$ und allgemein $\sqrt[2n]{-1}$, wo n eine ganze Zahl ist, auf diese Form bringen kann, soll in Folgendem gezeigt werden. — Wir sagen allgemein $\sqrt[2n]{-1}$, weil jede $(2n+1)$te Wurzel aus -1 eine reele Grösse ist.

Wenn man zwei imaginäre Grössen addirt, subtrahirt, oder multiplicirt, so erhält man, was man eine Summe, Differenz oder Product imaginärer Grössen nennt. Man wird also haben:

$$a + b\sqrt{-1} + a' + b'\sqrt{-1} = a + a' + (b+b')\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (5)$$
$$a + b\sqrt{-1} - (a' + b'\sqrt{-1}) = a - a' + (b-b')\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (6)$$
$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) = aa' + bb' + (a'b + ab')\sqrt{-1} \ldots (7)$$

Man überzeugt sich leicht, dass auch hier die Ordnung, in der man die Factoren multiplicirt, von keinerlei Einfluss auf das Product ist.

Die Division zweier imaginärer Ausdrücke kann man mit Hülfe des Modulus immer in eine Multiplication verwandeln. Hätte man z. B.

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}$$

so wird man Zähler und Nenner mit der Conjugirten des Nenners multipliciren, und haben:

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{a'^2+b'^2} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{(a'b-ab')\sqrt{-1}}{a'^2+b'^2} \quad (8),$$

d. h., man dividirt imaginäre Grössen, indem man den Dividend mit der Conjugirten des Divisors multiplicirt und das Product mit dem Quadrate des Modulus des Divisors theilt. (Man dividirt also doch, aber mit reellen Grössen.)

Zugleich ist hieraus klar: dass man bei jedem Bruch, entweder aus dem Zähler oder aus dem Nenner, und letzteres ist immer wünschenswerth — das Imaginäre entfernen kann.

Eine imaginäre Grösse auf die $m$te Potenz erheben, heisst: ein Product aus m imaginären Formen Factoren bilden. — Diess wird auf die gewöhnliche Weise angezeigt, und wenn es nöthig ist, nach der oben gegebenen Methode entwickelt.

$a+b\sqrt{-1}$ auf die $\frac{1}{n}$te Potenz erhoben, oder — um dem Sprachgebrauch zu huldigen — die $n$te Wurzel aus $a+b\sqrt{-1}$ ziehe, heisst eine Grösse finden, welche auf die $n$te Potenz erhoben, gleich sey: $a+b\sqrt{-1}$.

Da es, wie wir sehen werden, mehrere Grössen gibt, die auf die $n$te Potenz erhoben, gleich sind $a+b\sqrt{-1}$, d. h., weil $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$ mehrere Werthe zulässt, wir aber nicht immer einen bestimmten von diesen Werthen meinen, sondern vielmehr oft nur irgend einen, — welchen immer — bezeichnen wollen, so werden wir zu letzterem Zwecke uns des besonderen Symboles bedienen, welches Cauchy und nach ihm mehrere gebraucht haben, nämlich:

$$((a+b\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}} \text{ oder } \overset{n}{W}\overline{a+b\sqrt{-1}},$$

welche Ausdrücke dann von den verschiedenen Wurzeln irgend eine unbestimmte bedeuten, während durch

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} \text{ oder } \sqrt[n]{a+b\sqrt{-1}}$$

eine gewisse bestimmte Wurzel gemeint ist. — Dasselbe gilt auch von der $\frac{m}{n}$ten Potenz, denn

$$(a+\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

ist die $m$te Potenz einer $n$te Wurzel und

$$((a+b\sqrt{-1}))^{\frac{m}{n}}$$

die $m$te Potenz irgend einer der $n$ten Wurzeln.

$a+b\sqrt{-1}$ zur $-m$-, $-\frac{1}{n}$-, und $-\frac{m}{n}$ten Potenz erheben, heisst: die Einheit mit der m-, $\frac{1}{n}$-, und $\frac{m}{n}$ten Potenz von $a+b\sqrt{-1}$ dividiren. Im ersten Falle hat die Grösse h nur einen Werth, d. h. sie ist eindeutig, im zweiten und dritten hat sie mehrere Werthe, d. h. sie ist mehr- oder vieldeutig; daher die Bezeichnungen:

$$(a + b\sqrt{-1})^{-m}$$

$$((a + b\sqrt{-1}))^{-\frac{1}{n}}$$

$$((a + b\sqrt{-1}))^{-\frac{m}{n}}.$$

Beim Ausziehen der zweiten Wurzel kann man eine besondere Formel anwenden; es ist nämlich, wenn $b > o$:

$$((a + b\sqrt{-1}))^{\frac{1}{2}} = \pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right\}$$

und für $b < o$:

$$((a + b\sqrt{-1}))^{\frac{1}{2}} = \pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right\};$$

erhebt man beide Theile zur zweiten Potenz, so erhält man identische Gleichungen.

§. 9.

Die nach dem schon Gesagten immer leicht zu erhaltende Form

$$r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

wird uns den besondern Vortheil gewähren, die Operationen bedeutend zu vereinfachen, indem sie das Multipliciren, Dividiren und Potenziren in ein blosses Addiren, Subtrahiren und Multipliciren umwandelt. — Da der immer reelle und positive Factor r, der zugleich Modulus ist, keine besondere Berücksichtigung erfordert, so beschränken wir unsere Untersuchung auf den Ausdruck:

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi.$$

Wenn man die zwei Ausdrücke

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi \text{ und } \cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'$$

multiplicirt so erhält man:

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi') = \\ &= \cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + \sqrt{-1}(\cos\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi'\sin\varphi) = \\ &= \cos(\varphi+\varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi') \qquad (1).\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit einem dritten ähnlichen Factor: $\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi''$ so ist: $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')(\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi'') =$

$$= (\cos(\varphi+\varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi'))(\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi'').$$

Wenn man hier den in der Gleichung (1) ausgesprochenen Satz anwendet, indem man das obige φ und φ' übergehen lässt in $\varphi + \varphi'$ und φ'', so ist:

$$\begin{aligned}&(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')(\cos\varphi'' + \sqrt{-1}\sin\varphi'') = \\ &= \cos(\varphi+\varphi'+\varphi'') + \sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi'+\varphi'') \qquad (2).\end{aligned}$$

Im Geiste dieses Vorganges liegt nichts, was uns hindern dürfte, denselben auf einen vierten, fünften ..... mten Factor auszudehnen, so dass also allgemein ist:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')\ldots(\cos\varphi^{(m)} + \sqrt{-1}\sin\varphi^{(m)}) =$$
$$= \cos(\varphi+\varphi'+\ldots+\varphi^{(m)}) + \sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi'+\ldots+\varphi^{(m)}) \quad \ldots \quad (3)$$

wodurch die Multiplication auf eine einfache Addition zurückgeführt wird. Es braucht kaum erinnert zu werden, dass $\varphi^{(m)}$ hier nichts bedeutet, als φ mit m Strichen.

Setzt man in (1)

$$\varphi' = -\varphi,$$

so ist, weil $\cos-\varphi = \cos\varphi$ und $\sin-\varphi = -\sin\varphi$

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi) = 1 \quad \ldots \quad (4)$$

d. h. der Modulus der Ausdrücke

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi \quad \text{und} \quad \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi$$

ist die Einheit.

Setzt man aber in (1) $-\varphi'$ statt φ', so ist:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' - \sqrt{-1}\sin\varphi') = \cos(\varphi-\varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi-\varphi') \ldots (5)$$

Wenn wir in (2) die Multiplication wirklich verrichten, so finden wir, weil die reellen Grössen den reellen, die imaginären den imaginären nothwendig gleich seyn müssen:

$$\cos(\varphi+\varphi'+\varphi'') = \cos\varphi\cos\varphi'\cos\varphi'' - \cos\varphi\sin\varphi'\sin\varphi'' - \sin\varphi\cos\varphi'\sin\varphi''$$
$$- \sin\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'' \quad \ldots \quad (6)$$

$$\sin(\varphi+\varphi'+\varphi'') = \sin\varphi\cos\varphi'\cos\varphi'' + \cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'' + \cos\varphi\cos\varphi'\sin\varphi$$
$$- \sin\varphi\sin\varphi'\sin\varphi'' \quad \ldots \quad (7)$$

was als wichtige Folge auf eine richtige Prämisse schliessen lässt.

Den Werth des Quotienten

$$\frac{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}{\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'}$$

findet man nach der in §. 8, (8) ausgesprochenen Regel. Da $\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$ ist, so steht die merkwürdige Gleichung:

$$\frac{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}{\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'} = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi' - \sqrt{-1}\sin\varphi') \quad \ldots \quad (8)$$

Den Werth des zweiten Theiles aus (5) substituirend, ist:

$$\frac{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}{\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi'} = \cos(\varphi-\varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi-\varphi') \quad \ldots \quad (9)$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich leicht erweisen, denn wenn man in (8) den ersten Theil als Bruch nach dem in §. 8. Gesagten behandelt, bleibt die identische Gleichung:

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi.$$

Setzt man in (9) $\varphi = 0$ und $\varphi' = \varphi$, so ist, weil $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$

$$\frac{1}{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi \quad \ldots \quad (10)$$

ganz übereinstimmend mit (4).

Es ist ersichtlich, dass die Gleichungen (9) und (10) die Division auf eine Subtraction reduciren.

Um die mte Potenz von $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$ zu erhalten, setzen wir in (3)

$$\varphi = \varphi' = \varphi'' = \ldots = \varphi^{(m)},$$

wo m seiner Natur nach nur ganz und positiv sein kann; wir haben sodann

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Dass diese Gleichung, insofern sie aus (3) fliesst, nur dann als richtig gelten kann, wenn m ganz und positiv ist, erhellet daraus, dass in (3) φ nicht vorkommen kann mit einem negativen oder gebrochenen Strich. Uebrigens werden wir die Gültigkeit von (11) für jedes m beweisen.

Für jedes positive ganze m wird (11) bewiesen seyn, wenn wir zeigen können, dass (11), wenn es für m gültig ist, auch für $m+1$ gelten muss. — (Bernoulli's Inductions-Beweis.)

Multiplicirt man (11) mit $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$, so ist:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{m+1} &= (\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi)(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\\ &= \cos m\varphi\cos\varphi \sin m\varphi\sin\varphi + \sqrt{-1}(\sin\varphi\cos m\varphi + \sin m\varphi\cos\varphi)\\ &= \cos(m\varphi+\varphi) + \sqrt{-1}\sin(m\varphi+\varphi)\\ &= \cos(m+1)\varphi + \sqrt{-1}\sin(m+1)\varphi \qquad (12).\end{aligned}$$

Ganz dasselbe hätten wir aber erhalten, wenn wir in (11) gleich $m+1$ statt m gesetzt hätten, folglich ist die Formel (11) für jedes positive ganze m richtig.

Da φ in (11) ganz willkührlich ist, so kann man dafür setzen $\frac{\varphi}{m}$, wo m ganz und positiv ist; man wird haben

$$\left(\cos\frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{m}\right)^m = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi \qquad (13)$$

ziehen wir aus beiden Theilen der Gleichung die mte Wurzel, und erheben diese zur nten Potenz, so haben wir:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{m}\right)^n = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{n}{m}} \qquad (14).$$

Den ersten Theil kann man, weil n ganz und positiv, nach (11) entwickeln; woraus:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n\varphi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{n\varphi}{m} \qquad (15),$$

d. h. (11) gilt auch für jedes positiv gebrochene m. — Um ihre Richtigkeit auch für ganze negative Exponenten zu zeigen, erinnern wir uns der Gleichung (10), welche man, weil $\cos-\varphi = \cos\varphi$ und $\sin-\varphi = -\sin\varphi$, auch so schreiben kann:

$$\frac{1}{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi} = \cos-\varphi + \sqrt{-1}\sin-\varphi.$$

Erheben wir beide Theile zur mten Potenz, wo m ganz und positiv, und treffen zugleich die Uebereinkunft, dass wir immer setzen:

$$\frac{1}{(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m} = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{-m},$$

so ist:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{-m} = (\cos -\varphi + \sqrt{-1}\sin -\varphi)^m,$$

und nach (11)

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{-m} &= \cos - m\varphi + \sqrt{-1}\sin - m\varphi \\ &= \cos m\varphi - \sqrt{-1}\sin m\varphi.\end{aligned} \qquad (16)$$

Setzen wir in (16), dem früheren analog $-\frac{\varphi}{m}$ statt φ, so ist:

$$\left(\cos - \frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1}\sin - \frac{\varphi}{m}\right)^{-m} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi.$$

Erhebt man hievon die mte Wurzel zur nten Potenz:

$$\left(\cos - \frac{\varphi}{m} + \sqrt{-1}\sin - \frac{\varphi}{m}\right)^n = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{-\frac{n}{m}};$$

da wir n ganz und positiv nehmen, können wir den ersten Theil nach (11) entwickeln

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{-\frac{n}{m}} &= \cos - \frac{n\varphi}{m} + \sqrt{-1}\sin - \frac{n\varphi}{m} \\ &= \cos\frac{n\varphi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{n\varphi}{m};\end{aligned} \qquad (17)$$

das heisst, die Gleichung (11) ist auch dann richtig, wenn m negativ ganz oder gebrochen ist, somit ist für jedes reele m:

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi,$$

und weil das Zeichen des Gliedes $\sqrt{-1}\sin\varphi$ von gar keinem Einfluss ist auf den Gang des Beweises, so können wir noch allgemeiner schreiben:

$$(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi \qquad (18),$$

welche Gleichung nach ihrem Entdecker Moivre's Formel († 1754) genannt wird. — Der erste Theil dieser Gleichung ist in dem Fall, wenn m gebrochen ist, wie in (15), mehrdeutig — wie wir sehen werden — während es der zweite Theil nicht ist, und dieser Umstand, der ziemlich lange unberücksichtigt blieb, wird uns bewegen, noch einmal auf die Formel (18) zurückzukommen.

Mit Hilfe des Gesagten kann man das Potenziren und Wurzelausziehen bei imaginären Grössen in das einfache Multipliciren und Dividiren verwandeln.

Wenn man den ersten Theil der Gleichung (18) nach der Binomialformel entwickelt, und die reellen Theile den reellen, die imaginären den imaginären gleichsetzt, so hat man

$$\cos m\varphi = \cos\varphi^m - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos\varphi^{m-2}\sin\varphi^2 + \ldots \qquad (19)$$

$$\sin m\varphi = m\cos\varphi^{m-1}\sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos\varphi^{m-3}\sin\varphi^3 + \ldots \qquad (20)$$

Jetzt können wir endlich zeigen, dass die charakteristische Eigenschaft der Potenz, nämlich

$$x^m . y^m = (xy)^m,$$

auch dann besteht, wenn x und y imaginär werden. — Denn nach Obigem haben wir:

$$[r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^m \; [r'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')]^m$$
$$= r^m(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m . r'^m(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')^m$$
$$= [r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) . r'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')]^m$$

worin schon die erwähnte Eigenschaft enthalten, also unsere Behauptung gerechtfertigt ist.

§. 10.

Es ist bekannt, dass, wenn ρ eine ganze positive oder negative Zahl ist:

$$\text{linea trig. } x = \text{linea trig. } (x \pm 2\rho\pi) \qquad (1)$$

Wir können daher in unsern Formeln §. 9. (18), (19), (20) auch schreiben:

$$((\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi))^m = \cos m((\varphi + 2\rho\pi)) + \sqrt{-1}\sin m((\varphi + 2\rho\pi)) \qquad (2)$$

$$\cos m(\varphi + 2\rho\pi) = \cos\varphi^m - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos\varphi^{m-2}\sin\rho^2 + \ldots \qquad (3)$$

$$\sin m(\varphi + 2\rho\pi) = m\cos\varphi^{m-1}\sin\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos\varphi^{m-3}\sin\varphi^3 + \ldots \qquad (4)$$

Die Gleichung (2) wird richtig sein, was auch m bedeuten mag, denn es wird sich immer irgend ein Werth des ersten Theiles finden, der gleich ist irgend einem Werth des zweiten Theiles; — die Gleichungen (3) und (4) aber sind nur dann richtig, wenn m eine ganze Zahl ist, denn wenn m gebrochen wäre, so würde man zu φ eine gewisse Anzahl **nicht ganzer** Peripherien geben, was nicht zulässig ist. Wäre z. B. $m = \frac{1}{r}$, und enthält ρ das r nicht als Factor, so ist:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{r} + \frac{2\rho\pi}{r}\right) \text{ nicht } = \cos\frac{\varphi}{r},$$

was doch die erwähnten Gleichungen voraussetzen.

