I. Ueber das vergleichende Mass der Körperwinkel.

Von

Joseph Riedl v. Leuenstern.

Mitgetheilt am 12. November 1847 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.
Die Abhandlung überreicht am 18. Juni 1847.

Die reine Körperlehre im weitesten Sinne, unbestritten einer der fruchtbarsten Zweige des strengen Wissens, ermangelt bis jetzt, so umfassende Arbeiten auch über einzelne Gegenstände vorhanden sind, eines vollständigen, folgerecht geordneten Lehrgebäudes; ja sie scheint dazu selbst noch lange nicht reif zu seyn, wenn man erwägt, wie so manche ihrer Fragen nur vorübergehend oder gar nicht besprochen sind, und sich bei einem Ueberblicke des Ganzen als eben so viele Lücken zeigen müssten.

Nach dem beschränkten Masse von Zeit und Kraft, worüber ich zu diesem Zwecke verfügen konnte, strebte ich zur Ergänzung einiger Fächer mitzuwirken, indem ich an Bruchstücken arbeitete, enthaltend: Sätze aus der Sphaerik (Anwendung der Elementar-Geometrie auf die Kugelfläche); dann: Beschreibende Darstellungen der Regelkörper zweiten und dritten Ranges. Von ersteren veröffentlichte ich vor 20 Jahren, aus einer damals vorgekommenen praktischen Veranlassung, einige Ergebnisse synthetischer Untersuchungen*); von letzteren denke ich Monographien für einen der nächsten Bände dieser Abhandlungen vorzubereiten, und die zur Verständlichkeit und Würdigung der daselbst erscheinenden Angaben über Körperwinkel und ihre Summen unerlässlichen allgemeinen Bestimmungen, sind theils in gegenwärtiger Mittheilung, theils in einer nachzutragenden Fortsetzung erörtert.

1. Drei der Lage nach gegebene gerade Linien im Raume, die einen Punkt gemeinschaftlich haben und nicht in einer Ebene liegen, können abgesehen von ihrer Verlängerung jenseits dieses Punktes, nur dieselben drei Winkel an der Spitze bilden, welche durch eben diese Lage gegeben sind; und die drei ebenen Winkel an der Spitze können auch nur einen möglichen Körperwinkel bedingen. Aus der Angabe dieser drei Seitenwinkel**) folgt unfehlbar die Lage der Linien (Kanten) gegeneinander, wie auch Form und Grösse des Körperwinkels; so dass in

*) Beiträge zur Theorie der Sehnenwinkel. Wien 1827.

**) Viele haben diese Winkel Kantenwinkel genannt, Andere geben den Winkeln der Neigung an der Kante diesen Namen, welcher daher als zweideutig aufzugeben ist.

Hinsicht der Form nichts zu wünschen bleibt, für die Grösse aber, wenn sie gleich nicht eine andere als die festgestellte seyn kann, doch zur Vergleichung mit der Grösse eines eben so gegebenen Winkels von anderer Form, der Ausdruck nicht unmittelbar aus dieser Angabe hervorgeht. Ein solcher Ausdruck kann aber gefordert werden, und zwar wo möglich analog dem vergleichenden Masse ebener Winkel.

2. Der dreiseitige, als rechter allgemein anerkannte Körperwinkel, welcher entsteht, wenn der Durchschnitt zweier senkrecht geneigter Ebenen auf einer dritten Ebene gleichfalls senkrecht ist, wornach man beweist, dass auch die Durchschnittslinie der ersten und dritten auf der zweiten Ebene, so wie die der zweiten und dritten Ebene auf der ersten senkrecht stehen muss, — dieser einzige *) Winkel in seiner Art kann zum ersten Anhaltspunkte bei Begründung eines allgemeinen Winkelmasses (vorläufig für dreiseitige Körperwinkel) dienen, und wir halten uns berechtigt, ihn mit dem Masse von 90 Kugelgraden (oder 1,00.00) zu betheilen, welche den Bogen der einen, von den Viertelkreisen der beiden andern Ebenen begrenzt ausmachen.

3. Betrachten wir in der ebenen Geometrie jeden Winkel als ein zwischen Bogen und Schenkeln eingeschlossenes Stück Ebene, als Ausschnitt, als Verhältnisstheil der Kreisfläche; so wird nach der geforderten Gleichförmigkeit, der rechte Körperwinkel als der achte Theil der Kugel, in deren Mittelpunkte sein Scheitel steht, und die spitzigen oder stumpfen, als kleinere oder grössere Kugelausschnitte erscheinen; indem der liegende Kreisbogen c, 10, 20, 30... (Fig. 1), auf welchem gemessen wird, der Lage nach beständig bleibt, und dabei sein Mass verändert, die beiden stehenden Viertelkreise fc, fg, aber ihre beständige Grösse behalten (rechte Seitenwinkel bleiben), dagegen sich einander nähern oder entfernen. Da sphärische, von solchen Bogen umgebene Flächenräume amn (Fig. 2) unter dem Namen Polardreiecke bekannt sind, so mag auch der Körperraum mcna, der durch ihre Ebenen vom Mittelpunkte her aus der Kugel geschnitten wird, Polarausschnitt heissen.

Für alle Winkel dieser Form wäre also das vergleichende Mass:

Dreiseitige Körperwinkel mit zwei rechten Seitenwinkeln verhalten sich wie die Körperinhalte ihrer Polarausschnitte.

4. So wie aber die Summe aller ebenen Winkel aus demselben Scheitel, welche zusammen, innerhalb ihrer Bogen einerlei Kreises den Flächenraum eines grössern Winkels ganz ausfüllen, dem Bogenmaasse dieses letzten gleich ist, und auch alle einzeln sich gegen einander verhalten wie die durch sie abgegrenzten Flächenräume; so müssen auch alle Körperwinkel, die von dem Mittelpunkte einer Kugel ausge-

*) Ueber diesen Ausdruck besteht eine Frage, welche weiter besprochen wird. (13.)

hend, zusammen den Raum eines durch Ebenen begrenzten Kugelausschnittes erfüllen, eine Summe ausmachen, welcher als Winkelmass der Körperinhalt dieses Ausschnittes zukommt, oder:

Die Summe aller Körperwinkel, mit rechten oder schiefen Seitenwinkeln, von der Mitte einer Kugel ausgehend, inner der Kugelfläche und den Ebenen eines Winkels, der sie alle umfasst, ist gleich dem von diesen Ebenen erzeugten Kugelausschnitte. Und so wie ferner die Summe aller Winkel um einen Punkt in der Ebene, er mag in der Mitte eines gegebenen Kreises stehen oder nicht, einem ganzen Umkreise, — und alle Winkel um einen Punkt auf einer geraden Linie, einem Halbkreise; so sind auch

5. alle Körperwinkel um einen Punkt im Raume, einer ganzen Kugel oder 8 rechten, und alle um einen Punkt in der Ebene, wenn sie den ganzen Körperraum diesseits der Ebene erfüllen, einer Halbkugel oder 4 rechten Körperwinkeln gleich*).

6. Alle Körperwinkel verhalten sich wie die Körperinhalte ihrer Kugelausschnitte.

7. Ein Polarausschnitt mcna (Fig. 2) bis zum Gegenpole a' fortgesetzt, mithin verdoppelt, wird, indem die dritte Ebene cmn verschwindet, zu einer zweiseitigen Körperecke *(diedrum solidum)*, die man Dieder nennen kann. Diese bildet den Uebergang vom ebenen Winkel zum eigentlichen Körperwinkel, zu welchem letzten ihr nur die Bestimmung des Scheitelpunktes mangelt.

