

XVI. Integration der Differential-Gleichungen von linearer Form.

V o n

Professor Joseph Petzval.

Mitgetheilt am 26. März 1847 in einer Versammlung von Freunden der Naturwissenschaften in Wien.

E i n l e i t u n g.

Bekanntlich ist die Integration der Differentialgleichungen ein Theil der mathematischen Analysis, der von jeher von den grössten Analytischen mit Vorliebe gepflegt wurde, und in welchem sich auch deshalb die glänzendsten Methoden niedergelegt finden. — Gleichwohl ist dieser Gegenstand noch gar nicht erschöpft, sondern bietet immer noch eine reiche Fundgrube für künftige mathematische Forschungen. Ja, wir besitzen auf diesem Felde noch gar nicht genug Eigenthum um unsere laufenden geometrischen oder mechanischen Bedürfnisse zu decken, und gelangen ganz gewöhnlich bei der Lösung der meisten Aufgaben der angewandten Mathematik endlich zu einer Differentialgleichung, die unsern Forschungen, da wir sie nicht integrieren können, sich wie ein unübersteiglicher Damm entgegenstellt. Die am häufigsten vorkommende und daher auch wichtigste Form der Differentialgleichungen ist die sogenannte lineare. Beinahe alle Untersuchungen des mathematischen Naturforschers führen endlich darauf hinaus, was seinen Grund lediglich darin hat, dass dieser, entweder die Gesetze schwingender Bewegungen von sehr kleinen Amplituden zu erörtern, oder zu bereits in erster Annäherung bekannten Elementen sehr kleine Correktionen zu rechnen hat, und daher jedesmal die Glieder der höheren Ordnungen vernachlässigend, nothwendig zur linearen Form gelangen muss. Wiewohl nun diese wichtigste aller Formen die besondere Aufmerksamkeit der Gelehrten in Anspruch genommen hat, so besitzen wir doch nur allgemeine Integrationsmethoden für Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, oder solche, die sich durch einfache Substitutionen auf dieselben zurückführen lassen, von Gleichungen aber mit veränderlichen Coefficienten, nur einige spezielle, je durch einen besondern Kunstgriff integrirbare Formen.

Dass es mein, freilich unerreichbarer Wunsch gewesen wäre, über die linearen Differentialgleichungen eine ähnliche Arbeit zu liefern, wie wir sie über die algebrai-

schen Gleichungen, die mit den frühern in vielfacher Verwandtschaft stehen, besitzen, wird man mir gerne glauben, dass ich aber noch lange nicht im Besitze einer solchen bin, und auch bei der verhältnissmässig bedeutend grössern Schwierigkeit des Gegenstandes, und den zu geringen Vorarbeiten unmöglich seyn kann, wird man eben so gut einsehen. Ich begnüge mich also zu einer solchen Arbeit, bei der dem Forscher die Theorie der algebraischen Gleichungen als Muster vorschweben soll, und die ich auf die kräftigen Schultern unserer jugendlichen Talente niedergelegt zu sehen wünsche, einen kleinen Beitrag zu liefern, und gebe somit, was ich eben habe, und wozu mich eine einseitige, den Bedürfnissen meiner optischen Untersuchungen, mit denen ich seit mehreren Jahren beschäftigt bin, wenn auch nicht ausschliesslich, wenigstens vorzugsweise zugewendete Richtung des Forschens geführt hat, eine Richtung, die ich auch künftighin beizubehalten gesonnen bin, da es mir schwer werden dürfte, im Verlaufe meines kommenden Lebens auch nur diejenigen Keime, die sich mir in diesem Felde aufthaten, vollständig zu entwickeln. Es würde mir daher eine innige Freude machen, wenn irgend einer meiner Schüler, denen vorzugsweise diese Arbeit gewidmet ist, es, in meine Fussstapfen tretend, übernehme, das Gebiet der linearen Differentialgleichung nach allen Richtungen gehörig zu durchforschen.

Der hier besprochene Gegenstand fing schon vor fünfzehn Jahren an meine Aufmerksamkeit zu erregen, und ich gelangte damals schon zu der Integrationsmethode für lineare Gleichungen von beliebig hoher Ordnung mit Coefficienten, die nach der unabhängigen Variablen vom ersten Grade sind. Ich bin seit der Zeit zu wiederholten Malen zu demselben Gegenstande zurückgekehrt, und fand stets Gelegenheit zu dem bereits Gefundenen etwas hinzuzufügen, wodurch die Wirksamkeit der Methode auf immer andere und komplizirtere Coefficientenformen ausgedehnt wurde. Ich habe in der Undulationstheorie von dieser meiner Integrationsmethode einen nützlichen Gebrauch gemacht, und bin überzeugt, dass dieselbe in allen Zweigen der mathematischen Physik von Nutzen seyn wird. Sie scheint mir überdem noch einen andern kleinen Vorzug zu besitzen; sie gibt nämlich, mit nur sehr wenigen Ausnahmen die Integrale von allen linearen Differentialgleichungen, die man bisher durch die mannigfaltigsten Kunstgriffe integriren gelehrt hat, und diess zwar durch ein einfaches sich immer gleich bleibendes Verfahren, und es wird namentlich beispielsweise im gegenwärtigen Aufsätze gezeigt, wie diejenigen Gleichungen, zu denen CORANCEZ in der Theorie der Wasserwellen, POISSON in seiner Theorie der Wärme, gelangt, ferner die unter dem Namen der RICATI'schen bekannte und mehrere andere auf verschiedenen Wegen integrierte einfacher und leichter mittelst der unsrigen behandelt werden könne. So habe ich mich denn entschlossen die Resultate meiner Forschungen auf diesem Felde der mathematischen Analysis in ein paar Abhandlungen niederzulegen, und der Oeffentlichkeit zu übergeben, von denen die erste hiemit dem wissenschaftlichen Publikum überantwortet wird.

§. 1.

Integration der Gleichungen von der Form:

$$\frac{dy^n}{dx^n} (a_n + b_n x) + \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} (a_{n-1} + b_{n-1} x) + \dots + \frac{dy}{dx} (a_1 + b_1 x) + y (a_0 + b_0 x) = 0, \quad (1)$$

wo $a_0 \dots a_n, b_0 \dots b_n$ Coefficienten bedeuten von willkürlichem Werth.

Zu den Integralen der linearen Differentialgleichungen, die man bisher aufzufinden gelehrt hat, gelangt man in der Regel durch eine glückliche Voraussetzung hinsichtlich der Form des Ausdruckes, der die Eigenschaft hat Genüge zu leisten. Hat man die Form errathen, so bekommt man auch gewöhnlich nicht einen, sondern mehrere gleich gestaltete Ausdrücke, die sämmtlich die Eigenschaft besitzen, der Gleichung zu genügen, somit als ebenso viele partikuläre Integrale zu betrachten sind, und die man dann je mit einer willkürlichen Constante multipliziert und addirt, und so abermals einen Ausdruck erhält, der die vorgelegte lineare Differentialgleichung erfüllt, und ein vollständiges Integrale ist oder nicht, je nachdem in demselben die erforderliche Zahl von willkürlichen Constanten vorhanden ist oder nicht. So integriren wir die Gleichung

$$A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + A_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + A_n \frac{d^n y}{dx^n} = 0, \quad (2)$$

indem wir den Werth von y von der Form e^{rx} voraussetzen. Und wirklich gibt e^{rx} statt y substituirt, folgende Gleichung:

$$A_0 e^{rx} + A_1 r e^{rx} + A_2 r^2 e^{rx} + \dots + A_n r^n e^{rx} = 0$$

oder

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_n r^n = 0. \quad (3)$$

Es wird daher e^{rx} ein partikuläres Integral seyn, wenn r eine beliebige der n Wurzeln der Gleichung (3) ist.

Bezeichnen wir diese letzteren mit

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$$

so sind

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{r_3 x}, \dots, e^{r_n x}$$

partikuläre Integrale, und in Folge der linearen Form der Differentialgleichung

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \dots + C_n e^{r_n x} \quad (4)$$

das allgemeinste, mit n willkürlichen Constanten $C_1 \dots C_n$ versehene Integral derselben.

Auf ähnliche Weise gelangt man zum Integral der Gleichung

$$(5) \quad A_n (h + k x)^n \frac{d^n y}{d x^n} + A_{n-1} (h + k x)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \dots + A_1 (h + k x) \frac{d y}{d x} + A_0 y = 0,$$

$y = (h + k x)^r$ voraussetzend.

Dies führt nämlich zur folgenden Gleichung des n^{ten} Grades in r :

$$(6) \quad A_n k^n r (r-1) \dots (r-n+1) + A_{n-1} k^{n-1} r (r-1) \dots (r-n+2) + \dots + A_1 k r + A_0 = 0,$$

deren n Wurzeln wir mit $r_1 \dots r_n$ bezeichnen, und auf demselben Wege für das allgemeine Integral folgenden, mit n willkürlichen Constanten $C_1 \dots C_n$ versehenen Ausdruck erhalten:

$$(7) \quad y = C_1 (h + k x)^{r_1} + C_2 (h + k x)^{r_2} + \dots + C_n (h + k x)^{r_n}.$$

Die Ausdrücke (4) und (7) hören auf, n willkürliche Constante in sich zu schliessen; verlieren somit den Charakter eines allgemeinen Integrales, wenn unter den Wurzeln der Gleichungen (3) und (6) gleiche vorkommen. Es haben dann nicht alle partikulären Integrale der Differentialgleichung die ihnen vorausgesetzte Form und es steht namentlich, wenn

$$r_1 = r_2 = \dots = r_m$$

in (3) seyn sollte, anstatt des Ausdrucks (4), folgender andere als allgemeines Integral da:

$$(8) \quad y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_m x^{m-1}) e^{r_1 x} + C_{m+1} e^{r_{m+1} x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Genau auf dieselbe Weise liegt uns die Vermuthung nahe, dass die Differentialgleichung (1), die der Gegenstand unserer Untersuchung seyn soll, partikuläre Integrale zulasse von folgender Form:

$$(9) \quad y = \int_{u'}^{u''} e^{u x} V \frac{d u}{d u} d u$$

wo U und V Funktionen der Variablen u , u' und u'' aber schicklich gewählte Integrationsgrenzen andeuten. Um nun die Werthe von U , V , u' und u'' , die eben den Ausdruck (9) wo möglich in ein partikuläres Integral umwandeln, zu bestimmen, substituiren wir denselben in die Differentialgleichung (1), und erhalten, wenn wir bedenken, dass

$$(10) \quad \frac{d y}{d x} = \int_{u'}^{u''} u e^{u x} V \frac{d u}{d u} d u, \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \int_{u'}^{u''} u^2 e^{u x} V \frac{d u}{d u} d u \dots \frac{d^n y}{d x^n} = \int_{u'}^{u''} u^n e^{u x} V \frac{d u}{d u} d u$$

ist, und überdiess

$$(11) \quad U_0 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0,$$

$$(12) \quad U_1 = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \dots + b_1 u + b_0$$

setzen, als Resultat:

$$(13) \quad \int_{u'}^{u''} [U_0 + U_1 x] e^{u x} V \frac{d u}{d u} d u = 0.$$

Endlich suchen wir U , V , u' , u'' so zu bestimmen, dass die Gleichung (13) eine identische wird. Nun lässt sich aber dieselbe so schreiben:

$$\int_{u'}^{u''} U_0 e^{Ux} V \frac{dU}{dU} dU + x \int_{u'}^{u''} U_1 e^{Ux} V \frac{dU}{dU} dU = 0, \quad (14)$$

und man erhält durch das Verfahren der theilweisen Integration

$$x \int U_1 e^{Ux} V \frac{dU}{dU} dU = e^{Ux} U_1 V - \int e^{Ux} \frac{d[U_1 V]}{dU} dU; \quad (15)$$

somit, wenn man das Symbol

$$\left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}$$

dasjenige bedeutet lässt was man erhält, wenn man in den eingeklammerten Ausdruck erst die obere der rechts angefügten Zahlen u'' , dann die untere u' substituirt, und das Resultat der zweiten Substitution von jenem der ersten abzieht:

$$x \int_{u'}^{u''} U_1 e^{Ux} V \frac{dU}{dU} dU = \left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''} - \int_{u'}^{u''} e^{Ux} d[U_1 V]. \quad (16)$$

In Folge dieser Gleichung geht uns die (14) über in

$$\left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''} + \int_{u'}^{u''} e^{Ux} \left[U_0 V \frac{dU}{dU} dU - \frac{d[U_1 V]}{dU} dU \right] = 0 \quad (17)$$

und dieser letzteren ist nun identisch, d. h. für jeden Werth von x durch schicklich gewählte Funktionen von u , anstatt U und V , und durch passende Werthe der Grenzen u' und u'' , Genüge zu leisten. Diess wird offenbar erreicht, wenn man

$$U_0 V dU - d[U_1 V] = 0 \quad (18)$$

setzt, und überdiess für u' und u'' solche, weder x noch u in sich enthaltende Werthe substituirt, die der Gleichung

$$\left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''} = 0 \quad (19)$$

Genüge leisten. Es ist aber (18) eine Differentialgleichung der ersten Ordnung von linearer Form, und gibt auf dem betretenen Wege integrirt folgenden Werth für V in Funktion von U :

$$V = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} dU}, \quad (20)$$

der in (19) substituirt, diese Gleichung verwandelt in

$$\left\{ C e^{Ux} + \int \frac{U_0}{U_1} dU \right\}_{u'}^{u''} = 0 \quad (21)$$

Man wird jetzt damit anfangen für U eine beliebige Funktion von u , die uns die bequemste Rechnung verspricht, zu substituiren. Das einfachste wäre anstatt U , u zu setzen, dann sucht man diejenigen Werthe von u zu ermitteln, welche der in (21) ein-

geklammerten Funktion einerlei Werth A ertheilen. Gesetzt, man hätte deren mehrere $u_1 u_2 u_3 \dots u_p$ gefunden, so kann man

$$u' = u_1, \quad u'' = u_2$$

oder

$$u' = u_1, \quad u'' = u_3$$

oder

$$u' = u_1, \quad u'' = u_p$$

u. s. w. substituiren, und wird so partikuläre Integrale, $p-1$ an der Zahl erhalten, welche in der Regel unter sich und von 0 verschieden ausfallen werden, nämlich:

$$(22) \quad \begin{aligned} y &= \int_{u_1}^{u_2} C_1 e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \frac{d u}{U_1}, & y &= \int_{u_1}^{u_3} C_2 e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \frac{d u}{U_1}, \\ y &= \int_{u_1}^{u_3} C_3 e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \frac{d u}{U_1}, & y &= \int_{u_1}^{u_p} C_{p-1} e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \frac{d u}{U_1}, \end{aligned}$$

und weil die Differenzialgleichung lineare Form hat, so wird ihr auch die Summe dieser partikulären Werthe Genüge leisten. Wir haben somit

$$(23) \quad \begin{aligned} y &= \int_{u_1}^{u_2} C_1 e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \frac{d u}{U_1} + \int_{u_1}^{u_3} C_2 e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \frac{d u}{U_1} + \dots \\ &+ \int_{u_1}^{u_p} C_{p-1} e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \frac{d u}{U_1}, \end{aligned}$$

Man kann sich auch a posteriori davon überzeugen, dass dieser Ausdruck statt y gesetzt die vorgelegte Differentialgleichung erfülle; es reduziert sich in der That durch die wirklich gemachte Substitution desselben und durch das angewendete Verfahren des theilweisen Integrirens ihr erster Theil auf die Summe:

$$(24) \quad \left\{ C_1 e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \right\}_{u_1}^{u_2} + \left\{ C_2 e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \right\}_{u_1}^{u_3} + \dots + \left\{ C_{p-1} e^{u x} + \int \frac{U^0}{U_1} d u \right\}_{u_1}^{u_p},$$

deren einzelne Glieder, in Folge der für $u_1 u_2 \dots u_p$ aus der Auflösung der Gleichung (21) hervorgehenden Werthe, jedes für sich der Nulle gleich werden. Es geht hieraus hervor, dass es nicht einmal nothwendig sei jene Werthe der Integrationsgrenzen so zu wählen wie im Vorhergehenden auseinander gesetzt worden ist; es genügt vielmehr, wenn bloss die Summe (24) verschwindet, was z. B. dann der Fall ist, wenn die darin vorkommenden Ausdrücke:

$$\left\{ e^{Ux + \int \frac{U^0}{U_1} dU} \right\}_{u_1}^{u_2}, \left\{ e^{Ux + \int \frac{U^0}{U_1} dU} \right\}_{u_1}^{u_3}, \dots \left\{ e^{Ux + \int \frac{U^0}{U_1} dU} \right\}_{u_1}^{u_p},$$

sämmtlich einen und denselben von 0 verschiedenen Werth B annehmen, und überdiess zwischen den Constanten C_1, \dots, C_{p-1} folgende Relation festgesetzt wird:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_{p-1} = 0;$$

oder wenn dieselben Ausdrücke sich auf die von einander verschiedenen constanten Werthe

$$B_1, B_2, \dots, B_{p-1}$$

reduziren, während zugleich

$$C_1 B_1 + C_2 B_2 + \dots + C_{p-1} B_{p-1} = 0$$

gewählt wird.

Ist es uns auf diese Weise gelungen ein Integral der zur n^{ten} Ordnung gehörigen Differentialgleichung mit n von einander unabhängigen willkürlichen Constanten, oder auch mit Constanten $n + k$ an der Zahl, und k zwischen denselben Statt findenden Bedingungsgleichungen aufzufinden, so ist diess Integral ein allgemeines, sonst aber nur ein partikuläres, durch den Zusatz einer neuen Funktion von x , die für sich die Eigenschaft haben muss Genüge zu leisten, und die noch fehlenden Constanten enthalten muss, zu vervollständigendes.

Wir wollen in diesem Paragraphe bloss zeigen, wie man sich auf dem hier betretenen Wege partikuläre Integrale verschaffen kann; die Untersuchung aber, ob der aus diesen partikulären Werthen zusammengesetzte Ausdruck ein allgemeines Integral sei und Vollständigkeit, wenn er einer solchen bedürfen sollte, für den nächsten Paragraph aufsparen.

Fasst man das bisher gesagte zusammen, so ergibt sich daraus folgende Integrationsmethode für Gleichungen, deren Coefficienten von der Form $a + b x$ sind: Man bilde zuerst die mit U_0 und U_1 bezeichneten Polynome dadurch, dass man in der Differentialgleichung anstatt der vorkommenden Differentialquotienten von y :

$$\frac{d^n y}{d x^n}, \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}, \dots, \frac{d^2 y}{d x^2}, \frac{d y}{d x}, y,$$

bezüglich die Potenzen

$$U^n, U^{n-1}, \dots, U^2, U^1, 1$$

substituirt, und in dem so geformten Polynome die Summe aller Glieder ohne x mit U_0 , den Multiplikator von x mit U_1 bezeichnet, sodann verschafft man sich das Integral

$$\int \frac{U}{U_1} dU,$$

wobei man offenbar nur mit denjenigen Schwierigkeiten zu kämpfen hat, denen überhaupt die Zerlegung gebrochener Funktionen in Partialbrüche unterliegt; dann wird man für U

eine beliebige Funktion von u , die sich unseren Untersuchungen am besten anzuschmiegen scheint, substituiren, und die Wurzel der Gleichung

$$e^{u x} + \int \frac{U_0}{U_1} d u = A,$$

unter A eine beliebige, von der Nulle verschiedene Grösse, oder auch die Nulle verstanden, aufsuchen. In den meisten Fällen werden wir es mit der Gleichung

$$(25) \quad e^{u x} + \int \frac{U_0}{U_1} d u = 0$$

zu thun haben.