Da uns aber darum zu thun ist, in (3) und (4) Formeln zu besitzen, die für jedes m richtig seien, so wollen wir lieber von der Allgemeinheit des ρ etwas einbüssen, und daher untersuchen, was ρ seyn muss, damit jene Gleichungen für jedes m richtig seyen.

Wir stellen die Behauptung auf: (3) und (4) sey nur dann für jedes m richtig, wenn $\rho = 0$.

Für $\varphi = 0$ ist dies sehr klar, denn dann folgt aus (2)

$$\cos 2m\rho\pi = 1,$$

was für jedes m nur dann richtig ist, wenn $\rho = 0$. — Aber auch wenn φ nicht Null ist, muss $\rho=0$ seyn, denn ρ ist keine stetige Function von φ, und eine unstetige kann es nicht seyn. Dass ρ keine stetige Function von φ ist, wird aus Folgendem klar.

Setzen wir in (3) zuerst $\varphi=\alpha$ und $\rho=\rho_1$, und dann $\varphi=\alpha+\delta$ und $\rho=\rho_2$, wo δ einen unendlich kleinen Bogen bedeutet, so wird:

$$\cos(m\alpha+2m\rho_1\pi) = \cos\alpha^m - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos\alpha^{m-2}\sin\alpha^2 + \ldots = P_1$$

$$\cos(m\alpha+m\delta+2m\rho_2\pi) = \cos(\alpha+\delta)^m - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha+\delta)^{m-2}\sin(\alpha+\delta)^2 + \ldots = P_2$$

subtrahirend:

$$\cos(m\alpha+2m\rho_1\pi) - \cos(m\alpha+m\delta+2m\rho_2\pi) = P_1 - P_2;$$

wenn $\delta=0$ so ist $P_1=P_2$, also $P_1-P_2=0$, folglich ist auch der erste Theil der Gleichung Null, d. h.

$$\cos(m\alpha+2m\rho_1\pi) - \cos(m\alpha+2m\rho_2\pi) = 0,$$

was aber für jedes m nur dann statt findet, wenn $\rho_1=\rho_2$. — Nimmt man nämlich an, dass

$$m\alpha+2m\rho_1\pi = \alpha-\beta$$
$$m\alpha+m\delta+2m\rho_2\pi = \alpha+\beta$$

addirt jetzt und subtrahirt, so findet man:

$$\alpha = m\alpha+\frac{m\delta}{2}+m\pi(\rho_1+\rho_2)$$

$$\beta = \frac{m\delta}{2}+m\pi(\rho_2-\rho_1),$$

und weil:

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta,$$

so wird:

$$P_1-P_2 = 0 = 2\sin\left(m\alpha+\frac{m\delta}{2}+m\pi(\rho_1+\rho_2)\right)\sin\left(\frac{m\delta}{2}+m\pi(\rho_2-\rho_1)\right),$$

was nur dann möglich ist, wenn $\rho_1=\rho_2$, und wie oben bemerkt $\delta=0$ oder eigentlich sich der Nulle unendlich nähernd; — ρ steht also mit φ in keinem solchen Zusammenhang, dass es bei jeder Aenderung des Werthes von φ seinen eigenen Werth auch verhältnissmässig änderte — d. h. ρ ist keine stetige Function von φ — um so viel weniger also eine unstetige. — Nun soll aber der erste Theil von (3) und (4) eindeutig seyn, weil es der zweite ist, was nicht anders zu erreichen ist, als wenn ρ entweder eine stetige Function von φ oder Null ist, — da ersteres, wie wir eben gezeigt, nicht stattfindet, so ist letzteres gewiss, d. h. (3) und (4) sind für jedes m nur dann richtig, wenn $\rho=0$ ist und gelten also, wenn man nicht doppelte Klammern anwenden will, nur in der Form wie wir sie im vorigen Paragraph unter (19) und (20) gegeben haben. —

Da die Gleichung (2) für jedes φ gilt, so gilt sie auch für $\varphi=0$, in diesem Fall ist:

$$1 = \cos 2m\rho\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2m\rho\pi \qquad (5).$$

Zieht man nach §. 9 die m te Wurzel und wendet die in §. 8 angenommene Schreibart an, indem man k, welches natürlich ganz ist, statt $m\rho$ setzt, so hat man:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m} \qquad (6).$$

Suchen wir nun alle möglichen Werthe von $((1))^{\frac{1}{m}}$ darzustellen; zu dem Zweck bringen wir die Werthe in k in Tafeln und zwar:

I. für den Fall, wenn m eine gerade Zahl ist.

$$\begin{array}{l}
0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ldots \frac{m}{2}-2,\ \frac{m}{2}-1,\ \frac{m}{2} \\
\frac{m}{2}+1,\ \frac{m}{2}+2 \ldots\ldots m-2,\ m-1,\ m \\
m+1,\ m+2 \ldots\ldots \frac{3m}{2}-2,\ \frac{3m}{2}-1,\ \frac{3m}{2} \\
\frac{3m}{2}+1,\ \frac{3m}{2}+2 \ldots\ldots 2m-2,\ 2m-1,\ 2m
\end{array}$$

u. s. w.

oder indem wir dieselben Glieder für unsern Zweck etwas bequemer darstellen:

$$\begin{array}{llllll}
0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, & \ldots\ldots & \frac{m}{2}-2, & \frac{m}{2}-1, & \frac{m}{2} & \\
m-\left(\frac{m}{2}-1\right),\ m-\left(\frac{m}{2}-2\right) & \ldots\ldots & m-2, & m-1, & m & (7) \\
m+1, \quad m+2, & \ldots\ldots & m+\left(\frac{m}{2}-2\right), & m+\left(\frac{m}{2}-1\right), & \frac{3m}{2} & \\
2m-\left(\frac{m}{2}-1\right),\ 2m-\left(\frac{m}{2}-2\right) & \ldots\ldots & 2m-2, & 2m-1, & 2m &
\end{array}$$

u. s. w.

Substituiren wir nun in (6) jene Werthe und k, welche in einer horizontalen Reihe stehen, so erhalten wir

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \left\{\begin{array}{c}
1 \\
\cos\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m} \\
\cos\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{m} \\
\ldots\ldots\ldots \\
\cos\frac{m-4}{m}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{m-4}{m}\pi \\
\cos\frac{m-2}{m}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi \\
-1.
\end{array}\right. \qquad (8)$$

Es ist gänzlich unnöthig, Werthe aus der zweiten horizontalen Reihe zu substituiren. denn wir bekämen ganz dasselbe wie in (8), nur in umgekehrter Ordnung, oder aus der dritten Reihe, denn sie liefern dasselbe wie in (8) und in derselben Ordnung, u. s. w. Substituiren wir wirklich, um diess augenfälliger zu machen, die Werthe aus der zweiten Horizontalreihe, indem wir $2m\pi$ als eine Anzahl ganzer Peripherien weglassen:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{2m-2\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m-(2m-1)\pi}{m}$$

$$= \cos\frac{m-2}{m}\pi \mp \sin\frac{m-2}{m}\pi \tag{9}$$

und aus dem zweiten Werth derselben Reihe:

$$(1)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{m-4}{m}\pi \mp \sqrt{-1}\sin\frac{m-4}{m}\pi \tag{10}$$

welche Werthe schon unter (8) vorkommen, so dass wir bei fortgesetzter Substitution nur die in (8) schon gehabten Werthe wieder erhalten. Es hat also $((1))^{\frac{1}{m}}$ nicht mehr Werthe als man durch Substitution aus der ersten Reihe von (7) erhält. In jener Reihe sind $\left(\frac{m}{2}+1\right)$ Glieder, von diesen bekommen bei der Substitution $\left(\frac{m}{2}-1\right)$ Glieder zweierlei Zeichen, daher $((1))^{\frac{1}{m}}$

$$\left(\frac{m}{2}+1\right)+\left(\frac{m}{2}-1\right) = m$$

Werthe haben wird, nämlich:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \left\{\begin{array}{ll}
 & +1 \\
\cos\frac{2}{m}\pi & +\sqrt{-1}\sin\frac{2}{m}\pi \\
\cos\frac{4}{m}\pi & +\sqrt{-1}\sin\frac{4}{m}\pi \\
\cdots & \cdots \\
\cos\frac{m-2}{m}\pi & +\sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi \\
 & -1 \\
\cos\frac{2}{m}\pi & -\sqrt{-1}\sin\frac{2}{m}\pi \\
\cos\frac{4}{m}\pi & -\sqrt{-1}\sin\frac{4}{m}\pi \\
\cdots & \cdots \\
\cos\frac{m-2}{m}\pi & \sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi
\end{array}\right. \tag{11}$$

II. Für den Fall, wenn m ungerade ist, sind die möglichen Werthe von k

$$\begin{array}{llllll} 0, & 1, & 2, & \ldots\ldots & \frac{m-3}{2}, & \frac{m-1}{2} \\ m-\frac{m-1}{2}, & m-\frac{m-3}{2} & & \ldots\ldots & m-2, & m-1 \\ m, & m+1 & m+2 & \ldots\ldots & m+\frac{m-3}{2}, & m-\frac{m-1}{2} \end{array} \qquad (12)$$

u. s. w.

Substituiren wir diese Werthe in (6) so erhalten wir wieder nur aus der ersten Reihe verschiedene Werthe, und da in jeder Reihe $\frac{m+1}{2}$ Glieder sind, von welchen $\frac{m-1}{2}$ zweierlei Zeichen haben, so wird $((1))^{\frac{1}{m}}$ auch in diesem Falle

$$\frac{m+1}{2}+\frac{m-1}{2}=m$$

verschiedene Werthe haben, und zwar:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = \left\{ \begin{array}{l} \qquad +1 \\ \cos\frac{2}{m}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2}{m}\pi \\ \cos\frac{4}{m}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{4}{m}\pi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{m-1}{m}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{m-1}{m}\pi \\ \cos\frac{2}{m}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{2}{m}\pi \\ \cos\frac{4}{m}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{4}{m}\pi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{m-1}{m}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{m-1}{m}\pi. \end{array} \right. \qquad (13)$$

Die in (11) und (13) angeführten Werthe werden nur dann sämmtlich geschlossene algebraische Ausdrücke seyn, wenn die Peripherie in 2 m Theile geometrisch theilbar ist, denn sin und cos sind nur in diesem Falle geschlossene algebraische Ausdrücke. — Wäre z. B. $m = 4$, so ist aus (11):

$$((1))^{\frac{1}{4}} = 1, = \sqrt{-1}, = -1, = -\sqrt{-1},$$

oder kürzer

$$((1))^{\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\pm 1} \qquad (14).$$

Ist $m = 3$, so folgt aus (13):

$$\begin{aligned} ((1))^{\frac{1}{3}} &= 1 \\ &= \cos\frac{2}{3}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2}{3}\pi \\ &= \cos\frac{4}{3}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{4}{3}\pi \\ &= \cos\frac{2}{3}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{2}{3}\pi \\ &= \cos\frac{4}{3}\pi - \sqrt{-1}\sin\frac{4}{3}\pi. \end{aligned} \tag{15}$$

Es scheint zwar, dass wir hier 5, statt 3 Werthe gefunden haben, da aber

$$\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} \qquad \sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

so ist in (15) der zweite Werth $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$

„ dritte „ $= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$

„ vierte „ $= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$

„ fünfte „ $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$,

woraus ersichtlich: dass der zweite und fünfte, wie auch der dritte und vierte Werth gleich sind, folglich nur drei verschiedene Werthe bleiben.

Mit Hilfe des Gesagten sind wir nun im Stande, die verschiedenen Werthe von $((1))^{\frac{n}{m}}$ zu entwickeln. Da nämlich:

$$((1))^{\frac{n}{m}} = \left[((1))^{\frac{1}{m}}\right]^{n} \tag{16},$$

so werden wir zu diesem Behufe nur die Werthe von $((1))^{\frac{1}{m}}$ entwickeln und jeden auf die nte Potenz erheben; denn die Gleichung (16) in gewöhnliche Sprache übersetzt, sagt wirklich: irgend ein Werth von $((1))^{\frac{n}{m}}$ ist gleich der nten Potenz von irgend einem Werthe von $((1))^{\frac{1}{m}}$.

In §. 9 haben wir die Gleichung stabilirt, oder vielmehr angenommen:

$$(a + b\sqrt{-1})^{-m} = \frac{1}{(a + b\sqrt{-1})^{m}}.$$

Hieraus folgt:

$$((1))^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{((1))^{\frac{1}{m}}} \qquad (17).$$

Wir werden also die Werthe von $((1))^{-\frac{1}{m}}$ erhalten, wenn wir die Einheit mit den in (11) und (13) angeführten Werthen dividiren. Erhebt man die so erhaltenen Ausdrücke zur nten Potenz, so hat man die Werthe in $((1))^{-\frac{n}{m}}$, welche mit jenen von $((1))^{\frac{n}{m}}$ ganz gleich sind. Um letzteres augenfälliger zu machen, nehmen wir einen Werth von $((1))^{\frac{n}{m}}$

$$((1))^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}.$$

Der diesem correspondire Werth von $((1))^{-\frac{n}{m}}$ wäre dann:

$$((1))^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}} \qquad (18).$$

Dieses ist aber nach §. 9 (10)

$$= \cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$$

folglich

$$((1))^{\frac{n}{m}} = ((1))^{\frac{n}{m}} \qquad (19).$$

Hat man also eine imaginäre Grösse auf die hte Potenz zu erheben, wo h ganz oder gebrochen, positiv oder negativ seyn kann, so wird man ihr vor allem die Form $r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ geben, und somit, weil

$$r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = (1) \,.\, r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

die gewünschte Potenz aus folgender Gleichung erhalten:

$$(a + b\sqrt{-1})^h = ((1))^h r^h (\cos h\varphi + \sqrt{-1}\sin h\varphi).$$

Es versteht sich von selbst, dass die doppelte Klammer bei $((1))^h$ nur dann von Bedeutung ist, wenn h einen gebrochenen Werth hat, da eine ganze Potenz nie mehrdeutig seyn kann.

§. 11.