Jeder geradlinige Körper und jeder Körperwinkel hat eben so viele Dieder als Kanten, und sie verhalten sich unter einander wie die Bogen der verschwundenen Ebenen. Setzt man auf eine Kante irgend einen Punkt c als

*) Hier wäre der Ort, um den in allen neuern Lehrbüchern der Stereometrie, wiewohl ohne Erwähnung eines Gradmasses oder vergleichenden Werthes vorgetragenen Satz: »Die jenseits des Scheitels verlängerten Kanten und Ebenen eines Körperwinkels, bilden einen demselben gleichen, auch symmetrisch ähnlichen, jedoch nicht congruenten Vertical-Körperwinkel« mit dem obigen in Zusammenhang zu bringen. Da aber hier nur Bruchstücke gegeben werden, und der Beweis jener Wahrheit überall mit gehöriger Schärfe geführt ist, so erlaube ich mir dieselbe nur anzudeuten; zugleich aber auf ein leichtes Verfahren aufmerksam zu machen, womit man Anfängern die Vorstellung ähnlicher, gleicher und doch nicht congruenter Winkel klar machen kann. Man zeichne das Netz einer drei- oder mehrseitigen, schiefen Pyramide zweimal, so congruent als möglich auf ein Blatt; schneide, nachdem man die Vorder- und Rückseite des Papiers durch Zeichen oder Färbung von einander unterschieden, jedes für sich heraus, falte und klebe sie endlich so, dass die bezeichnete Papierseite bei dem einen Körper auswärts, bei dem andern einwärts kommt; so hat man gleiche, symmetrische, nicht congruente Körperwinkel.

Scheitel, durch den man ebene Schnitte nach beliebigen Richtungen (z. B. nach prs, trq, uv, vw, bd u. s. w.) bis an die krumme Grenze des Dieders führt; so entstehen zugleich mit den Körperwinkeln pctr, a′cprq, qcrs u. s. w. ihre entsprechenden Kugelausschnitte; denn der gewählte Scheitelpunkt mag in der Mitte seyn oder nicht, so kann er durch Verlängerung der Kante, welche zugleich Axe des Dieders ist, immer Mittelpunkt einer Kugel werden, zu welcher ein Dieder vom Bogenmasse des obigen gehört. Diese Ausschnitte müssen aber zusammen den Körperinhalt des Dieders ausmachen; folglich ist die Summe aller Körperwinkel, welche zusammen den Raum zwischen den Ebenen eines Dieders ausfüllen, dem doppelten Polarausschnitte seines Bogens gleich.

8. Ein Grad der Kugelfläche ist, übereinstimmend mit obigen Voraussetzungen, ein zur Messung der Körperwinkel dienendes Polardreieck, dessen beide Viertelkreise einen Grad weit von einander abstehen (Fig. 1).

Wie aber für jeden ebenen Winkel einen Bogen und einen Kreisausschnitt, so muss es auch für jeden Körperwinkel, er sey schief, recht, gleich- oder ungleichseitig, ein Polardreieck und einen Polarausschnitt geben, und alle drei werden mit demselben Nennwerthe in Graden und Theilen eines Grades ausgedrückt seyn.

9. Zwei senkrechte Linien aus beiden Ebenen (Seitenflächen) auf einen, gleichviel welchen Punkt der Kante eines Körperwinkels, bilden den Neigungswinkel an dieser Kante. Beschreibt man mit einem Halbmesser aus dem Scheitel des Körperwinkels bis zu jenem des Neigungswinkels, auf beiden Seitenflächen die Bogen der Seitenwinkel, so werden die Schenkel des Neigungswinkels, eben weil sie senkrecht sind, in ihrem Durchschnitte beide Bogen berühren, und somit einen Tangentenwinkel darstellen, der mit dem Neigungswinkel identisch ist. Man unterscheidet die Neigungswinkel an den Kanten der Körperwinkel am besten von Neigungswinkeln anderer Ebenen, die etwa vorkommen dürften, indem man sie Tangentenwinkel nennt. Da aber auch der veränderliche Bogen des Polardreieckes einerlei ist mit dem Bogen, um welchen es sich hier handelt; so ist das Körpermass des Polarausschnittes einer Kante dem einfachen, der Dieder aber dem doppelten Nennwerthe des Tangentenwinkels gleich.

10. Wenn man den, zur Kante ac (Fig. 2) jedes dreiseitigen Körperwinkels acbd gehörigen Dieder (abda′) und seinen congruenten Vertical-Dieder (a′b′d′a) zugleich aus der ganzen Kugel schneidet, so ist der Körperinhalt w des Körperwinkels (acbd = a′cb′d) in dem Theile, um welchen dieselbe vermindert wird, zweimal enthalten. Setzt man das Ausschneiden mit den beiden Diedern (badb′ = b′a′d′b) der Kante bc fort, so ist der Körperwinkel schon viermal in Abzug gebracht; zieht man noch die zwei Dieder der Kante dc, (dabd′ = d′a′b′d) vom Kugelinhalte ab, so ist dieser nicht nur erschöpft; es ist auch der Körper-

winkel w, obgleich nur zweimal bestehend, doch sechsmal abgerechnet worden; folglich ist der Rest der Kugel nach Abzug der 6 Dieder $= 0 - 4\,w$; oder der Rest der Halbkugel *) nach Abzug der einfachen Dieder aller 3 Kanten:

$$4 - D_a - D_b - D_d = 0 - 2\,w; \text{ also: } D_a + D_b + D_d = 4 + 2\,w; \quad \text{oder}$$

Die Summe der drei Dieder jedes dreiseitigen Körperwinkels ist gleich der Halbkugel, mehr dem doppelten Körperwinkel.

Wird aber (in Folge 9.) statt D sein Werth, der doppelte Tangentenwinkel ($2\,t$) gesetzt, so ist $w = t_a + t_b + t_d - 2$; oder:

11. Jeder dreiseitige Körperwinkel ist gleich der Summe seiner 3 Tangentenwinkel, weniger 2 rechten.

Und weil jeder (n) seitige geradlinige Körperwinkel in (n—2) dreiseitige theilbar ist:

$$w = t_a + t_b + \ldots + t_n - 2 \cdot (n - 2) = t_a + t_b + \ldots + t_n + 4 - 2n; \quad \text{oder:}$$

12. Jeder geradlinige Körperwinkel von (n) Seiten ist gleich der Summe aller Tangentenwinkel, mehr einer Halbkugel, weniger (n) Viertelkugeln.

13. Unter den ebenen, geradlinigen Winkeln ist nur ein rechter möglich; denn nur der rechte erfüllt ein Viertheil des Kreises, und nur der dieses Mass hat, kann der rechte seyn. Bei Körperwinkeln aber kann und wird gefragt werden, ob es nicht unzählige Arten von rechten gäbe? Ob nämlich jeder, dem nach obigen Voraussetzungen das Körpermass des achten Theiles der Kugel zukömmt, ein rechter Körperwinkel sey? Und dann: wenn von allen den unendlich vielen, welche genau 90 Kugelgrade messen, dieser Name nur Einem gebührt; wie man die übrigen sonst zu nennen habe, da sie doch weder stumpfe noch spitzige seyn können? **) Von diesen sind einige allerdings merkwürdig genug, um plastisch geformt und zur Vergleichung unter sich und mit der Kugel, welcher z. B. die Ausschnitte der acht folgenden zusammen genommen gleich seyn müssen, nicht nur anschaulich sondern auch wägbar gemacht zu werden: Es sind nämlich gleichseitige Spitzen von 90 Kugel-

---

*) Die Kugel zu 8 rechten Winkeln.

**) Diese Untersuchung dürfte bedeutend vereinfacht werden, indem die Mehrzahl der gedachten Spitzen ungleichseitig ist, und als solche keine Rücksicht verdient. Ungleichseitige Körperwinkel sind schief, und können nicht recht genannt werden, auch wenn sie 90 Grade messen. Diese wären demnach mit der Benennung: schiefe Spitzen von (n) Seiten und 90 Graden hinlänglich bezeichnet. Die gleichseitigen aber, welche man doch nicht recht und noch weniger schief nennen kann, durch einen passenden Titel vor jenem zahllosen Trosse auszuzeichnen, bleibt noch in Aufgabe gestellt.

graden, mit	3	Seitenwinkeln,	jeder	zu	90°	0′	0,″00
„	4	„	„	„	63	28	58,94 ..
„	5	„	„	„	49	32	39,92 ..
„	6	„	„	„	40	46	5,01 ..
„	7	„	„	„	34	41	13,94 ..
„	8	„	„	„	30	12	33,36 ..
„	9	„	„	„	26	46	3,30 ..
„	10	„	„	„	24	2	12,11 ..

und so fort ins Unendliche.