Sind nun diese Wurzeln u_1, u_2, \dots, u_p , so hat man das Integral der Differentialgleichung bereits gefunden, es ist nämlich das in der Formel (23) enthaltene. Es wird jetzt am Gerathensten seyn, an einigen Beispielen die Wirksamkeit dieser Methode zu erproben, weil so am allerbesten erhellen kann, in welchen Fällen sie die nöthige Anzahl partikulärer Integrale wirklich liefert, und somit zum allgemeinen Integrale führt; und in welchen andern Fällen sie sich, wenigstens insofern als sie bisher entwickelt wurde, als unwirksam erweist, und einen zwar der Differentialgleichung genügenden Ausdruck liefert, der aber nicht die nothwendige Anzahl Constanten in sich schliesst, somit einer Vervollständigung bedarf, um zum allgemeinen Integral erhoben zu werden.

Nehmen wir als erstes Beispiel die allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung

$$(26) \quad \frac{d^2 y}{d x^2} (a_2 + b_2 x) + \frac{d y}{d x} (a_1 + b_1 x) + y (a_0 + b_0 x) = 0.$$

Scheiden wir hier zwei Fälle, den wo b_2 gleich Null ist, und den wo dieser Coefficient von der Nulle verschieden ausfällt. Im ersten Falle bekommen wir durch das Verschwinden von b_2 selbst, eine einfachere Form; überdiess lässt sich noch die Gleichung durch a_2 dividiren, und erhält folgende Gestalt:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{d y}{d x} (a_1 + b_1 x) + y (a_0 + b_0 x) = 0,$$

welche ihrerseits noch durch Einführung einer neuen Veränderlichen, mittelst der Substitution $x = x^1 - \frac{a_1}{b_1}$, auf die noch einfachere Form

$$(27) \quad \frac{d^2 y}{d x^2} + b_1 x \frac{d y}{d x} + y (a_0 + b_0 x) = 0,$$

unter der Bedingung jedoch, dass b_1 von der Nulle verschieden ist, zurückgeführt werden kann. Ist aber b_1 nicht Null, so wird man $x - \frac{a_1}{b_1}$ anstatt x setzend, die (26) in die einfachere

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} (a_1 + b_1 x) + y (a_0 + b_0 x) = 0 \quad (28)$$

verwandeln, so dass es sich nunmehr bloss um die Integration der beiden letzteren handelt. Wir wollen die (28) zuerst vornehmen und haben in derselben

$$\begin{aligned} U_0 &= a_1 v + a_0, \\ U_1 &= v^2 + b_1 v + b_0, \\ \int \frac{U_0}{U_1} dv &= \int \frac{a_1 v + a_0}{v^2 + b_1 v + b_0} dv. \end{aligned} \quad (29)$$

Nennen wir, um zu dem Werthe des letzten Integrales zu gelangen, α und β die Wurzeln der Gleichung

$$v^2 + b_1 v + b_0 = 0,$$

so wird sich der Bruch unter dem Integralzeichen in zwei Partialbrüche zerlegen lassen von der Form

$$\frac{A}{v - \alpha} \quad \text{und} \quad \frac{A'}{v - \beta},$$

und es wird

$$\int \frac{U_0}{U_1} dv = A \text{Log} (v - \alpha) + A' \text{Log} (v - \beta) = \text{Log} [(v - \alpha)^A (v - \beta)^{A'}]; \quad (30)$$

und die Stelle der Gleichung (21) vertritt jetzt folgende:

$$(v - \alpha)^A (v - \beta)^{A'} e^{Ux} = 0. \quad (31)$$

Hier können erstens die Exponenten A und A' reel und positiv, oder auch imaginär seyn; so jedoch, dass ihre realen Theile positiv ausfallen. Findet diess Statt, und ist noch überdiess x selbst positiv, so wird man offenbar der Gleichung (31) Genüge leisten durch die Werthe

$$v = \alpha, \quad v = \beta, \quad v = -\infty; \quad (32)$$

ist aber der Werth von x negativ, durch folgende andere:

$$v = \alpha, \quad v = \beta, \quad v = +\infty. \quad (33)$$

Es ist diess keinem Zweifel unterworfen, im Falle A und A' reel und positiv seyn sollten; wenn jedoch α und β zwei korrespondirende imaginäre Wurzeln sind, die sich nur im Zeichen des mit $\sqrt{-1}$ verbundenen Gliedes unterscheiden: so werden auch A und A' eben solche zwei korrespondirende imaginäre Ausdrücke,

$$A = C + D\sqrt{-1}, \quad A' = C - D\sqrt{-1}, \quad (34)$$

und es könnte ein Zweifel erhoben werden ob

$$(v - \alpha)^{C + D\sqrt{-1}}$$

für $U = \alpha$ wirklich gleich Null sei. Man überzeugt sich indess hievon auf leichte Weise im Falle C positiv ist, wenn man bedenkt, dass

$$0^C = 0, \quad 0^{D\sqrt{-1}} = (e^{-\infty})^{D\sqrt{-1}} = e^{-\infty D\sqrt{-1}} = \cos. (\infty D) - \sqrt{-1} \sin. (\infty D),$$

gleich einer endlichen imaginären Grösse sei, deren Modulus die Einheit nicht zu überschreiten vermag. Wir stossen hier gleich auf eine merkwürdige Erscheinung; wir sehen nämlich, dass das Integral der vorgelegten Differentialgleichung ein anderes sei, wenn der, der Variablen x beigelegte Werth positiv ist, und wieder ein anderes, wenn derselbe negativ ausfällt; namentlich haben wir für positive x :

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'} du}{u^2 + b_1 u + b_0} + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'} du}{u^2 + b_1 u + b_0},$$

oder da

$$u^2 + b_1 u + b_0 = (u-\alpha)(u-\beta),$$

$$(35) \quad y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{A'-1} du + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{A'-1} du;$$

für negative Werthe von x aber:

$$(36) \quad y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{A'-1} du + C_2 \int_{\beta}^{\infty} e^{ux} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{A'-1} du.$$

Es ist wichtig hier noch die Bemerkung hinzuzufügen, dass, im Falle α und β imaginär wären, etwa $\alpha = \lambda + \mu \sqrt{-1}$ und somit $\beta = \lambda - \mu \sqrt{-1}$, man auch die Integrationsgrenze ∞ in den Formeln (35) und (36) umsetzen könnte in $\pm \infty (\lambda \pm \mu \sqrt{-1})$, nur wären dann die Zeichen so zu wählen, dass der reele Theil der imaginären Grenze in der Gleichung (35) negativ, in der Gleichung (36) aber positiv ausfällt. Ferner wird man in diesem Falle, die in die letzten Formeln eingehenden Ausdrücke, durch die Kunstgriffe der Umwandlung der Grenzen und der schicklichen Transformation, in ihre reelen und imaginären Bestandtheile zu zerlegen Sorge tragen, um die dem Auge missfälligen, die $\sqrt{-1}$ in sich schliessenden Formen zu vermeiden.

Nehmen wir jetzt einen zweiten möglichen Fall an, den nämlich wo einer der Exponenten A und A' positiv, der andere negativ ist, und setzen wir, um diese Beschaffenheit derselben ins Auge fallen zu lassen, $-A'$ anstatt A' , so erhalten wir anstatt der Gleichung (33) folgende andere:

$$(37) \quad \frac{(u-\alpha)^A}{(u-\beta)^{A'}} e^{ux} = 0,$$

deren Wurzeln für positive x sind:

$$(38) \quad u = \alpha, \quad u = -\infty, \quad u = \pm \infty \sqrt{-1}.$$

Die ersten beiden Werthe von U leisten der (37) immer Genüge; der dritte aber nur dann, wenn $A' > A$ ist. Uebrigens sind hier A und A' , so wie α und β , immer reel, der Natur der Sache nach, weil, wenn sie imaginäre Grössen wären, sie einander korrespondiren müssten, und sich bloss im Zeichen von $\sqrt{-1}$ unterscheiden könnten, man also nicht leicht von einem positiven A und negativen A' sprechen könnte; es sei denn, dass A die Form $B\sqrt{-1}$ und A' die verwandte $-B\sqrt{-1}$ annähme, in welchen

letzteren Falle der dritte der in (38) aufgezeichneten Werthe von U gänzlich wegzufallen hat, gerade so wie derselbe auch wegfällt, wenn $A > A'$ ist; für negative x hingegen bekommt die Gleichung (37) die Wurzeln

$$u = \alpha, \quad u = +\infty, \quad u = \frac{1}{\pm} \infty \sqrt{-1};$$

die letztere derselben in der Voraussetzung, dass $A' > A$ ist. Das Integral der vorgelegten Differentialgleichung erscheint nur abermals in zwei verschiedenen, der positiven und negativen Beschaffenheit der Variablen x entsprechenden Formen, nämlich:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{u x} \frac{(u - \alpha)^{A-1} du}{(u - \beta)^{A'+1}} + C_2 \int_{-\infty \sqrt{-1}}^{+\infty \sqrt{-1}} e^{u x} \frac{(u - \alpha)^{A-1} du}{(u - \beta)^{A'+1}}, \quad (39)$$

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{+\infty} e^{u x} \frac{(u - \alpha)^{A-1} du}{(u - \beta)^{A'+1}} + C_2 \int_{-\infty \sqrt{-1}}^{+\infty \sqrt{-1}} e^{u x} \frac{(u - \alpha)^{A-1} du}{(u - \beta)^{A'+1}}, \quad (40)$$

Die erste dieser Formeln gilt für positive, die zweite für negative Werthe von x . In beiden muss der zweite mit der Constante C_2 verbundene Theil weggelassen werden, wenn entweder $A = A'$ oder $A > A'$ ist, der sodann übrig bleibende, nur mit einer einzigen Constante C_1 verbundene Werth von y , hat den Charakter eines allgemeinen Integrales verloren, und muss durch den Zusatz eines andern partikulären Integrales, welches eine zweite Constante in sich schliesst, vervollständigt werden. Wir verweisen jedoch in Betreff der Methode dieses zu leisten, wie schon gesagt wurde, auf den folgenden Paragraph.

Betrachten wir jetzt den dritten Fall wo A und A' negative oder imaginäre Zahlen sind, deren reele Theile negative Werthe haben. Verwandeln wir, um diess dem Auge ersichtlich zu machen, A und A' , in $-A$ und $-A'$, so dass die Gleichung (31) jetzt in

$$\frac{e^{u x}}{(u - \alpha)^A (u - \beta)^{A'}} = 0 \quad (41)$$

übergeht und erfüllt wird durch einen jeden, für U gesetzten Ausdruck von der Form $u = \infty (M + N \sqrt{-1})$,

unter N eine beliebige positive oder negative, unter M aber eine andere dem numerischen Werthe nach ebenfalls willkürliche, den Zeichen nach aber der Variablen x entgegengesetzte Zahl verstanden, die, wenn man will, auch gleich Null seyn kann, so dass es gestattet ist für U folgende zwei Werthe anzunehmen:

$$u = \infty \sqrt{-1}, \quad u = -\infty \sqrt{-1}.$$

Hieraus folgt der Werth von y :

$$y = C_1 \int_{-\infty \sqrt{-1}}^{+\infty \sqrt{-1}} \frac{e^{u x} du}{(u - \alpha)^{A+1} (u - \beta)^{A'+1}}, \quad (42)$$

mit einer einzigen Constante C_1 , der also abermals ein unvollständiges, partikuläres Integral ist, auf welches wir im folgenden Paragraphe zurückkommen werden.

Ein vierter Fall ist, wo einer der beiden Exponenten A und A' der Nulle gleich wird. In diesem Falle geht die Gleichung (31) über in

$$(43) \quad (u - \alpha)^A e^{ux} = 0$$

und kann nunmehr durch die Werthe

$$u = \alpha, \quad u = -\infty$$

erfüllt werden, wenn A und x positiv sind, ist aber A positiv und x negativ, durch die anderen:

$$u = \alpha, \quad u = +\infty;$$

für negative Werthe von A aber durch

$$u = \pm \infty \sqrt{-1}.$$

In allen diesen Fällen erhalten wir aber nur ein einziges partikuläres Integral das nur mit einer Constante verknüpft ist. Zugleich kann hier bemerkt werden, dass das Verschwinden der dritten Wurzel der Gleichung (31), die wir hier gebraucht hätten, um zum vollständigen Integral zu gelangen, dadurch veranlasst werde, dass in dem Bruche

$$(44) \quad \frac{U_0}{U_1} = \frac{a_1 u + a_0}{u^2 + b_1 u + b_0},$$

Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Faktor $u - \beta$ bekommen.

Endlich ist noch der Fall zu betrachten, wo die beiden Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + b_1 u + b_0 = 0$$

einander gleich sind. Der Bruch (44) wird dann in zwei Parzialbrüche zerlegt von der Form:

$$\frac{A}{(u - \alpha)^2} \quad \text{und} \quad \frac{A'}{u - \alpha}.$$

Es wird ferner

$$(45) \quad \int \frac{U_0}{U_1} du = \int \frac{A du}{(u - \alpha)^2} + \int \frac{A' du}{u - \alpha} = \frac{-A}{u - \alpha} + A' \text{Log}(u - \alpha),$$

und wir erhalten statt der Gleichung (31), folgende:

$$(46) \quad (u - \alpha)^{A'} e^{ux} - \frac{A}{u - \alpha} = 0;$$

und dieser wird für verschiedene Werthe von A , A' , α und x auf verschiedene Weise Genüge geleistet. So haben wir, wenn alle diese Grössen bis auf x positiv wären,

$$u = \alpha + \epsilon, \quad u = \infty,$$

unter ϵ eine verschwindende Grösse von positivem Werth verstanden. Diess führt abermals zu einem Integral mit einer einzigen willkürlichen Constante, nämlich

$$(47) \quad y = C, \int_{\alpha + \epsilon}^{+\infty} e^{ux} + \frac{A}{u - \alpha} (u - \alpha)^{A' - 2} du,$$

und wir sehen, dass in sehr vielen Fällen das Integral, zu welchem wir durch diese

Methode gelangen, ein unvollständiges sei. Die Ursache hiervon ist, weil die Differentialgleichung in solchen Fällen partikuläre Werthe zulässt die nicht unter die ihnen vorausgesetzte Form eines bestimmten Integrales fallen, sondern entweder die Form einer reinen oder, mit einer allgebrischen Funktion von x multiplizirten Exponentielle haben, wie demnächst gezeigt werden soll.

Ein spezielleres Beispiel bietet die, in vielen Disquisitionen der mathematischen Physik wiederkehrende, der Form nach hieher gehörige Gleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} \pm b^2 x y = 0, \quad (48)$$

die wir deshalb zu integriren nicht unterlassen wollen.

Wir haben in derselben

$$\begin{aligned} U_0 &= a v, \\ U_1 &= v^2 \pm b^2, \\ \int \frac{U_0}{U_1} dv &= a \int \frac{v dv}{v^2 \pm b^2} = \frac{1}{2} a \text{Log}(v^2 \pm b^2); \end{aligned}$$

die Wurzeln der Gleichung aber

$$e^{U_0} + \int \frac{U_0}{U_1} dv = (v^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2} a} e^{U_0} = 0, \quad (49)$$

sind entweder

$$v = b, \quad v = -b, \quad v = -\infty, \quad (50)$$

wenn x positiv ist, und man von den beiden Zeichen \pm das untere wählt, oder

$$v = b, \quad v = -b, \quad v = \infty, \quad (51)$$

für negative x .

Nimmt man im Gegentheile von den beiden Zeichen \pm das obere an, so erhält man für positive x :

$$v = +b\sqrt{-1}, \quad v = -b\sqrt{-1}, \quad v = -\infty, \quad (52)$$

für negative x :

$$v = +b\sqrt{-1}, \quad v = -b\sqrt{-1}, \quad v = \infty. \quad (53)$$

Es besitzt somit die Gleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} - b^2 x y = 0$$

ein allgemeines mit zwei Constanten versehenes Integral das für positive x gegeben wird durch die Formel:

$$y = C_1 \int_{-b}^{+b} (u^2 - b^2)^{\frac{1}{2} a - 1} e^{Ux} du + C_2 \int_{-\infty}^{-b} (u^2 - b^2)^{\frac{1}{2} a - 1} e^{Ux} du, \quad (54)$$

für negative Werthe von x aber durch folgende andere:

$$(55) \quad y = C_1 \int_{-b}^{+b} (v^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv + C_2 \int_b^{\infty} (v^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv;$$

auch sieht man ohne Schwierigkeit ein, dass diese beide Formeln sich in eine einzige, für positive und negative x gültige, zusammenziehen lassen, nämlich:

$$(56) \quad y = C_1 \int_{-b}^{+b} (v^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{v\sqrt{x^2}} dv + C_2 \int_b^{\infty} (v^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{v\sqrt{x^2}} dv.$$

Hingegen entspricht der Gleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + b^2 x y = 0,$$

für positive x , folgendes Integral:

$$(57) \quad y = C_1 \int_0^{b\sqrt{-1}} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv + C_2 \int_0^{-b\sqrt{-1}} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv + \dots \\ + C_3 \int_0^{-\infty} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv,$$

für negative x folgendes andere:

$$(58) \quad y = C_1 \int_0^{b\sqrt{-1}} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv + C_2 \int_0^{-b\sqrt{-1}} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv + \dots \\ + C_3 \int_0^{+\infty} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv,$$

während die Constanten der Bedingungsgleichung

$$(59) \quad C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

unterworfen sind.

Das bestimmte Integral

$$\int_0^{b\sqrt{-1}} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv$$

wird, wenn man $U \sqrt{-1}$ anstatt U einführt, umgewandelt in

$$- \int_0^b (v^2 - b^2)^{\frac{1}{2}a-1} e^{v\sqrt{-1}} dv \sqrt{-1};$$

eben so verwandelt sich

$$\int_0^{-b\sqrt{-1}} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{vx} dv,$$

durch Einführung von $-U \sqrt{-1}$ anstatt U , in

$$+ \int_0^b (v^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{-v x \sqrt{-1}} d v \sqrt{-1},$$

und die Summe

$$C_1 \int_0^{b \sqrt{-1}} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{v x} d v + C_2 \int_0^{-b \sqrt{-1}} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{v x} d v,$$

wenn man

$$C_1 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2 \sqrt{-1}), \quad C = \frac{1}{2}(B_2 - B_2 \sqrt{-1})$$

setzt, geht über in

$$B_1 \int_0^b (v^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} \sin. v x d v + B_2 \int_0^b (v^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} \cos. v x d v;$$

daher sich denn die Formeln (57) und (58) auch so schreiben lassen :

$$y = \int_0^b (v^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} [B_1 \sin. v x + B_2 \cos. v x] d v + C_3 \int_0^{-\infty} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{v x} d v, \quad (60)$$

$$y = \int_0^b (v^2 - b^2)^{\frac{a}{2}-1} [B_1 \sin. v x + B_2 \cos. v x] d v + C_3 \int_0^{\infty} (v^2 + b^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{v x} d v. \quad (61)$$

Von diesen gilt die erste für positive, die zweite für negative x . Die Constanten B_1 und C_3 sind durch die Bedingungsgleichung

$$B_1 + C_3 = 0$$

aneinander geknüpft; B_2 ist ganz willkürlich.

Die Gleichung (48) wird also nach unserer Methode stets vollständig integrirt, wenigstens so lange der Coefficient a nicht 0 und nicht negativ ist, und selbst in dem letztgenannten Falle wissen wir uns das allgemeine Integral, welches dann unter einer andern Form vorkommt als die vorausgesetzte, ohne bedeutende Schwierigkeit zu verschaffen.