Nachdem wir die verschiedenen Potenzen der positiven Einheit entwickelt haben, ist es nothwendig, dass wir dasselbe auch in Bezug auf die negative Einheit thun. — Es kann sich leicht die Gleichung ergeben:

$$x^m + 1 = 0,$$

woraus
$$x^m = -1$$
$$x = \sqrt[m]{-1} \qquad (1).$$

Die Art, in diesem Falle zu den Werthen von x zu gelangen, ist der im vorigen Paragraph befolgten ganz ähnlich. — Unter (2) §. 10 hatten wir:

$$((\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi))^m = \cos(m\varphi + 2m\rho\varphi) \pm \sqrt{-1}\sin(m\varphi + 2m\rho\varphi).$$

Setzen wir hier $\varphi = \pi$, so ist, weil $\cos\pi = -1$ und $\sin\pi = o$:

$$((-1))^m = \cos(m\pi + 2m\rho\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(m\pi + 2m\rho\pi) \qquad (2).$$

Ist hier m und ρ ganz, so ist:

$$(-1)^m = \pm 1 \qquad (3),$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, nachdem m gerade oder ungerade ist. Obige Gleichung (2) haben wir stabilirt, was auch m bedeuten mag, sie wird also auch giltig seyn, wenn m übergeht in $\frac{1}{m}$:

$$((\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi))^{\frac{1}{m}} = \cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2\rho\pi}{m}\right) \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2\rho\pi}{m}\right) \qquad (4).$$

Setzen wir $\varphi = \pi$, so ist:

$$((-1))^{\frac{1}{m}} = \cos\left(\frac{\pi}{m} + \frac{2\rho\pi}{m}\right) \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{\pi}{m} + \frac{2\rho\pi}{m}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{m}(2\rho + 1) \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{m}(2\rho + 1) \qquad (5).$$

Obwohl nun hier ρ jede ganze Zahl bedeuten kann, so sind doch die Werthe von $((-1))^{\frac{1}{m}}$ nicht unendlich viele an der Zahl. Für den Fall, wenn m gerade ist, lassen sich die Werthe von ρ folgendermassen gruppiren:

$$\begin{array}{llllll}
0, & 1, & 2, & & \frac{m}{2} - 2, & \frac{m}{2} - 1 \\
m - \frac{m}{2}, & m - \left(\frac{m}{2} - 1\right) & \ldots\ldots & & m - 2, & m - 1 \\
m, & m + 1, & \ldots\ldots & & m + \left(\frac{m}{2} - 2\right), & m + \left(\frac{m}{2} - 1\right) \\
2m - \frac{m}{2}, & 2m - \left(\frac{m}{2} - 1\right) & \ldots\ldots & & 2m - 2, & 2m - 1
\end{array} \qquad (6)$$

u. s. w.

und für ein ungerades m:

$$\begin{array}{llll} 0, & 1, & 2, \;\ldots\ldots \frac{m-5}{2}, & \frac{m-3}{2}, \;\; \frac{m-1}{2} \\ m-\frac{m-1}{2}, & m-\frac{m-3}{2} & \ldots\ldots m-2, & m-1 \\ m, & m+1 & \ldots\ldots m-\frac{m-3}{2}, & m+\frac{m-1}{2}. \end{array} \tag{7}$$

In beiden Fällen bekommen wir nur durch Substitution der Werthe aus der ersten horizontalen Reihe verschiedene Werthe, die Anzahl dieser Werthe ist m, denn die erste Reihe in (6) enthält $\frac{m}{2}$ Glieder sämmtlich mit doppeltem Zeichen; die erste Reihe aber in (7) enthält $\frac{m+1}{2}$ Glieder, deren $\frac{m-1}{2}$ an der Zahl doppelte Zeichen haben, folglich haben wir in beiden Fällen m Werthe; und zwar ist für ein gerades m:

$$((-1))^{\frac{1}{m}} = \left\{ \begin{array}{l} \cos\frac{1}{m}\pi \quad +\sqrt{-1}\sin\frac{1}{m}\pi \\ \cos\frac{3}{m}\pi \quad +\sqrt{-1}\sin\frac{3}{m}\pi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{m-1}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{m-1}{m}\pi \\ \cos\frac{1}{m}\pi \quad -\sqrt{-1}\sin\frac{1}{m}\pi \\ \cos\frac{3}{m}\pi \quad -\sqrt{-1}\sin\frac{3}{m}\pi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{m-1}{m}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{m-1}{m}\pi \end{array} \right. \tag{8}$$

Dass unter diesen kein reeller Werth vorkommt, ist daraus erklärlich: dass -1 nie eine gerade Potenz einer reellen Grösse seyn kann.

Für ein ungerades m ist:

$$((-1))^{\frac{1}{m}} = \left\{ \begin{array}{l} \qquad\quad -1 \\ \cos\frac{1}{m}\pi \quad +\sqrt{-1}\sin\frac{1}{m}\pi \\ \cos\frac{3}{m}\pi \quad +\sqrt{-1}\sin\frac{3}{m}\pi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{m-2}{m}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi \\ \cos\frac{1}{m}\pi \quad -\sqrt{-1}\sin\frac{1}{m}\pi \\ \cos\frac{3}{m}\pi \quad -\sqrt{-1}\sin\frac{3}{m}\pi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{m-2}{m}\pi-\sqrt{-1}\sin\frac{m-2}{m}\pi \end{array} \right. \tag{9}$$

Wäre $m=4$, so müssen nach dem im vorigen Paragraph Gesagten die vier Werthe von $((-1))^{\frac{1}{4}}$ geschlossene algebraische Ausdrücke seyn, und wirklich ist aus (9)

$$
\begin{aligned}
((-1))^{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

oder kürzer:

$$((-1))^{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}.$$

Eben so ist für $m=3$:

$$
\begin{aligned}
((-1))^{\frac{1}{3}} &= -1 \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Nun wird man die Werthe von $((-1))^{\frac{n}{m}}$ und $((-1))^{-\frac{n}{m}}$ leicht entwickeln können; die ersteren, indem man die unter (8) und (9) angeführten Werthe auf die $n$te Potenz erhebt, und die letzteren, indem man mit diesen Potenzen die Einheit dividirt; man hat hierbei Gelegenheit sich zu überzeugen, dass auch hier:

$$((-1))^{\frac{n}{m}} = ((-1))^{-\frac{n}{m}} \tag{12}$$

Ist daher eine imaginäre Grösse $-a-b\sqrt{-1}$ auf die $\left(\pm\frac{n}{m}\right)$ te Potenz zu erheben, so wird man sie zuerst auf die Form bringen:

$$-a-b\sqrt{-1} = (-1)\, r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

woraus

$$(-a-b\sqrt{-1})^{\pm\frac{n}{m}} = ((-1))^{\pm\frac{n}{m}} r^{\pm\frac{n}{m}} (\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{\pm\frac{n}{m}} \tag{13}$$

welche Gleichung die sämmtlichen Werthe der gegebenen Potenz enthält.

Wir haben behauptet, $((\pm 1))^{\pm\frac{n}{m}}$ müsse immer m Werthe haben, und dass es nicht mehr haben könne, folgt klar aus §. 10 (11) und (13), und aus §. 11 (8) und (9), dass es aber auch nicht weniger als m Werthe geben könne, muss für sich bewiesen werden.

Wenn $((\pm 1))^{\pm\frac{n}{m}}$ weniger als m Werthe hätte, so wäre diess auf keine andere Weise möglich, als dass einige von den angeführten Werthen gleich wären. — Nehmen wir an, in solchen zwei gleichen Werthen gehe ρ über in ρ_1 und ρ_2, wo ρ_1 und ρ_2 jedenfalls zwischen 0 und m liegt.

Substituirt man in die allgemeine Formel:

$$((\pm 1))^{\pm\frac{n}{m}} = \cos\left(\pm\frac{2n\rho\pi}{m}\right) \pm \sqrt{-1}\sin\left(\pm\frac{2n\rho\pi}{m}\right),$$

so geben diese Werthe

$$\frac{2n\rho_1\pi}{m} \quad \text{und} \quad \frac{2n\rho_2\pi}{m} \qquad (\alpha),$$

wo wir voraussetzen, dass $\frac{n}{m}$ auf die kleinste Benennung gebracht sey. — Ist $n\rho_1 > m$ und $n\rho_2 > m$, so wird man durch Division den Quotienten q und den Rest p erhalten, d. h. es wird:

$$\frac{n\rho_1}{m} = q_1 + \frac{p_1}{m} \quad \text{und} \quad \frac{n\rho_2}{m} = q_2 + \frac{p_2}{m},$$

woraus:

$$n\rho_1 = mq_1 + p_1 \qquad n\rho_2 = mq_2 + p_2.$$

Dieses in (α) substituirt gibt:

$$2\pi\left(q_1 + \frac{p_1}{m}\right) \quad \text{und} \quad 2\pi\left(q_2 + \frac{p_2}{m}\right).$$

Nach unserer Annahme sind die beiden Werthe, in welchen ρ_1 und ρ_2 erscheinen, ganz gleich, daher ist nothwendig, da die reellen Theile den reellen, die imaginären den imaginären gleich sind:

$$\sin 2\pi\left(q_1 + \frac{p_1}{m}\right) = \sin 2\pi\left(q_2 + \frac{p_2}{m}\right).$$

oder weil q_1 und q_2 ganze Zahlen, folglich $2\pi q_1$ und $2\pi q_2$ ganze Peripherien sind:

$$\sin\frac{2\pi p_1}{m} = \sin\frac{2\pi p_2}{m} \qquad (\beta),$$

hieraus würde folgen, dass $p_1 = p_2$, was unmöglich ist; folglich muss (β) falsch seyn, d. h. unter den angeführten m Werthen von $((\pm 1))^{\pm\frac{n}{m}}$ können zwei gleiche nicht vorkommen. — Dass aber unmöglich seyn kann $p_1 = p_2$, ist aus Folgendem ersichtlich. Zieht man obige Gleichungen ab, so ist:

$$n\rho_2 - n\rho_1 = mq_2 - mq_1 + p_2 - p_1.$$

Lässt man hier gelten $p_1 = p_2$, so bleibt:

$$n(\rho_2 - \rho_1) = m(q_2 - q_1),$$

welche Gleichung, wenn sie richtig ist, durch m theilbar seyn muss. Nun ist aber der erste Theil durch m nicht theilbar, denn n enthält nach Obigem keinen Factor von m und eben so wenig $\rho_2 - \rho_1$, da schon einzeln ρ_2 und ρ_1 kleiner sind als m. Es ist also die letzte Gleichung falsch und es kann daher nicht seyn $p_1 = p_2$, folglich ist erwiesen, dass $((\pm 1))^{\pm \frac{n}{m}}$ weder mehr noch weniger als m Werthe hat.

Aus dem bisher Gesagten folgt:

$$((1))^{\frac{1}{m}} = ((1))^{\frac{n}{m}} = ((1))^{-\frac{1}{m}} = ((1))^{-\frac{n}{m}} = ((-1))^{\frac{n}{m}} = (([-1]^n))^{\frac{1}{m}} = ((-1))^{-\frac{n}{m}}$$

$$((-1))^{\frac{1}{m}} = ((-1))^{-\frac{1}{m}},$$

wo das Gleichheitszeichen nur so viel bedeutet: dass irgend ein Werth des einen Theils der Gleichung gleich ist irgend einem Werth des andern Theils der Gleichung.

Ist h ein Bruch positiv oder negativ, so bedienen wir uns der allgemeinen Formeln:

$$((1))^h = \cos 2h\rho\pi \pm \sqrt{-1} \sin 2h\rho\pi$$

$$((-1))^h = \cos (2\rho+1) h\pi \pm \sqrt{-1} \sin (2\rho+1) h\pi,$$

wo ρ wie bisher jede ganze Zahl von Null bis $+\infty$ bedeuten kann, diese Nulle selbst nicht ausgenommen.

Wäre h irrational, so wären obige Gleichungen unendlich vieler Werthe fähig, und unsere Bezeichnungsweise

$$((1))^h \quad \text{und} \quad ((-1))^h$$

wäre, wenigstens in dem bisherigen Sinne nicht brauchbar.

§. 12.

Die im Vorhergehenden begründeten Principien genügen zwar, um den jedesmaligen analytischen, und wenn einer vorhanden, auch den geometrischen Sinn sammt den bezüglichen Eigenschaften jeder Potenz einer imaginären Grösse zu erforschen; wir wollen aber doch Ausführlicheres hierüber für einen künftigen Paragraph vorbehalten, und hier zur Ermittelung des analytischen Sinnes folgender Functionen übergehe:

$$X^x, \quad \log x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \text{arc} \sin x, \quad \text{arc} \cos x \qquad (1)$$

für den Fall, wenn x imaginär ist. —

Zuvörderst müssen wir einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken.

Wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ reelle Functionen sind, so wird man dem Früheren analog:

$$\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}$$

oder

$$\psi(x) + \varphi(x)\sqrt{-1}$$

eine imaginäre Function nennen können, und

$$\varphi(xyz\ldots.) + \psi(xyz\ldots.)\sqrt{-1}$$

wird eine eben solche Function mehrerer Veränderlichen darstellen. Man wird demnach die imaginären Functionen wie die reellen nach denselben Charakteristiken in algebraische, exponentielle, logarithmische oder trigonometrische, und wenn sie algebraisch sind, in rationale und irrationale, ganze und gebrochene u. s. w. Functionen eintheilen. — Unendlich klein wird man eine imaginäre Grösse nennen, wenn sie gegen die Nulle convergirt. Soll $a + b\sqrt{-1}$ unendlich klein seyn, so wird diess nicht anders möglich, als dass a ebenso wie b gegen die Nulle convergirt, oder, weil:

$$a + b\sqrt{-1} = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

wenn r eine unendlich kleine Grösse ist. — Wenn in der imaginären Function:

$$\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}$$

jede unendlich kleine Aenderung der Veränderlichen x eine entsprechende Aenderung in der Function selbst hervorbringt, so ist die imaginäre Function stetig. Oft ist die Function nicht für alle Werthe der Veränderlichen stetig, sondern nur für manche wenige, welche oft zwischen sehr engen Gränzen liegen — ausser diesen Grenzen ist die Function in diesem Fall unstetig. — Es ist klar, dass die imaginäre Function nicht stetig seyn kann, wenn nicht $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ als reelle Functionen stetig sind, woraus folgt: dass dieselben Sätze und Regeln, welche für die Stetigkeit der reellen Functionen gelten, auch in Hinsicht der imaginären Functionen richtig seyn müssen. — Ebenso klar ist, dass die imaginäre Function nur dann verschwinden kann, wenn $\varphi(x) = 0$ und $\psi(x) = 0$. Diess hindert aber nicht, dass eine imaginäre Function für irgend einen bestimmten Werth der Veränderlichen plötzlich reell werde. Es sey z. B. die imaginäre Function $F(x)$ und

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1}.$$

Ist hier $\varphi(x) = \cos x$ und $\psi(x) = \sin x$, so ist

$$F(x) = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

und für $x = n\pi$

$$F(x) = \pm 1,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, nachdem n gerade oder ungerade ist. —

Die unter (1) aufgezählten Functionen sind sämmtlich der Art, dass ihr Werth nur durch unendliche Reihen gegeben werden kann; wir wollen daher die unendlichen Reihen unter der Voraussetzung, dass ihre Glieder imaginär sind, näher betrachten. Wenn

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \qquad (2)\\ &b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_n + \ldots\ldots \end{aligned}$$

zwei reelle Reihen sind, so wird:

$$\begin{aligned} &a_0 + b_0\sqrt{-1} + a_1 + b_1\sqrt{-1} + a_2 + b_2\sqrt{-1} + \ldots + a_n + b_n\sqrt{-1} + \ldots = \\ &(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots) + (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots)\sqrt{-1} \qquad (3) \end{aligned}$$

eine imaginäre Reihe genannt werden können. Convergiren zwei reelle Reihen, so wird die aus ihnen gebildete imaginäre Reihe auch convergiren, divergirt eine der reellen Reihen, so wird auch die imaginäre Reihe divergiren.

Eine der einfachsten Reihen ist:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots \qquad (4).$$

Substituiren wir einen imaginären Werth für x

$$x = z(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \qquad (5),$$

wo z eine neue Veränderliche bedeutet, so wird aus (4)

$$1+z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+z^2(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^2+\ldots+z^n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n+\ldots \quad (6).$$

Addirt man die ersten n Glieder von (4), so hat man:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x} \quad (7).$$

Setzt man den Werth von x aus (5), so findet man als Summe der ersten n Glieder der Reihe (6):

$$1+z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+z^2(\cos2\varphi+\sqrt{-1}\sin2\varphi)+\ldots+z^{n-1}(\cos(n-1)\varphi+\sqrt{-1}\sin(n-1)\varphi)=$$
$$=\frac{1}{1-z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}-\frac{z^n(\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi)}{1-z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}. \quad (8).$$

Die Reihe wird convergiren, wenn diese Summe für ein wachsendes n sich einer bestimmten Gränze nähert. Das erste Glied der Summe ist nur abhängig von n, das zweite wird bei wachsendem n unendlich gross, oder unendlich klein, nachdem $z>1$ oder $z<1$, folglich wird die Reihe nur dann convergiren, wenn sich die Summe bei wachsendem n dem Gränzwerthe

$$\frac{1}{1-z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}$$

nähert, d. h. wenn

$$\frac{z^n(\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi)}{1-z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}$$

verschwindet. Nach §. 7 kann eine imaginäre Grösse nur dann verschwinden, wenn ihr Modulus verschwindet. — Es wird also der Modulus des letzten Ausdruckes

$$\frac{\pm z^n}{\sqrt{1-2z\cos\varphi+z^2}} \quad (9)$$

bei wachsendem n verschwinden müssen, was nur dann möglich ist, wenn $z<1$, folglich ist (8) convergent, wenn $z<1$. — Unter der Bedingung also, dass n unendlich wachse und $z<1$, findet man

$$1+z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+z^2(\cos2\varphi+\sqrt{-1}\sin2\varphi)+\ldots+z^{n-1}(\cos(n-1)\varphi+\sqrt{-1}\sin(n-1)\varphi)=$$
$$=\frac{1}{1-z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}=\frac{1-z(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)}{1-2z\cos\varphi+z^2} \quad (10),$$

oder die reellen Glieder von den imaginären trennend:

$$1+z\cos\varphi+z^2\cos2\varphi+\ldots+z^{n-1}\cos(n-1)\varphi+\sqrt{-1}\,(z\sin\varphi+z^2\sin2\varphi+\ldots+\sin(n-1)\varphi)=$$
$$=\frac{1-z\cos\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2}+\frac{z\sin\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2}\sqrt{-1} \quad (11),$$

woraus, immer unter der Bedingung, dass $+1>z>-1$:

$$1+z\cos\varphi+z^2\cos2\varphi+\ldots\ldots=\frac{1-z\cos\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2} \quad (12)$$

$$z\sin\varphi+z^2\sin2\varphi+\ldots\ldots\ldots=\frac{z\sin\varphi}{1-2z\cos\varphi+z^2} \quad (13).$$

Somit sind wir durch Einführung eines imaginären Werthes in (4) zur Summirung zweier Reihen gelangt. — Aus dem Gesagten lässt sich folgende Regel abstrahiren.