14. Da sich auf Seiten- und Tangentenwinkel als Bestandtheile der Körperwinkel alles auwenden lässt, was von Winkeln und Bogenstücken grosser Kreise bewiesen ist, so können auch alle bekannten trigonometrischen Verfahrungsarten zur Berechnung der Spitzen in Graden und zur Lösung aller Aufgaben gebracht werden, welche sich auf diese Werthe beziehen *).

15. Weil sich die Sinusse der Tangentenwinkel unter einander verhalten wie die Sinusse der gegenüberstehenden Seitenwinkel, so sind an jedem dreiseitigen Körperwinkel zwei Dreiecke ähnlich, die aus den Sehnen der doppelten Bogen seiner Tangenten und Seitenwinkel gebildet sind.

16. Wenn die Kanten eines dreiseitigen Körperwinkels gleich lang angenommen, und ihre Endpunkte durch gerade verbunden werden, so hat man sein Stamm- oder Sehnendreieck, dessen umschriebener Kreis sein Segment und seinen Pol auf der Kugelfläche bestimmt. Der Rest des Tangentenwinkels nach Abzug seines Stammwinkels oder der Excedent ist gleich dem Flächenmasse der Poldreiecke (Theorie der Sehnenwinkel 29.) und der ganze Körperwinkel gleich der Summe der Excedenten.

17. Jeder dreiseitige Körperwinkel hat drei Ergänzungswinkel, und diese sind dreierlei, zweierlei oder einerlei, je nachdem sein Stammdreieck ungleich, gleichschenklig oder gleichseitig ist.

Jeder ergänzende hat mit dem ergänzten 2 Bestandtheile, nämlich einen Seitenwinkel und den gegenüberstehenden Tangentenwinkel gemeinschaftlich, und die 4 andern erfüllen sich wechselweise auf Halbkreise.

Solche sich ergänzende Körperwinkel entstehen, wenn sich zwei grosse Kreise ade, bdf (Fig. 1) in einem Punkte d der Halbkugelfläche schneiden und aus der Mitte c die Strahle nach a, b, d, e, f, gezogen werden. Je zwei sind zusammen einem Dieder, oder dem doppelten Masse ihres gemeinschaftlichen Tangentenwinkels, und alle vier der Halbkugel gleich. Zu einem gegebenen Körperwinkel acbd erhält man die drei ergänzenden, indem man die auf einer seiner drei Ebe-

*) Einige hierzu eingerichtete, bequeme Formeln sind als Anhang einer spätern Mittheilung vorbehalten.

nen, z. B. abc errichtete Halbkugel, durch die beiden andern erweiterten Ebenen bdc, adc in vier Stücke theilt.

Es sind nämlich,	die Seitenwinkel:	die Tangentenwinkel:
in den Körperwinkeln acbd und acdf	$(acd) = (acd)$	$(abd) = (afd)$
	$(acb + acf) = 180^0$	$(dab + daf) = 180^0$
	$(dcb + dcf) = 180$	$(adb + adf) = 180$
acbd und dceb	$(dcb) = (dcb)$	$(dab) = (deb)$
	$(acd + ecd) = 180^0$	$(adb + edb) = 180^0$
	$(acb + ecb) = 180$	$(dba + dbf) = 180$
acbd und ecdf	$(acb) = (ecf)$	$(adb) = edf)$
	$(dcb + dcf) = 180^0$	$(def + dab) = 180^0$
	$(acd + ecd) = 180$	$(efd + abd) = 180$

und die Summen: $(acbd + acdf) = 2(abd)$
$(acbd + dceb) = 2(dab)$
$(acbd + ecdf) = 2(adb)$.

18. Das Wechselverhältniss der sechs Sinusse der Bestandtheile eines dreiseitigen unter einander und zur Einheit eines Kugelstrahles, muss sich in einem zweiten Körperwinkel wiederholen, und zwar in einem stumpfen wenn der erste spitzig ist, und umgekehrt.

Es sey der dreiseitige aCbd (Fig. 3) mit dem Scheitel C auf einer beliebigen Kugelfläche so gestellt, dass seine drei Kanten ca, cb, cd die Kugel durchdringen, und bei A, B, D daraus hervorgehen. Um die dadurch entstehenden Sehnendreiecke CAB, CBD, CDA seyen ihre Kreise beschrieben (kleine Kreise der Kugel), und in jedem derselben aus ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte C die Durchmesser CA′, CB′, CD′ gezogen, wie auch die Verbindungssehnen AD′, D′B, BA′, A′D, DB′, B′A; so werden drei neue Punkte A′, B′, D′ festgestellt und die sechs Dreiecke in den Halbkreisen: CAD′, CBD′, CBA′, CDA′, CDB′, CAB′, alle in A, B und D rechtwinklig seyn *); und die Tangentenwinkel des Körperwinkels aCbd:

$$t_a = B'AD'; \quad t_b = D'BA'; \quad t_d = A'DB';$$

Um die neugebildeten Sehnendreiecke B′AD′, D′BA′, A′DB′ beschreibe man ebenfalls kleine Kreise der Kugel, nach deren gemeinschaftlichem Durchschnitte, dem Antipodalpunkte C′ **) die Durchmesser AC′, BC′, DC′ zu ziehen sind, auf

*) Es versteht sich, dass hier nur von rechten Sehnenwinkeln, nicht aber von sphärischen die Rede ist.

**) Die Bestimmung dieses Punktes in der Ebene der entfalteten Seitenwinkel, soll mit der beschreibenden Darstellung der Scheitel folgen.

welchen sechs Dreiecke: $C'A'D$, $C'B'D$, $C'B'A$, $C'D'A$, $C'D'B$, $C'A'B$, in Halbkreisen und folglich in A', B' und D' rechtwinklig aufgerichtet sind.

C' ist der Scheitel und $a'C'b'$, $b'C'd'$, $d'C'a'$ die Seitenwinkel des gesuchten, verkehrten oder Antipodal-Körperwinkels $a'C'b'd'$; seine Tangentenwinkel aber:

$$t_{a'} = BA'D; \quad t_{b'} = DB'A; \quad t_{d'} = AD'B;$$

Da nun bei eingeschriebenen Vierecken die Gegenwinkel sich wechselseitig auf 180° erfüllen, so hat man

$$aCb + t_{d'} = bCd + t_{a'} = dCa + t_{c'} = a'C'b' + t_d = b'C'd' + t_a = d'C'a' + t_c = 180.$$

Es hat also:

19. jeder dreiseitige einen Antipodal-Körperwinkel, so dass gegenseitig je ein Seitenwinkel des einen und ein Tangentenwinkel des andern sich auf zwei rechte ergänzen; und da aus der Herleitung erhellet, dass aus dem gefundenen Antipodalwinkel durch Anwendung desselben Verfahrens immer wieder der zuerst gegebene entsteht, so müssen auch: wenn die Seitenwinkel irgend eines dreiseitigen (C) Erfüllungen der Tangentenwinkel eines andern (C′) sind, gegenseitig die Seitenwinkel des zweiten (C′) die Tangentenwinkel des ersten (C) erfüllen.

20. Die eben erwähnten acht Punkte A, A′, B, B′, C, C′, D, D′ (Fig. 3) bilden einen Afterwürfel oder halb regelmässigen Oktakro-Hexaeder, welcher sich von dem unregelmässigen dadurch unterscheidet und eben dieses mit dem Regelkörper gemein hat, dass alle seine Spitzen in eine Kugelfläche, und die sechs Vierecke, welche ihn einschliessen, in Kreise eingeschrieben sind.

Für jeden dreiseitigen Körperwinkel müssen solche Antipodal-Würfel und zwar in jeder gegebenen Kugel einzuschreiben seyn.

Zu 8 Spitzen gehören 24 Seitenwinkel, 24 Tangentenwinkel und also nebst den 8 Körperwinkeln, im Ganzen 56 Werthe.