Um so viel als möglich alle die verschiedenen Fälle zu erschöpfen, und alle Schwierigkeiten kennen zu lernen, die der Anwendung unserer Integrationsmethode sich in den Weg stellen können, wollen wir die bisher noch ausser Acht gelassene Gleichung (27)

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + b_1 x \frac{d y}{d x} + y (a_0 + b_0 x) = 0$$

einer ähnlichen Untersuchung unterwerfen. Wir haben in derselben

$$U_0 = v^2 + a_0,$$

$$U_1 = b_1 v + b_0,$$

$$\int \frac{U_0}{U_1} d v = \int \frac{v^2 + a_0}{b_1 v + b_0} d v = \frac{v^2}{2 b_1} - \frac{b_0 v}{b_1^2} + \left(\frac{a_0}{b_1} + \frac{b_0^2}{b_1^3} \right) \text{Log} (b_1 v + b_0), \quad (62)$$

und die Gleichung

$$e^{ux} + \int \frac{U}{U_1} dv = 0$$

geht, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{a}{b_1} + \frac{b^2}{b_1^3} = A$$

setzen, über in

$$(63) \quad (b_1 u + b_0)^A e^{ux + \frac{u^2}{2b} - \frac{b_0 u}{b_1^2}} = 0.$$

Ist A positiv, so sind die Wurzeln dieser Gleichung für positive b_1 :

$$u = -\frac{b_0}{b_1}, \quad u = \pm \infty \sqrt{-1}$$

und

$$u = -\frac{b_0}{b_1}, \quad u = \pm \infty$$

für negative b_1 , und das zwar ob x positiv oder negativ ist.

Wir erhalten somit ein allgemeines Integral das für positive b_1 folgende Gestalt hat:

$$(64) \quad \begin{aligned} y = & C_1 \int_0^{-\frac{b_0}{b_1}} (b_1 u + b_0)^{A-1} e^{u \left(x - \frac{b_0}{b_1^2} \right) + \frac{u^2}{2b_1}} du + \\ & + C_2 \int_0^{\infty \sqrt{-1}} (b_1 u + b_0)^{A-1} e^{u \left(x - \frac{b_0}{b_1^2} \right) + \frac{u^2}{2b_1}} du + \\ & + C_3 \int_0^{-\infty \sqrt{-1}} (b_1 u + b_0)^{A-1} e^{u \left(x - \frac{b_0}{b_1^2} \right) + \frac{u^2}{2b_1}} du. \end{aligned}$$

Zwischen den Constanten C_1, C_2, C_3 findet die Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

Statt. Die letzten zwei in der Formel (64) vorkommenden bestimmten Integrale, wandeln wir, durch Einführung von $U\sqrt{-1}$ und $-U\sqrt{-1}$ anstatt U um, und bemerken zu dem, dass in Folge der zwei identischen Gleichungen:

$$(65) \quad \begin{aligned} (b_0 \pm b_1 u \sqrt{-1})^{A-1} = \\ = (b_0^2 + b_1^2 u^2)^{\frac{A-1}{2}} \left[\cos \left((A-1) \operatorname{arc. tg.} \frac{b_1 u}{b_0} \right) \pm \sqrt{-1} \sin \left((A-1) \operatorname{arc. tg.} \frac{b_1 u}{b_0} \right) \right], \end{aligned}$$

$$(66) \quad e^{\pm u \sqrt{-1} \left(x - \frac{b_0}{b_1^2} \right)} = \cos. u \left(x - \frac{b_0}{b_1^2} \right) \pm \sqrt{-1} \sin. u \left(x - \frac{b_0}{b_1^2} \right)$$

und der noch überdiess willkürlich hinzugefügten:

$$2 C_1 = B_1 - B_2 \sqrt{-1}, \quad 2 C_3 = B_1 + B_2 \sqrt{-1},$$

die Formel (64) auch so geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
 y = & C_1 \int_0^{-\frac{b_0}{b_1}} (b_0 + b_1 u)^{A-1} e^{\frac{u^2}{2b_1} + u \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)} du + \\
 & + B_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2b_1}} (b_0^2 + b_1^2 u^2)^{\frac{A-1}{2}} \cos \left(u \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)\right) + \left((A-1) \operatorname{arc. tg.} \frac{b_1 u}{b_0}\right) du + \\
 & + B_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2b_1}} (b_0^2 + b_1^2 u^2)^{\frac{A-1}{2}} \sin \left(u \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)\right) + \left((A-1) \operatorname{arc. tg.} \frac{b_1 u}{b_0}\right) du.
 \end{aligned} \tag{67}$$

Die Constanten B_1 und C_1 müssen so gewählt werden, dass $B_1 + C_1 = 0$ wird; B_2 ist willkürlich.

Für den Fall, dass B_1 negativ ist, hat an die Stelle der Formel (64) oder (67) folgende andere zu treten:

$$\begin{aligned}
 y = & C_1 \int_{-\infty}^{\frac{b_0}{b_1}} (b_0 - b_1 u)^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)} du + \\
 & + C_2 \int_{\frac{b_0}{b_1}}^{+\infty} (b_0 - b_1 u)^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)} du.
 \end{aligned} \tag{68}$$

Wir haben hier b_1 in $-b_1$ umgesetzt, um die negative Beschaffenheit dieses Coefficienten dem Auge ersichtlich zu machen.

Die Formeln (67) und (68) setzen beide ein positives A voraus, und gelten nicht mehr, wenn dieser Exponent 0 wird oder negativ. Ersteres tritt ein, wenn Zähler und Nenner des Bruches $\frac{U}{U_1}$ einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, ein Fall, der das nach unserer Methode gefundene Integral immer unvollständig macht. Wir haben in der That, für verschwindende und negative A anstatt dreier, nur mehr zwei der Gleichung (63) genügende Werthe, nämlich: $U = \pm \infty \sqrt{-1}$, für positive b_1 , und $U = \pm$ für negative Werthe dieses Coefficienten, und somit für positive b_1 folgendes partikuläre Integral:

$$y = C_1 \int_{-\infty \sqrt{-1}}^{+\infty \sqrt{-1}} e^{\frac{u^2}{2b_1} + u \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)} \frac{du}{(b_1 + b_1 u)^{A+1}}, \tag{69}$$

für negative b_1 hingegen:

$$(70) \quad y = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{U^2}{2b_1} + U \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)} \frac{dU}{(b_0 + b_1 U)^{A+1}}.$$

Wir haben in der ersten dieser beiden Gleichungen — A anstatt A , in der zweiten aber — A und — b_1 anstatt A und b_1 gesetzt, um die negative Beschaffenheit dieser Grössen auffallend zu machen.

Wir werden im folgenden Paragraphe auf diese Formeln zurückkommen, und sehen, wie die hier gewonnenen unvollständigen Integrale sich vervollständigen lassen, wo wir auch die Ueberzeugung gewinnen werden, dass die anscheinende Unzulänglichkeit unserer Methode weit entfernt eine Unvollkommenheit zu seyn, sich vielmehr in einen Vortheil umgestaltet, so wie sich überhaupt in sehr vielen Zweigen der mathematischen Analysis die Bemerkung machen lässt, dass eine überwundene Schwierigkeit, nebst dem, durch Ueberwindung derselben errungenen Vortheil auch noch meistens den anderen darbiete, neue Wege zu eröffnen, und oft neue Entdeckungen zu veranlassen.

Kommt endlich der bisher noch nicht betrachtete spezielle Fall vor, wo $b_1 = 0$ ist, dann wird das Integral:

$$\int \frac{U^0}{U_1} dU$$

nicht mehr den durch die Formel (62) dargestellten Werth besitzen, sondern folgenden anderen:

$$(71) \quad \int \frac{U^0}{U_1} dU = \int \frac{U^2 + a_0}{b_0} dU = \frac{U^3}{3b_0} + \frac{a_0}{b_0} U.$$

An die Stelle der Gleichung (63) aber tritt

$$(72) \quad e^{Ux + \frac{U^3}{3b_0} + \frac{a_0}{b_0} U} = 0;$$

dieser wird durch alle jene Werthe von U Genüge geleistet, die die Gleichung:

$$\frac{U^3}{b_0} = -\infty$$

erfüllen; die Wurzeln aber dieser letzteren sind für positive b_0 :

$$U = -\infty, U = \infty (-1 + \sqrt{-3}) \text{ und } U = \infty (-1 - \sqrt{-3}).$$

Es kommt also das Integral der Gleichung:

$$(73) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} + y(a_0 + b_0 x) = 0,$$

in folgender Form vor:

$$y = C_1 \int_0^{-\infty} e^{u \left(x + \frac{a_0}{b_0} \right) + \frac{u^3}{3b_0}} du + C_2 \int_0^{\infty (-1 + \sqrt{-3})} e^{u \left(x + \frac{a_0}{b_0} \right) + \frac{u^3}{3b_0}} du +$$

$$+ C_3 \int_0^{\infty (-1 - \sqrt{-3})} e^{u \left(x + \frac{a_0}{b_0} \right) + \frac{u^3}{3b_0}} du, \quad (74)$$

in der die Constanten C_1, C_2, C_3 der Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

unterworfen gedacht werden.

Von den drei bestimmten Integralen, die den zweiten Theil der Gleichung (74) bilden, formen wir das erste durch Substitution von $-U$ anstatt U_1 , das zweite durch Setzen von $U(-1 + \sqrt{-3})$ anstatt U , das dritte durch Setzen von $U(-1 - \sqrt{-3})$ anstatt U_1 um, und bezeichnen der Kürze wegen die beiden imaginären Binome $-1 + \sqrt{-3}$ und $-1 - \sqrt{-3}$ durch r_1 und r_2 , und erhalten anstatt (74):

$$y = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^3}{3b_0}} du \left[-C_1 e^{-u \left(x + \frac{a_0}{b_0} \right)} + C_2 r_1 e^{r_1 u \left(x + \frac{a_0}{b_0} \right)} + C_3 r_2 e^{r_2 u \left(x + \frac{a_0}{b_0} \right)} \right]. \quad (75)$$

Ist b_0 negativ, und handelt es sich also um die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y (a_0 - b_0 x) = 0, \quad (76)$$

so erhält man genau auf dieselbe Weise:

$$y = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^3}{3b_0}} du \left[C_1 e^{u \left(x - \frac{a_0}{b_0} \right)} + C_2 r_1 e^{r_1 u \left(x - \frac{a_0}{b_0} \right)} + C_3 r_2 e^{r_2 u \left(x - \frac{a_0}{b_0} \right)} \right], \quad (77)$$

es ist abermals

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

nur r_1 und r_2 bekommen eine etwas andere Bedeutung; sie gehen nämlich über in die zwei imaginären Wurzeln der Gleichung:

$$v^3 = 1.$$

Hiermit wären denn alle die Fälle erörtert, die bei der Integration einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung von der betrachteten Form vorkommen mögen, und es ist uns meistentheils gelungen, ein allgemeines Integral mit zwei Constanten aufzufinden; wo wir aber ein solches nicht fanden, bekamen wir wenigstens ein partikuläres mit einer einzigen Constante. Bevor wir nun zeigen, wie das letztere zu kompletiren sei, wird es gut seyn, noch einige Beispiele der Integration solcher Gleichungen anzuführen, die die zweite Ordnung überschreiten. Es sei also gegeben die Differentialgleichung des n^{ten} Grades:

$$(78) \quad \frac{d^n y}{d x^n} + a x y = 0,$$

so ist hier

$$(79) \quad \begin{aligned} U_0 &= v^n, \quad U_1 = a, \\ \int \frac{U_0}{U_1} d v &= \frac{1}{a} \int v^n d v = \frac{v^{n+1}}{a(n+1)}, \\ e^{U x} + \int \frac{U_0}{U_1} d v &= e^{U x} + \frac{v^{n+1}}{a(n+1)} = 0. \end{aligned}$$

Dieser letzten Gleichung genügen alle Werthe von U_1 , die der Gleichung

$$(80) \quad v^{n+1} = -\infty$$

Genüge leisten; vorausgesetzt, dass a positiv ist.

Nennt man aber die Wurzeln der Gleichung

$$v^{n+1} = -1,$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_{n+1}$, so sind die Wurzeln der (80)

$$\mu_1 \infty, \mu_2 \infty, \mu_3 \infty \dots \mu_{n+1} \infty;$$

woraus schon das allgemeine Integral von (78) folgt, nämlich:

$$(81) \quad \begin{aligned} y &= C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{U x + \frac{v^{n+1}}{a(n+1)}} d v + C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{U x + \frac{v^{n+1}}{a(n+1)}} d v + C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{U x + \frac{v^{n+1}}{a(n+1)}} d v + \dots \\ &+ C_{n+1} \int_0^{\mu_{n+1} \infty} e^{U x + \frac{v^{n+1}}{a(n+1)}} d v, \end{aligned}$$

während zwischen den Constanten die Bedingungsgleichung besteht:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_{n+1} = 0.$$

Die $n+1$ bestimmten Integrale in der Formel (81) lassen sich in ein einziges zusammenziehen, wenn man in ihnen, der Reihe nach $\mu_1 U, \mu_2 U \dots \mu_{n+1} U$ anstatt U einführt, und zugleich $\mu_1 C_1, \mu_2 C_2 \dots \mu_{n+1} C_{n+1}$ durch die willkürlichen Constanten $B_1, B_2 \dots B_{n+1}$ ersetzt, wie folgt:

$$(82) \quad y = \int_0^\infty e^{-\frac{v^{n+1}}{a(n+1)}} d v [B_1 e^{\mu_1 U x} + B_2 e^{\mu_2 U x} + B_3 e^{\mu_3 U x} + \dots + B_{n+1} e^{\mu_{n+1} U x}].$$

Die zwischen den Constanten B Statt findende Beziehung ist jetzt folgende:

$$\frac{B_1}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2} + \frac{B_3}{\mu_3} + \dots + \frac{B_{n+1}}{\mu_{n+1}} = 0.$$

Die Formel (82) gilt auch für negative Werthe von a ; d. h. sie gibt auch das Integral der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} - a x y = 0,$$

nur sind, im Falle a negativ ist, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_{n+1}$ nicht die Wurzeln der Gleichung:

$$v^{n+1} = -1,$$

sondern vielmehr die der andern:

$$v^{n+1} = 1.$$

Wählen wir jetzt als zweites Beispiel folgende Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + (a_0 + b_0 x) y = 0, \quad (83)$$

in welcher die eben betrachtete (78) als ein spezieller Fall enthalten ist, so bekommen wir:

$$U_0 = v^n + a_{n-1} v^{n-1} + a_{n-2} v^{n-2} + \dots + a_0,$$

$$U_1 = b_0,$$

$$\int \frac{U_0}{U_1} dv = \frac{1}{b_0} \left[\frac{v^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} v^n}{n} + \frac{a_{n-2} v^{n-1}}{n-1} + \dots + a_0 v \right],$$

und anstatt der Gleichung

$$e^{v x} + \int \frac{U_0}{U_1} dv = 0,$$

die folgende:

$$e^{v x} + \frac{1}{b_0} \left[\frac{v^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} v^n}{n} + \frac{a_{n-2} v^{n-1}}{n-1} + \dots + a_0 v \right] = 0; \quad (84)$$

dieser aber wird Genüge geleistet durch alle jene Werthe von U , für welche

$$\frac{v^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{v^n}{n} + a_{n-2} \frac{v^{n-1}}{n-1} + \dots + a_0 v = \mp \infty \quad (85)$$

ist, von der im zweiten Theile enthaltenen unendlichen Grösse das obere oder untere Zeichen genommen, je nachdem b_0 positiv ist oder negativ. Diese Werthe von U können nur unendlich seyn, es wird also das Gleichungspolynom in (85), mit seinem ersten Gliede zugleich unendlich, und zugleich positiv oder negativ. Hieraus folgt, dass man dieser Gleichung die einfachere:

$$v^{n+1} = \mp \infty \quad (86)$$

wird substituieren können. Setzen wir um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben b_0 positiv, und nennen wir die Wurzeln der dieser Annahme entsprechenden Gleichung, die die (86), genommen mit den obern der beiden Zeichen ist:

$$\mu_1 \infty, \mu_2 \infty, \mu_3 \infty \dots \mu_{n+1} \infty,$$

so ist das gesuchte allgemeine Integral unserer Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
 (87) \quad y &= C_1 \int_0^{\mu_1 \infty} e^{Ux + \frac{1}{b_0} \left[\frac{U^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{U^n}{n} + \dots + a_0 U \right]} dU + \\
 &+ C_2 \int_0^{\mu_2 \infty} e^{Ux + \frac{1}{b_0} \left[\frac{U^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{U^n}{n} + \dots + a_0 U \right]} dU + \\
 &+ C_3 \int_0^{\mu_3 \infty} e^{Ux + \frac{1}{b_0} \left[\frac{U^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{U^n}{n} + \dots + a_0 U \right]} dU + \dots \\
 &+ C_{n+1} \int_0^{\mu_{n+1} \infty} e^{Ux + \frac{1}{b_0} \left[\frac{U^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{U^n}{n} + \dots + a_0 U \right]} dU.
 \end{aligned}$$

Die Constanten der Integration: C_1, C_2, \dots, C_{n+1} sind an die Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_{n+1} = 0$$

gebunden. Die $n+1$ bestimmten Integrale, die in der Formel enthalten sind, lassen sich in ein einziges zusammenziehen, indem dieselbe zunächst auch so geschrieben werden kann:

$$(88) \quad y = \sum_1^{n+1} \left[C_x \int_0^{\mu_x \infty} e^{Ux + \frac{1}{b_0} \left[\frac{U^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{U^n}{n} + \dots + a_0 U \right]} dU \right].$$

Das Summenzeichen auf die Zahl α bezogen. Nun setzen wir $\mu_x U$ anstatt U , und formen den letzten Ausdruck so um, in:

$$(89) \quad y = \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{U^{n+1}}{b_0(n+1)}} dU \sum_1^{n+1} \left[\mu_x C_x e^{\mu_x Ux + \frac{1}{b_0} \left[a_{n-1} \frac{\mu_x^n U^n}{n} + \dots + a_0 \mu_x U \right]} \right] \right\}.$$

Dieselbe Formel gilt auch für negative b_0 , und bietet somit das Integral der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + (a_0 - b_0 x) y = 0,$$

wenn man nur unter $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$ nicht mehr die Wurzeln der Gleichung $U^{n+1} = -1$, sondern vielmehr die der andern: $U^{n+1} = 1$ versteht.

Wählen wir zuletzt als Beispiel noch eine Gleichung der n^{ten} Ordnung, bei welcher unsere Methode die mindeste Wirksamkeit besitzt, weil wir mittelst derselben nur ein partikuläres Integral, mit 2 oder 3 Constanten weniger als nöthig ist, und als die Ordnungszahl der Gleichung Einheiten in sich erhält, erhalten; nämlich:

$$(90) \quad y \frac{d^n y}{dx^n} \pm a^2 y = 0.$$

Es ist hier

$$U_0 = \pm a^2, \quad U_1 = U^n, \quad \int \frac{U^n}{U_1} dU = \pm a^2 \int \frac{dU}{U^n} = \mp \frac{a^2}{(n-1) U^{n-1}},$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Grenzen :

$$e^{Ux + \frac{a^2}{(n-1)U^{n-1}}} = 0,$$

welche letztere, wenn $U = \frac{1}{v}$ gesetzt wird, übergeht in :

$$e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} = 0. \tag{91}$$

Betrachten wir hier zuerst den Fall, wo x positiv ist, und von den beiden Zeichen \mp das untere gilt. Die Wurzeln der letzten Gleichung sind dann alle diejenigen Werthe von v , die eine der beiden folgenden Gleichungen erfüllen :

$$v = -\varepsilon, \quad v^{n-1} = -\infty,$$

unter ε eine ins Unendliche abnehmende, entweder reele positive oder solche imaginäre Zahl verstanden, deren reeler Theil positiv ist. Bezeichnen wir jetzt die Wurzeln der Gleichung $v^{n-1} = -1$, mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_{n-1}$, so sind die der Gleichung $v^{n-1} = -\infty$:

$$\mu_1 \infty, \mu_2 \infty, \mu_3 \infty \dots \mu_{n-1} \infty.$$

Unter ihnen wird es reele negative oder solche imaginäre geben, deren reeler Theil negativ ist, und andere reele positive oder solche imaginäre, deren reeler Theil positiv ist; man sondere sie von einander, so dass man zwei Abtheilungen von Wurzeln bekommt, und wir wollen voraussetzen, dass $\mu_1 \infty, \mu_2 \infty \dots \mu_r \infty$, die der ersten Abtheilung $\mu_{r+1} \infty, \mu_{r+2} \infty \dots \mu_{n-1} \infty$, die der zweiten Abtheilung angehörnden seyen, den speciellen Fall einstweilen ausser Acht gelassen, wo unter den besprochenen Wurzeln ein Paar rein imaginäre: $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ vorkommen.