Wenn eine reelle Reihe nur für solche Werthe aus derselben Veränderlichen, die zwischen gewissen Gränzen liegen, convergirt; so wird die aus derselben dadurch entstandene imaginäre Reihe, dass man der Veränderlichen einen imaginären Werth gibt, auch nur so lange convergiren, als sich der Modulus des imaginären Werthes zwischen denselben Grenzen befindet.

War also (4) convergent unter der Bedingung, dass: $+1 > x > -1$, so wird (6) auch nur convergiren, wenn $+1 > z > -1$. Hieraus folgt der allgemeine Satz: dass, wenn in einer imaginären Reihe:

$$r_0(\cos\varphi_0+\sqrt{-1}\sin\varphi_0) + r_1(\cos\varphi_1+\sqrt{-1}\sin\varphi_1)+\ldots+r_n(\cos\varphi_n+\sqrt{-1}\sin\varphi_n)+\ldots \quad (14)$$

die Reihe der Moduli

$$r_0 + r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_n + \ldots\ldots \quad (15)$$

convergirt: so convergirt die Reihe selbst auch.

Dass man diesen Satz nicht umkehren könne, ist daraus ersichtlich: dass (15) nicht nothwendig convergirt, wenn auch (14) convergent ist. — Substituiren wir z. B. in (14) und (15):

$$r_n = \frac{1}{n+1} \qquad \varphi_n = (n+\tfrac{1}{2})\pi,$$

wo n nur ganze Zahlen bedeuten kann; so ist aus (14):

$$\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} + \tfrac{1}{3}\sqrt{-1} - \tfrac{1}{4}\sqrt{-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}(-1)^n\sqrt{-1} \quad (16)$$

und aus (15):

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \ldots\ldots \quad (17)$$

Nun ist (16) convergent, und ihre Summe:

$$= \sqrt{-1}\log 2 \quad (18)$$

(17) aber ist doch divergent.

I. Versuchen wir die Reihe zu summiren:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots.n}x^n + \ldots \quad (19)$$

unter der Voraussetzung, dass

$$x = z(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

und

$$+1 > z > 1.$$

Die Reihe wird dann in folgende übergehen:

$$1 + mz(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{m(m-1)}{2}z^2(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^2 + \ldots \quad (20)$$

Nennt man die Summe dieser Reihe S, so wird man immer ein p und r finden, für welches:

$$S = r^m(\cos mp + \sqrt{-1}\sin mp). \quad (21)$$

Um r und p zu finden, setzen wir in (20) $m = 1$, so ist:

$$1 + z(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p) \tag{22}$$

und hieraus

$$r\cos p = 1 + z\cos\varphi$$
$$r\sin p = z\sin\varphi \tag{23}$$

zur zweiten Potenz erheben, und addirt:

$$r^2 = 1 + 2z\cos\varphi + z^2$$
$$r = \sqrt{1+2z\cos\varphi+z^2} \tag{24}$$

dividirt man aber dieselben Gleichungen, so hat man:

$$\operatorname{tg} p = \frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi} \tag{25}$$

woraus

$$p = \operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}.$$

Nun können wir die Werthe von r und p in (21) substituiren:

$$S = (1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}}\left(\cos\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}\right)\right)^m \tag{26}.$$

Erinnern wir uns jetzt, dass nach §. 8 (7) immer ist oder seyn kann:

$$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha),$$

woraus

$$a = \rho\cos\alpha \quad \text{und} \quad b = \rho\sin\alpha$$

und bemerken zugleich: dass der zweite Theil von (26) gerade die Form hat:

$$\rho(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha),$$

dass wir also berechtigt sind zu schreiben:

$$\rho = (1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\cos\alpha = \cos p = \frac{1+z\cos\varphi}{r} \tag{27}$$
$$\sin\alpha = \sin p = \frac{\sin\varphi}{r}$$

so ergibt sich:

$$a = 1 + z\cos\varphi \quad \text{und} \quad b = z\sin\varphi \tag{28},$$

folglich:

$$S = [1 + z(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^m \tag{29},$$

sezt man nun x zurück, so ist:

$$S = (1 + x)^m \tag{30}$$

d. h. die bekannte **Formel** Newton's **ist auch dann richtig, wenn x imaginär wird.** Da aber diese Formel bei reellen Werthen nur dann convergirt, wenn $+1 > x > -1$, so wird sie bei imaginären Werthen auch nur unter derselben Bedingung convergent seyn.

Wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ist nach (25)

$$p = \operatorname{arc\,tg} z, \quad z = \operatorname{tg} p \tag{31}$$

und da $+1 > z > -1$, so folgt $\frac{\pi}{4} > p > -\frac{\pi}{4}$. Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck:

$$(1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}},$$

so hat man, weil: $\sqrt{1 + \operatorname{tg} p^2} = \sec p$ und $\cos\varphi = 0$

$$(1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}} = \sec p^m = \frac{1}{\cos p^m} \tag{32}$$

Entwickelt man den Werth von S in (26) und vergleicht die reellen Theile mit den reellen und die imaginären mit den imaginären, indem man Kürze halber p beibehält (25) so findet man:

$$(1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}} \operatorname{Cos} m p = 1 + mz\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{2} z^2 \cos 2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^3 \cos 3\varphi + \ldots \tag{33}$$

$$(1 + 2z\cos\varphi + z^2)^{\frac{m}{2}} \sin m p = mz\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 \sin 2\varphi + \ldots. \tag{34}$$

Substituiren wir die Werthe aus (31) und (32), so ist:

$$\cos m p = \cos p^m - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos p^{m-2} \sin p^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos p^{m-4} \sin p^4 - \ldots \tag{35}$$

$$\sin m p = m \cos p^{m-1} \sin p - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos p^{m-3} \sin p^3 + \ldots. \tag{36}$$

Diese Reihen haben wir schon im §. 9 (19) und (20) dann §. 10 (3) und (4) zu verschiedenen Zwecken angeführt. — Im §. 9 haben wir zuvörderst untersucht, welche Werthe m annehmen darf, und bewiesen, dass (19) und (20) für *jedes* m richtig sey. — In §. 10 haben wir gezeigt, wie die *Vieldeutigkeit* des ersten Theiles obiger Reihen (35) und (36) zu vermeiden sey, da der zweite Theil nur eindeutig ist. — In der vorhergehenden Untersuchung endlich haben wir festgestellt, dass wenn die Reihen (35) und (36) für jedes reelle m convergiren sollen, p nothwendig *kleiner seyn müsse* als $\frac{\pi}{4}$.

II. Bestimmen wir die Summe der Reihe

$$1 + \frac{z}{1}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{z^2}{1.2}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^2 + \frac{z^3}{1.2.3}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^3 + \ldots \tag{37}$$

für jeden Werth von z.

Setzen wir in (25) und (26) αz statt z und $\frac{1}{\alpha}$ statt m, wo α eine unendlich kleine

Grösse bedeutet; wir finden für jene Werthe von αz, welche zwischen -1 und $+1$ liegen, also von

$$z = -\frac{1}{\alpha} \text{ bis } z = \frac{1}{\alpha}: \tag{38}$$

$$1 + \frac{z}{1}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{z^2}{1.2}(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi)(1-\alpha) +$$
$$+ \frac{z^3}{1.2.3}(\cos 3\varphi + \sqrt{-1}\sin 3\varphi)(1-\alpha)(1-2\alpha) + \ldots.$$
$$= (1 + 2\alpha z\cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}\left(\cos\frac{p}{\alpha} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{\alpha}\right) \quad (39).$$

Ist α verschwindend klein, so geht der erste Theil von (39) über in (37), der zweite Theil wird sich ebenfalls einer gewissen Grenze nähern, somit:

$$1 + z(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{z^2}{1.2}(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) + \ldots.$$
$$= \operatorname{l\,sin}\left\{(1 + 2\alpha z\cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}\left(\cos\frac{p}{\alpha} + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{\alpha}\right)\right\} \quad (40).$$

Wir haben also vorerst die Grenzen zu suchen von $(1 + 2\alpha z\cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}}$ und $\frac{p}{\alpha}$ unter der Voraussetzung: dass α verschwindend klein wird.

Wenn wir setzen

$$2\alpha z\cos\varphi + \alpha^2 z^2 = \beta \tag{41},$$

so folgt:

$$2\alpha = \frac{\beta}{z\cos\varphi + \frac{\alpha z^2}{2}}$$

daher:

$$(1 + 2\alpha z\cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}} = (1+\beta)^{\frac{z\cos\varphi + \frac{\alpha z^2}{2}}{\beta}} \tag{42}$$

$$\operatorname{l\,sin}(1 + 2\alpha z\cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}} = \left[\operatorname{l\,sin}(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\operatorname{l\,sin}\left(z\cos\varphi + \frac{\alpha z^2}{2}\right)} \quad (43).$$

Nun ist bekannt, dass:

$$\operatorname{l\,sin}(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e = 2{\cdot}718281\ldots, \tag{44}$$
$$\operatorname{l\,sin}\left(z\cos\varphi + \frac{\alpha z^2}{2}\right) = z\cos\varphi,$$

folglich

$$\operatorname{l\,sin}(1 + 2\alpha z\cos\varphi + \alpha^2 z^2)^{\frac{1}{2\alpha}} = e^{z\cos\varphi}. \tag{45}$$

Was die Grenze von $\frac{p}{\alpha}$ anbelangt, so folgt aus (25)

$$\operatorname{tg} p = \frac{\alpha z\sin\varphi}{1 + \alpha z\cos\varphi}$$
$$\frac{\operatorname{tg} p}{\alpha} = \frac{z\sin\varphi}{1 + \alpha z\cos\varphi}.$$

Multiplicirt man mit $\frac{p}{\operatorname{tg} p}$, so ist:

$$\frac{p}{\alpha} = \frac{p}{\operatorname{tg} p} \cdot \frac{z \sin \varphi}{1 + \alpha z \cos \varphi} = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha z \sin \varphi}{1 + \alpha z \cos \varphi} . z \sin \varphi}{\frac{\alpha z \sin \alpha}{1 + \alpha z \cos \varphi} (1 + \alpha z \cos \varphi)} \tag{46}$$

woraus:

$$l \sin \frac{p}{\alpha} = z \sin \varphi \tag{47}$$

Jetzt können wir (45) und (47) in (40) substituiren:

$$1 + z (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) + \frac{z^2}{1.2} (\cos 2\varphi + \sqrt{-1} \sin 2\varphi) + \ldots$$

$$= \{\cos (z \sin \varphi) + \sqrt{-1} \sin (z \sin \varphi)\} \, e^{z \cos \varphi} \tag{48}$$

wo z jeden reellen Werth annehmen kann. Hieraus folgt unmittelbar:

$$1 + z \cos \varphi + \frac{z^2}{1.2} \cos 2\varphi + \frac{z^3}{1.2.3} \cos 3\varphi + \ldots = \cos (z \sin \varphi) \, e^{z \cos \varphi} \tag{49}$$

$$z \sin \varphi + \frac{z^2}{1.2} \sin 2\varphi + \frac{z^3}{1.2.3} \sin 3\varphi + \ldots = \sin (z \sin \varphi) \, e^{z \cos \varphi} \tag{50}$$

Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so geht (49) und (50) über in:

$$1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots = \cos z \tag{51}$$

$$z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots = \sin z \tag{52}$$

III. Summiren wir die Reihe:

$$z (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) - \frac{z^2}{2} (\cos 2\varphi + \sqrt{-1} \sin 2\varphi) + \frac{z^3}{3} (\cos 3\varphi + \sqrt{-1} \sin 3\varphi)$$

$$- \frac{z^4}{4} (\cos 4\varphi + \sqrt{-1} \sin 4\varphi) + \ldots \tag{53}$$

unter der Bedingung, dass $+1 > z > -1$.

Da allgemein:

$$(1 + 2z \cos \varphi + z^2)^{\frac{m}{2}} = e^{\frac{m}{2} \log (1 + 2z \cos \varphi + z^2)} \tag{54}$$

so ist nach (26):

$$1 + mz (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 (\cos 2\varphi + \sqrt{-1} \sin 2\varphi) + \ldots$$

$$= (\cos mp + \sqrt{-1} \sin mp) \, e^{\frac{m}{2} \log (1 + 2z \cos \varphi + z^2)} \tag{55}$$

wo p ganz denselben Werth hat, wie in (25). — Den zweiten Theil von (55) kann man nach aufsteigenden Potenzen von m entwickeln:

$$e^{\frac{m}{2} \log (1 + 2z \cos \varphi + z^2)} = 1 + \frac{m}{2} \log (1 + 2z \cos \varphi + z^2) + \frac{[m \log (1 + 2z \cos \varphi + z^2)]^2}{1.2.4} + \ldots \tag{56}$$

$$\cos mp = 1 - \frac{m^2p^2}{1.2} + \frac{m^4p^4}{1.2.3.4} - \frac{m^6p^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \tag{57}$$

$$\sin mp = mp - \frac{m^3p^3}{1.2.3} + \frac{m^5p^5}{1.2.3.4.5} - \dots \tag{58}$$

und hieraus durch Multiplication und Addition:

$$\cos mp + \sqrt{-1}\sin mp = 1 + mp\sqrt{-1} - \frac{m^2p^2}{1.2} - \frac{m^3p^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{m^4p^4}{1.2.3.4} + \frac{m^5p^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \dots \tag{59}$$

Bemerken wir noch, dass nach §. 6. (3):

$$e^{mp\sqrt{-1}} = \cos mp + \sqrt{-1}\sin mp \tag{60}$$

folglich der zweite Theil aus (55) auch noch:

$$= e^{mp\sqrt{-1} + \frac{m}{2}\log(1+2z\cos\varphi + z^2)} \tag{61}$$

Wollten wir weniger streng seyn, so könnten wir diess nach der Exponentialreihe entwickeln, da wir aber die Gleichung (60) am angeführten Orte nicht ganz streng begründet haben, so sind wir zu einer solchen Entwickelung von (61) noch nicht berechtigt, und müssen daher, um zu unserem Zweck — der Summirung — zu gelangen, einen anderen Weg einschlagen. — Es ist klar, dass (55) ein Product von (56) und (59) ist — zur Entwickelung aber eines Productes reeller Reihen besitzen wir eine eigene Formel, andererseits haben wir im Vorhergehenden festgestellt, dass unter gewissen Bedingungen jede bei reellen Reihen erlaubte Operation auch auf imaginäre anwendbar sey; — folglich können wir die Formel für das Product reeller Reihen auch auf die unter (56) und (59) angeführten imaginären Reihen anwenden.