Die 8 letztgenannten sind durch die 48 ebenen Winkel jedenfalls gelöset, und auch diese Zahl vermindert sich um 24, welche wir bereits als rechte kennen. Von den übrigen 24 sind je zwei einander gleich. Wenn also drei Winkel gegeben, und aus diesen drei andere durch Rechnung oder Zeichnung gefunden sind, so hat man, die sechs Erfüllungswinkel mitgerechnet, die noch erforderlichen 12 Werthe, womit alle 56 bekannt sind.

Es seyen z. B. gegeben: $BA'D = \alpha$; $DB'A = \beta$; $AD'B = \gamma$; aus diesen aber durch Rechnung abgeleitet χ, φ, ψ; die Erfüllungen auf 180° seyen α', β', γ', χ', φ', ψ' und die rechten Winkel $= \rho$; so ergibt sich für die Spitze C: $BCD = \alpha'$; $DCA = \beta'$; $ACB = \gamma'$; $t_{(CA)} = \chi$; $t_{(CB)} = \varphi$; $t_{(CD)} = \psi$

für C': $B'C'D' = \chi'$; $D'C'A' = \varphi'$; $A'C'B' = \psi'$; $t_{(C'A')} = \alpha$; $t_{(C'B')} = \beta$; $t_{(C'D')} = \gamma$

„ A: $D'AC = B'AC = \rho$; $B'AD' = \chi$; $t_{(AB')} = t_{(AD')} = \rho$; $t_{(AC)} = \chi$

„ A': $DA'C' = BA'C' = \rho$; $BA'D = \alpha$; $t_{(A'B)} = t_{(A'D)} = \rho$; $t_{(A'C')} = \alpha$

„ B: $A'BC = D'BC = \rho$; $D'BA' = \varphi$; $t_{(BD')} = t_{(BA')} = \rho$; $t_{(BC)} = \varphi$

„ B': $AB'C' = DB'C' = \rho$; $DB'A = \beta$; $t_{(B'D)} = t_{(B'A)} = \rho$; $t_{(B'C')} = \beta$

„ D: $A'DC = B'DC = \rho$; $A'DB' = \psi$; $t_{(DA')} = t_{(DB')} = \rho$; $t_{(DC)} = \psi$

„ D': $AD'C' = BD'C' = \rho$; $AD'B = \gamma$; $t_{(D'A)} = t_{(D'B)} = \rho$; $t_{(D'C')} = \gamma$

und für die Körperwinkel: $C = \chi + \varphi + \psi - 2\rho$; $C' = \alpha + \beta + \gamma - 2\rho$

$$A = \chi;\quad A' = \alpha$$
$$B = \varphi;\quad B' = \beta$$
$$D = \psi;\quad D' = \gamma$$

21. Hieraus lässt sich noch folgern:

$$C + C' = A + A' + B + B' + D + D' - 4\rho \quad \text{oder}$$

Die beiden Antipodalwinkel sind immer zusammen gleich den 6 übrigen Körperwinkeln des eingeschriebenen Antipodalwürfels, weniger 4 rechten.

22. Da der Polarausschnitt (bei 3.) mit seiner Eintheilung in Grade, als vergleichendes Mass für Körperwinkel von jeder Grösse, aber bedingter Form aufgeführt, zugleich aber (11. 12.) bewiesen wurde, dass der vergleichende Werth geradliniger Spitzen von jeder Form, aus der Summe der Tangentenwinkel hervorgeht, so müssen beide Ergebnisse in Zahlen ausgedrückt, sich auch gegenseitig in Beziehung bringen lassen; und so kann man:

einen gegebenen oder durch Rechnung gelösten Körperwinkel in einen gleichen Polarausschnitt oder in eine Spitze mit zwei rechten Seitenwinkeln verwandeln; oder:

zwei, auch mehr Körperwinkel von verschiedener Seitenzahl und Form, in Summe, und in Gestalt eines Polarausschnittes darstellen, oder auch umgekehrt:

einen als Polarausschnitt, d. h. bloss in Zahlen gegebenen Werth, in eine Spitze von verlangter Seitenzahl und Form, z. B. in eine gleichseitige, drei-, vier- oder mehrkantige verwandeln.

Man entwirft aus A, B oder C (Fig. 4, 5, 6) die Halbkugel auf der Ebene ihres Theilungskreises, so dass der Pol den Mittelpunkt deckt; dann zieht man, wenn der gegebene Körperwinkel A' dreiseitig ist, den Strahl (A, 180°), bei dem vierseitigen B' den Strahl (B, 360°), bei einem fünfseitigen (C, 540°), bei mehrseitigen (N, 180°. n — 360°). Sind nun die Tangentenwinkel in Graden bekannt, so werden ihre Bogen, oder wenn die Spitzen zur Messung vorliegen*), ihre Sehnen, von dem Nullpunkte der Theilung aus, in rechtläufiger Ordnung (0,1) (1,2) (2,3) u. s. w. auf den Umkreis gesetzt und bei dem letzten derselben wieder ein Strahl (A,3), (B,4) oder (C,5) aus dem Mittelpunkte gezogen, so dass (3,A,180), (4,B,360) u. s. w. dem Nennwerthe des Polarausschnittes sowohl als des entsprechenden Körperwinkels gleich ist.

Wenn ein Tangentenwinkel über 180° vorkommt, z. B. auf der Kante (e C′) der fünfseitigen Spitze a C′ b d e f **), so ist die Sehne des einspringenden Winkels (hier 2, 3) rückläufig aufzutragen, während die abzuziehenden Umkreistheile ununterbrochen rechtläufig vorrücken.

Soll aber ein auf solche Art dargestellter (oder auch in Zahlen gefundener) Körperwinkel W von irgend einer Form, in eine gleichseitige, dreikantige Spitze von gleichem Werthe verwandelt werden, so ist jeder Tangentenwinkel $= 60^0 + \frac{1}{3}W$.

Eben so werden vier Tangentenwinkel jeder $= 90^0 + \frac{1}{4}W$ eine vierkantige, und n Tangentenwinkel jeder $= \frac{(n-2)\,180^0 + W}{n}$ eine (n) kantige gleichseitige Spitze erzeugen, deren Mass = W seyn wird.

23. Die bisher erwähnten Darstellungen setzen voraus, dass der ganze Körperwinkel mit seinen sechs Bestandtheilen bekannt sey. Wenn man aber auch nur drei derselben kennt, so lassen sich die übrigen durch Zeichnung finden.

Es seyen im ersten Falle gegeben die drei Seitenwinkel: ACB, BCD, DCA (Fig. 7, 8); zu finden die drei Tangentenwinkel: t_a, t_b, t_d. An der Kante A ist t_a am Durchschnitte der Bogen BA, DA, gleich dem Winkel BA′δ, aus zwei Linien, deren eine aus B senkrecht auf die Kante A, diese in A′ erreicht, die zweite von A′ ausgehend, ebenfalls senkrecht auf A′, die Kante D in δ trifft. Eben so ist t_b = D B′α und t_d = A D′β.

Werden nun die drei Seiten auf einer Ebene entfaltet, dass C in c′ und A, B, D in a, b, d liegen; so wird, wenn man ba′ senkrecht auf c′a zieht und bis δ′ verlän-

---

*) Zu dieser Messung lässt sich ein Werkzeug aus zwei Schienen angeben, welches gelenkig an beide Kanten angeschlossen, und die Neigung durch Schrauben festgestellt werden kann. Die Breite der Schienen gibt dann den Halbmesser und ihr Oeffnungsmass die Sehne. Oder man zieht aus irgend einem Punkte k, k′, auf der zu messenden Kante, in beide Seitenflächen senkrechte Linien: (k,0), (k, 1), (k, 2) . . . alle dem Strahle der Halbkugel gleich, so können die Sehnen der Tangentenwinkel, (0, 1), (1′, 2), (2′, 3) u. s. w. auf dem Körper unmittelbar mit dem Cirkel gemessen und wie oben gebraucht werden.