Es bieten sich uns unter diesen Voraussetzungen vor der Hand r partikuläre Integrale an, die je mit einer willkürlichen Constante multipliziert und addirt für y folgenden Ausdruck liefern, der, wie schon gesagt, bloss für positive x gültig ist:

$$y = C_1 \int_{\mu_1 \varepsilon}^{\mu_1 \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv + C_2 \int_{\mu_2 \varepsilon}^{\mu_2 \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv + \dots + C_r \int_{\mu_r \varepsilon}^{\mu_r \infty} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv, \tag{92}$$

und dessen einzelne Theile durch bezügliche Veränderung der Variablen v in $\mu_1 v, \mu_2 v \dots \mu_r v$ verwandelt werden können, so dass man erhält:

$$y = - \int_0^\infty e^{-\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv \left(C_1 e^{\frac{x}{\mu_1 v}} + C_2 e^{\frac{x}{\mu_2 v}} + \dots + C_r e^{\frac{x}{\mu_r v}} \right). \tag{93}$$

Dieses innerhalb der Grenzen 0 und ∞ genommene Integral muss hier als die Grenze angesehen werden, dem sich das innerhalb der Grenzen ε und ∞ genommene fortwährend nähert, bei dem Konvergiren von ε gegen die Null.

An die Stelle dieser Formel hat, wenn x nicht positiv, sondern negativ wäre, offenbar folgende andere zu treten:

$$(94) \quad y = C_{r+1} \int_{\mu_{r+1}}^{\mu_{r+1}^{\infty}} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv + C_{r+2} \int_{\mu_{r+2}}^{\mu_{r+2}^{\infty}} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv + \dots \\ + C_{n-1} \int_{\mu_{n-1}}^{\mu_{n-1}^{\infty}} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv,$$

oder, nach vorhergegangener ähnlicher Reduktion, wie die eben angewendete:

$$(95) \quad y = - \int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv \left(C_{r+1} e^{\frac{x}{\mu_{r+1} v}} + C_{r+2} e^{\frac{x}{\mu_{r+2} v}} + \dots + C_{n-1} e^{\frac{x}{\mu_{n-1} v}} \right).$$

Wir haben bisher nur von einem Theil der Wurzel der Gleichung $v^{n-1} = -1$ Gebrauch zu machen vermocht; die übrigen bieten bei ihrer Erscheinung als Grenzen der Integration entweder den Nachtheil, dass die Funktion unter dem Integralzeichen und innerhalb der Grenzen durch Unendlich durchgeht, das Integral also selbst in eine Form übergeht, die etwas analoges mit einer divergirenden Reihe hat, oder es werden gar beide Grenzen unendlich, und das bestimmte Integral der Nulle gleich.

Gleiches widerfährt uns in dem zweiten bisher noch nicht betrachteten Falle, wo von den beiden Zeichen \mp in (91) das obere zu gelten hat, d. h. wo

$$x \frac{d^n y}{dx^n} + a^2 y = 0,$$

die zu integrierende Gleichung ist. Sind nämlich $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ und $\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \dots, \mu_{n-1}$, die Wurzeln der Gleichung $v^{n-1} = 1$ bereits in zwei Abtheilungen zerlegt, deren erste diejenigen begreift, die reelle negative, die zweite diejenigen, die reelle positiven Bestandtheile besitzen, so haben wir für positive x eine Formel für y , die der Form nach mit der (93), und für negative x eine andere zu erwarten, die wieder der Form nach mit der (95) übereinstimmt.

Kommen endlich unter den mit μ bezeichneten Wurzeln die rein imaginären: $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ vor, so entspricht ihnen ein einziges partikuläres Integral von der Form:

$$y = C \int_{-\infty \sqrt{-1}}^{+\infty \sqrt{-1}} e^{\frac{x}{v} + \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv,$$

die man durch Umwandlung von v in $v \sqrt{-1}$ einsetzen kann, in:

$$y = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x \sqrt{-1}}{v} - \frac{a^2 v^{n-1}}{n-1}} v^{n-2} dv;$$

und dieses partikuläre Integral ist dann zu den übrigen in die Formeln (93) und (95) eingehenden, noch hinzu zu fügen.

Gehen wir von dem behandelten allgemeinen, zu dem spezielleren Beispiel der Gleichung der dritten Ordnung über:

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} - y = 0, \quad (96)$$

so erhalten wir an die Stelle der (91)

$$e^{\frac{x}{v}} + \frac{1}{2} v^2 = 0, \quad (97)$$

und somit $v = \pm \infty \sqrt{-1}$; diess gibt ein partikuläres Integral mit einer einzigen Constante:

$$y = C \int_{-\infty \sqrt{-1}}^{+\infty \sqrt{-1}} e^{\frac{x}{v}} + \frac{1}{2} v^2 v \, dv,$$

oder durch Umänderung von v in $v \sqrt{-1}$:

$$y = -C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x \sqrt{-1}}{v} - \frac{1}{2} v^2} v \, dv,$$

da hier $e^{-\frac{x \sqrt{-1}}{v}} = \cos. \frac{x}{v} - \sqrt{-1} \sin. \frac{x}{v}$ ist, so lässt sich dieses Integral in zwei zerlegen, von welchen das erste, mit dem $\cos. \frac{x}{v}$ verknüpfte identisch Null, das andere aber aus zwei gleichen Theilen zusammengesetzt ist, dem zwischen den Grenzen $-\infty$ und Null und dem zwischen Null und ∞ genommenen, so dass der Werth von y auch so wiedergegeben werden kann:

$$y = B \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} v^2} \sin. \frac{x}{v} v \, dv. \quad (98)$$

Hätten wir aber anstatt (96) folgende andere Gleichung der dritten Ordnung:

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + y = 0, \quad (99)$$

zu integriren, so bekämen wir:

$$e^{\frac{x}{v}} - \frac{1}{2} v^2 = 0,$$

somit $v = \pm \infty$, und somit entweder:

$$y = C \int_0^{-\infty} e^{\frac{x}{v}} - \frac{1}{2} v^2 v \, dv,$$

oder:

$$y = C \int_0^{+\infty} e^{\frac{x}{v}} - \frac{1}{2} v^2 v \, dv,$$

je nachdem x positiv ist oder negativ, so dass man allgemein für beliebige x schreiben könnte:

$$y = C \int_0^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{x^2}}{v} - \frac{1}{2} v^2} v \, dv. \quad (100)$$

In jedem Falle haben wir von einer Gleichung der dritten Ordnung auf dem hier betretenen Wege nur ein partikuläres Integral mit einer einzigen Constante gewonnen, welches noch durch einen Zusatz zu vervollständigen seyn wird, der zwei willkürliche Constanten enthalten muss.

Noch ungünstiger ist das Resultat, dem wir bei folgender Gleichung der fünften Ordnung begegnen:

$$(101) \quad x \frac{d^5 y}{d y^5} + y = 0.$$

Hier wird zuvörderst

$$\frac{x}{e^v} - \frac{1}{4} v^4 = 0,$$

und somit $v = \pm \infty$ oder $v = \pm \infty \sqrt{-1}$, also für positive oder negative x :

$$(102) \quad y = C_1 \int_0^{-\infty \sqrt{x^2}} e^{\frac{x}{v}} - \frac{1}{4} v^4 v^3 dv + C_2 \int_{-\infty \sqrt{-1}}^{+\infty \sqrt{-1}} e^{\frac{x}{v}} - \frac{1}{4} v^4 v^3 dv,$$

also nur ein Integral mit zwei Constanten, das einer Vervollständigung bedürftig ist, die drei andere in sich begreifen muss.

§. 2.

Betrachtung derjenigen Fälle, in welchen die vorgetragene Integrationsmethode nur unvollständige Integrale liefert, und Vervollständigung derselben.

Der Weg, den wir zur Integration von solchen Differentialgleichungen eingeschlagen haben, deren Coefficienten lineare Functionen der unabhängigen Variablen sind, ist im Wesentlichen folgender: Wir setzen das gesuchte Integral voraus unter der Form:

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{u x} v du,$$

und erhalten nach gehöriger Rechnung:

$$(1) \quad v = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du},$$

und zur Bestimmung der Grenzen:

$$(2) \quad \left\{ C e^{u x} + \int \frac{U_0}{U_1} du \right\}_{u'}^{u''} = 0.$$

Nun kann offenbar nur dann von einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung ein allgemeines Integral mit n Constanten gefunden werden, wenn die Gleichung (2), oder die gewöhnlich an ihre Stelle tretende:

$$(3) \quad e^{u x} + \int \frac{U_0}{U_1} du = 0$$

Wurzeln zulässt, $n+1$ an der Zahl, zwischen welchen n Intervalle vorhanden sind, die sich zu Intervallen der Integration machen lassen, was dann zu n partikulären Werthen führt. Wir werden also jedesmal ein unvollständiges Integral erlangen, wenn

1. die Anzahl $n+1$ der Wurzeln der Gleichung (3) durch was immer für einen Umstand, der einige derselben wegfällen macht, verringert wird, und
2. wenn unter den partikulären Integralen, die man sich verschafft hat, einige entweder identisch gleich Null, oder von den übrigen nicht verschieden sind, oder unter Formen erscheinen, welche eine Analogie mit der Form einer divergirenden Reihe haben, was z. B. dann der Fall ist, wenn die Funktion unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen durch Unendlich hindurch geht.

Verfolgen wir jetzt die Fälle, in welchen einige der Wurzeln der Gleichung (3) wegfällen, offenbar kommt hier alles an auf die Form, in welcher das Integral

$$\int \frac{U}{U_1^n} du \tag{4}$$

erscheint, und man verfährt bekanntlich bei der Berechnung derselben auf folgende

Weise: Der Bruch $\frac{U}{U_1^n}$ wird, falls er ein unechter seyn sollte, zerlegt in eine ganze

Funktion und in einen echten Bruch, diess gibt die Form:

$$\frac{U}{U_1^n} = L + \frac{M}{U_1} \tag{5}$$

und es ist L ein Polynom vom r ten Grade, wenn U_1 vom Grade $n-r$ ist. Jetzt zerlegt man U_1 in Faktoren, die entweder einfach oder wiederholt vorhanden seyn können, und

den echten Bruch $\frac{M}{U_1}$ in Partialbrüche, multipliziert mit du und integrirt, wobei man offenbar nur mit Formen zu thun hat, wie:

$$\int L du, \int \frac{A du}{u-\alpha}, \int \frac{A' du}{(u-\alpha)^m}. \tag{6}$$

Der erste dieser Ausdrücke ist eine ganze Funktion N vom Grade $r+1$, der zweite eine Logarithmus von $u-\alpha$, der dritte ein algebraischer Bruch. Es geht hieraus hervor, dass die Gleichung (3) jederzeit folgende Gestalt annehmen wird:

$$\frac{(u-\alpha_1)^{A_1} (u-\alpha_2)^{A_2} \dots}{(u-\beta_1)^{B_1} (u-\beta_2)^{B_2} \dots} e^{ux+N} + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \dots = 0. \tag{7}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \beta_1, \beta_2 \dots$ sind sämmtlich einfache, $\gamma \dots$ vielfache Wurzeln der Gleichung $U_1 = 0$, $A_1, A_2 \dots B_1, B_2 \dots$ constante Zähler von Partialbrüchen, so genommen, dass sämmtliche Exponenten, entweder reel und positiv, oder imaginär mit positiven realen Theilen, sind.

Die sorgfältigere Betrachtung der Gleichung (7) lehrt nun, dass, wiewohl unter den Wurzeln derselben, die der Gleichung $U_1 = 0$ vorfindig seyn können, dem ungeachtet dadurch, dass U_1 zufällig ein Polynom niederern Grades wird, als U_0 und als die Ordnungszahl der Differentialgleichung n , Einheiten enthält, keine Wurzel der Gleichung (7) verloren gehe, indem dann nothwendig U_0 vom n^{ten} Grade ist, uns somit die Wurzeln der Gleichung

$$N = \int L \, dv = -\infty,$$

die auch der (7) Genüge thun, zu Gebote stehen, dass somit Wurzeln nur verloren gehen können auf folgende verschiedene Weisen:

1. Wenn einer oder mehrere der Exponenten, respektive Zähler von Partialbrüchen $A_1 A_2 \dots B_1 B_2 \dots$ verschwinden, ein Fall, der dann Statt findet, wenn U_0 und U_1 einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen.
2. Wenn mehrere Zähler der einfachen Partialbrüche negativ oder imaginär, mit negativen reellen Theilen sind, die dann zu einem Faktor von der Form $(U - \beta)^B$ im Nenner Veranlassung geben, wodurch eine Wurzel $U = \beta$ verloren geht.
3. Wenn die Gleichung $U_1 = 0$ gleiche Wurzeln besitzt.

Wir wollen jetzt der Reihe nach sehen, wie das in diesen drei Fällen unvollständig werdende Integral ergänzt werden muss.

Im ersten Falle wo U_0 und U_1 einen gemeinschaftlichen Faktor haben von der Form $U - \alpha$ oder $(U - \alpha)^m$, entspricht der Differentialgleichung, nebst denjenigen Integralen, die wir durch unsere Methode gewinnen, noch ein einfaches partikuläres, welches entweder die Gestalt einer reinen Exponentiellen hat, nämlich $e^{\alpha x}$ oder folgende andere:

$$(8) \quad e^{\alpha x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_{m-1} x^{m-1}).$$

In der That, setzen wir in der Differentialgleichung (1. §. 1.), $y = e^{Ux}$, so erhalten wir als Resultat der Substitution:

$$(9) \quad (U_0 + U_1 x) e^{Ux} = 0.$$

Wenn jetzt U_0 und U_1 den gemeinschaftlichen Faktor $U - \alpha$ besitzen, so wird der Gleichung für $U = \alpha$ Genüge geleistet, und man hat ein partikuläres Integral:

$$(10) \quad y = e^{\alpha x}.$$

Wären nun ebenso $U - \alpha'$, $U - \alpha'' \dots U - \alpha^{(m-1)}$ gemeinschaftliche Faktoren von U_0 und U_1 , so erhielte man ein partikuläres Integral:

$$(11) \quad y = C e^{\alpha x} + C' e^{\alpha' x} + \dots + C^{(m-1)} e^{\alpha^{(m-1)} x}.$$

Lässt man die Wurzeln $\alpha, \alpha' \dots \alpha^{(m-1)}$ gegen einander konvergiren, und setzt,

$$\alpha' = \alpha + \varepsilon_1, \quad \alpha'' = \alpha + \varepsilon_2 \dots \alpha^{(m-1)} = \alpha + \varepsilon_{m-1},$$

unter ε sehr kleine Zusätze verstanden, so geht die Formel (11) über in

$$y = e^{\alpha x} (C + C' e^{\varepsilon_1 x} + \dots + C^{(m-1)} e^{\varepsilon_{m-1} x}).$$

Entwickelt man endlich die eingeklammerten Exponentiellen in die ihnen gleich geltenden, wegen der Kleinheit der ε sehr konvergirenden Reihen, und setzt überdiess:

$$\begin{aligned} C + C' + C'' + \dots + C^{(m-1)} &= B, \\ C' \varepsilon_1 + C'' \varepsilon_2 + \dots + C^{(m-1)} \varepsilon_{m-1} &= B', \\ C' \varepsilon_1^2 + C'' \varepsilon_2^2 + \dots + C^{(m-1)} \varepsilon_{m-1}^2 &= 2 B'', \\ C' \varepsilon_1^{m-1} + C'' \varepsilon_2^{m-1} + \dots + C^{(m-1)} \varepsilon_{m-1}^{m-1} &= 2.3 \dots m-1 B^{(m-1)}, \end{aligned} \tag{13}$$

so erhält man nach der bekannten Schlussweise, bei dem Convergiere der ε genannten Zusätze gegen die Null, folgendes m gemeinschaftlichen Faktoren $U - \alpha$ entsprechende partikuläre Integral:

$$y = e^{\alpha x} (B + B' x + B'' x^2 + \dots + B^{(m-1)} x^{m-1}), \tag{14}$$

welches mit (8) der Form nach übereinstimmt. Wiewohl es nun auf den ersten Anblick scheinen möchte, als ob dieses, in geschlossener endlicher Form existirende Integral, in derjenigen nicht enthalten seyn könnte, die wir bei unserer Methode vorausgesetzt haben, in der Form (1) nämlich, so lässt es sich doch aus derselben ableiten, wenn man unter die bestimmten Integrale, die einzeln der Differentialgleichung Genüge leisten sollen, auch diejenigen aufnimmt, die CAUCHY mit dem Namen der Besonderen belegt (*Intégrales singulières*), und die genommen sind zwischen unendlich nahe aneinander liegenden Grenzen, während zwischen diesen Grenzen die Funktion unter dem Integralzeichen durch Unendlich durchgeht. Um diess vor der Hand in dem einfachsten Fall darzuthun wollen wir voraussetzen, dass der den Polynomen U_0 und U_1 gemeinschaftliche Faktor $U - \alpha$ sei, und in U_1 nur einmal vorkomme, so wird denselben die Funktion V auch nur ein einziges Mal im Nenner enthalten, während der im ersten Theil der Gleichung (3) enthaltene Ausdruck ganz davon frei ist, und somit für $U = \alpha$ einen endlichen Werth erhält, diess vorausgesetzt, lässt sich behaupten, dass das besondere Integral:

$$\int_{\alpha - \varepsilon'}^{\alpha + \varepsilon''} e^{Ux} V \, dU = \int_{\alpha - \varepsilon'}^{\alpha + \varepsilon''} \frac{C}{U_1} e^{Ux} + \int \frac{U}{U_1} \, dU \, dU, \tag{15}$$

die Eigenschaft besitze, der Differentialgleichung Genüge zu leisten, ohne gleich Null zu seyn. In der That setzt man in der Gleichung (2) $u' = \alpha - \varepsilon'$, $u'' = \alpha + \varepsilon''$, so verwandelt sich der erste Theil derselben in eine Grösse von derselben Ordnung wie ε' , die somit bei dem unendlichen Abnehmen von ε' und ε'' , gegen die Nulle convergirt, zu gleicher Zeit ist das besondere Integral (15) von der Null verschieden, und gleich der mit einer willkürlichen Constante multiplizirten Exponentielle $e^{\alpha x}$, wovon man sich durch wirkliche Berechnung auf folgende Weise überzeugt. Es ist offenbar das Integral (15) von folgender Form:

$$\int_{\alpha - \varepsilon'}^{\alpha + \varepsilon''} e^{Ux} \frac{\varphi(U)}{U - \alpha} dU,$$

wo $\varphi(U)$ eine Funktion bedeutet, die für $U = \alpha$ nicht mehr unendlich wird. Führen wir hier eine neue Variable ein durch die Substitution

$$U = \alpha + \varepsilon v,$$

und setzen überdiess

$$\varepsilon' = h_1 \varepsilon, \quad \varepsilon'' = h_2 \varepsilon,$$

so erhalten wir anstatt dieses Integrales:

$$\int_{-h_1}^{+h_2} e^{(\alpha + \varepsilon v)x} \frac{\varphi(\alpha + \varepsilon v)}{v} dv.$$

Bei dem Convergiſren von ε gegen Null nähert sich nun offenbar dieses letztere der Grenze:

$$\int_{-h_1}^{+h_2} e^{\alpha x} \frac{\varphi(\alpha)}{v} dv = e^{\alpha x} \varphi(\alpha) \log. \left(-\frac{h_2}{h_1} \right),$$

was offenbar die, mit einer willkürlichen Constante multiplizierte, oberwähnte Exponentielle ist.