Sind die zwei Reihen:

$$1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \tag{62}$$

und

$$1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots \tag{63}$$

so ist ihr Product nach der erwähnten Formel:

$$1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \dots \tag{64}$$

Da nun (62) und (63) für jeden reellen Werth von x und y convergiren, so wird (64) auch für jeden reellen, und in Folge des am Anfange dieses Paragraphen ausgesprochenen Satzes auch für jeden imaginären Werth von x convergiren. Es sind aber die Reihen (56) und (59) ganz von derselben Form wie (62) und (63), man braucht nur zu setzen:

$$x = \frac{m}{2}\log(1 + 2z\cos\varphi + z^2)$$

und

$$y = mp\sqrt{-1}.$$

Wir können also diese Werthe in (64) substituiren:

$$1+mz(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}\sin 2\varphi)+\ldots$$
$$=1+m[\tfrac{1}{2}\log(1+2z\cos\varphi+z^2)+p\sqrt{-1}]+$$
$$+\frac{m^3}{1.2}[\tfrac{1}{2}\log(1+2z\cos\varphi+z^2)+p\sqrt{-1}]^2+\ldots \tag{65}$$

Dividiren wir mit m, nachdem wir die Einheit beiderseits weggelassen, und setzen im Quotienten m unendlich klein, so erhalten wir als die gesuchte Summe der Reihe (53)

$$z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)-\frac{z^2}{2}(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}\sin 2\varphi)+\frac{z^3}{3}(\cos 3\varphi+\sqrt{-1}\sin 3\varphi)-\ldots$$
$$=\tfrac{1}{2}\log(1+2z\cos\varphi+z^2)+p\sqrt{-1} \tag{66}$$

woraus durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$z\cos\varphi-\frac{z^2}{2}\cos 2\varphi+\frac{z^3}{3}\cos 3\varphi-\frac{z^4}{4}\cos 4\varphi+\ldots.$$
$$=\tfrac{1}{2}\log(1+2z\cos\varphi+z^2) \tag{67}$$

$$z\sin\varphi-\frac{z^2}{2}\sin 2\varphi+\frac{z^3}{3}\sin 3\varphi-\frac{z^4}{4}\sin 4\varphi+\ldots.$$
$$=p=\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi} \tag{68}$$

Setzt man $\varphi=\frac{\pi}{2}$, so erhält man die Leibnitz'sche Reihe:

$$z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots.\ =\operatorname{arc\,tg} z \tag{69}$$

welche Reihe ziemlich langsam convergirt, und daher zu Berechnungen, z. B. zur Berechnung von π nicht gut angewendet werden kann.

§. 13.

Kehren wir zurück zu den in §. 12. (1) angeführten Functionen:

$$\begin{array}{ll} A^x, & \log x \\ \sin x, & \operatorname{arc\,sin} x \\ \cos x, & \operatorname{arc\,cos} x. \end{array} \tag{1}$$

Diese sind so beschaffen, dass in jedem Paar die eine durch dieselbe Operation erhalten wird, deren Repräsentant die andere ist. Z. B. wenn A die Basis eines logarithmischen Systemes ist, und es steht:

$$A^x=B \tag{2}$$

und

$$\log y=\alpha \tag{3}$$

so wird man um aus (2) x zu finden Logarithmen brauchen:

$$x=\log B \tag{4}$$

und um aus (3) y zu finden, zur Potenz erheben:

$$y=A^\alpha \tag{5}$$

Oder wenn ist:

$$\sin x = a \qquad (6)$$

$$\operatorname{arc}\sin x' = b \qquad (7)$$

und man sucht x, so findet man einen Bogen

$$x = \operatorname{arc}\sin a \qquad (8)$$

sucht man aber x′, so findet man einen Sinus

$$x' = \sin b \qquad (9).$$

So viel vom paarweisen Zusammenhang dieser Functionen, deren analytischen Sinn wir jetzt unter der Voraussetzung, dass x imaginär sey, ermitteln wollen.

Die Functionen A^x, $\sin x$, $\cos x$ können wir, wenn x reell ist, immer in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln. Es ist nämlich:

$$A^x = 1 + x\log A + \frac{(x\log A)^2}{1.2} + \dots \qquad (10)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \qquad (11)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \qquad (12).$$

Nach §. 12 kann man diese Reihen auch im Falle, wenn x imaginär wäre, anwenden, und es handelt sich hier nur darum, den Werth der drei Functionen für ein imaginäres x, nicht in unendlichen Reihen, sondern in endlichen, geschlossenen Ausdrücken zu erhalten.

Wenn wir in (10) setzen: $A = e$, wo e die gewöhnliche Bedeutung hat, so ist:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \qquad (13)$$

Setzen wir successiv $x\log A$, $x\sqrt{-1}$, und $-x\sqrt{-1}$ statt x:

$$e^{x\log A} = 1 + x\log A + \frac{(x\log A)^2}{1.2} + \dots \qquad (14)$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \qquad (15)$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots \qquad (16)$$

Vergleicht man (10) mit (14), und (15) mit §. 12 (59), so ist:

$$e^{x\log A} = A^x$$

und

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x \qquad (17).$$

Multiplicirt man (50) §. 12 mit $\sqrt{-1}$, so erhält man durch Subtraction von (57) eine der obigen (16) ganz gleiche Reihe, folglich:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x \qquad (18).$$

Mit Hilfe der zwei letzten eben mit aller Strenge erwiesenen Formeln sind wir im Stande zu beweisen, dass die besondere Eigenschaft der Potenz

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \tag{19}$$

auch für den Fall gilt, wenn x und y imaginär ist. — Denn nach Obigem ist:

$$e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{y\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$$

woraus

$$= \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y)$$
$$= e^{(x+y)\sqrt{-1}} \tag{20}.$$

Ebenso ist:

$$(e^x)^m = e^{mx} \tag{21}$$

auch wenn x imaginär ist, denn:

$$(e^{x\sqrt{-1}})^m = e^{(x\sqrt{-1})m} = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m$$
$$= \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx$$
$$= e^{mx\sqrt{-1}} \tag{22}$$

Da ferner:

$$a^{x\sqrt{-1}} = (e^{\log a})^{x\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}\log a} \tag{23}$$

so ist:

$$a^{x\sqrt{-1}} = \cos(x\log a) + \sqrt{-1}\sin(x\log a) \tag{24}$$

Auf ähnliche Art:

$$a^{-x\sqrt{-1}} = \cos(x\log a) - \sqrt{-1}\sin(x\log a) \tag{25}$$

und durch Addition und Subtraction:

$$\cos(x\log a) = \frac{a^{x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}}}{2} \tag{26}$$

$$\sin(x\log a) = \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \tag{27}$$

hieraus kann man endlich ganz analog mit der obigen Art beweisen, dass die zwei Haupteigenschaften der Potenz auch bei imaginären Werthen der Veränderlichen nicht nur für die Wurzel e, sondern g a n z a l l g e m e i n gelten:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \tag{28}$$

und

$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{29}$$

Setzt man in (16) und (17) $a + b\sqrt{-1}$ statt x, so findet man als analytische Interpretation der Exponentiellen mit imaginären Exponenten:

$$A^{(a+b\sqrt{-1})} = e^{(a+b\sqrt{-1})\log A}$$
$$= e^{a\log A} \cdot e^{b\sqrt{-1}\log A}$$
$$= A^a[\cos(b\log A) + \sqrt{-1}\sin(b\log A)] \tag{30}$$

Aus (17) und (18) findet man:

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

und für $x = a + b\sqrt{-1}$

$$\cos(a+b\sqrt{-1}) = \frac{e^{a\sqrt{-1}}.e^{-b} + e^{-a\sqrt{-1}}.e^{b}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}[e^{-b}(\cos a+\sqrt{-1}\sin a)+e^{b}(\cos a-\sqrt{-1}\sin a)]$$

$$= \tfrac{1}{2}[(e^{b}+e^{-b})\cos a+\sqrt{-1}(e^{-b}-e^{b})\sin a]$$

$$= \cos a\,\frac{e^{b}+e^{-b}}{2} - \sqrt{-1}\sin a\,\frac{e^{b}-e^{-b}}{2} \tag{31}$$

Da aber

$$\cos(b\sqrt{-1}) = \frac{e^{b}+e^{-b}}{2} \tag{32}$$

$$\sin(b\sqrt{-1}) = \frac{e^{-b}-e^{+b}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\sqrt{-1} \tag{33}$$

so ist der gesuchte cos und sin:

$$\cos(a+b\sqrt{-1}) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+a+b\sqrt{-1}\right) \tag{34}$$

$$\sin(a+b\sqrt{-1}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\sqrt{-1}\right) \tag{35}$$

Dasselbe Resultat ergibt sich auch auf folgendem Weg:

$$\sin(a+b\sqrt{-1}) = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})\sqrt{-1}} - e^{-(a+b\sqrt{-1})\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{a\sqrt{-1}-b} - e^{-a\sqrt{-1}+b}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\cdot\frac{e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\cdot\frac{e^{a\sqrt{-1}}+e^{-a\sqrt{-1}}}{2}\sqrt{-1}$$

$$= \sin a\,\frac{e^{b}+e^{-b}}{2} + \sqrt{-1}\cos a\,\frac{e^{b}-e^{-b}}{2} \tag{36}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\sqrt{-1}\right) \tag{37}$$

Aus (31) und (36) folgt schon, dass die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y\\ \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \sin y\cos x\end{aligned} \tag{38}$$

auch dann richtig sind, wenn x und y imaginär wird, denn wenn man in (31) und (36) die Werthe aus (32) und (33) substituirt, so findet man:

$$\begin{aligned}\cos(a+b\sqrt{-1}) &= \cos a\cos(b\sqrt{-1}) - \sin a\sin(b\sqrt{-1})\\ \sin(a+b\sqrt{-1}) &= \sin a\cos(b\sqrt{-1}) + \sin(b\sqrt{-1})\cos a\end{aligned} \tag{39}$$

Da nun diese zwei Formeln die Quelle aller übrigen goniometrischen Formeln sind, so folgt, dass diese sämmtlich auch für imaginäre Werthe der Variablen richtig sind, wenn man die Werthe (32) und (33) substituirt.

Wir haben also unter der Voraussetzung, dass

$$x = a + b\sqrt{-1}$$

als analytischer Sinn der Functionen A^x, $\sin x$, $\cos x$:

$$\begin{aligned} A^x &= A^a\left[\cos(b\log A) + \sqrt{-1}\sin(b\log A)\right] \\ \sin x &= \left(\frac{\pi}{2} - a - b\sqrt{-1}\right) \\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + a + b\sqrt{-1}\right) \end{aligned} \tag{40}$$

Gehen wir jetzt zu den Functionen $\log x$, $\arcsin x$, und $\arccos x$. —

Ist $x = a + b\sqrt{-1} = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, wo a, b, r, φ reelle Grössen sind, ferner A die Basis eines Logarithmensystemes, und $u + v\sqrt{-1}$ so gewählt, dass:

$$A^{u+v\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1} = x \tag{41}$$

so ist $\log x$ das, was man einen imaginären Logarithmus nennt. Da wir sehen werden, dass nicht nur jeder imaginären, sondern auch jeder reellen Grösse mehrere imaginäre Logarithmen entsprechen, so werden wir, um irgend einen dieser imaginären Logarithmen zu bezeichnen, dieselbe Bezeichnungsweise anwenden, die wir schon im frühern gebraucht: $\log((x))$, wobei wir, wenn anderes nicht ausdrücklich bemerkt wird, immer natürliche Logarithmen verstehen.

Untersuchen wir vor allem die Ausdrücke

$$\log((1)), \quad \log((-1)), \quad \log((a+b\sqrt{-1})).$$

Nehmen wir an $u + v\sqrt{-1}$ sey einer der Werthe von $\log((1))$; dann ist nach (41):

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = 1 \tag{42}$$

und nach (17):

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u(\cos v + \sqrt{-1}\sin v) \tag{43}$$

und hieraus:

$$e^u = 1 \quad \text{und} \quad \cos v + \sqrt{-1}\sin v = 1$$

das heisst:

$$u = 0 \quad v = 0 \pm 2\pi k$$

daher:

$$u + v\sqrt{-1} = \pm 2\pi k\sqrt{-1} \tag{44}$$

folglich:

$$\log((1)) = \pm 2k\pi\sqrt{-1} \tag{45}$$

Weil hier k jede ganze Zahl von $-\infty$ bis $+\infty$, die Nulle nicht ausgenommen, bedeuten kann, so ist klar, dass $\log((1))$ nebst einem einzigen reellen Werth unendlich viele imaginäre Werthe haben kann. Der reelle ist, wenn nämlich $k = 0$:

$$\log 1 = 0 \tag{46}$$

Auf ähnliche Art findet man $\log((-1))$. — Nehmen wir wieder an, $u + v\sqrt{-1}$ sey einer der Werthe von $\log((-1))$, so ist:

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = -1 = e^u(\cos v + \sqrt{-1}\sin v)$$

woraus:

$$e^u = 1; \quad \cos v + \sqrt{-1}\sin v = -1$$

das heisst:

$$u = 0; \quad v = \pm(2k + r)\pi,$$

folglich:

$$\log((-1)) = \pm(2k+1)\pi\sqrt{-1} \tag{47}$$

Man sieht, dass $\log((-1))$ auch unendlich viele imaginäre aber keinen einzigen reellen Werth hat.

Mit Hilfe des Gesagten lässt sich der Werth von $\log((a+b\sqrt{-1}))$ entwickeln. Es sey wieder einer der Werthe $u+v\sqrt{-1}$; so ist:

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = a+b\sqrt{-1} = r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi) \tag{48}$$

aber auch:

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)$$

daher:

$$r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi) = e^u(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)$$

folglich:

$$v = e^u \quad \text{und} \quad \cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi = \cos v+\sqrt{-1}\sin v$$

das heisst:

$$u = \log v = \log(a^2+b^2)$$
$$\cos\varphi = \cos v$$
$$\sin\varphi = \sin v$$

und hieraus:

$$v = \varphi \pm 2k\pi$$

(wo k seine frühere Bedeutung beibehält), folglich da:

$$u+v\sqrt{-1} = \log v + (\varphi \pm 2k\pi)\sqrt{-1} \tag{49}$$

der gesuchte Werth:

$$\log(a+b\sqrt{-1}) = \log v + \varphi\sqrt{-1} \pm 2k\pi\sqrt{-1}$$
$$= \log v + \varphi\sqrt{-1} \pm \log((1)) \tag{50}$$

wo φ denjenigen Bogen bedeutet, der nach (48) folgender Gleichungen entspricht:

$$\cos\varphi = \frac{a}{v}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{v}$$

Wollte man die allgemeine Formel (50) specialisiren für die Fälle, wenn a positiv oder negativ ist, so braucht man nur in Betracht zu ziehen, dass wenn:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\,; \quad \varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a} \tag{51}$$

daraus folgt:

$$\operatorname{tg}(\varphi+\pi) = \frac{b}{-a}\,; \quad \varphi+\pi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{-a} \tag{52}$$

Ist also $a < 0$, so wird aus (50)

$$\log((a+b\sqrt{-1})) = \log v + \varphi\sqrt{-1} + \pi\sqrt{-1} + \log((1)) \tag{53}$$

Da b ganz, a aber numerisch willkührlich ist, so setzen wir:

$$a = -1 \quad \text{und} \quad b = 0 \tag{54}$$

woraus

$$v = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

und nach (53)

$$\log((-1)) = \pi\sqrt{-1} + \log((1)) \tag{55}$$

Substituiren wir diesen Werth in (55), zugleich aber $v = 1$ und $\varphi = 0$ in (50), so finden wir für $a > 0$:

$$\log((a+b\sqrt{-1})) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2) + \sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a} + \log((1)) \tag{56}$$

und für $a < 0$:

$$\log((a+b\sqrt{-1})) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2) + \sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a} + \log((-1)) \tag{57}$$

Diese zwei Formeln enthalten sämmtliche Logarithmen nicht nur der imaginären, sondern für $b = 0$ auch der reellen Grössen.

Setzt man den einzigen reellen Werth von $\log((1))$ aus (46) in (56), so hat man:

$$\log(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2) + \sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a} \tag{58}$$

wird b negativ so ist:

$$\log(a-b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2) - \sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a} \tag{59}$$

addirt man die letzten zwei Gleichungen:

$$\log(a+b\sqrt{-1}) + \log(a-b\sqrt{-1}) = \log(a^2+b^2) \tag{60}$$

hieraus ist die Eigenschaft der Logarithmen

$$\log x + \log y = \log xy \tag{61}$$

auch in Bezug auf imaginäre Grössen leicht zu erweisen. —

Es ist nämlich:

$$a^2 + b^2 = (a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$$

folglich:

$$\log(a+b\sqrt{-1}) + \log(a-b\sqrt{-1}) = \log[(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})] \tag{62}$$

wie bei reellen Grössen, und da man dieses auf eine beliebige Anzahl von Factoren ausdehnen kann, so ist allgemein für jeden imaginären Werth von x:

$$\log x^m = m \log x.$$

Ebenso bestättigt sich die Eigenschaft:

$$\log x - \log y = \log\frac{x}{y} \tag{63}$$

Denn, wenn wir setzen:

$$xy = z\,; \quad y = \frac{z}{x}$$

so ist nach (61):

$$\log x + \log\frac{z}{x} = \log z$$

woraus

$$\log z - \log x = \log\frac{z}{x} \tag{64}$$

wie bei reellen Grössen.