**) Der Deutlichkeit wegen sind die Seitenwinkel zu C′ (Fig. 6) auf eine willkührlich angenommene Grundebene (a b d e f) entfaltet.

gert: $a'b = A'B$, $a'\delta' = A'\delta$ und durch Uebertragung der Kante b nach b'', auch $b''\delta' = B\delta$; folglich gibt das auf der Grundlinie $a'\delta'$ mit den Seiten $a'b$ und $\delta'b''$ aufgerichtete Dreieck $\delta'a'\beta'' = \delta A'B$, den Winkel $a' = t_a$.

Zugleich hat man durch Uebertragung der Kante d nach d'' die Seiten: $b'd'' = B'D$, $b'\alpha' = B'\alpha$ und $\alpha'd = \alpha D$, woraus man das Dreieck $\alpha'b'\delta'' = \alpha B'D$ bildet und den Winkel $b' = t_b$ darstellt.

Endlich ist auch $d'a = D'A$, $d'\beta' = D'\beta$ und durch Uebertragung der Kante a nach a'', die dritte Seite $a''\beta' = A\beta$; folglich das Dreieck $\beta'd'\alpha' = \beta D'A$, und $d' = t_d$.

Die Lösung ist also: In einem beliebig grossen Kreise werden die drei gegebenen Seitenwinkel in den Mittelpunkt gesetzt und ihre Bogen ba, ad, db'' auf dem Umkreise eingetragen; ausser diesen aber noch $a''b'' = ab$ und $bd'' = db''$ wiederhohlt. Eine senkrechte von d'' auf $c'b$ bestimmt die Punkte b' und α'; eine zweite von b auf $c'a$, die Punkte a' und δ'; eine dritte von a auf $c'd$ gibt d' und β'. Endlich macht man: $\delta'\beta'' = \delta'b''$, $a'\beta'' = ab$; $\alpha'\delta'' = \alpha'd$, $b'\delta'' = b'd''$; $\beta'\alpha'' = \beta'a''$, $d'\alpha'' = d'a$.

24. Bei diesem Verfahren dürfen die gegebenen Winkel nicht zu gross seyn; es wird daher für stumpfe oder gemischte Seitenwinkel eine zweite Methode gefunden werden müssen (Fig. 9, 10).

Macht man $CA = CB = CD$, so ist ABD das Sehnendreieck des Körperwinkels ACBD, dessen Seitenwinkel ACB, BCD, DCA, gegeben und dessen Tangentenwinkel $t_a = \alpha A'\omega$, $t_b = \beta B'\pi$, $t_d = \delta D'\tau$ zu finden sind; die Durchschnitte der Ebenen dieser letzten, mit der Ebene des Sehnendreiecks sind $\alpha\omega$, $\beta\pi$, $\delta\tau$. Auf der Ebene eines Seitenwinkels entfaltet, sind die gegebenen Winkel $b''c'a$, $ac'd$, $dc'b'''$, und wenn sich die Sehnen ab'' und db''' in b schliessen, das Sehnendreieck $abd = ABD$. Die Punkte A', D', α, ω, β, π, δ und τ fallen von selbst nach a', d', α', ω', β', π', δ' und τ'; nur der eine Punkt B' wird auf den identischen Kanten $c'b''$ und $c'b'''$ durch zwei Punkte β''' und π''' dargestellt.

Dieses vorausgesetzt, finden sich die senkrechten $A'\alpha = a'\alpha'$, $A'\omega = a'\omega'$, $B'\beta = \beta'''\beta'$, $B'\pi = \pi'''\pi'$, $D'\delta = d'\delta'$, $D'\tau = d'\tau'$, alle gehörig in der Ebene entworfen. Erhebt sich aber die Spitze c' aus derselben so weit, dass sich b'' und b''' in b vereinen, so stellt sich α' nach α'', π' nach π'', δ' nach δ'', β' nach β'' und β''' wird eins mit π'''.

Um $\omega'a'\alpha''' = \omega A'\alpha$ zu erhalten, sind aber zwei Seiten $a'\alpha'$ und $a'\omega'$ auf den entfalteten Ebenen und die dritte $\omega'\alpha''$ auf der Ebene des Sehnendreiecks zu suchen; diese geben im Dreieck auf der Grundlinie $a'\omega'$ errichtet, den Punkt α''', und damit den gesuchten Winkel $a' = t_a$. Eben so wird auf der Grundlinie $d'\tau'$, aus $d'\delta$ und $\tau'\delta$ das Dreieck $\tau'd'\delta''' = \tau D'\delta$ gebildet, dessen Winkel $d' = t_d$ ist.

Wollte man den dritten Tangentenwinkel auf gleiche Weise behandeln, so müsste, wie man sieht, eine Umzeichnung statt finden; er ist aber eben so leicht darzustellen, wenn man die Grundlinie $\beta''\pi$ auf der Ebene der Sehnen wählt, und aus den beiden senkrechten $\beta'\beta'''$, $\pi'\pi'''$ das Dreieck $\beta''b'\pi'' = \beta B'\pi$ zeichnet, welches den Winkel $b' = t_b$ enthält.

Kurz gefasst ist also die Lösung: Die drei Seitenwinkel neben einander in den Umkreis gesetzt, geben die Punkte a, b'', b''', d, und aus den drei Sehnen das Dreieck abd. Die Scheitelpunkte der gesuchten Winkel in a' und d' werden, wie auch die beiden zur Kante b gehörenden β''' und π''' nach Gutdünken gewählt, nur muss $c'\beta''' = c'\pi'''$ seyn.

Dann bestimmen die durch a' und b' rechtwinklig geführten Linien die Punkte α', ω', δ' und τ' und eben so werden β' und π' durch senkrechte aus β''' und π''' festgestellt. Durch Bogen aus a und d versetzt man α' nach α'', π' nach π'', δ' nach δ'' und β' nach β''.

Endlich nimmt man zur Beschreibung der Dreiecke die Grundlinien: $a'\omega$, $d'\tau'$, $\beta''\pi''$ und die Seiten: $\omega'\alpha''' = \omega'\alpha''$, $a'\alpha''' = a'\alpha'$; $\tau'\delta''' = \tau'\delta''$, $d'\delta''' = d'\delta''$; $\pi''b' = \pi'\pi'''$, $\beta''b' = \beta'\beta'''$.

25. Die Anwendung dieser zweiten Darstellungsart auf spitzige Seitenwinkel (Fig. 11) geschieht für $\omega'a'\alpha''' = t_a$ und $\tau'd'\delta''' = t_d$ ganz mit dem vorigen Beispiele übereinstimmend.

Die Aenderung für den dritten Tangentenwinkel besteht darin, dass man die Sehnen bd und da noch einmal nach $b''d''$ und $d''a'''$ in den Umkreis setzt, um damit das Sehnendreiek $a''b''d'' = abd$ zu errichten, worauf von dem angenommenen Punkte b' auf der Kante $c'b''$, der rechtwinklige Durchschnitt ausgeht, welcher die Punkte β' und π' auf den Sehnen ab'' und $b''d''$ bezeichnet.

Die Entfernung $b''\pi$ wird auf die Sehne $a''b''$, nach $b''\pi''$, die Entfernung $\beta'\pi''$ nach $\beta'\pi'''$, und eben so $b'\pi'$ nach $b'\pi'''$ übertragen; und das Dreieck $\beta'b'\pi'''$ gibt den Winkel $b' = t_b$.

26. Gegeben zwei Seitenwinkel: ACB, ACD und der dazwischen liegende Tangentenwinkel: t_a; zu finden die andern drei Winkel.

Nachdem $ac'b = ACB$, $ac'd = ACD$ (Fig. 8) im Kreise entworfen sind, wird aus b eine senkrechte auf $c'a$ gezogen, bis sie $c'd$ trifft, wodurch a' und δ' festgestellt sind. Aus a' wird mit $a'b$ ein Bogen $b\beta''$ geführt, der Winkel $d'a\beta'' = t_a$ gemacht und so der Punkt β'' bestimmt. Ein Bogen aus δ' mit $\delta'\beta''$ schneidet den Umkreis in b'' und der Seitenwinkel $dc'b'' = DCB$ ist gefunden. Hierauf werden t_b und t_d (wie bei 23) dargestellt.