Hätten ebenso die beiden Polynome U_0 und U_1 nicht einen, sondern mehrere gemeinschaftliche Factoren:

$$v - \alpha', \quad v - \alpha'' \dots v - \alpha^{(m-1)},$$

so würden es auch ebenso viele, d. h. m besondere Integrale seyn, die der Differentialgleichung Genüge leisten, und die sich auf ebenso viele mit willkürlichen Constanten multiplizierte Exponentiellen zurückführen liessen. — Convergiſren aber die zwischen $\alpha, \alpha' \dots \alpha^{(m-1)}$ bestehenden Unterschiede gegen die Nulle, so dass sich diese Grössen der Gleichheit nähern, so werden auch die m besonderen Integrale sämtlich Grenzen erhalten, die ungemein nahe aneinander, und zugleich an α liegen, solche Integrale werden es also seyn, die der Differentialgleichung Genüge leisten, wenn U_0 und U_1 , m gleiche Factoren $U - \alpha$ gemeinschaftlich besitzen. Zu gleicher Zeit wird aber die Funktion V den Factor $(U - \alpha)^m$ im Nenner erhalten, während der erste Theil der Gleichung (3) ganz davon frei seyn, also die Eigenschaft besitzen kann, für $U = \alpha$ nicht unendlich zu werden, sondern einen endlichen Werth beizubehalten, woraus unmittelbar folgt, dass jene nahe an α liegenden Grenzen zwar nicht der Gleichung (3), wohl aber der (2) Genüge leisten werden. Es kann ferner ohne Schwierigkeit gezeigt werden, dass die Summe dieser m besonderen Integrale auf den geschlossenen Ausdruck (8) oder (14) zurückgeführt werden kann, wir wollen aber an diesem Orte noch mehr darthun. Wir wollen nämlich zeigen, dass ob auch U_0 und U_1 einen gemeinschaftlichen Factor besitzen oder nicht, sobald nur V einen Factor von der Form $U - \alpha$, in beliebiger Potenz im Nenner hat, der Differentialgleichung stets durch ein besonderes

Integral, oder durch eine Summe von mehreren Solchen Genüge geleistet werden kann. Vielmehr um noch eigentlicher zu sprechen, die besonderen Integrale als Uebergangsform führen zu Integralen der vorgelegten Differentialgleichung, welche letztere zunächst in Form eines Differentiales mit beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten vorhanden sind, dann aber, wenn man will als Produkt dargestellt werden können aus einer Exponentielle, in eine endliche oder unendliche, nach absteigenden Potenzen von x geordnete Reihe. In der That: setzen wir voraus, V enthalte den Faktor $(U-\alpha)^m$ im Nenner, unter m vor der Hand eine ganze positive Zahl verstanden. — Lassen wir ε eine ins Unendliche abnehmende Grösse bedeuten, und $h_1, h_2 \dots h_{m+1}$ Zahlen von unbestimmten endlichen Werth, die man sich nach ihrer natürlichen Grössenordnung hingeschrieben vorstellen kann, so dass mit ε zugleich auch $h_1 \varepsilon, h_2 \varepsilon \dots h_{m+1} \varepsilon$ im Zustande des unendlichen Abnehmens sich befinden, so wird immer folgende Summe:

$$C_1 \int_{\alpha + h_1 \varepsilon}^{\alpha + h_2 \varepsilon} e^{Ux} V du + C_2 \int_{\alpha + h_2 \varepsilon}^{\alpha + h_3 \varepsilon} e^{Ux} V du + \dots + C_m \int_{\alpha + h_m \varepsilon}^{\alpha + h_{m+1} \varepsilon} e^{Ux} V du,$$

ein Integral der Differentialgleichung darstellen, wenigstens mit einer, oft mit mehreren Constanten. Wir wollen, der Kürze wegen, diese Summe symbolisch andeuten durch den Ausdruck:

$$\sum_1^m [C_\mu \int_{\alpha + h_\mu \varepsilon}^{\alpha + h_{\mu+1} \varepsilon} e^{Ux} V du], \tag{16}$$

so lässt sich derselbe, dem früher Gesagten zu Folge, mittelst der Substitution

$$e^{Ux} V = \frac{\varphi(u)}{(u-\alpha)^m}, \tag{17}$$

auf die Form:

$$\sum_1^m [C_\mu \int_{\alpha + h_\mu \varepsilon}^{\alpha + h_{\mu+1} \varepsilon} \frac{\varphi(u)}{(u-\alpha)^m} du], \tag{18}$$

bringen, während auch noch der erste Theil der Gleichung (3), nämlich:

$$e^{Ux} + \int \frac{U}{U}, du, \tag{19}$$

eine ähnliche Form:

$$\frac{\psi(u)}{(u-\alpha)^k}$$

annehmen wird, in welcher der Exponent k stets, und zwar mindestens um die Einheit, kleiner ausfällt als m , $\varphi(u)$ aber und $\psi(u)$ Funktionen sind, die für $U = \alpha$ nicht mehr unendlich werden. Die Fälle, in welchen diess letztere nicht Statt finden kann, weil V einen Bruch, dessen Nenner eine Potenz von $U - \alpha$ ist, im Exponenten der Exponentielle enthält, sollen hier einstweilen ausser Acht gelassen werden.

Um jetzt zu zeigen, dass die Summe (16) wirklich anstatt y gesetzt, die Differentialgleichung erfüllen könne, wird es nur nothwendig seyn darzuthun, dass man durch schickliche Wahl von $C_1 \dots C_m$ machen kann, dass:

$$(20) \quad \sum_1^m [C_\mu \left\{ \frac{\psi(v)}{(v-\alpha)^k} \right\}_{\alpha+h_\mu \epsilon}^{\alpha+h_{\mu+1} \epsilon}] = 0$$

wird, während zugleich die Summe (16) einen endlichen und von der Nulle verschiedenen Werth bekommt, der wenigstens eine, oft aber auch mehrere willkürliche Constanten in sich schliesst. Führen wir zu diesem Zwecke eine neue Variable ein, mittelst der Substitution:

$$v = \alpha + \epsilon v,$$

entwickeln die Funktionen φ und ψ mittelst der TAYLOR'schen Formel, so dass wir erhalten:

$$(21) \quad \frac{\varphi(v)}{(v-\alpha)^m} = \frac{\varphi(\alpha)}{\epsilon^m v^m} + \frac{\varphi'(\alpha)}{\epsilon^{m-1} v^{m-1}} + \frac{\varphi''(\alpha)}{2. \epsilon^{m-2} v^{m-2}} + \frac{\varphi'''(\alpha)}{2. 3. \epsilon^{m-3} v^{m-3}} + \dots$$

$$+ \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{2. 3. \dots (m-1) \epsilon v} + \frac{\varphi^{(m)}(\alpha + \theta \epsilon v)}{2. 3. \dots m}.$$

$$(22) \quad \frac{\psi(v)}{(v-\alpha)^k} = \frac{\psi(\alpha)}{\epsilon^k v^k} + \frac{\psi'(\alpha)}{\epsilon^{k-1} v^{k-1}} + \frac{\psi''(\alpha)}{2. \epsilon^{k-2} v^{k-2}} + \frac{\psi'''(\alpha)}{2. 3. \epsilon^{k-3} v^{k-3}} + \dots$$

$$+ \frac{\psi^{(k-1)}(\alpha)}{2. 3. \dots (k-1) \epsilon v} + \frac{\psi^{(k)}(\alpha + \theta \epsilon v)}{2. 3. \dots k}.$$

und setzen die gefundenen Werthe in die Formeln (18) und (20). Die daselbst vorhandenen Summen werden sich sodann in so viele Theile zerlegen lassen, als in den zweiten Theilen der Gleichungen (21) und (22) Glieder vorhanden sind, und jeder derselben wird wieder eine Summe seyn. Es kann ferner in jedem ein von μ unabhängiger Faktor gesondert, und vor das Summenzeichen gestellt werden, da die Summirung nur nach μ zu geschehen hat. Führt man diess aus, so gelangt man zu folgenden Ausdrücken:

$$(23) \quad y = \frac{\varphi(\alpha)}{\epsilon^{m-1}} \sum_1^m [C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^m}] + \frac{\varphi'(\alpha)}{\epsilon^{m-2}} \sum_1^m [C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^{m-1}}] +$$

$$+ \frac{\varphi''(\alpha)}{2. \epsilon^{m-3}} \sum_1^m [C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v^{m-2}}] + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{2. 3. \dots (m-1)} \sum_1^m [C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{dv}{v}] +$$

$$+ \frac{\epsilon}{2. 3. \dots m} \sum_1^m [C_\mu \int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \varphi(\alpha + \theta \epsilon v) dv].$$

$$0 = \frac{\psi(\alpha)}{\varepsilon^k} \sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^k} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] + \frac{\psi'(\alpha)}{\varepsilon^{k-1}} \sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{k-1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] + \frac{\psi''(\alpha)}{2 \cdot \varepsilon^{k-2}} \sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{k-2}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] + \dots$$

$$+ \frac{\psi^{(k-1)}(\alpha)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \varepsilon} \sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \sum_1^m \left[\left\{ C_\mu \psi^{(k)}(\alpha + \theta \varepsilon v) \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right]. \quad (24)$$

Man überzeugt sich leicht auf den ersten Anblick, dass in den letzten beiden Gleichungen die Ergänzungsglieder bei dem unendlichen Abnehmen von ε gegen die Nulle convergiren, und dass der zweiten derselben durch solche Werthe der Constanten C_1, C_2, \dots, C_m Genüge geleistet werde, die das folgende System von k Gleichungen erfüllen:

$$\sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^k} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \sum_1^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}^k} - \frac{C_\mu}{h_\mu^k} \right] = 0,$$

$$\sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{k-1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \sum_1^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}^{k-1}} - \frac{C_\mu}{h_\mu^{k-1}} \right] = 0,$$

$$\sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{k-2}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \sum_1^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}^{k-2}} - \frac{C_\mu}{h_\mu^{k-2}} \right] = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] = \sum_1^m \left[\frac{C_\mu}{h_{\mu+1}} + \frac{C_\mu}{h_\mu} \right] = 0. \quad (25)$$

Zudem hat man noch:

$$\int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{d v}{v^m} = -\frac{1}{m-1} \left\{ \frac{1}{v^{m-1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} = \frac{1}{(m-1) h_\mu^{m-1}} - \frac{1}{(m-1) h_{\mu+1}^{m-1}},$$

$$\int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{d v}{v^{m-1}} = -\frac{1}{m-2} \left\{ \frac{1}{v^{m-2}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} = \frac{1}{(m-2) h_\mu^{m-2}} - \frac{1}{(m-2) h_{\mu+1}^{m-2}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\int_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \frac{d v}{v} = \left\{ \log. v \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} = \log. \frac{h_{\mu+1}}{h_\mu},$$

und es lässt sich dem zu Folge die Gleichung (23) auch so schreiben:

$$y = -\frac{\varphi(\alpha)}{(m-1) \varepsilon^{m-1}} \sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{m-1}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] - \frac{\varphi'(\alpha)}{(m-2) \varepsilon^{m-2}} \sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{m-2}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] -$$

$$-\frac{\varphi''(\alpha)}{2 \cdot (m-3) \varepsilon^{m-3}} \sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v^{m-3}} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] - \dots - \frac{\varphi^{(m-2)}(\alpha)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-2) \varepsilon} \sum_1^m \left[\left\{ \frac{C_\mu}{v} \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right] +$$

$$+ \frac{\varphi^{(m-1)}(\alpha)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1)} \sum_1^m \left[\left\{ C_\mu \log. v \right\}_{h_\mu}^{h_{\mu+1}} \right]. \quad (27)$$

tet, eine endliche, bei dem $r+1^{\text{ten}}$ Gliede abbrechende Reihe ist. Hier muss man sich noch $v = \alpha$ gesetzt, r der Reihe nach in $0, 1, 2 \dots (m-k-2)$ und $(m-1)$ verwandelt, und die so gewonnenen Ausdrücke mit den Constanten $B_1 B_2 \dots B_{m-k}$ multipliziert denken, um die Bestandtheile des Werthes von y zu erhalten, welcher letztere sodann in folgender Form erscheinen wird:

$$y = e^{\alpha x} [D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + \dots + D_{m-k-1} x^{m-k-2}] + B_{m-k} e^{\alpha x} [M x^{m-1} + (m-1) M' x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} M'' x^{m-3} + \dots]; \tag{33}$$

$D_1 \dots D_{m-k-1}$ besitzen folgende Werthe, aus welchen hervorgeht, dass sie sämmtlich ganz willkürliche Constanten sind, und wo unter $M, M', M'' \dots$ bereits die Werthe verstanden werden, die die Funktion M und ihre succesiven Differentialquotienten erhalten, wenn in denselben $v = \alpha$ gesetzt wird:

$$D_1 = M B_1 + M' B_2 + M'' B_3 + M''' B_4 + \dots + M^{(m-k-2)} B_{m-k-1},$$

$$D_2 = M B_2 + 2 M' B_3 + 3 M'' B_4 + \dots + (m-k-2) M^{(m-k-3)} B_{m-k-1}, \tag{34}$$

$$D_3 = M B_3 + 3 M' B_4 + 6 M'' B_5 + \dots + \frac{(m-k-2)(m-k-3)}{2} M^{(m-k-4)} B_{m-k-1},$$

.....

$$D_{m-k-1} = M B_{m-k-1}.$$

Wie man sieht, besteht der eben gewonnene Ausdruck für y aus zwei Theilen, von denen jeder als Produkt erscheint aus einer Exponentielle in eine ganze algebraische Funktion von x , nur mit dem Unterschiede, dass der erste $m-k-1$ willkürliche Constanten in sich schliesst, während der zweite nur eine einzige enthält; zugleich ist sehr leicht einzusehen, dass der erste aus denjenigen Faktoren $v - \alpha$ entspringe, die $m-k-1$ an der Zahl, den Polynomen U_0 und U_1 gemeinschaftlich sind, so dass man alsobald, wie man ähnliche gemeinschaftliche Faktoren gewahrt, diesen ersten Theil ohne weitere Rechnung sogleich hinschreiben kann. Auf dieselbe Weise gehört zur Ermittlung des zweiten Theiles und unmittelbarem Niederschreiben desselben in Form eines Differentialquotienten nur die Kenntniss des Exponenten m , der sich bei der Zerlegung des Bruches $\frac{U_0}{U_1}$ in Partialbrüche alsogleich ergibt.

Nun ist wohl nicht zu vergessen, dass der eben vorgetragenen Analysis einige Voraussetzungen zu Grunde liegen, nämlich: dass die Funktion unter dem Integralzeichen:
$$e^{Ux} v$$
 gebracht werden könne auf die Form:

$$\frac{\varphi(v)}{(v-\alpha)^m} = \frac{e^{Ux} M}{(v-\alpha)^m}$$

wo $\varphi(v)$ eine Funktion bedeutet, die für $v = \alpha$ nicht mehr unendlich wird. Diess setzt offenbar voraus, dass im Exponenten der in V enthaltenen Exponentielle kein Bruch mehr vorhanden sei mit dem Nenner $v - \alpha$, was wieder dann Statt finden wird, wenn nach Absonderung aller den Polynomen U_0 und U_1 gemeinschaftlichen Faktoren $v - \alpha$, nur ein einziger solcher in U_1 übrig bleibt. Sollten deren mehrere übrig bleiben, so wollen wir einen solchen Fall denjenigen beizählen, wo die Gleichung $U_1 = 0$ mehrere gleiche Wurzeln α enthält, ein Fall, der demnächst zur Sprache kommen wird.

Die zweite in unsere Rechnungen stillschweigend niedergelegte Voraussetzung ist, dass der Exponent m eine ganze positive Zahl sei, eine Voraussetzung, die sich in den seltensten Fällen realisiren wird. Glücklicher Weise aber ist die Giltigkeit des für y gefundenen Ausdruckes (33) durchaus nicht an die Erfüllung dieser Bedingung gebunden. Und es fährt derselbe fort, der Differentialgleichung Genüge zu leisten, ob jetzt m eine ganze positive Zahl ist oder nicht. Von dem ersten Theile desselben, welcher den den Polynomen U_0 und U_1 gemeinschaftlichen Faktoren $v - \alpha$ sein Dasein verdankt, ist diess aus der frühern Deduktion, die uns zu der Gleichung (14) führte, unmittelbar klar und kann überdiess durch direkte Substitution sehr leicht erwiesen werden. In der That, setzen wir in unsere Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung $e^{v x}$ anstatt y , so geht sie über in:

$$(35) \quad U_0 + U_1 x = 0.$$

Enthalten nun die Polynome U_0 und U_1 den gemeinschaftlichen Faktor $(v - \alpha)^s$, so wird dieser Gleichung Genüge geleistet werden, wenn man $v = \alpha$ setzt, und somit ist der Ausdruck:

$$C e^{\alpha x}$$

ein partikuläres Integral.

Allein auch jeder andere Ausdruck von der Form:

$$(36) \quad B x^r e^{\alpha x},$$

wenn r eine ganze Zahl bedeutet, die kleiner ist als s , wird dieselbe Eigenschaft darbieten, denn substituiren wir:

$$(37) \quad y = x^r e^{v x}$$

in die Differentialgleichung, und achten darauf, dass:

$$\begin{aligned} \frac{d y}{d x} &= e^{v x} [v x^r + r x^{r-1}], \\ \frac{d^2 y}{d x^2} &= e^{v x} [v^2 x^r + 2 r v x^{r-1} + r(r-1) x^{r-2}], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und allgemein:

$$(38) \quad \frac{d^m y}{d x^m} = e^{v x} \left[v^m x^r + m r v^{m-1} x^{r-1} + \frac{1}{2} m(m-1) r(r-1) v^{m-2} x^{m-2} + \dots \right. \\ \left. + r(r-1) \dots (r-m+1) x^{r-m} \right]$$

ist, so erhalten wir:

$$x^r [U_0 + U_1 x] + r x^{r-1} \left[\frac{dU_0}{dv} + x \frac{dU_1}{dv} \right] + \frac{r(r-1)}{2} x^{r-2} \left[\frac{d^2U_0}{dv^2} + x \frac{d^2U_1}{dv^2} \right] + \dots \quad (39)$$

$$+ \frac{d^r U_0}{dv^r} + x \frac{d^r U_1}{dv^r} = 0,$$

eine Gleichung, die für $v = \alpha$ identisch wird, weil der Voraussetzung nach den Polynomen U_0 und U_1 der Faktor $v - \alpha$, s -mal angehört, und $r < s$ ist.