Sucht man einen künstlichen Logarithmus von $a + b\sqrt{-1}$ in einem Systeme, dessen Basis B und dessen Symbol Log. ist, während log. das natürliche Logarithmensystem charakterisirt, und nimmt man an, dass:

$$\mathrm{Log}((a+b\sqrt{-1})) = u + v\sqrt{-1}$$

so ist:

$$a+b\sqrt{-1} = B^{u+v\sqrt{-1}}$$
$$= e^{(u+v\sqrt{-1})\log B}$$

und

$$\log((a+b\sqrt{-1})) = (u+v\sqrt{-1})\log B$$

folglich:

$$u+v\sqrt{-1} = \frac{\log((a+b\sqrt{-1}))}{\log B}$$

$$\mathrm{Log}((a+b\sqrt{-1})) = \frac{\log((a+b\sqrt{-1}))}{\log B} \tag{65}$$

ganz wie bei reellen Grössen. Uebrigens werden wir noch Gelegenheit haben, über die Allgemeinheit der Formeln (62), (64) und (65) zu sprechen.

Da wir uns überzeugt haben, dass imaginären Bögen immer imaginäre trigonometrische Functionen entsprechen, so lässt sich umgekehrt fragen: was für Bögen entsprechen imaginären trigonometrischen Functionen?

Sey $a+b\sqrt{-1}$ der Sinus des Bogens $u+v\sqrt{-1}$, d. h.

$$\arcsin(a+b\sqrt{-1}) = u+v\sqrt{-1} \tag{66}$$
$$a+b\sqrt{-1} = \sin(u+v\sqrt{-1})$$

oder nach (36):

$$a+b\sqrt{-1} = \frac{e^v+e^{-v}}{2}\sin u + \sqrt{-1}\,\frac{e^v-e^{-v}}{2}\cos u$$

woraus:

$$\frac{a}{\sin u} = \frac{e^v+e^{-v}}{2}; \quad \frac{b}{\cos u} = \frac{e^v-e^{-v}}{2}$$

und durch Addition und Subtraction:

$$e^v = \frac{a}{\sin u}+\frac{b}{\cos u} \tag{67}$$

$$e^{-v} = \frac{a}{\sin u}-\frac{b}{\cos u} \tag{68}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, so hat man:

$$1 = \frac{a^2}{\sin u^2}-\frac{b^2}{\cos u^2}$$

oder

$$\sin u^2\cos u^2 = a^2\cos u^2 - b^2\sin u^2 \tag{69}$$

Drückt man den cos durch den Sinus aus:

$$\sin u^4 - (1+a^2+b^2)\sin u^2 = -a^2$$

woraus:

$$\sin u^2 = \frac{1+a^2+b^2}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+a^2+b^2)^2-4a^2} \tag{70}$$

Da nur ein Werth giltig seyn kann, so müssen wir bestimmen, welches Zeichen zu wählen sey. — Zu diesem Zwecke benützen wir den Umstand, dass $\cos u^2$ immer positiv seyn muss. Führt man in (69) statt des Sinus den Cosinus ein, so findet man:

$$\cos u^4 - (1-a^2+b^2)\cos u^2 = b^2$$

woraus allgemein:

$$\cos u^2 = \frac{1-a^2-b^2}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-a^2-b^2)^2+4b^2}$$

und weil $\cos u^2 > 0$:

$$\cos u^2 = \tfrac{1}{2}[1-a^2-b^2+\sqrt{(1-a^2-b^2)^2+4b^2}].$$

Sucht man hieraus $\sin u^2$ nach der Formel $\sin u^2 = 1 - \cos u^2$:

$$\sin u^2 = \tfrac{1}{2}[1+a^2+b^2-\sqrt{(1-a^2-b^2)^2+4b^2}]$$

oder

$$\sin u^2 = \tfrac{1}{2}[1+a^2+b^2-\sqrt{(1+a^2+b^2)^2-4a^2}] \tag{71}$$

d. h. in diesem Falle ist in (70) das zweite Zeichen zu nehmen.

Setzen wir der Kürze wegen:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+a^2+b^2-\sqrt{(1+a^2+b^2)^2-4a^2}} \tag{72}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-a^2-b^2+\sqrt{(1-a^2-b^2)^2+4b^2}}$$

da A und B bekannt sind, so ist es auch u:

$$u = \arcsin A + 2k\pi$$

wo k jede ganze positive Zahl bedeuten kann.

Aus (67) und (68) findet man:

$$v = \log\left(\frac{a}{\sin u} + \frac{b}{\cos u}\right) = \log\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B}\right)$$

folglich

$$\arcsin((a+b\sqrt{-1})) = 2k\pi + \arcsin A + \sqrt{-1}\,\log\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B}\right) \tag{73}$$

Im einfachsten Falle, wenn $k=0$, wird die Formel eindeutig:

$$\arcsin(a+b\sqrt{-1}) = \arcsin A + \sqrt{-1}\,\log\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B}\right) \tag{74}$$

Erinnert man sich, dass $\cos 2k\pi = 1$, so findet man noch:

$$\begin{aligned}\arcsin((a+b\sqrt{-1})) &= \arcsin(a+b\sqrt{-1}) + \arccos((1))\\ &= \arcsin(a+b\sqrt{-1}) + \arcsin((0))\end{aligned} \tag{75}$$

Suchen wir nun den Werth von:

$$\arccos((a+b\sqrt{-1})) \tag{76}$$

Nehmen wir an:

$$\arccos((a+b\sqrt{-1})) = u+v\sqrt{-1} \tag{77}$$

so ist:

$$\begin{aligned}a+b\sqrt{-1} &= \cos(u+v\sqrt{-1})\\ &= \frac{e^v+e^{-v}}{2}\cos u - \sqrt{-1}\sin u\frac{e^v-e^{-v}}{2}\end{aligned} \tag{78}$$

und hieraus:

$$\frac{e^v+e^{-v}}{2} = \frac{a}{\cos u}\,; \quad \frac{e^v-e^{-v}}{2} = -\frac{b}{\sin u}$$

$$e^{v} = \frac{a}{\cos u} - \frac{b}{\sin u}\,; \quad e^{-v} = \frac{a}{\cos u} + \frac{b}{\sin u} \tag{79}$$

$$1 = \frac{a^2}{\cos u^2} - \frac{b^2}{\sin u^2}$$

daher:

$$\sin u^4 - (1-a^2-b^2)\sin u^2 = b^2$$

und da $\sin u^2$ nothwendig > 0

$$\sin u^2 = \frac{1-a^2-b^2}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-a^2-b^2)^2 + 4b^2}$$

$$\cos u^2 = \frac{1+a^2+b^2}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+a^2+b^2)^2 - 4a^2}$$

das heisst:

$$\cos u = A\,; \quad \sin u = B$$

daher:

$$u = \arccos A \pm 2k\pi$$

und

$$v = \log\left(\frac{a}{\cos u} - \frac{b}{\sin u}\right) = \log\left(\frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right)$$

folglich:

$$\arccos((a+b\sqrt{-1})) = \pm 2k\pi + \arccos A + \sqrt{-1}\log\left(\frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right) \tag{80}$$

Will man den kleinsten dieser Bögen, so setzt man $k = 0$

$$\arccos(a+b\sqrt{-1}) = \arccos A + \sqrt{-1}\log\left(\frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right) \tag{81}$$

Um die Giltigkeit der Gleichung

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \tag{82}$$

auch für imaginäre Werthe von x zu erweisen, bringen wir die Ausdrücke A, B, $\frac{a}{A}$ und $\frac{b}{B}$ auf die einfachste Form, wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind, wenn $a < 1$ und wenn $a > 1$.

Setzen wir zu diesem Zwecke $b = 0$, so wird aus (72)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+a^2-\sqrt{(1-a^2)^2}}$$

Ist $a < 1$, so ist nothwendig:

$$\sqrt{(1-a^2)^2} = 1 - a^2$$

daher:

$$A = a\,; \quad B = \sqrt{1-a^2}$$

Ist aber $a > 1$, so wird:

$$\sqrt{(1-a^2)^2} = \sqrt{(a^2-1)^2} = a^2 - 1$$

denn sonst würde A imaginär, was nicht seyn kann, da es die Function des reellen Bogens u ist, — daher in diesem Falle:

$$A = 1\,; \quad B = 0$$

Im ersten Falle ist also:

$$\frac{a}{A} = 1\,; \qquad \frac{b}{B} = 0$$

im zweiten:

$$\frac{a}{A} = a\,; \qquad \frac{b}{B} = \frac{0}{0}$$

Es ist bekannt, dass man den Werth von Brüchen, die unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, durch Division des ersten von der Nulle verschiedene Differentialquotienten des Zählers und Nenners erhält. — Dieses Verfahren könnte man ohne Zweifel auch hier anwenden, kürzer aber ist folgender Weg: — Wird in dem Ausdruck:

$$\frac{b^2}{B^2} = \frac{2b^2}{\sqrt{(1-a^2-b^2)^2+4b^2}+1-a^2-b^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(1-a^2-b^2)^2+4b^2}-(1-a^2-b^2)}{2}$$

$b = 0$ und $a > 1$, so ist:

$$\frac{b^2}{B^2} = \frac{a^2-1-(1-a^2)}{2} = a^2-1$$
$$\frac{b}{B} = \sqrt{a^2-1}$$

folglich:

$$A = a\,; \quad \frac{a}{A} = 1\,; \quad \frac{b}{B} = 0 \quad \text{wenn } b = 0 \text{ und } a < 1 \tag{83}$$

$$A = 1\,; \quad \frac{a}{A} = a\,; \quad \frac{b}{B} = \sqrt{a^2-1} \quad \text{wenn } b = 0 \text{ und } a > 1 \tag{84}$$

und in diesem letzterem Falle folgt aus (74):

$$\operatorname{arc\,sin} a = \operatorname{arc\,sin}(1) + \sqrt{-1}\,\log(a+\sqrt{a^2-1})$$

oder

$$\operatorname{arc\,sin} a = \frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\,\log(a+\sqrt{a^2-1}) \tag{85}$$

Hiermit gibt uns die Analysis auf eine sinnlose Frage eine entsprechende Antwort; denn da wir setzten $a > 1$, verlangten wir den Bogen, dessen Sinus grösser sey als Eins, ein solcher Sinus existirt aber nicht, daher gibt die letzte Gleichung einen imaginären Bogen.

Unter ähnlichen Bedingungen erhält man aus (81)

$$\operatorname{arc\,cos} a = \sqrt{-1}\,\log(a-\sqrt{a^2-1}) \tag{86}$$

und durch Addition:

$$\operatorname{arc\,sin} a + \operatorname{arc\,cos} a = \frac{\pi}{2} \tag{87}$$

d. h. die Gleichung (82) ist auch dann richtig, wenn $x > 1$.

Wenn wir in (72) substituiren $a = 0$, daher $A = 0$; $B = 1$, so ist:

$$\frac{a}{A} = \frac{0}{0}$$

zu dessen Bestimmung wir haben:

$$\frac{a^2}{A^2} = \frac{2a^2}{1+a^2+b^2-\sqrt{(1+a^2+b^2)^2-4a^2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}(1+a^2+b^2+\sqrt{(1+a^2+b^2)^2-4a^2})$$

daher:

$$\frac{a^2}{A^2} = 1+b^2\,; \qquad \frac{a}{A} = \sqrt{1+b^2}$$

folglich nach (74) und (81):

$$\arcsin(b\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\log(b+\sqrt{1+b^2})$$
$$\arccos(b\sqrt{-1}) = \frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\log(\sqrt{1+b^2}-b) \tag{88}$$

und durch Addition:

$$\arcsin(b\sqrt{-1})+\arccos(b\sqrt{-1}) = \frac{\pi}{2} \tag{89}$$

d. h. die Gleichung (82) ist auch dann richtig, wenn x imaginär ist. Mit Hilfe dieses Satzes, den wir bis jetzt der Consequenz wegen entbehren mussten, wäre der Werth von (76) viel leichter und kürzer zu finden gewesen.

§. 17.

Ueberblicken wir die bis jetzt gefundenen Resultate, so finden wir, dass wir der Aufgabe: „zu untersuchen, welchen Modificationen die Functionen unterworfen sind, wenn ihre Veränderliche imaginär wird“ vollkommen entsprochen haben, denn

a) wir kennen nicht nur den analytischen Sinn der Functionen:

$$x\pm y,\quad xy,\quad \frac{x}{y},\quad x^m,\quad a^x,\quad \log x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad \arcsin x,\quad \arccos x,$$

sondern wir können auch behaupten:

b) dass in Bezug der angeführten Functionen dieselben Verhältnisse, Regeln und Formeln gelten, wenn ihre Veränderliche imaginär wird, welche für dieselben im reellen Zustande stattfinden, nur ist zu berücksichtigen, dass in denjenigen Fällen, wo beide Theile oder nur ein Theil einer Gleichung vieldeutig ist, das Gleichheitszeichen nur so viel bedeutet: dass irgend ein Werth des einen Theiles gleich ist irgend einem Werth des andern Theiles.

c) Wir haben mehrere Gleichungen abgeleitet, die auf einen innigen Zusammenhang scheinbar ganz fremder Functionen hinweisen. Solche Functionen sind die exponentiellen und trigonometrischen, die logarithmischen und trigonometrischen, die potentiellen und exponentiellen — so dass die Imaginären gewissermassen als Uebergänge erscheinen von einer Function zur andern.

Somit sollten wir zu den Integralen, als höheren Functionen übergehen; wir wollen aber früher noch einige Bemerkungen vorausschicken.

I. Man könnte fragen, warum wir es unterlassen haben, die Binomialformel für einen imaginären Exponenten zu beweisen, da wir es doch für den Fall, wenn das Binom imaginär ist, gethan haben.

Abgesehen von dem, was im §. 13 von A^x gesagt worden, lässt sich behaupten: dass es gar nicht nothwendig sey, die Binomialformel für einen imaginären Exponenten zu erweisen, aus der einfachen Ursache, weil die Formel in diesem Falle nur die analytische Definition der imaginären Grösse $\sqrt{-1}$ ist, so dass das analytische Symbol

$$(1+a)^{\sqrt{-1}}$$

nur als dasjenige betrachtet werden muss, was aus der Binomialformel wird, wenn darin $\sqrt{-1}$ statt des Exponenten geschrieben wird. Bei diesem Umstand aber für die Giltigkeit einer besonderen Beweis liefern wollen, wäre ein Circulus vitiosus. —

II. Zuweilen sind die imaginären Grössen nur scheinbar in den Ausdrücken enthalten, als durch die Form derselben nothwendig bedingt; z. B. in

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

Bevor wir also aus dem Erscheinen des Imaginären etwas folgern, ist wohl zu untersuchen, ob es nur in der Form oder im Wesen des Ausdruckes enthalten sey. Ein Beleg hiefür ist die CARDANische Formel. Der Fall, den man einst „casus irreducibilis“ nannte, wird heute ohne Schwierigkeit aufgelöst. — die Formel dazu ist imaginär, aber nur scheinbar.

III. Obwohl man $\sqrt{-1}$ durch keine wirkliche Zahl ausdrücken kann, so lassen sich doch für die imaginären Potenzen desselben gleichgeltende Zahlenwerthe finden.