27. Sind die gegebenen Winkel $(ac'b + ac'd)$ grösser als 180°, so ist der Punkt a' (Fig. 10) willkührlich zu bestimmen; die durch ihn geführte Senkrechte schneidet die bekannten Sehnen in ω' und α', auf $\omega a'$ wird der gegebene Tangentenwinkel $t_a = \omega'a'\alpha'''$ errichtet und $a'\alpha'' = a'\alpha'$ gemacht.

Der Durchschnitt zweier Bogen $\alpha'\alpha''$ aus a und $\alpha'''\alpha''$ aus ω' gibt den Punkt α'', die verlängerte aα'' wird ab = ab'' gemacht und db''' = db ist die Sehne des Winkels dc'b''' = DCB.

Die zwei fehlenden Tangentenwinkel finden sich (wie bei 24).

28. Gegeben zwei Seitenwinkel: ACB, BCD (Fig. 12, 13), und einer der ihnen gegenüberstehenden Tangentenwinkel, z. B. $t_d = \beta D \alpha$; zu finden die übrigen Bestandtheile, und zwar zuerst der dritte Seitenwinkel ACD.

Wenn aus B ein grosser Kreisbogen derselben Kugel, welcher die Bogen AB, BD, DA angehören, nach E senkrecht auf DA geführt wird, so ist wegen der beiden rechtwinkligen Bogendreiecke:

$$\text{Cos}\, AB : \text{Cos}\, DB = \text{Cos}\, DE : \text{Cos} : AE.$$

Wäre also DE oder der Winkel DCE = d'c'e' gefunden, so würden die rechten Winkel $c'\varphi b$ und $c'\gamma b$ und die Winkel $c'fg = c'\varphi\gamma$

$$c'\varphi : c'\gamma = \text{Cos}\; d'c'b : \text{Cos}\, a c'b = \text{Cos}\, e'c'd : \text{Cos}\, ec'a = c'f = c'g$$

geben, so dass mit der Bestimmung des Punktes E, e oder e' die Lösung des ganzen vollendet wäre. Denn die Summe der Bogen DE + AE, wenn das Sehnendreieck in D spitzig ist, oder die Differenz AE — DE, wenn D stumpf ist, muss dem Bogen des gesuchten Winkels ACD gleich seyn.

Wird aber der Winkel $\beta D \alpha$ mit unveränderter Lage der Tangente αD auf die Ebene der entfalteten Seitenwinkel übertragen, so fällt α der Durchschnittspunkt dreier Ebenen, nämlich $\beta D \alpha$ des Tangentenwinkels, CEB des senkrechten Bogens und ACD des Seitenwinkels, in die Linie $\alpha''\beta''$, welche den Umkreis in d' berührt. Wird ferner β, der Punkt wo die Tangente $D\beta$ die Kante CB schneidet, aus der Ebene bc'd', auf welcher er in β'' steht, in die Ebene des Winkels $\beta'd'\alpha''$ umgelegt, $d'\beta' = d'\beta'' = D\beta$ gemacht und die Senkrechte $\beta'\alpha'$ auf $\beta''\alpha''$ gezogen; so entspricht α' dem Punkte α, weil $\beta'\alpha'$ die Durchschnittslinie $\beta\alpha$ der Ebenen $\beta D \alpha$, CEB, darstellt, welche in α senkrecht auf die Ebene ACD fällt; und $\beta'\alpha'd'$ bezeichnet das Dreieck $\beta D \alpha$, auf die Ebene ACD, nach $\beta''' D \alpha$ umgelegt. Und eben so wird auch die Sekante $\alpha'c'$ identisch mit αC, und der Punkt E in e' seyn.

Das Verfahren ist daher folgendes: Auf c'b, der gemeinschaftlichen Kante beider gegebener Seitenwinkel, wird ein Kreis errichtet, dessen Durchmesser = c'b ist, und dessen Umkreis die beiden andern Kanten in φ und γ schneidet.

Eine senkrechte $\alpha''\beta''$ wird auf c'd' gezogen, bis sie die verlängerte c'b in β'' erreicht, und der gegebene Tangentenwinkel $t_d = \alpha''d'\beta'$ aufgetragen; worauf β' durch den Bogen $\beta''\beta'$, α' durch die senkrechte $\beta'\alpha'$, e' durch die gerade $\alpha'c'$, f durch die senkrechte e'f, g durch die parallelen fg, $\varphi\gamma$, und e durch die senkrechte ge bestimmt ist.

Endlich überträgt man $d'e'$ nach de, und zieht die verlangte Kante $c'd$ *), so sind alle drei Seitenwinkel bekannt, und t_a, t_b, leicht zu finden.

29. **Gegeben zwei Seitenwinkel: ACB, BCD; und einer der gegenüber stehenden Tangentenwinkel, z. B. $t_a = B\alpha b$; zu finden: t_b der eingeschlossene Tangentenwinkel.**

Ein Kugelausschnitt ACBD (Fig. 16), entworfen in der Ebene eines Tangentenwinkels t_b gibt ein Bild, in welchem sich sowohl der Scheitel C als die Kante BC in einen Punkt B verlieren, in welchem ferner die bekannten Seitenwinke mit ihren Ebenen durch die geraden Linien BD und BA ausgedrückt sind, der unbekannte Seitenwinkel aber und der verlangte Tangentenwinkel congruent: $ACD = ADB = t_b$, und zwar mit dem richtigen Masse des letztern erscheinen. Kann man also aus den gegebenen drei Bestandtheilen diesen Entwurf zu Stande bringen, so hat man die verlangte Lösung.

Ein senkrechter Bogen aus B trifft auch hier (wie bei 28) einen Kreis $ADe\beta$ in e, und es besteht das Verhältniss:

$$\mathrm{Cos}\, Ab : \mathrm{Cos}\, e\beta = \mathrm{Tang}\, BCD : \mathrm{Tang}\, ACB = \mathrm{Tang}\, bc'd' : \mathrm{Tang}\, ac'b = a\alpha : d'\alpha.$$

Wenn man die Kante bc' als senkrechte auf dem Durchmesser $A\beta$ und zugleich den auf selber bestimmten Punkt α als Scheitel des Winkels t_a benützt **), so stellt $b\alpha B$ den letztern dar, wie er sich von A aus um B gewendet, mit einem Schenkel an B ruhend, auf die Ebene des Entwurfes entfaltet und dadurch den Bogen Ab bezeichnet. Es bleibt also nur noch der Punkt e zu finden, und $AD = A\beta \pm e\beta$ zu machen, je nachdem e in oder ausser den Kugelausschnitt fällt ***). Dieser Punkt ergibt sich aber durch die ähnlichen Dreiecke $(\alpha d''d')$ und $(Bd''c')$; denn es ist

$$e'B : c'B = a\alpha : d'\alpha; \quad \text{also das Verfahren:}$$

Die bekannten Seitenwinkel: $ac'b$, $bc'd$ in den Umkreis gestellt, $c'd$ nach d' und d'' unbestimmt verlängert, aus a die senkrechte nach α und d' aus c' die senkrechte $A\beta$; durch den gegebenen Tangentenwinkel $b\alpha B$ zugleich B und d'' bestimmt, eben so durch die gerade ad'' den Punkt e', dessen senkrechte den Kreis aus B mit Strahl Bb gezogen in e trifft, und $bD = e\beta$ gemacht, so ist $ABD = t_b$.

30. **Gegeben die drei Tangentenwinkel eines spitzigen Körperwinkels: $t_a = scr$, $t_b = rcp''$, $t_d = scp$ (Fig. 14), zu finden die drei Seitenwinkel: $ac'b$, $bc'd$, $dc'a$.**

---

*) Hier kann es zweifelhaft bleiben, ob de hinzuzufügen oder abzuziehen sey.

**) Der Einfachheit der Darstellung wegen; denn folgerecht müsste, wie bei den frühern Lösungen, dieser Scheitel auf seiner Kante ac' zu finden seyn.