Es ist somit erwiesen, dass der Ausdruck (36) für solche ganze Werthe von r , die kleiner sind als s , der Differentialgleichung Genüge leistet, und weil man der Reihe nach $r = 0, 1, 2, \dots, s-1$ setzen, und zugleich die angehängte Constante B in B_0, B_1, \dots, B_{s-1} verwandeln, ja auch die Summe aller so hervorgehenden Werthe nehmen kann, so erhellt unmittelbar, dass, wenn U_0 und U_1 gemeinschaftliche Faktoren $v - \alpha, s$ an der Zahl, besitzen:

$$y = e^{\alpha x} [B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_{s-1} x^{s-1}],$$

ein partikuläres Integral der Differentialgleichung sei; d. h. der erste Theil des Ausdruckes (33) fährt fort der Differentialgleichung Genüge zu leisten. Allein auch der zweite Theil desselben wird nicht aufhören die Differentialgleichung zu erfüllen, wiewohl für ein gebrochenes oder negatives m der Multiplikator der Exponentielle meist ein endliches Polynom zu seyn aufhört, und in eine unendliche, nach absteigenden Potenzen von x geordnete Reihe übergeht, sohin seine Natur ändert. Hievon überzeugt man sich leicht durch folgende Ueberlegung: Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass dieser zweite Theil von y , d. h. der Ausdruck:

$$B_{m-k} e^{\alpha x} \left[M x^{m-1} + (m-1) M' x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} M'' x^{m-3} + \dots \right] \quad (40)$$

ein partikuläres Integral sei, wenn m eine beliebig grosse, noch ganz unbestimmt gelassene ganze Zahl ist; ferner behält dieser Ausdruck genau dieselbe Form, ob man sich m als unbestimmte ganze oder unbestimmte gebrochene, ja negative oder auch imaginäre Zahl vorstellt, weil in demselben nichts enthalten ist, wodurch die Bedeutung von m mit Nothwendigkeit auf ganze Zahlen beschränkt würde. Denkt man sich daher diesen Ausdruck anstatt y in die Gleichung substituirt, diese Substitution aber zweimal ausgeführt, einmal in der einen Voraussetzung, nämlich, dass m eine unbestimmte ganze Zahl sey, das andere Mal in der andern entgegengesetzten, so werden sich auch diese beiden Substitutionen und damit verknüpften Reduktionen offenbar in gar nichts von einander unterscheiden, und man wird nirgends Gelegenheit finden, die Bedingung, dass m eine ganze Zahl sey, in Rechnung zu setzen, somit können auch die Resultate der beiden Substitutionen nur dieselben seyn, d. h. der Ausdruck (40), der für ganze m Genüge leistet, wird für beliebige m fortfahren die Differentialgleichung zu erfüllen,

und daraus, dass unsere eben vorgetragene Analysis nur giltig ist für ganze und positive m folgt nur, dass die derselben zu Grunde gelegte Uebergangsform eines besondern Integrales für andere als ganze Werthe von m das, jedesmal unter der Gestalt (40) vorhandene, partikuläre Integral wieder zu geben nicht vermöge. Da sich aber der Ausdruck (40) für ein beliebiges m auf das kürzeste auch so schreiben lässt:

$$(41) \quad B_{m-k} \frac{d^{m-1}}{d v^{m-1}} \left[e^{u x} M \right],$$

nach der Differentiation anstatt u , α gesetzt, so tritt uns hier eine neue Form entgegen, unter welcher die partikulären Integrale von linearen Differentialgleichungen erscheinen können, nämlich die eines Differentials mit beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen, ja gelegentlich irrationalen und imaginären Exponenten, eine Gattung von transzendenten, die bisher wenig in der Analysis gebraucht, und erst in neuerer Zeit von LIOUVILLE im *Journal de l'école polytechnique*, tome XIII. zur Auflösung verschiedener sehr interessanter Probleme angewendet wurde, bei der Integration der Differentialgleichungen aber eine nicht unbedeutende Rolle zu spielen bestimmt ist. Der Umstand, dass diese Form um zu unmittelbaren Berechnungen brauchbar zu werden, in eine nach absteigenden Potenzen von x geordnete unendliche Reihe, d. h. in die Form (40) verwandelt werden muss, während die (41) als kurzer symbolischer zwar geschlossener aber praktisch unbrauchbarer Ausdruck dasteht, thut der Anwendbarkeit derselben auf dem Felde der Mechanik oder mathematischen Physik durchaus keinen Eintrag. Wenn nur der jederzeit nothwendigen Bedingung der Convergenz Genüge geleistet ist, ohne welcher solche Reihen bekanntlich unbrauchbar werden. Auf diesem Felde bedeutet nämlich y in der Regel die sehr kleine Verschiebung aus der Ruhelage eines in Schwingungen von geringen Amplituden begriffenen materiellen Theilchens, x aber die Entfernung desselben von der Erregungsstelle oder bei andern Gelegenheiten die Zeit, die vom Anfange der Bewegung an verflossen ist. Da nun der für y gewonnene partikuläre Werth, d. h. die unendliche Reihe (40) ihrer Natur nach desto convergirender wird, je grösser man x annimmt, so erhalten wir aus derselben die Gesetze sehr kleiner Schwingungen mit desto grösserer Genauigkeit, je weiter das schwingende Theilchen vom Orte der ursprünglichen Erregung entfernt ist, oder in andern Fällen, je weiter man in der Zeit fortschreitet. Diess ist aber gerade dasjenige, was man bei der Auflösung ähnlicher Probleme wünscht, indem in der nächsten Nähe der Erregungsstelle man in der Regel, wegen der Grösse der Exkursionen der sich bewegenden Theilchen, gar noch nicht zur Annahme der linearen Form der Differentialgleichungen berechtigt ist, welche letztere man ohnehin nur dadurch erzeugt hat, dass man die Glieder höherer Ordnungen nach y als sehr klein vernachlässigte und somit die Giltigkeit der erhaltenen Formeln auf kleinere Schwingungsamplituden beschränkte, die meist nur in grössern Entfernungen von der Erregungsstelle wirklich Statt finden. Ueberdem sind derartige Ausdrücke mit jener wünschenswerthen Durch-

sichtigkeit begabt die ihre vornehmsten Eigenschaften, als da sind: Periodicität, Maximum-, Null- und Minimumwerthe u. s. w., ohne mühevollere Rechnungen, in den meisten Fällen erkennen lässt. Wenigstens besitzt in dieser Hinsicht die Form eines bestimmten Integrals vor der letzterwähnten, eines Differentialis mit beliebigen Exponenten keinerlei Vorzug.

Es sind uns bisher bei der Integration der betrachteten linearen Differentialgleichungen drei verschiedene Formen aufgestossen, nämlich erstens die eines bestimmten Integrales, zweitens die eines Differentialis, dessen Exponent eine allgemeine Zahl ist, die positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, ja auch irrational und imaginär seyn kann, genommen nach einer Variablen v , die in der Differentialgleichung nicht erscheint, und wofür nach vollbrachten Differentiren irgend ein constanter Werth α gesetzt wird, und endlich drittens die eines Produktes aus einer Exponentielle in eine ganze algebraische Funktion der unabhängigen Veränderlichen. Und diejenige Analysis die uns zur Kenntniss der zwei letzten Formeln verholfen hat, führt uns zugleich zur Vervollständigung der im ersten Paragraphen vorgetragenen Integrationsmethode hinsichtlich derjenigen Fälle, in welchen dieselbe nur unvollständige, nicht mit der genügenden Anzahl willkürlicher Constanten versehene Integrale lieferte. Diese nach den letzten Ergebnissen vervollständigte Integrationsmethode wird nun in Folgenden bestehen. Man ersetze in der gegebenen Differentialgleichung die Grössen:

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n},$$

beziehlich durch die Potenzen:

$$1, v, v^2 \dots v^n,$$

und bezeichne das Resultat mit

$$U_0 + U_1 x, \tag{42}$$

berechne ferner den Werth des folgenden Integrales:

$$\int \frac{U_0}{U_1} dv,$$

und achte bei der Zerlegung des Bruches in Partialbrüche darauf, ob die beiden Polynome U_0 und U_1 gemeinschaftliche Faktoren besitzen von der Form $v - \alpha$, was sich bekanntlich dadurch verräth, dass gewisse Zähler der erhaltenen Partialbrüche der Nulle gleich werden; findet dieser Umstand Statt, und haben namentlich U_0 und U_1 nur einen derartigen Faktor gemeinschaftlich, so entspricht der Differentialgleichung ein partikuläres Integral:

$$C e^{\alpha x}. \tag{43}$$

Erscheint aber dieser gemeinschaftliche Faktor in jedem Polynome mindestens s -mal, so besteht auf dieselbe Weise ein, willkürliche Constante s an der Zahl enthaltendes partikuläres Integral:

$$(44) \quad e^{\alpha x} \left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{n-1} x^{n-1} \right);$$

und wir werden sohin jedesmal so viele partikuläre, der Gleichung Genüge leistende Werthe unmittelbar erhalten, als die Polynome U_0 und U_1 gemeinschaftliche Faktoren von der Form $v - \alpha$ besitzen.

Ferner suchen wir diejenige zweite Reihe partikulärer Werthe auf die unter der Gestalt eines bestimmten Integrales erscheint, nämlich unter der folgenden:

$$(45) \quad \int_{u'}^{u''} e^{u x} v \, du$$

hier hat man dem früher Gesagten zufolge

$$(46) \quad v = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du},$$

u'' und u' sind Wurzeln der Gleichung:

$$(47) \quad e^{u x} + \int \frac{U_0}{U_1} du = 0.$$

Letztere erscheint nun jedesmal unter folgender Form, wie im Anfange dieses Paragraphes (§. 2, 7) nachgewiesen wurde:

$$(48) \quad \frac{(u - \alpha_1)^{A_1} (u - \alpha_2)^{A_2} \dots}{(u - \beta_1)^{B_1} (u - \beta_2)^{B_2} \dots} C^{u x + N + \frac{D}{(u - \gamma)^{m-1}} + \dots} = 0,$$

und wird erfüllt, erstens durch die Werthe:

$$u = \alpha_1, \quad v = \alpha_2 \dots$$

zweitens durch diejenigen, die der Gleichung

$$N = -\infty$$

Genüge leisten. Diese wird man also für u' und u'' nehmen können, und so eine zweite Reihe partikulärer Werthe erhalten die in Form von bestimmten Integralen erscheinen, aber gelegentlich die Unzukömmlichkeit bieten werden, dass die Funktion unter dem Integralzeichen innerhalb der bezeichneten Grenzen durch Unendlich durchgeht, ein Uebelstand, der nicht immer leicht wird vermieden werden können, und z. B. gleich vorhanden seyn wird, wenn β_1 seiner Grösse nach zwischen α_1 und α_2 fällt, bei dem innerhalb der Grenzen α_1 und α_2 , genommenen bestimmten Integrale.

Eine dritte Reihe endlich von partikulären Werthen, und zugleich das beste Gegenmittel gegen den letzterwähnten Uebelstand, wird uns in der Form von Differentialen mit beliebigen Exponenten an die Hand gegeben. Um diese Reihe zu erhalten entwickeln wir die Form (46) und bekommen offenbar:

$$V = C \frac{e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}}{U_1} = \frac{(u - \alpha_1)^{a_1} (u - \alpha_2)^{a_2} \dots e^{N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \dots}}{(u - \beta_1)^{b_1} (u - \beta_2)^{b_2} \dots}, \quad (49)$$

wo $a_1 = A_1 - 1$, $a_2 = A_2 - 1 \dots b_1 = B_1 + 1$, $b_2 = B_2 + 1 \dots$ seyn werden, wenn nicht etwa $\alpha_1, \alpha_2 \dots \beta_1, \beta_2$ wiederholt vorkommende Wurzeln der Gleichung $U_1 = 0$ sind, in welchem Falle $a_1, a_2 \dots b_1, b_2$ andere Werthe erhalten, und zugleich die entsprechenden Faktoren $u - \alpha_1, u - \alpha_2 \dots u - \beta_1, u - \beta_2 \dots$ als Nenner von Brüchen im Exponenten der Exponentielle vorkommen können. Dieser letzte Umstand ist sorgfältig zu beachten; findet derselbe nicht Statt, d. h. kommen diese Faktoren in Exponenten als Nenner gar nicht vor, so erhalten wir, den Wurzeln $\beta_1, \beta_2 \dots$ entsprechend, eine Reihe von partikulären Integralen:

$$G_1 \frac{d^{b_1-1}}{d u^{b_1-1}} [e^{u x} M_1], G_2 \frac{d^{b_2-1}}{d u^{b_2-1}} [e^{u x} M_2] \dots \quad (50)$$

in Form von Differentialquotienten nach u genommen, wo jedoch:

$$M_1 = \frac{(u - \alpha_1)^{a_1} (u - \alpha_2)^{a_2} \dots e^{N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \dots}}{(u - \beta_2)^{b_2} \dots} \quad (51)$$

$$M_2 = \frac{(u - \alpha_1)^{a_1} (u - \alpha_2)^{a_2} \dots e^{N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \dots}}{(u - \beta_1)^{b_1} \dots}$$

und nach der Differentiation im ersten der Ausdrücke (50) $u = \beta_1$, im zweiten $u = \beta_2$ gesetzt werden muss. Diese letzte Substitution wollen wir künftighin durch ein, dem eingeklammerten Ausdrücke als Stellenzeiger angehängtes β_1 oder β_2 andeuten, so:

$$\left\{ G_1 \frac{d^{b_1-1}}{d u^{b_1-1}} [e^{u x} M_1] \right\}_{\beta_1}, \left\{ G_2 \frac{d^{a_2-1}}{d u^{a_2-1}} [e^{u x} M_2] \right\}_{\beta_2} \quad (52)$$

Aehnliche partikuläre Werthe könnten wir auch für die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ erhalten, wenn uns die ihnen entsprechenden bestimmten Integrale, des obenerwähnten Uebelstandes wegen, nicht zusagen sollten, nämlich:

$$\left\{ H_1 \frac{d^{-b_1-1}}{d u^{-b_1-1}} [e^{u x} P_1] \right\}_{\alpha_1}, \left\{ H_2 \frac{d^{-a_2-1}}{d u^{-a_2-1}} [e^{u x} P_2] \right\}_{\alpha_2} \quad (53)$$

wo

$$P_1 = \frac{(u - \alpha_2)^{a_2} \dots e^{N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \dots}}{(u - \beta_1)^{b_1} (u - \beta_2)^{b_2} \dots}$$

$$P_2 = \frac{(u - \alpha_1)^{a_1} \dots e^{N + \frac{D}{(u-\gamma)^{m-1}} + \dots}}{(u - \beta_1)^{b_1} (u - \beta_2)^{b_2} \dots}$$

. sind.

Endlich wäre noch der Fall gleicher Wurzeln der Gleichung $U_1 = 0$ zu erörtern; γ sei eine solche und es erscheine namentlich nach Absonderung aller gemeinschaftlicher Faktoren $v - \gamma$ aus den Polynomen U_u und U_1 , wenn solche wirklich vorhanden seyn sollten, in U_1 noch $(v - \gamma)^m$ als Faktor, so gibt derselbe Veranlassung zu einer Reihe von Partialbrüchen mit Nennern $(v - \gamma)^m \dots (v - \gamma)$, deren Integrale, die wieder Brüche sind, mit Nennern $(v - \gamma)^{m-1} (v - \gamma)^{m-2} \dots$ im Exponenten der Exponentielle vorhanden seyn werden. Hier werden wir um derjenigen partikulären Integrale, die den m Wurzeln γ angehören, und die m an der Zahl vorhanden seyn müssen, wenn sich nicht ein Verlust von einem oder einigen partikulären Werthen ergeben soll, habhaft zu werden eine neue Variable mittelst der Substitution

$$v - \gamma = \frac{1}{v}$$

eingeführen, wodurch die Gleichung (48) übergeht in

$$(54) \frac{(v(\gamma - \alpha_1) + 1)^{A_1} (v(\gamma - \alpha_2) + 1)^{A_2} \dots v^{B_1 + B_2 + \dots} v^{\frac{v\gamma + 1}{v}x + N + Dv^{m-1} + Ev^{m-2} + \dots}}{(v(\gamma - \beta_1) + 1)^{B_1} (v(\gamma - \beta_2) + 1)^{B_2} \dots v^{A_1 + A_2 + \dots}} e^{\dots} = 0,$$

und offenbar neue ihr Genüge leistende Werthe zulässt, erstens diejenigen, die die Gleichung

$$D v^{m-1} = -\infty$$

erfüllen, zweitens noch überdiess denjenigen unendlich kleinen Werth von v , welche $\frac{\lambda}{v}$ unendlich und negativ macht. Diess gibt neue Wurzeln m an der Zahl, die sich so werden schreiben lassen:

$$\frac{1}{\lambda} z, \mu_1 \infty, \mu_2 \infty \dots \mu_{m-1} \infty,$$

und zu welchen man noch irgend einen der Gleichung

$$(v(\gamma - \alpha_1) + 1)(v(\gamma - \alpha_2) + 1) \dots = 0$$

Genüge leistenden Werth k hinzufügen wird, um Grenzen für m bestimmte Integrale in hinlänglicher Anzahl zu erhalten. Bei der Combination dieser Grenzen nun wird man Sorge tragen müssen Integrale zu vermeiden, bei welchem die Funktion unter dem Integralzeichen innerhalb dieser Grenzen durch ∞ durchgeht, was manchmal nur dadurch zu erreichen ist, dass man unter dieselben einen der Gleichung (54) gar nicht Genüge leistenden Werth $v = g$ aufnimmt, bestimmte Integrale als partikuläre Werthe aufstellt innerhalb Grenzen g und μ_1 oder g und μ_2 bis g und μ_r , und zugleich die Constanten der Integration, die als Multiplikatoren dieser Integrale erscheinen, an die Bedingungsgleichung

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_r = 0$$

knüpft. Macht man von diesen Kunstgriffen den gehörigen Gebrauch, so hat man meist nur den Verlust eines einzigen partikulären Integrales zu erwarten. Die bei solchen

Gelegenheiten am zweckmässigsten in Anwendung kommende Methode der Variation der willkürlichen Constanten, wird dann diesen einen noch fehlenden partikulären Werth, und zwar durch Integriren einer Differentialgleichung der ersten Ordnung, ohne Anstand liefern. Es ist nur noch übrig die Wirksamkeit unserer vervollständigten Methode in einigen und namentlich denjenigen Beispielen nachzuweisen, die im ersten Paragraphen der Betrachtung unterworfen worden sind.

Wir fangen an bei der Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} \pm b^2 x y = 0, \quad (55)$$

deren allgemeines Integral für positive von 0 verschiedene Werthe von a gefunden worden ist, so dass uns nur mehr die Fälle zu betrachten übrig bleiben, wo a Null ist oder negativ.