Wenn man in der Formel §. 13. (58)

$$\log(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2) + \sqrt{-1}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$$

setzt: $a=0$; $b=1$, so ist

$$\log\sqrt{-1} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}$$

$$\frac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$$

folglich:

$$\frac{\pi}{2} = \log(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = \log e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = e^{\frac{\pi}{2}} \qquad (1)$$

und weil:

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = (\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}}$$

so ist auch:

$$(\sqrt{-1})^{-\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

daher:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \tag{2}$$

Drücken wir (1) und (2) in Form von Reihe aus:

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = 1 + \frac{\pi}{1.2} + \frac{\pi^2}{1.2.4} + \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \frac{\pi^4}{1.2.3.4.16} + \dots$$

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 1 - \frac{\pi}{1.2} + \frac{\pi^2}{1.2.4} - \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \frac{\pi^4}{1.2.3.4.16} - \dots$$

das heisst:

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\sqrt{-1}}} = 4{\cdot}81049 \dots$$

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = 0{\cdot}207879 \dots$$

Eigentlich sollten wir hier schreiben: $((\sqrt{-1}))^{\sqrt{-1}} =$ u. s. w., denn der angeführte Werth ist eigentlich nur einer der Werthe von $((\sqrt{-1}))^{\sqrt{-1}}$, weil arctg ∞ nicht nur $= \frac{\pi}{2}$, sondern auch $= 2r\pi + \frac{\pi}{2}$ ist; und eben dasselbe gilt von $((\sqrt{-1}))^{\frac{1}{\sqrt{-1}}}$.

Da wir die Formel §. 14 (58) eigentlich nur für $a <> o$, nicht aber für $a = 0$ bewiesen haben, so könnte man an der Richtigkeit der obigen Resultate zweifeln, wenn ein anderer Weg, durch allgemeine und streng begründete Sätze nicht zu denselben Resultaten führen würde. — Wir haben nämlich für alle Fälle:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

Setzen wir $x = \frac{\pi}{2}$, so ist:

$$e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}} = \sqrt{-1}$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$$

u. s. w. wie oben, so dass hiedurch nicht nur die obigen Resultate gerechtfertiget sind, sondern die angezogene Formel auch für den Fall, wenn $a = 0$, bewiesen ist.

IV. Nachdem wir bis jetzt zumeist vom analytischen Sinn der Functionen mit imaginären Veränderlichen gesprochen haben, gehen wir zur geometrischen Interpretation derselben über. Wir werden nun im Stande seyn, die im §. 2 erwähnte Bedeutung „der lateralen Grösse" ausführlicher zu entwickeln.

Es sey wie in §. 2 in der folgenden Figur 2

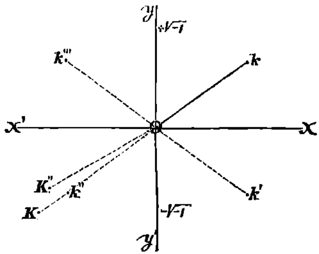
xx′ die Axe der Abscissen und yy′ die der auf jene senkrechten Ordinaten. Die Lage des Punctes k wird bestimmt durch die Gleichungen

$$k \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

wo a und b in Zahlen ausgedrückt gedacht werden müssen. Ziehen wir ok = r und nennen den Winkel $xok = \varphi$, so ist:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Fig. 2.



Diese zwei Gleichungen wird man in eine zusammenziehen können, wenn man dem Symbol $\sqrt{-1}$ die im §. 2 erwähnte Bedeutung beilegt, nämlich: die Einheit der Entfernung demjenigen zur Linken der von 0 in der Richtung der positiven x sieht. — Die Lage von x wird dann bestimmt durch den Ausdruck

$$z = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\ ; \quad \varphi = xok$$

oder

$$z = \alpha + \beta\sqrt{-1} = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

wo dann $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Nimmt man ok für die Einheit der Entfernung, so ist

$$1 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \text{d. h.}$$

$$\text{für } k\ ; \quad z = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\ ; \quad \text{für den Modulus} = 1$$

Geht k über in k', k'', k''', so ist analog:

$$\text{für } k'\ ; \quad z' = \cos\varphi_1 - \sqrt{-1}\sin\varphi_1\ ; \quad \text{wo } \varphi_1 = xok'$$
$$\text{„ } k''\ ; \quad z'' = -\cos\varphi_2 - \sqrt{-1}\sin\varphi_2\ ; \quad \text{„ } \varphi_2 = xok''$$
$$\text{„ } k'''\ ; \quad z''' = -\cos\varphi_3 + \sqrt{-1}\sin\varphi_3\ ; \quad \text{„ } \varphi_3 = xok'''$$

hier wird $\sin\varphi$ nur als nummerischer Werth immer positiv, also nicht in trigonometrischer, den Quadranten bestimmender Bedeutung genommen. Da in den letzten vier Gleichungen der Modulus $= 1$, so ist:

$$ok = ok' = ok'' = ok'''$$

Geht k'' über in K und bleibt φ_2 dasselbe, so wird, wenn $oK = R$

$$Z = \alpha' + \beta'\sqrt{-1} = -R(\cos\varphi_2 + \sqrt{-1}\sin\varphi_2)$$
$$R = \sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$$

Bleibt aber oK dasselbe, und geht φ_2 über in φ', so ist:

$$z' = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1} = -R(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sin\varphi')$$
$$R = \sqrt{\alpha''^2+\beta''^2}$$

u. s. w.

V. Das in den Paragraphen 9, 10 und 11 Gesagte ist hinreichend, um die Wurzeln jeder Gleichung von der Form

$$x^m \pm 1 = 0$$

aufzufinden. Nennt man die Wurzeln $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_m$, so ist:

$$x^m + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ \ldots\ (x - x_m)$$

Schreiben wir statt $x_1\ x_2 \ldots$ die Werthe aus §. 11. (8) und (9), nachdem wir zwei und zwei derselben multiplicirt haben, so ist für ein gerades m:

$$x^m + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right)\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{m-1}{m}\pi + 1\right)$$

und für ein ungerades m:

$$x^m + 1 = (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{m} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{m} + 1\right)\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{m-2}{m}\pi + 1\right)$$

Setzen wir $\frac{x}{a}$ statt x, und multipliciren beide Theile der Gleichung mit a^m, so haben wir

für ein gerades m:

$$x^m + a^m = \left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{m} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{m} + a^2\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(x^2 - 2ax\,\frac{m-1}{m}\pi + a^2\right) \qquad (3)$$

und für ein ungerades m:

$$x^m + a^m = (x+a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{m} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{m} + a^2\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{m-2}{m}\pi + a^2\right) \qquad (4)$$

Ganz ähnlich ist das Verfahren, wenn die Gleichung wäre: $x^m - 1 = 0$. — Den Werth der Wurzeln, die $x_1\ x_2\ x_3 \ldots$ heissen mögen, findet man aus §. 10. (11) und (13). Diese sind zu zweien nur im Zeichen verschieden, und werden wie oben multiplicirt und in die Wurzelfactoren substituirt. Setzt man noch $\frac{x}{a}$ statt x, und multiplicirt mit a^m, so hat man

für ein gerades m:

$$x^m - a^m = (x^2 - a^2)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{m} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{m} + a^2\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{m-2}{m}\pi + a^2\right) \qquad (5)$$

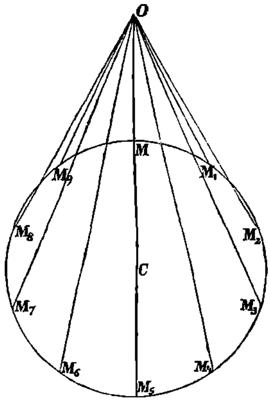
und für ein ungerades m:

$$x^m - a^m = (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{m} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{m} + a^2\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{m-1}{m}\pi + a^2\right) \qquad (6)$$

Die Gleichungen (3), (4), (5) und (6) sind geometrisch zuerst von Cotes († 1716) construirt worden, daher nachstehender Satz auch der Cotes'sche Satz genannt wird:

Fig. 3.



Wenn man die Peripherie eines Kreises von einem bestimmten Puncte M ausgehend in 2m gleiche Theile theilt, durch diesen Punct M einen Durchmesser zieht, und von einem Puncte O desselben oder seiner Verlängerung zu den Theilpuncten Gerade zieht, so ist, wenn der Mittelpunct C heisst, das Product der mit geraden Zeigern versehenen aus O gezogenen Linien, d. h.

$$OM_0 \times Om_2 \times OM_4 \ldots = CM^m - CO^m \qquad (7)$$

wenn O innerhalb der Peripherie des Kreises liegt; und

$$= CO^m - CM^m \qquad (8)$$

wenn sich O ausserhalb der Peripherie befindet. — Das Product der mit ungeraden Zeigern versehenen Linien aber ist in beiden Fällen:

$$= CO^m + CM^m \qquad (9)$$

Man braucht nur $CO = x$ und $CM = a$ zu setzen, um aus (8) und (9) zu haben:

$$= x^m \pm a^m$$

oder aus (7):

$$= -(x^m - a^m)$$

Es wird also keiner Schwierigkeit unterliegen, aus (3), (4), (5) und (6) die verschiedenen Linien, d. h. die Wurzeln von

$$\pm (x^m \pm a^m)$$

aufzufinden.

Es ist hieraus zugleich ersichtlich, welche Leichtigkeit und Allgemeinheit sich auf analytischem Wege durch Einführung der imaginären Grössen darbietet, da man die gewünschten Wurzeln unmittelbar, mittelst allgemeiner immer brauchbarer Formeln und einzeln erhält, während die geometrische Construction, abgesehen von den technischen Schwierigkeiten, nur das Product je zweier Wurzeln gibt, und jeden einzelnen Fall besonders behandeln muss.

Da das Product zweier conjugirten Ausdrücke immer reell ist, so ist klar, dass sich der COTES'sche Satz nur auf reelle Grössen bezieht.

§. 15.

Die Eigenschaften der Functionen: dass immer

$$x^m \cdot y^m = (xy)^m$$
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$\log (xy) = \log x + \log y$$
$$\sin (x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

haben wir in den vorhergehenden Paragraphen auch für den Fall, wenn die Veränderlichen imaginär werden, bestätiget, und wollen nun zu den Integralen übergehen, ohne ein Gleiches in Bezug der inzwischen liegenden Differentialformeln zu thun. Es wird diess erklärlich, wenn man bedenkt, dass die Differentialformeln auf die Grösse $\sqrt{-1}$ als auf eine Constante keinen Einfluss nehmen kann, und man daher $\sqrt{-1}$ wie jede andere constante Grösse ganz einfach als Coefficient betrachten kann. Dasselbe hat auch in Bezug der allgemeinen Integrale vollkommen zu gelten, daher hier über diese nichts zu sagen ist. Anders verhält sich aber die Sache mit den bestimmten Integralen.

Da viele Aufgaben zu bestimmten Integralen führen, so haben sich immer die grössten Mathematiker damit beschäftigt, ihren Werth aufzufinden. Es ist bekannt, welcher Aufwand von Scharfsinn in den hierher bezüglichen Formeln und Sätzen liegt. Unterdessen wurden die meisten Integrale durch eine Art von Induction gefunden, die auf einem Uebergang vom Reellen zum Imaginären beruht, und oft überraschend leicht und schnell zum gewünschten Ziel führt — aber auch zugleich die schwächste Seite der ganzen Theorie bildet; so dass die jedesmaligen Resultate, wenn man ganz streng seyn will, immer eines besondern Beweises bedürfen. Diese Schwierigkeit wurde von mehreren Mathematikern eingesehen, und es ist kaum nothwendig zu erwähnen, mit welcher glänzenden Eleganz sie von Cauchy behandelt worden.

Es ist nothwendig, diesen Uebergang auf eine sichere analytische Basis zu stützen, wodurch nicht nur die Resultate in jedem einzelnen Falle gerechtfertigt, sondern, wie wir sehen werden, auch ein neues Mittel der Integration entdeckt, und die Aussicht auf eine ganze Reihe neuer Verhältnisse und Verkettungen eröffnet wird.

Wenn $f(y)$ eine Function von y, und dieses eine Function von x und z ist, so hat man als Differenzialkoefficienten das Integrale:

$$\int f(y)\,dy$$

in Bezug auf x:

$$f(y)\frac{dy}{dx}$$

und in Bezug auf z:

$$f(y)\frac{dy}{dz}$$

Der zweite Differenzialkoeffizient ist für beide Veränderliche:

$$\frac{d}{dx}\left(f(y)\frac{dy}{dz}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dz}\left(f(y)\frac{dy}{dx}\right)$$

d. h.

$$\frac{d}{dx}\left(f(y)\frac{dy}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(f(y)\frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

Wirkliches Differenziren wird diese Gleichung rechtfertigen. Man findet nämlich:

$$\frac{d}{dx}\left(f(y)\frac{dy}{dz}\right) = f(y)\frac{d^2y}{dz\,dx} + f'(y)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz} \tag{2}$$

$$\frac{d}{dz}\left(f(y)\frac{dy}{dx}\right) = f(y)\frac{d^2y}{dx\,dz} + f'(y)\frac{dy}{dz}\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

Da die Gleichung (1) für jede Function von y richtig ist, so wird sie auch dann richtig seyn, wenn y die Form:

$$y = u + v\sqrt{-1} \tag{4}$$

erhält, wo u und v zwei beliebige reelle Functionen von x und z vorstellen. Es ist dann

$$f(y) = f(u + v\sqrt{-1}) \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dv}{dx} \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{du}{dz} + \sqrt{-1}\,\frac{dv}{dz} \end{aligned} \tag{6}$$

Nimmt man an, dass:

$$f(u + v\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1} \tag{7}$$

so ist:

$$\begin{aligned} f(y)\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{du}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dv}{dx}\right)(U + V\sqrt{-1}) \\ f(y)\frac{dy}{dz} &= \left(\frac{du}{dz} + \sqrt{-1}\,\frac{dv}{dz}\right)(U + V\sqrt{-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

oder:

$$\begin{aligned} f(y)\frac{dy}{dx} &= U\frac{du}{dx} + U\frac{dv}{dx}\sqrt{-1} + V\frac{du}{dx}\sqrt{-1} - V\frac{dv}{dx} \\ f(y)\frac{dy}{dz} &= U\frac{du}{dz} + U\frac{dv}{dz}\sqrt{-1} + V\frac{du}{dz}\sqrt{-1} - V\frac{dv}{dz} \end{aligned} \tag{9}$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} P &= U\frac{du}{dx} - V\frac{dv}{dx} \\ R &= U\frac{dv}{dx} + V\frac{du}{dx} \\ Q &= U\frac{du}{dz} - V\frac{dv}{dz} \\ S &= U\frac{dv}{dz} + V\frac{du}{dz} \end{aligned} \tag{10}$$

so geht die Gleichung (1) über in folgende:

$$\frac{dP}{dz} + \frac{dR}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dQ}{dx} + \frac{dS}{dx}\sqrt{-1} \tag{11}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= \frac{dQ}{dx} \\ \frac{dR}{dz} &= \frac{dS}{dx} \end{aligned} \tag{12}$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen kann man sich ebenfalls durch wirkliches Differenziren überzeugen, denn es ist wirklich:

$$\frac{dP}{dz} = U\frac{d^2u}{dx\,dz} + U\frac{du}{dx}\frac{du}{dz} - V\frac{d^2v}{dx\,dz} - V\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dz}$$
$$\frac{dQ}{dx} = U\frac{d^2u}{dz\,dx} + U\frac{du}{dz}\frac{du}{dx} - V\frac{d^2v}{dz\,dx} - V\frac{dv}{dz}\frac{dv}{dx} \tag{13}$$

Wäre aber gewesen

$$y = u - v\sqrt{-1} \tag{14}$$

so hätten wir statt (11) gefunden:

$$\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dz}\sqrt{-1} = \frac{dQ}{dx} - \frac{dS}{dx}\sqrt{-1} \tag{15}$$

Es ist klar dass sich hiedurch die gefolgerten Gleichungen (12) nicht im Geringsten ändern, und eben diese sind es, auf welchen die ganze Theorie des Uebergangs vom Reellen zum Imaginären beruht.