***) Auch hier kann es unentschieden bleiben, wenn man nicht beiläufig die Gestalt des Sehnendreiecks kennt.

Die Verlängerung zweier Linien, pc nach p''' und rc nach r'', genügt, um die gegebenen, entfalteten Tangentenwinkel, in Seitenwinkel eines stumpfen Antipodalwinkels (p''cr''s) zu dem vorliegenden (z. B. zu (ac'bd) Fig. 11) zu verwandeln (19).

Man hat dann, wie oben (24.) das Sehnendreieck p''''r''s zu bilden, die Punkte s', r', φ'' auf den Kanten zu wählen, $c\pi'' = c\varphi''$ zu machen und die senkrechten $\pi''\pi$, $\varphi''\varphi$, $s'\psi$, $s'\sigma$, $r'\chi$, $r'\rho$ zu errichten. Der Punkt p' wird bestimmt durch $r''\pi' = r''\pi$, $s\varphi' = s\varphi$, $\pi'p' = \pi\pi''$, $\varphi'p' = \varphi\varphi''$; eben so ψ'', durch $s\psi' = s\psi$, $\sigma\psi'' = \sigma\psi'$, $s'\psi'' = s'\psi$; und χ'', durch $r''\chi' = r''\chi$, $\rho\chi'' = \rho\chi'$, $r'\chi'' = r'\chi$.

Die Richtungslinien: $\pi'p'$, verlängert nach d', $p'\varphi'$ nach b, $r'\chi$ nach b', $r'\chi''$ nach a', $s'\psi$ nach d und $s'\psi''$ nach a, geben (19.)

$$a'r'b = ac'b, \quad bp'd' = bc'd, \quad ds'a = dc'a.$$

31. **Gegeben die drei Tangentenwinkel einer stumpfen Spitze:**

$$t_a = mcn, \quad t_b = k'''cm, \quad t_d = kcn \text{ (Fig. 15)};$$

zu finden die Seitenwinkel: ACB, BCD, DCA.

Hier kann die erste Methode ihre Anwendung finden, weil der entsprechende Antipodalwinkel (k'''cnm'') spitzig ist. Die entfalteten, gegebenen Winkel verwandeln sich zu diesem Ende in m''cn, k'''cm'', k''cn; auch ist k''cm''' = k'''cm'' und k'''cn'' = k''cn zu machen.

Aus den gewählten Punkten k', m', n', werden die senkrechten: k'm''' und $k'\nu$ auf ck'', m'n und $m'\gamma$ auf cm'', n'k'' und $n'\mu$ auf cn errichtet, hierauf durch $\mu'k' = m'''k'$, $\mu'\nu = m\nu$, $\nu'm' = nm'$, $\nu'\gamma = n''\gamma$, $\gamma'n' = k''n'$, $\gamma'\mu = k'''\mu$, die Punkte μ', ν', γ', festgestellt, endlich $k'\mu'$, $m'\nu'$ und $n'\gamma'$ gezogen, so hat man die verlangten:

$$ACB = nm'\nu', \quad BCD = m'''k''\mu', \quad DCA = k''n'\gamma'.$$

32. **Gegeben zwei Tangentenwinkel: t_a, t_d und ein dazwischen liegender Seitenwinkel ACD; zu finden die übrigen Winkel.**

Ist die Summe der beiden erstern grösser als 180°; z. B. $t_a = mcn$, $t_d = nck$; so verfahre man auf die erste bequemere Art (Fig. 15). Man trage nämlich (30.) die entfalteten Seiten des Antipodalwinkels (k'''cnm'') und zwar: m''cn statt mcn und nck'' statt nck in den Umkreis, ziehe $k''\mu$ senkrecht auf die Kante cn, mache den Durchschnitt n' zum Scheitel des gegebenen Seitenwinkels ACD = $k''n'\gamma'$, wodurch γ' bestimmt ist, und beschreibe von μ aus, den Bogen $\gamma'k'''$, dann den Strahl ck''', so ist der dritte Tangentenwinkel $t_b = k'''cm$.

Die beiden noch fehlenden Seitenwinkel zu finden, bedarf es keiner weitern Erörterung.

33. Wären aber $t_a = scr$, und $t_d = scp$, zusammen kleiner als 180° (Fig. 14), so müsste nachdem zuerst p'' gegenüber von p, r'' gegenüber von r gesetzt und die Sehnen sp'', sr'' gezogen worden, der Punkt s' (wie in 29) auf der Kante cs angenommen, dann durch die senkrechte $s\sigma$ und ihre Verlängerung nach d zugleich σ auf der einen, ψ auf der andern Kante festgestellt werden. Den Punkt ψ'' erhält man, wenn man

den gegebenen Seitenwinkel $ACD = as'd$ und $s'\psi'' = s'\psi$ macht, und ψ' bestimmt sich, indem $s\psi' = s\psi$ und $\sigma\psi' = \sigma\psi''$ wird.

In der Richtung $s\psi'$ liegt p'''', so dass $sp'''' = sp'''$ ist und durch $r''p'' = r''p''''$ erscheint p'' auf dem Umkreise, wodurch sich sowohl der Seitenwinkel $r''cp''$ des Antipodalwinkels, als der gesuchte Tangentenwinkel $t_b = rcp''$ darstellt.

34. Gegeben zwei Tangentenwinkel: $t_m = ac'b''$, $t_n = b''c'd'$, und der einem von ihnen gegenüber stehende Seitenwinkel: $PCM = \beta''d'\beta'$; zu finden der dritte Tangentenwinkel: t_p.

Indem man $ac'b$ statt $ac'b''$, $bc'd'$ statt $b''c'd'$, und $\alpha''d'\beta'$ statt $\beta''d\beta'$ setzt, verwandeln sich die gegebenen Winkel in Bestandtheile des entfalteten Antipodalwinkels (Fig. 13); es ist also hier aus den bekannten Seitenwinkeln $ac'b$, $bc'd'$ und dem ebenfalls bekannten $t_d = \alpha''d'\beta'$, der Punkt d zu bestimmen (wie bei 28 bereits geschehen), und es wird $t_p = a''c'd$ seyn.

35. Gegeben zwei Tangentenwinkel: $t_f = b'c'd$, $t_h = ac'b'$ und der Seitenwinkel dem erstern gegenüber: $GCH = b'\alpha B$; zu finden der eingeschlossene Seitenwinkel FCH.

Es wird $bc'd$ statt $b'c'd$, $ac'b$ statt $ac'b'$ und $b\alpha B$ statt $b'\alpha B$ (Fig. 16) genommen, und damit (ganz so wie bei 29) die Linie ad'', der Punkt e' und auf dem Halbkreise $A\beta$ die Punkte e und D gefunden. Der verlangte Winkel ist dann:

$$FCH = DB\beta.$$

Fig. 1.

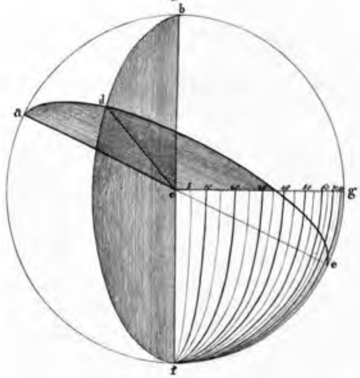


Fig. 2.

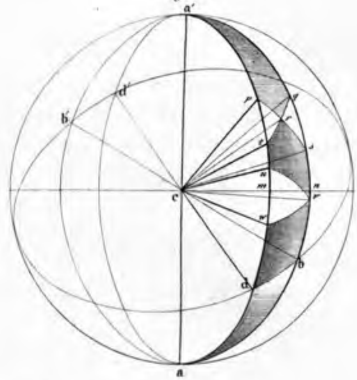


Fig. 3.

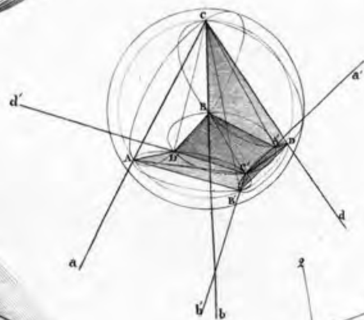


Fig. 5.