Im ersten dieser Fälle verwandelt sich die (55) in die einfache Gleichung mit constanten Coefficienten:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \pm b^2 y = 0,$$

und kann nach den für diese Klassen bekannten Methoden gleich integrirt werden, im zweiten Falle, denn wir dadurch anschaulich machen wollen, dass wir $-a$ anstatt a setzen, so dass es sich also um die Gleichung handelt:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - a \frac{dy}{dx} \pm b^2 x y = 0, \quad (56)$$

ist

$$V = \frac{1}{(u^2 \pm b^2)^{\frac{1}{2}A+1}}, \quad (57)$$

und wir wollen eher den Fall erörtern, wo von den beiden Zeichen \pm das untere gilt, und in welchem der Werth von v so geschrieben werden kann:

$$V = \frac{1}{(u + b)^{\frac{a}{2}+1} (u - b)^{\frac{a}{2}+1}}, \quad (58)$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung somit dargestellt werden kann, unter folgender Form:

$$y = C_1 \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}}}{d u^{\frac{a}{2}}} \left[\frac{e^{u x}}{(u + b)^{\frac{a}{2}+1}} \right]_b \right\} + C_2 \left\{ \frac{d^{\frac{a}{2}}}{d u^{\frac{a}{2}}} \left[\frac{e^{u x}}{(u - b)^{\frac{a}{2}+1}} \right]_{-b} \right\}, \quad (59)$$

oder wenn man die Differentialquotienten mit Hilfe der Formel (32) entwickelt, und dann so, wie es seyn muss, im ersten Theile des Ausdrucks u in b im zweiten u in $-b$ verwandelt:

$$\begin{aligned}
 (60) \quad y = & G_1 e^{bx} \left\{ x^{\frac{a}{2}} - \frac{a(a+2)}{2^2 b} x^{\frac{a}{2}-1} + \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)}{2^2 \cdot 2 \cdot b^2} x^{\frac{a}{2}-2} - \right. \\
 & \left. - \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)(a-4)(a+6)}{2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b^3} x^{\frac{a}{2}-3} + \dots \right\} + \\
 & + G_2 e^{-bx} \left\{ x^{\frac{a}{2}} + \frac{a(a+2)}{2^2 b} x^{\frac{a}{2}-1} + \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)}{2^2 \cdot 2 \cdot b^2} x^{\frac{a}{2}-2} + \right. \\
 & \left. + \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)(a-4)(a+6)}{2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b^3} x^{\frac{a}{2}-3} + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Die in dieser Formel enthaltenen Reihen brechen jedesmal ab, wenn $\frac{a}{2}$ eine ganze Zahl ist. Hätte man zum Beispiel $a=2$ so bekäme man als Integral der Gleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - b^2 x y = 0$$

folgenden sehr einfachen Ausdruck:

$$y = G_1 e^{bx} \left(x - \frac{1}{b} \right) + G_2 e^{-bx} \left(x + \frac{1}{b} \right)$$

von dem man sich auch ohne Schwierigkeit *a posteriori* überzeugen kann, dass er der Differentialgleichung Genüge leiste.

Diess lässt sich indess auch ganz allgemein bei der Formel (60) nachweisen, und man kann sich namentlich um darzuthun, dass der erste mit dem Faktor G_1 verknüpfte Theil derselben die Differentialgleichung erfülle, benehmen auf folgende Weise:

Es sei allgemein

$$(61) \quad H_r = \frac{a(a+2)(a-2) \dots (a+2(r-1))(a-2(r-1))(a+2r)}{2^{3r} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r b^r}$$

so besteht die Relation

$$(62) \quad H_r = H_{r-1} \frac{(a-2(r-1))(a+2r)}{2^3 \cdot r \cdot b},$$

und es ist nur zu zeigen, dass

$$(63) \quad y = e^{bx} S \left[(-1)^r H_r x^{\frac{a}{2}-r} \right]$$

Genüge leistet. Nun erhält man durch Differenziren:

$$\frac{dy}{dx} = e^{bx} S \left[(-1)^r x^{\frac{a}{2}-r} \left(b H_r - H_{r-1} \left(\frac{a}{2} - r + 1 \right) \right) \right], \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{bx} S \left[(-1)^r x^{\frac{a}{2}-r} \left(b^2 H_r - (a-2r+2) b H_{r-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{a}{2} - (r-1) \right) \left(\frac{a}{2} - (r-2) \right) H_{r-2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Nun multiplizire man (63) mit $-b^2 x$, (64) mit $-a$, (65) mit x und addire sie, nehme zugleich Rücksicht auf die Relation (62), die man dazu benützt, um H_{r-1} durch H_{r-2} auszudrücken, so erhält man 0 als Endresultat, und auf dieselbe Weise überzeugt man sich auch, dass der zweite mit G_2 verknüpfte Bestandtheil von y ein partikuläres Integral sei, und diess zwar, was auch a für eine Zahl bedeuten mag, somit auch dann, wenn man a in $-a$ verwandelt, wodurch das unter (59) und (60) dargestellte Integral der Differentialgleichung (56) in das Integral der Gleichung (55) übergeht, so dass also dieses letztere nach Belieben in der Form eines Differentialquotienten mit allgemeinen Exponenten oder in der andern eines bestimmten Integrales erscheinen kann. Es finden sich hierdurch in einem speziellen Beispiele diejenigen Betrachtungen bestätigt, die wir früher anführten, um die Giltigkeit eines für ganze und positive Exponenten des Differentialies bewiesenen Ausdruckes auf beliebige Werthe desselben auszudehnen. Endlich erübrigt noch die Erörterung des zweiten Falles, wo nämlich in den Gleichungen (56) und (57) von den beiden Zeichen \pm das obere zu nehmen ist; dieser Fall erfordert keine neue Rechnung, und das darauf bezügliche Integral geht offenbar auch aus der Form (58) hervor, wenn in derselben $b\sqrt{-1}$ anstatt b gesetzt wird. Führt man diess aus und ersetzt zugleich die imaginären Exponentiellen durch ihre trigonometrischen Werthe, so bekommt man anstatt y einen unter folgender Form erscheinenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} y = (K_2 \cos. b x + K_1 \sin. b x) \left[x^{\frac{a}{2}} - \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)}{2^0 \cdot 2 \cdot b^2} x^{\frac{a}{2}-2} + \right. \\ \left. + \frac{a(a+2)(a-2) \dots (a+8)}{2^{12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot b^4} x^{\frac{a}{2}-4} - \dots \right] + \\ + (K_2 \cos. b x - K_1 \sin. b x) \left[\frac{a(a+2)}{2^0 b} x^{\frac{a}{2}-1} + \frac{a(a+2)(a-2)(a+4)(a-4)(a+6)}{2^0 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b^3} x^{\frac{a}{2}-3} + \right. \\ \left. + \frac{a(a+2)(a-2) \dots (a+9)}{2^{15} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot b^5} x^{\frac{a}{2}-5} - \dots \right] \end{aligned} \quad (66)$$

wo K_1 und K_2 die Constanten der Integration bedeuten. Die hier vorkommenden Reihen besitzen dieselbe Eigenschaft wie die in der Formel (60) enthaltenen, nämlich abzubre-

chen, wenn $\frac{a}{2}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist. Wird $\frac{a}{2}$ aber gebrochen, so verwandeln sich dieselben in unendliche Reihen von der Klasse derjenigen, die man halbconvergirende nennt, und die sich der Funktion, deren Ausdruck sie seyn sollten beim Zusammennehmen von mehr und mehr Anfangsgliedern anfänglich bis zu einer gewissen Grenze nähern, dann aber davon entfernen und nicht nur divergent, sondern sogar steigend werden, d. h. hier mit andern Worten: wenn man diese Reihen, etwa die in der Formel (60) enthaltenen, bei dem $r + 1^{\text{ten}}$ Gliede abbricht, so erhält man einen Ausdruck, welcher anstatt y gesetzt den ersten Theil der Differentialgleichung (56) nicht auf Null reduzirt, sondern auf einen von x abhängigen Werth, der bei dem fortwährendem Wachsen der Zahl r sich der Nulle bis zu einer gewissen, ebenfalls von x abhängigen, Grenze anfänglich nähert, dann aber bei dem fernern Wachsen dieser Zahl davon entfernt. Dass die Reihen, von welchen die Rede ist, zu den convergirenden nicht gehören, davon belehrt uns der Quotient, den man erhält, das $r + 1^{\text{te}}$ Glied durch das r^{te} theilend:

$$(67) \quad - \frac{(a - 2(r - 1))(a + 2r)}{2^2 \cdot r \cdot b \cdot x},$$

welcher für grössere x , und bei dem fortwährenden Wachsen von r anfänglich ein kleiner, nahe an Null liegender Bruch seyn kann, sich aber dann fortwährend der Einheit nähert und sie endlich überschreitet, wodurch die Reihe aus einer fallenden in eine steigende übergeht. Um aber über das Mass der Genauigkeit, mit welcher ein solches halbconvergirendes Reihengebilde, bei dem $r + 1^{\text{ten}}$ Gliede abgebrochen, das Integral der vorgelegten Differentialgleichung wieder zu geben vermag, Aufschluss zu erhalten, betrachten wir das Resultat der Substitution in dieselbe, welches unmittelbar aus den Gleichungen (63), (64) und (65) folgt, die bezüglich mit $-b^2 x$, $-a$ und x multipliziert und dann addirt werden müssen. Diess gibt als Resultat:

$$(68) \quad e^{bx} \int \left[(-1)^r x^{\frac{a}{2} - r + 1} \left(2(r - 1)b H_{r-1} - H_{r-2} \left(\frac{a}{2} - r + 2 \right) \left(\frac{a}{2} + r - 1 \right) \right) \right],$$

welches eine Summe ist, deren einzelne Glieder in Folge der Relation (62) oder

$$(69) \quad H_{r-1} = H_{r-2} \frac{\left(\frac{a}{2} - r + 2 \right) \left(\frac{a}{2} + r - 1 \right)}{2(r - 1)b},$$

sich auf die Nulle reduzieren, so lange diese Relation zwischen den mit H bezeichneten Coefficienten wirklich Statt findet. Da man indess willkürlich bei dem Gliede, dessen Coefficient H_r ist, die Reihe abrechnen lässt, so sind H_{r+1} , $H_{r+2} \dots$ nicht mehr die durch diese Relation gegebenen, sondern Null, es werden daher alle Glieder der Summe (68) bis zu demjenigen mit $x^{\frac{a}{2} - r}$ inklusive, der Nulle gleich werden, das darauffolgende aber von Null verschieden und gleich:

$$(-1)^{r+1} e^{bx} x^{\frac{a}{2} - r-1} H_r \left(\frac{a}{2} - r \right) \left(\frac{a}{2} + r + 1 \right) \quad (70)$$

ausfallen, die sämmtlichen darauffolgenden aber wieder verschwinden. Sohin sieht man, dass der partikuläre Werth (63) bei dem $r + 1^{\text{ten}}$ Gliede abgebrochen, den ersten Theil der Differentialgleichung nicht auf Null wohl aber auf den Ausdruck (70) reduzire, der für sich eines und zwar das letzte der Glieder von (63) ist, nur noch mit einem constanten Faktor multipliziert, dass es somit vortheilhaft sei, die Reihe abzubrechen bei demjenigen Gliede, für welches der Ausdruck (70) ein Minimum ist, und welches das r^{te} ist, wenn man unter r diejenige genügend gross vorausgesetzte Zahl versteht, die dem Quotienten (67) den der Einheit nächsten Werth ertheilt. Es kann noch hinzugesetzt werden, dass, wenn in einer solchen Reihe die Zeichen wechseln, der wahre Werth des betreffenden partikulären Integrales zwischen der Summe aus r und aus $r + 1$ Gliedern liegen muss. Aus diesen Betrachtungen folgt, dass solche halbconvergirende Reihen, ungeachtet des ungünstigen Auges, welches der Analyst in der Regel darauf zu werfen pflegt, zur numerischen Berechnung der Werthe von y , und dem Herauslesen der daraus folgenden Erscheinungen, wenigstens für grössere Werthe der Veränderlichen x nicht ganz nutzlos seien. Man kann sich indess, wenn man sie doch unanständig finden sollte, immer andere in Form von bestimmten Integralen erscheinende verschaffen, und diess zwar auf mannigfache verschiedene Arten, von denen hier nur einige hervorgehoben werden sollen; nur muss leider bemerkt werden, dass in sehr vielen Fällen diese bestimmten Integrale keine andere numerische Berechnung zulassen, als die durch halbconvergirende Reihen. Immer kömmt es im Wesentlichen darauf an, dass man das unter der Form eines Differentialis mit allgemeinen Exponenten vorkommende partikuläre Integral entwickeln oder wenigstens auf eine andere Form bringen könne, die der Berechnung zugänglicher ist. Diess kann nun nicht bloss geschehen auf die eben vorgetragene Weise, sondern auch dadurch, dass man die zu differenzirende Funktion in eine Reihe von Exponentiellen oder die analoge eines solche in sich enthaltenden bestimmten Integrales verwandelt, und dann dem Differenziren unterwirft. So kann man z. B. zur Umgestaltung der Formel (59) folgenden Weg einschlagen: In dem bestimmten Integrale, welches für $m > 1$ einen constanten endlichen Werth hat:

$$C = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{m-1} d\lambda, \quad (71)$$

setzen wir $\lambda(u + b)$ anstatt λ und erhalten unter der Voraussetzung, dass $u + b$ immer positiv ist, was hier im ersten Theile des Werthes von y , Formel (59), da nach der Differentiation $u = b$ gesetzt werden muss, wirklich Statt findet:

$$\frac{C}{(u + b)^m} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(u + b)} \lambda^{m-1} d\lambda. \quad (72)$$

Es lässt sich in Folge dieser Gleichung der erste Theil des Werthes von y auch so darstellen:

$$(73) \quad C_1 \left\{ \frac{d^{\frac{n}{2}}}{d u^{\frac{a}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda b + u(x-\lambda)} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda \right\}_b = C_1 e^{bx} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda.$$

Genau auf demselben Wege verschafft man sich auch einen Ausdruck für den zweiten Theil. Man formt nämlich das Integral (71) durch die Substitution von $\lambda(u-b)$ anstatt λ um, darauf Rücksicht nehmend, dass weil nach dem Differenziren anstatt $u, -b$ gesetzt werden muss, $u-b$ als eine negative Zahl zu betrachten sei.

Diess gibt:

$$(74) \quad \frac{C}{(u-b)^m} = \int_0^{-\infty} e^{-\lambda(u-b)} \lambda^{m-1} d\lambda,$$

und der zweite Theil des Werthes von y lässt sich offenbar so schreiben:

$$(75) \quad C_2 \left\{ \frac{d^{\frac{n}{2}}}{d u^{\frac{a}{2}}} \int_0^{-\infty} e^{\lambda b + u(x-\lambda)} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda \right\}_{-b} = C_2 e^{-bx} \int_0^{-\infty} e^{2\lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda,$$

und man hat:

$$(76) \quad y = C_1 e^{bx} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda + C_2 e^{-bx} \int_0^{-\infty} e^{2\lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda.$$

Diese Formel gestattet keine Verwandlung von a in $-a$, sie gibt also nur das Integral der Gleichung (56) nicht aber das der (55), welches letztere übrigens im erstem Paragraphen bereits gefunden worden ist, und es ist nicht schwer zu zeigen, dass man durch Entwicklung von $(x-\lambda)^{\frac{a}{2}}$ mittelst der Binomialformel und nachfolgende Integration, zur Gleichung (60) zurückgelange, es lässt sich aber auch anderseits *a posteriori* darthun, dass der eben gewonnene Ausdruck die Differentialgleichung erfülle. Zeigen wir diess namentlich für den ersten Theil desselben, d. h. für:

$$(77) \quad y = e^{bx} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}} \lambda^{\frac{a}{2}} d\lambda,$$

woraus durch Differenziren:

$$(78) \quad \frac{d y}{d x} = e^{bx} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda b} \lambda^{\frac{a}{2}} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1} \left[b(x-\lambda) + \frac{a}{2} \right] d\lambda,$$

$$(79) \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = e^{bx} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda b} \lambda^{\frac{a}{2}} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2} \left[b^2 (x-\lambda)^2 + a b (x-\lambda) + \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2} - 1 \right) \right] d\lambda$$

folgt.

Nun multiplizire man die erste dieser drei Gleichungen mit $-b^2 x$, die zweite mit $-a$, die dritte mit x und addire sie, so erhält man zunächst:

$$\begin{aligned}
 & a b e^{b x} \int_0^{\infty} e^{-2 \lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1} \lambda^{\frac{a}{2}+1} d \lambda - \frac{a}{2} e^{b x} \int_0^{\infty} e^{-2 \lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1} \lambda^{\frac{a}{2}} d \lambda \\
 & + \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2} - 1 \right) x e^{b x} \int_0^{\infty} e^{-2 \lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2} \lambda^{\frac{a}{2}} d \lambda,
 \end{aligned} \tag{80}$$

sodann durch das Verfahren des theilweisen Integrirens

$$\begin{aligned}
 & a b \int e^{-2 \lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1} \lambda^{\frac{a}{2}+1} d \lambda = -\frac{a}{2} e^{-2 \lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1} \lambda^{\frac{a}{2}+1} + \\
 & + \frac{a}{2} \int e^{-2 \lambda b} \lambda^{\frac{a}{2}} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2} \left[\left(\frac{a}{2} + 1 \right) (x-\lambda) - \left(\frac{a}{2} - 1 \right) \lambda \right] d \lambda,
 \end{aligned} \tag{81}$$

also innerhalb der Grenzen 0 und ∞

$$\begin{aligned}
 & a b \int_0^{\infty} e^{-2 \lambda b} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-1} \lambda^{\frac{a}{2}+1} d \lambda = \\
 & = \frac{a}{2} \int_0^{\infty} e^{-2 \lambda b} \lambda^{\frac{a}{2}} (x-\lambda)^{\frac{a}{2}-2} \left[\left(\frac{a}{2} + 1 \right) (x-\lambda) \left(\frac{a}{2} - 1 \right) \lambda \right] d \lambda,
 \end{aligned} \tag{82}$$

ein Werth, der den Ausdruck (80) verschwinden macht. Genau auf dieselbe Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit des zweiten Bestandtheiles von y . Es kann also die Formel (76) für gebrochene jedoch positive Werthe von $\frac{a}{2}$ an die Stelle der (60) gesetzt werden.

Ein zweites Mittel die Differentiale mit allgemeinen Exponenten umzuformen bietet uns die FOURIER'sche Formel:

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(u-\lambda)\sqrt{-1}} F(\lambda) d\alpha d\lambda,$$

man wird mittelst derselben jeden Ausdruck von der Form:

$$\left\{ \frac{d^{\mu}}{d v^{\mu}} \left(e^{u x} F(v) \right) \right\}_a$$

umgestalten in

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{-\alpha \lambda \sqrt{-1} + \alpha(x + \alpha \sqrt{-1})} (x + \alpha \sqrt{-1})^{\mu} F(\lambda) d\alpha d\lambda.$$

Ein drittes Mittel zu demselben Zwecke bietet eine von LIOUVILLE im *Journal de l'école polytechnique Tome 13* bewiesene Formel:

$$\int^{\mu} \varphi(v) d v^{\mu} = \frac{d^{-\mu}}{d v^{-\mu}} (\varphi(v)) = \frac{1}{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)} - \int_0^{\infty} \varphi(v + \alpha) \alpha^{\mu-1} d \alpha.$$

in welcher $\Gamma(\mu)$ das EULER'sche Integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-\theta} \theta^{\mu-1} d\theta,$$

μ aber eine positive Zahl bedeutet, und deren Beweis wir hier genau so wie ihn der Verfasser gegeben hat, folgen lassen wollen. Es wird in demselben vorausgesetzt, dass $\varphi(x)$ nicht beliebig sei, sondern einer gewissen Bedingung entspreche; die Entwicklung nämlich dieser Funktion in eine Reihe von Exponentiellen:

$$S [A_m e^{m x}]$$

darf nur negative m oder wenigstens solche imaginäre enthalten, deren reeler Theil negativ ist. Die Nothwendigkeit dieser Bedingung erhellt schon daraus, weil sonst

$$\int_0^{\infty} \varphi(u + \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha$$

unendlich wäre, und ihr Stattfinden wird unmittelbar aus dem Umstande, dass $\varphi(u) = 0$ ist, für $u = \infty$ erkannt.