Multiplizirt man die erwähnten Gleichungen mit dx dz, und zeigt dabei die Integralen an, so ist:

$$\iint \frac{dP}{dz}\,dx\,dz = \iint \frac{dQ}{dx}\,dx\,dz$$
$$\iint \frac{dR}{dz}\,dx\,dz = \iint \frac{dS}{dx}\,dx\,dz \tag{16}$$

wo man eine Integration in jedem Falle machen kann. Nennen wir die Grenzen der Integration x', x'', z', z'', die Werthe von P und R in Bezug auf z'' und z': P'', P', R'', R' und jene von Q und S in Bezug auf x'' und x': Q'', Q', S'', S' (es ist diess nichts als die Behauptung, dass P, Q, R und S zwischen den Grenzen der Integration immer einen bestimmten Werth haben. — Dieser Umstand ist hier wesentlich; denn hätten P, Q, R und S nicht bestimmte Werthe, so läge es nicht in unserer Willkür, welche Integration wir in (16) zuerst ausführen, denn in diesem Falle wäre es leicht möglich, dass

$$\iint \frac{dP}{dz}\,dx\,dz$$

verschiedene Werthe erhielte, je nachdem wir zuerst nach x und dann nach z oder umgekehrt integriren, was die Richtigkeit der folgenden Gleichungen zweifelhaft machen könnte —); und wenden zugleich die Fourier'sche Bezeichnungsweise an, so ist:

$$\int_{x'}^{x''} P''dx - \int_{x'}^{x''} P'dx = \int_{z'}^{z''} Q''dz - \int_{z'}^{z''} Q'dz$$
$$\int_{x'}^{x''} R''dx - \int_{x'}^{x''} R'dx = \int_{z'}^{z''} S''dz - \int_{z'}^{z''} S'dz \tag{17}$$

oder:

$$\int_{x'}^{x''}(P''+R''\sqrt{-1})dx - \int_{x'}^{x''}(P'+R'\sqrt{-1})dx = \int_{z'}^{z''}(Q''+S''\sqrt{-1})dz - \int_{z'}^{z''}(Q'+S'\sqrt{-1})dz \tag{18}$$

Setzen wir der Einfachheit wegen:

$$x' = 0\ ;\quad x'' = x\ ;\quad z' = 0\ ;\quad z'' = z \tag{19}$$

und für diesen Fall:

$$P' = p \; ; \quad Q' = q \; ; \quad R' = r \; ; \quad S' = s \tag{20}$$

so wird aus (17):

$$\int_0^x Pdx - \int_0^x pdx = \int_0^z Qdz - \int_0^z qdz$$

$$\int_0^x Rdx - \int_0^x rdx = \int_0^z Sdz - \int_0^z sdz \tag{21}$$

Wenden wir diese Formeln (21) auf ein Beispiel an. — Es sey

$$u = x \; ; \quad v = z$$

$$f(x \pm z\sqrt{-1}) = U \pm V\sqrt{-1}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \; ; \quad \frac{du}{dz} = 0 \; ; \quad \frac{dv}{dx} = 0 \; ; \quad \frac{dv}{dz} = 1$$

$$P = U \; ; \quad Q = -V \; ; \quad R = V \; ; \quad S = U$$

Nimmt man ferner an:

$$f(x) = w \; ; \quad f(\pm z\sqrt{-1}) = M \pm N\sqrt{-1}$$

so findet man:

$$p = w \; ; \quad q = -N \; ; \quad r = 0 ; \quad s = M$$

folglich aus (21):

$$\int_0^x Udx - \int_0^x wdx = -\int_0^z Ndz + \int_0^z Vdz$$

$$\int_0^x Vdx = \int_0^z Udz - \int_0^z Mdz$$

oder, beide Gleichungen zusammenfassend:

$$\int_0^x f(x+z\sqrt{-1})dx - \int_0^x f(x)dx = \sqrt{-1}\left[\int_0^z f(x+z\sqrt{-1})dz - \int_0^z f(z\sqrt{-1})dz\right]$$

Es wird hiernach keiner Schwierigkeit unterliegen, dieses Verfahren auf verschiedene andere Beispiele anzuwenden.

§. 16.

Man könnte aus dem Vorhergehenden schliessen, dass die imaginären Grössen nur bei zweifachen bestimmten Integralen zu berücksichtigen seyen, wir werden aber sehen, dass diess auch von den einfachen bestimmten Integralen gilt, und zwar nicht nur, wenn das Imaginäre in der Function selbst, sondern auch wenn es in den Grenzen der Integration erscheint.

Nehmen wir, um diess durchsichtiger zu machen, das in dieser Hinsicht bisher nicht berücksichtigte Laplace'sche Integral:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{1}$$

hier ist x willkürlich, und man kann anstatt dessen $x\sqrt{a}$ schreiben. — Diese Substitution ändert an den Grenzen nichts, es ist daher:

$$\int_0^\infty e^{+ax^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2}$$

Da sich keine besonderen Bedingungen an den Werth von a knüpfen, so kann man immer setzen:

$$a = -1$$

hierdurch geht x über in $x\sqrt{-1}$, und x^2 in $-x^2$, und weil

$$\text{für } x = 0 \quad \text{auch ist} \quad x\sqrt{-1} = 0$$
$$\text{und für } x = \infty\;; \qquad x\sqrt{-1} = \infty\sqrt{-1}$$

so hat man:

$$\int_0^{\infty\sqrt{-1}} e^{x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\pi} \tag{3}$$

was ganz richtig ist. Hätten wir aber hier die Grenzen nicht geändert, so hätten wir erhalten:

$$\int_0^\infty e^{x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\pi} \tag{4}$$

was augenfällig falsch ist, da jedenfalls

$$\int_0^\infty e^{x^2} dx = \infty \tag{5}$$

Nichts desto weniger kann man es nicht zur allgemeinen Regel machen, dass so oft ∞ übergeht in $\infty\sqrt{-1}$, die Resultate nur dann richtig sind, wenn letzteres als Grenze genommen wird, denn wir können uns gleich überzeugen, dass das Integral (2) bei denselben unveränderten Grenzen richtig bleibt, wenn auch gesetzt wird:

$$a = \sqrt{-1} \tag{6}$$

obwohl es zu einem solchen Resultate geführt hätte, wenn wir für die Substitution

$$a = -1 \tag{7}$$

die Grenzen nicht geändert hätten.

Setzen wir wirklich $a = \sqrt{-1}$ in (2), ohne die Grenzen zu ändern, so ist:

$$\int_0^\infty e^{-x^2\sqrt{-1}} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{-1}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{-1}}\sqrt{\pi} \tag{8}$$

und nach Moivre den Werth von $\sqrt[4]{-1}$ setzend, §. 11. (10):

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(-1+\sqrt{-1}) \tag{9}$$

Substituiren wir den Werth aus §. 6 (4):

$$e^{-x^2\sqrt{-1}} = \cos x^2 - \sqrt{-1}\sin x^2$$

so haben wir:

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx + \sqrt{-1}\int_0^\infty \sin x^2 dx = \tfrac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,[-1+\sqrt{-1}] \tag{10}$$

folglich:

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2\pi} \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2\pi} \tag{12}$$

Diese Resultate werden richtig seyn, wenn (9) richtig ist. Wir haben also die Giltigkeit von (9) zu beweisen. Diess wird uns desto besser gelingen, je breiter die Basis ist, auf die wir unseren Beweis stützen, d. h. je allgemeiner das Verfahren ist, dessen wir uns bedienen.

Wenn in einer Function

$$f\,(x+ay)$$

a eine willkürliche Constante bedeutet, so ist bekanntlich

$$a\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \tag{13}$$

und mit dxdy multiplicirend:

$$a\frac{df}{dx}dx\,dy = \frac{df}{dy}dx\,dy \tag{14}$$

Sind die Grenzen der Integration: x', x'', y', y''. so ist:

$$a\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\frac{df}{dx}dx\,dy = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\frac{df}{dy}dx\,dy \tag{15}$$

Setzt man voraus, dass $f(x+ay)$ zwischen diesen Grenzen immer einen bestimmten Werth hat, so kann man eine Integration verrichten, und erhält die ganz allgemeine sehr zweckmässige Formel:

$$a\int_{y'}^{y''} f(x''+ay)dy - a\int_{y'}^{y''} f(x'+ay)dy = \int_{x'}^{x''} f(x+ay'')dx - \int_{x'}^{x''} f(x+ay')dx \tag{16}$$

Nehmen wir nun an:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,; \quad a = \sqrt{-1} \tag{17}$$

also:

$$f(x+y\sqrt{-1}) = \frac{e^{-(x+y\sqrt{-1})}}{\sqrt{x+y\sqrt{-1}}} \tag{18}$$

so haben wir für

$$x' = y' = 0 \quad \text{und} \quad x'' = y'' = \infty \tag{19}$$

als Bestandtheile von (16):

$$f(x''+y\sqrt{-1}) = \frac{e^{-x''}e^{-y\sqrt{-1}}}{\sqrt{x''+y\sqrt{-1}}} = 0 \tag{20}$$

$$f(x'+y\sqrt{-1}) = \frac{e^{-y\sqrt{-1}}}{\sqrt{y\sqrt{-1}}} \tag{21}$$

$$f(x+y''\sqrt{-1}) = 0 \tag{22}$$

$$f(x+y'\sqrt{-1}) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi}} \tag{23}$$

Es ist bemerkenswerth, dass (20) und (21) für jedes y richtig ist, welches zwischen 0 und ∞ liegt; (22) und (23) aber für jedes x, welches derselben Relation entspricht.

Substituirt man diese Werthe in (16), so findet man:

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{e^{-y\sqrt{-1}}}{\sqrt{y\sqrt{-1}}}dy = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \tag{24}$$

Um den Werth des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

zu finden, lassen wir im Laplace'schen Integral (1) x übergehen in $\sqrt{x}$, daher:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{25}$$

folglich nach (24):

$$\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{e^{-y\sqrt{-1}}}{\sqrt{y\sqrt{-1}}}dy = \sqrt{\pi} \tag{26}$$

Da y jeden Werth annehmen kann, so darf man immer setzen $y = x^2$, daher:

$$2\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{e^{-x^2\sqrt{-1}}}{\sqrt[4]{-1}}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{27}$$

Multiplicirt man mit $\sqrt[4]{-1}$ und dividirt mit $2\sqrt{-1}$, indem man zugleich den in §. 11 (10) gefundenen Werth schreibt:

$$\int_0^\infty e^{-x^2\sqrt{-1}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-1}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,(-1+\sqrt{-1}) \tag{28}$$

d. h. das unter (9) angeführte Integral, und folglich auch die davon abgeleiteten (11) und (12) sind richtig. Wir stossen somit hier auf den besondern Umstand, dass das Integral

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

bei unveränderten Grenzen für den imaginären Werth $a = \sqrt{-1}$ richtig bleibt, während es für den reellen Werth $a = -1$ falsch wird. Im ersteren Falle war es durchaus nothwendig, die Richtigkeit des Integrals zu beweisen, da man nicht wissen konnte, ob eine solche Substitution gestattet sey oder nicht. Da sich aber unser Beweis nur auf den speciellen Fall $a = \sqrt{-1}$ bezieht, so entsteht noch die Frage, ob irgend ein anderer imaginärer Werth von a nicht doch zu falschen Resultaten führen könnte. Wir beantworten die Frage mit folgendem Satz:

Das Integral:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{29}$$

bleibt richtig für jeden imaginären Werth von a der die Form hat: $h + k\sqrt{-1}$, wo h und k reell und $h > 0$ ist.

Um diess zu beweisen nehmen wir an:

$$\int_0^\infty e^{-x^2(h+k\sqrt{-1})}\,dx = A \tag{30}$$

wo A eine unbekannte Function von h und k ist. — Da x willkührlich ist, so kann man dafür setzen ax:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2(h+k\sqrt{-1})}\,adx = A \tag{31}$$

und weil wie bemerkt A bloss eine Function von h und k ist, so wird auch

$$\int_0^\infty e^{-a^2(h+k\sqrt{-1})}\,da = A \tag{32}$$

und beide Integrale multiplicirend:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a^2(h+k\sqrt{-1})(1+x^2)}\,ada\,dx = A^2 \tag{33}$$

Nimmt man hier das unbestimmte Integral nach a:

$$\int e^{-a^2(h+k\sqrt{-1})(1+x^2)}\,ada = -\frac{e^{-a^2(h+k\sqrt{-1})(1+x^2)}}{2(h+k\sqrt{-1})(1+x^2)} \tag{34}$$

und zwischen den Gränzen 0 und ∞:

$$\int_0^\infty e^{-a^2(h+k\sqrt{-1})(1+x^2)}\,ada = \frac{1}{2(h+k\sqrt{-1})(1+x^2)}\,. \tag{35}$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir gleich bemerken, dass hier, wie oben bedungen, nothwendig $h > 0$ seyn muss. Denn wäre $h < 0$, so könnte der Ausdruck

$$e^{-a^2(h+k\sqrt{-1})(1+x^2)}$$

für $a = \infty$ möglicherweise nicht $= 0$ sondern $= \frac{1}{e^{-\infty}}$ oder unbestimmt werden.

Multiplicirt man das letztgewonnene Integral mit dx, so ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2(h+k\sqrt{-1})(1+x^2)} = A^2 \tag{36}$$

oder

$$\frac{1}{2(h+k\sqrt{-1})}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2(h+k\sqrt{-1})}[\operatorname{arc\,tg}\infty - \operatorname{arc\,tg}0] = A^2 \quad (37)$$

das heisst:

$$\frac{\pi}{4(h+k\sqrt{-1})} = A^2$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h+k\sqrt{-1}}} = A \quad (38)$$

somit erhalten wir nach (30) die streng begründete Formel:

$$\int_0^\infty e^{-x^2(h+k\sqrt{-1})}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{h+k\sqrt{-1}}} \quad (39)$$

Ein Resultat, welches wir ganz ebenso gefunden hätten, wenn wir in (29) substituirt hätten:

$$a = h + k\sqrt{-1}$$

mit der Bedingung $h > 0$, folglich ist der angeführte Satz vollkommen giltig.

§. 17.

Wenn wir die Resultate der vorhergehenden Untersuchungen überblicken, finden wir: dass die imaginären Grössen sich in den meisten Fällen an die Regeln, Formeln und Verhältnisse der Reellen anschmiegen, und nur die Functionen

$$\log x, \quad \arcsin x \quad \text{und} \quad \arccos x$$

so wie die bestimmten Integrale eine besondere Rücksicht erfordern; die erstern, weil ihre Werthe in der Form von Reihen erscheinen, die nur unter gewissen Bedingungen convergiren, die letzteren, weil sie in vielen Fällen ihre Stetigkeit verlieren.

Ferner finden wir, dass manche Eigenschaften der imaginären Grössen auch andern Grössen zukommen; so die Eigenschaft, zwei Gleichungen in eine zusammen zu fassen. welche Eigenschaft die imaginären mit allen incommensurabeln Grössen theilen, — den Vorzug die Operationen zu vereinfachen, welcher den Logarithmen und Exponentiellen ebenso zukommt, und endlich die Eigenschaft, dass sie die Symbole der Unmöglichkeit oder vielmehr des Mangels einer entsprechenden Repräsentation in der Natur sind, was in gegebenen Verhältnissen allen reellen Grössen, ja einzelnen ihrer Eigenschaften gemein ist. Denn leicht wird jeder auf einen Fall stossen, wo der Umstand, dass das Resultat der Rechnung ganz oder gebrochen, positiv oder negativ ist, die Absurdität der Aufgabe beweist. Ein solcher Fall ist z. B. „Welche ist die zweiziffrige Zahl, welche mit 3 multiplizirt, dieselben zwei Ziffern in umgekehrter Ordnung gibt, und deren Summe = 9 ist.“ Nennt man die zwei Ziffern a und b, so findet man:

$$b = \frac{29}{4}$$

was unmöglich ist, weil b als Ziffer kein Bruch seyn kann.

Es bleiben daher als ausschliessliche Eigenschaften der imaginären Grössen:

a) Dass während andere Grössen einzelne der Eigenschaften der Imaginären besitzen, diese dieselben sämmtlich und gleichzeitig haben.

b) Dass sie Uebergänge bilden von den Gränzen der einen Function in die andere, was besonders beim Integriren, wo man die trigonometrischen Functionen gerne in Exponentielle verwandelt, ein immer erwünschter, oft gebrauchter *passe-par-tout* ist. Endlich

c) Dass nur durch sie die analytischen Disquisitionen diejenige Allgemeinheit erreichen konnten, welche die Theorie der Zahlen ebenso interessant als weit- und tiefgreifend gemacht, zu unzähligen neuen Integralen geführt, und den neuesten Resultaten der analytischen Optik, der Theorie des Magnetismus, der Wärmelehre, der Astronomie u. s. w. den Weg gebahnt und gesichert hat.