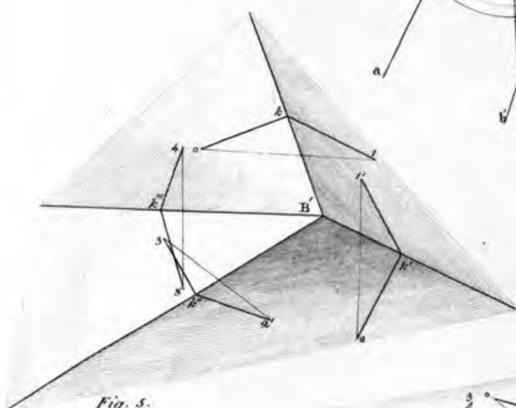


Fig. 6.

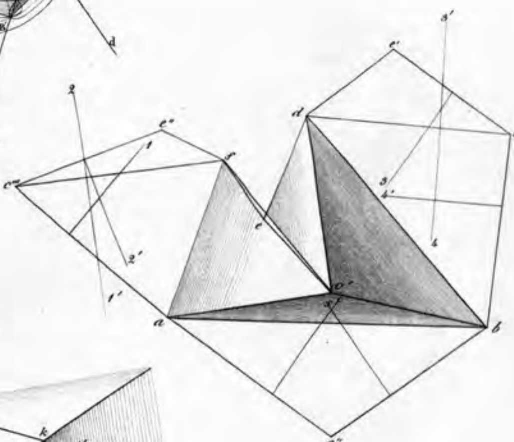
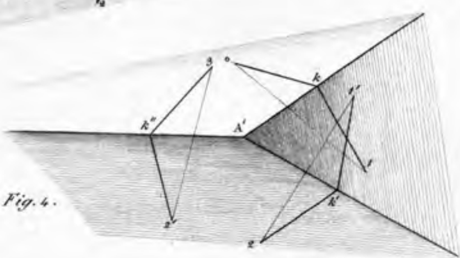
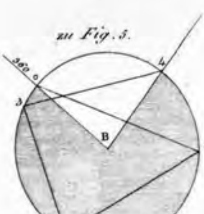


Fig. 4.



zu Fig. 5.



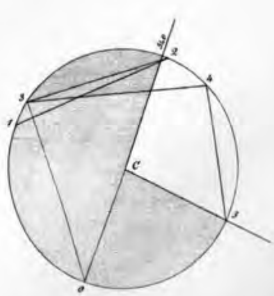


Fig. 8.

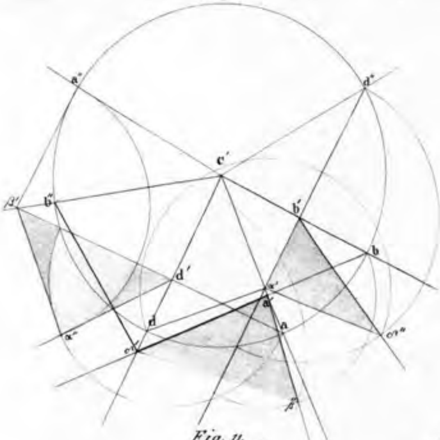


Fig. 7.

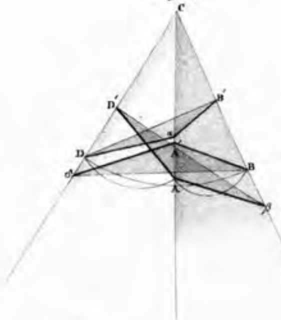


Fig. 10.

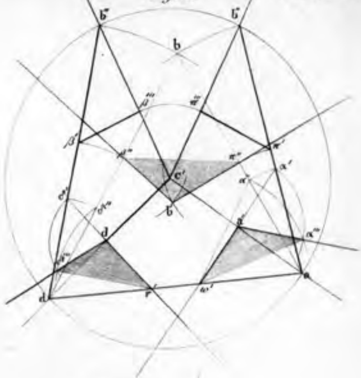


Fig. 12.

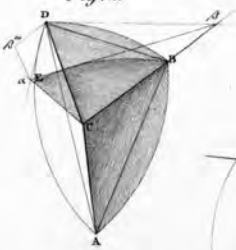


Fig. 11.

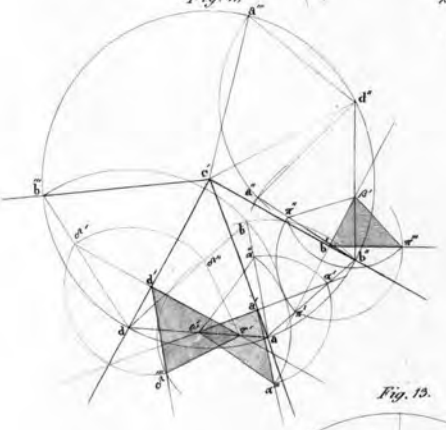


Fig. 15.

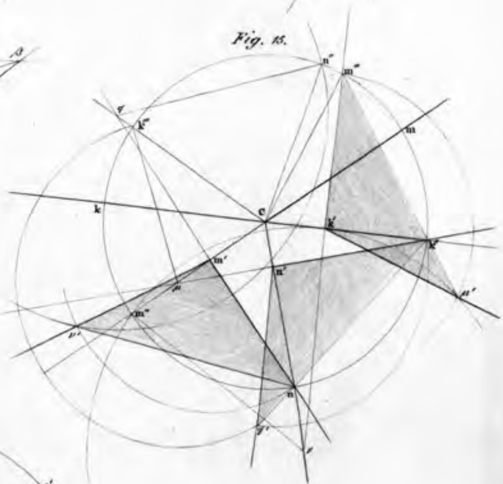


Fig. 13.

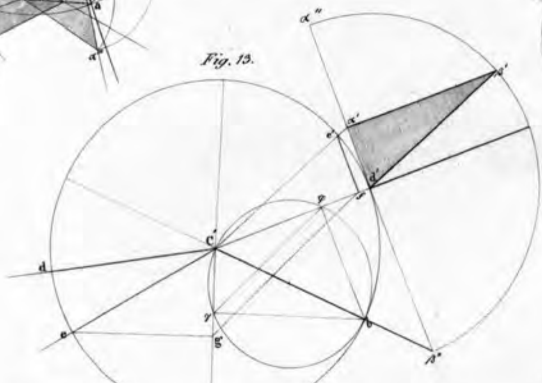


Fig. 9.

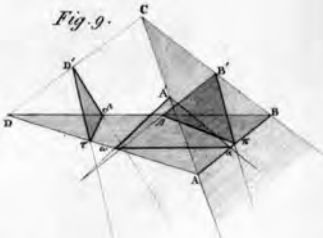


Fig. 16.

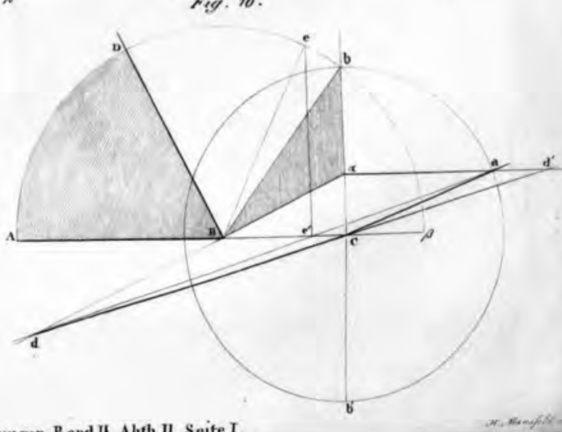
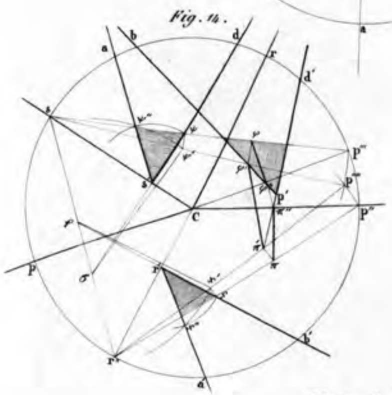


Fig. 14.



H. Mansfeld