Um diese Formel zu beweisen, ersetzt man $\varphi(u)$ durch

$$S [A_m e^{m x}]$$

und sucht den Werth des Integrales

$$\int_0^{\infty} \varphi(u + \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha.$$

Bezeichnen wir in der That dieses Integral durch z , so erhalten wir nach der angedeuteten Substitution:

$$z = \int_0^{\infty} S [A_m e^{m(u+\alpha)} \alpha^{\mu-1} d\alpha],$$

oder wenn man die Ordnung der Zeichen S und \int umkehrt, was erlaubt ist wegen der Unabhängigkeit der dadurch angedeuteten Operationen:

$$z = S [A_m e^{m u} \int_0^{\infty} e^{m \alpha} \alpha^{\mu-1} d\alpha].$$

Nun setze man in diesem Integral $m \alpha = -\theta$, indem man bedenkt, dass m immer negativ ist, so erhält man:

$$\int_0^{\infty} e^{m \alpha} \alpha^{\mu-1} d\alpha = (-1)^{\mu} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\theta} \theta^{\mu-1} d\theta}{m^{\mu}} = \frac{(-1)^{\mu} \Gamma(\mu)}{m^{\mu}}.$$

Diess gibt den Werth von z :

$$z = (-1)^{\mu} \Gamma(\mu) S \left[A_m \frac{e^{m u}}{m^{\mu}} \right],$$

und weil

$$S \left[A_n \frac{e^{m v}}{m^\mu} \right] = \int^\mu \varphi(v) d v^\mu$$

ist, so wird

$$z = (-1)^\mu \Gamma(\mu) \int^\mu \varphi(v) d v^\mu,$$

und wenn man anstatt z das hiedurch angedeutete Integral zurücksetzt:

$$\int_0^\infty \varphi(v + \alpha) \alpha^{\mu-1} d \alpha = (-1)^\mu \Gamma(\mu) \int^\mu \varphi(v) d v^\mu, \quad (83)$$

was bereits die Formel ist, die zu beweisen war.

Da hier der Exponent μ positiv vorausgesetzt wurde, so wird man die eben bewiesene Formel nur zur Verwandlung der Differentiale mit negativen Exponenten benützen können. Es gibt aber LIOUVILLE an derselben Stelle eine andere Formel an, mittelst welcher auch Differentialquotienten mit beliebigen positiven Exponenten umgeformt werden können. Diese wird auf ungemein einfache Weise aus der vorigen abgeleitet. In der That nennen wir, um zu einem Ausdruck für

$$\frac{d^\mu}{d v^\mu} (\varphi(v))$$

zu gelangen, n eine beliebige ganze Zahl, die grösser ist als μ , und p diejenige gebrochene, um welche $n - \mu$ überschreitet, so dass

$$\mu = n - p.$$

wird, so hat man auch

$$\frac{d^\mu}{d v^\mu} \varphi(v) = \frac{d^{n-p}}{d v^{n-p}} \varphi(v) = \frac{d^n \int^p \varphi(v) d v^p}{d v^n}.$$

Da p eine positive Zahl ist, so kann man in der Formel (83) μ durch p ersetzen, diess gibt:

$$\int^p \varphi(v) d v^p = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty \varphi(v + \alpha) \alpha^{p-1} d \alpha,$$

und wenn man von beiden Theilen den n ten Differentialquotienten nimmt:

$$\frac{d^\mu}{d v^\mu} \varphi(v) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{d^n \varphi(v + \alpha)}{d v^n} \alpha^{p-1} d \alpha. \quad (84)$$

Von dieser Formel wird man Gebrauch machen, nicht nur wenn man einen Differentialquotienten mit reellem, übrigens beliebigen Exponenten in ein bestimmtes Integral umzustalten wünscht, sondern auch wenn μ eine imaginäre Zahl bedeutet; n wird in diesem Falle eine reelle ganze und positive Zahl, deren numerischer Werth den des reellen Theiles von μ überschreitet; ferner bleibt fortwährend $\mu = n - p$ und

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-\theta} \theta^{p-1} d\theta,$$

d. h. gleich einer endlichen Grösse, wie sich für solche imaginäre p , deren reeler Theil positiv ist, ohne Mühe beweisen lässt. Den numerischen Werth dieses $\Gamma(p)$ zu kennen, ist nicht nöthig, da er sich hier in der Constante der Integration verliert. Ueberhaupt ist zu bemerken, dass es an Mitteln, eine Umgestaltung der erhaltenen Ausdrücke zu bewirken, und diess zwar in die mannigfaltigsten Formen eben nicht fehle, und dass zu diesem Zwecke dienliche Formeln von mehreren Analytisten, vorzüglich von CAUCHY in den *Exercices de mathématique*, LIOUVILLE am erwähnten Orte und Anderen aufgespeichert worden sind. Wir werden selbst in dieser Abhandlung noch einige spezielle derselben zur Sprache bringen.

Nachdem wir die Hauptformen, unter welchen das Integral der Differentialgleichung (55) erscheinen kann, und die allgemeinen Methoden diese Formen in einander zu verwandeln so umständlich erörtert haben, als zu unsern Zwecken nothwendig erschien, kehren wir zur Gleichung (28) des ersten Paragraphes zurück, und wollen auch hier diejenigen Fälle kurz berühren, in welchen das Integral derselben einer Vervollständigung bedarf. Wir bekamen allda:

$$(85) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{u} du = A \log. (u - \alpha) + A' \log. (u - \beta) = \log. [(u - \alpha)^A (u - \beta)^{A'}].$$

$$(u - \alpha)^A (u - \beta)^{A'} e^{u^x} = 0,$$

und gelangten zu einem unvollständigen nur mit einer einzigen willkürlichen Constante versehenen Integral, wenn entweder einer der beiden Exponenten A oder A' , oder beide negativ sind. Es sei zunächst nur A' negativ, so dass die zweite der Gleichungen (85) übergeht in:

$$(86) \quad \frac{(u - \alpha)^A}{(u - \beta)^{A'}} e^{u^x} = 0,$$

und

$$(87) \quad V = \frac{(u - \alpha)^{A-1}}{(u - \beta)^{A'-1}}$$

ausfällt, so erhalten wir dem im Nenner von V enthaltenen Faktor $u - \beta$ entsprechend ein partikuläres Integral der Differentialgleichung:

$$y = \left\{ \frac{d^{A'}}{du^{A'}} \left[e^{u^x} (u - \alpha)^{A-1} \right] \right\}_{\beta},$$

was ein endliches mit einer Exponentielle e^{β^x} multiplizirtes algebraisches Polynom gibt, so oft entweder A oder A' eine ganze Zahl bedeutet, im entgegengesetzten Falle aber in eine Reihe von der Sorte der halbconvergirenden übergeht, anstatt deren man irgend

eines der früher angezeigten Mittel in Anwendung bringend, ein bestimmtes Integral wird substituiren können. Man wird sohin die Formeln (39) und (40) des ersten Paragraphes durch folgende ersetzen können:

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{-\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1} du}{(u-\beta)^{A'+1}} + C_2 \left\{ \frac{d^{A'}}{du^{A'}} [e^{ux} (u-\alpha)^{A-1}] \right\}_{\beta} \quad (89)$$

$$y = C_1 \int_0^{+\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1} du}{(u-\beta)^{A'+1}} + C_2 \left\{ \frac{d^{A'}}{du^{A'}} [e^{ux} (u-\alpha)^{A-1}] \right\}_{\beta},$$

die nun als Integral der Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} (a_1 + b_1 x) + y (a_0 + b_0 x) = 0$$

dastehen, und deren erste für positive, die andere für negative x giltig ist.

Wären A und A' beide negativ, so dass an die Stelle der Gleichungen (86) und (87) folgende andere treten:

$$\frac{e^{ux}}{(u-\alpha)^A (u-\beta)^{A'}} = 0$$

und

$$V = \frac{e^{ux}}{(u-\alpha)^{A+1} (u-\beta)^{A'+1}},$$

so erscheint das Integral derselben Differentialgleichung in folgender mit zwei willkürlichen Constanten versehenen Form:

$$y = C_1 \left\{ \frac{d^A}{du^A} \left[\frac{e^{ux}}{(u-\beta)^{A'+1}} \right] \right\}_{\alpha} + C_2 \left\{ \frac{d^{A'}}{du^{A'}} \left[\frac{e^{ux}}{(u-\alpha)^{A+1}} \right] \right\}_{\beta}, \quad (90)$$

wofür man dann wieder bestimmte Integrale wird einführen können. Verschwindet einer der beiden Exponenten, etwa A' so ist diess ein Zeichen, dass die mit U_0 und U_1 bezeichneten Polynome den gemeinschaftlichen Faktor $u - \beta$ besitzen, dass also die Exponentielle $e^{\beta x}$ ein partikuläres Integral sei. Wir erhalten also den mit zwei Constanten versehenen Werth von y :

$$y = C_1 e^{\beta x} + C_2 \int_0^{-\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}}{u-\beta} du \quad (91)$$

für positive A und positive x ,

$$y = C_1 e^{\beta x} + C_2 \int_0^{+\infty} e^{ux} \frac{(u-\alpha)^{A-1}}{u-\beta} du \quad (92)$$

für positive A und negative x ,

$$y = C_1 e^{\beta x} + C_2 \left\{ \frac{d^A}{du^A} \left[\frac{e^{ux}}{u-\beta} \right] \right\}_{\alpha} \quad (93)$$

für negative A und beliebige x . Es wird hier gleich wie in den übrigen Fällen vorausgesetzt, dass wenn irgend einer der Exponenten A oder A' negativ ausfallen sollte, man alsogleich anstatt desselben $-A$ schreibt, und somit in den Formeln (91), (92) und (93) die vorkommende A bereits positiv gedacht werden müssen.

Wenn endlich $\beta = \alpha$ ist, also die Gleichung $U_1 = 0$ gleiche Wurzeln hat, so wird man zur Vervollständigung des, nur mit einer einzigen willkürlichen Constante verbundenen Integrales, die allbekannte Methode der Variation der willkürlichen Constanten in Anwendung bringen.

Es ist nur noch übrig einige Aufmerksamkeit der Differentialgleichung

$$(94) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + b_1 x \frac{dy}{dx} + y (a_0 + b_0 x) = 0,$$

die bereits im ersten Paragraphen integrirt wurde, und in ein paar speziellen Fällen ein unvollständiges Integral gab, zu schenken. Wir erhielten an dem bezeichneten Orte:

$$(95) \quad V = (b_1 u + b_0)^{A-1} e^{u x + \frac{u^2}{2b_1} - \frac{b_0 u}{b_1^2}},$$

und gelangten zu einem, nur mit einer einzigen Constante versehenen, partikulären Integrale, ausgedrückt durch die Formeln (69) und (70) des ersten Paragraphes, erstens für verschwindende, und zweitens für negative Werthe von A .

Im ersten dieser beiden Fälle haben die Polynome U_0 und U_1 den gemeinschaftlichen Faktor $b_0 + b_1 u$, folglich wird die Exponentielle

$$e^{-\frac{b_0}{b_1} x}$$

der Differentialgleichung Genüge leisten; es tritt somit für $A = 0$ an die Stelle der Formel (69, §. 1) folgende andere:

$$(96) \quad y = C_1 e^{-\frac{b_0}{b_1} x} + C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2}{e^{2\frac{b_0}{b_1} v} + v(x - \frac{b_0}{b_1})} \frac{dv}{b_0 + b_1 v},$$

die jetzt als allgemeines Integral der Gleichung (94) dasteht, wenn b_1 positiv und zwischen den Coefficienten a_0 , b_0 und b_1 folgende Relation vorhanden ist:

$$(97) \quad A = \frac{a_0}{b_1} + \frac{b_0^2}{b_1^3} = 0.$$

Ist dagegen b_1 negativ, und handelt es sich somit um die Gleichung:

$$(98) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - b_1 x \frac{dy}{dx} + y (a_0 + b_0 x) = 0,$$

während die Relation (97) fortbesteht, so bekommen wir anstatt der Formel (70, §. 1) folgende vollständigere:

$$y = C_1 e^{\frac{b_0}{b_1} x} + C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2b_1} + u \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)} \frac{du}{b_0 - b_1 u}. \quad (99)$$

Im zweiten Falle, wo A negativ ist, wo also an die Stelle der Formel (95) die andere:

$$V = \frac{e^{u x + \frac{u^2}{2b_1} - \frac{b_0 u}{b_1}}}{b_1^{A+1} \left(u + \frac{b_0}{b_1}\right)^{A+1}} \quad (100)$$

tritt, erscheint ein partikuläres Integral der Gleichung (94) in Form eines Differentialquotienten:

$$y = C \left\{ \frac{d^A}{d u^A} \left[e^u \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right) + \frac{u^2}{2b_1} \right] \right\}_{-\frac{b_0}{b_1}}, \quad (101)$$

die auch eine Verwandlung gestattet in ein Produkt aus einer Exponentielle in eine nach absteigenden Potenzen von $x - \frac{b_0}{b_1}$ geordnete Reihe, nämlich:

$$y = C e^{-\frac{b_0}{b_1} x + \frac{3b_0^2}{2b_1^3}} \left[\left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)^A - A \frac{b_0}{b_1^2} \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)^{A-1} + \frac{A(A-1)}{2} \left(\frac{b_0^2}{b_1^4} + \frac{1}{b_1}\right) \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)^{A-2} - \frac{A(A-1)(A-2)}{2 \cdot 3} \left(\frac{b_0^3}{b_1^6} + \frac{3b_0}{b_1^3}\right) \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)^{A-3} + \dots \right], \quad (102)$$

welche jederzeit abbricht, wenn A eine ganze positive Zahl ist, im entgegengesetzten Falle aber unbrauchbar wird, was schon der unmittelbare Anblick ihres $2n$ ten und $2n + 1$ ten Gliedes lehrt, denen wir, um den ganzen Bau der Reihe klar vor Augen zu haben, hier eine Stelle gönnen:

$$\frac{A(A-1) \dots (A-2n+1)}{2 \dots 2n} \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)^{A-2n} \left(\frac{b_0^{2n}}{b_1^{4n}} + \frac{2n(2n-1)}{2} \frac{b_0^{2n-2}}{b_1^{4n-3}} + \dots \right); \quad (103)$$

$$+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2 \cdot 4} \frac{b_0^{2n-4}}{b_1^{4n-6}} + \dots + \frac{2n(2n-1)(2n-2) \dots 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{1}{b_1^n};$$

$$- \frac{A(A-1) \dots (A-2n)}{2 \cdot 3 \dots 2n+1} \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)^{A-2n-1} \left(\frac{b_0^{2n+1}}{b_1^{4n+2}} + \frac{(2n+1)2n}{2} \frac{b_0^{2n-1}}{b_1^{4n-1}} + \dots \right); \quad (104)$$

$$+ \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)}{2 \cdot 4} \frac{b_0^{2n-3}}{b_1^{4n-4}} + \frac{(2n+1)(2n)(2n-1) \dots 2b_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{b_0}{b_1^{n+2}}.$$

Mit Hilfe der Formeln (103) und (104), die das $2n$ te und das $2n + 1$ te Glied der Reihe geben, wird man nun das entsprechende partikuläre Integral jedesmal construiren

können, wenn A eine beliebig gross gedachte ganze Zahl ist; im entgegengesetzten Falle wird man besser thun, einen Ausdruck desselben partikulären Werthes in Form eines bestimmten Integrals anstatt des (101) zu substituiren, was hier keinen Schwierigkeiten unterliegt. Wir verwenden zu diesem Zwecke, nur um ein bisher noch nicht gebrauchtes Mittel zur Sprache zu bringen, das LAPLACE'sche Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

woraus durch Substitution von $az + b$ anstatt z hervorgeht:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 z^2 - 2abz} dz = e^{\frac{b^2}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Hieraus erhält man

$$(105) \quad e^{\frac{u^2}{2b_1}} = \sqrt{\frac{b_1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{b_1}{2} z^2 - uz} dz.$$

Den durch diese Formel gegebenen Werth führen wir nunmehr in die Gleichung (101) ein und erhalten alsbald:

$$y = C \int_{-\infty}^{+\infty} z - \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)^A e^{-\frac{b_1}{2} z^2 + \frac{b_0}{b_1} \left[z - \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)\right]} dz;$$

das allgemeine Integral der Gleichung (94) wird daher jetzt so aussehen:

$$(106) \quad y = C_1 \int_{-\infty \sqrt{-1}}^{+\infty \sqrt{-1}} e^{\frac{u^2}{2b_1} + u \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)} \frac{du}{(b_0 + b_1 u)^{A+1}} + \\ + C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[z - \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)\right]^A e^{-\frac{b_1}{2} z^2 + \frac{b_0}{b_1} \left[z - \left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)\right]} dz.$$

Eben so erhalten wir das allgemeine Integral der Gleichung (98), indem wir zu-
föhrerst einen partikulären Werth aufschreiben in Form eines A^{ten} Differentialquotienten:

$$(107) \quad y = C \left\{ \frac{d^A}{du^A} \left[e^{\left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)u - \frac{u^2}{2b_1}} \right] \right\}_{\frac{b_0}{b_1}}$$

welchen wir dann mittelst der FOURIER'schen Formel in ein bestimmtes Integral umgestalten. Wir bekommen mittelst derselben:

$$e^{-\frac{u^2}{2b_1}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(u-\lambda) \sqrt{-1}} e^{\frac{\lambda^2}{2b_1}} d\alpha d\lambda,$$

diess in die Gleichung (107) gesetzt gibt:

$$y = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\alpha \sqrt{-1} + x - \frac{b_0}{b_1} \right)^A e^{\alpha \left(\frac{b_0}{b_1} - \lambda \right) \sqrt{-1} - \frac{\lambda^2}{2b_1} + \frac{b_0}{b_1} \left(x - \frac{b_0}{b_1} \right)} d\alpha d\lambda. \quad (108)$$

Hier lässt sich eine Integration nach λ bewerkstelligen, und man bekommt namentlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2b_1} - \alpha \lambda \sqrt{-1}} d\lambda = \sqrt{2b_1\pi} e^{-\frac{\alpha^2 b_1}{2}},$$

somit

$$y = C \frac{\sqrt{2b_1\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\alpha \sqrt{-1} + x - \frac{b_0}{b_1} \right)^A e^{-\frac{\alpha^2 b_1}{2} + \frac{\alpha b_0}{b_1} \sqrt{-1} + \frac{b_0}{b_1} \left(x - \frac{b_0}{b_1} \right)} d\alpha,$$

wornach der allgemeine, mit zwei Constanten versehene Werth von y so aussieht:

$$y = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2b_1} + v \left(x - \frac{b_0}{b_1} \right)} \frac{dv}{(b_0 - b_1 v)^{A+1}} + \quad (109)$$

$$+ C_2 e^{\frac{b_0}{b_1} \left(x - \frac{b_0}{b_1} \right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\alpha \sqrt{-1} + x - \frac{b_0}{b_1} \right)^A e^{-\frac{\alpha^2 b_1}{2} + \frac{\alpha b_0}{b_1} \sqrt{-1}} d\alpha.$$

Sowohl diese Formel als auch die (99) enthält als Bestandtheil ein bestimmtes Integral, bei dem die unter dem Integralzeichen befindliche Funktion innerhalb der Grenzen durch Unendlich durchgeht; solche Formeln sind nun mindestens nicht bequem und werden daher gerne vermieden; auf dem Felde jedoch, welches wir hier betreten haben, würde man sich übereilen, wenn man dieselben unbedingt verwerfen würde, da es nicht schwer ist, eine Verwandlung zu bewerkstelligen in eine andere dem erwähnten Uebelstande nicht unterliegende Form, womit sich dann gelegentlich noch andere Vortheile verbinden lassen, die ins Detail zu verfolgen nicht der Zweck dieser Schrift ist. Es soll daher hier nur obenhin der Weg angedeutet werden, den man bei ähnlichen Integralen zu gehen hat, und namentlich wollen wir zuörderst das in der Formel (99) enthaltene Integral der Differentialgleichung (98) unter der bestehenden Beziehgungsgleichung (97) betrachten, da in Folge der letztern

$$a_0 = -\frac{b_0^2}{b_1^2}$$

ist, so geht die (98), nachdem man den eben ermittelten Werth für a_0 eingeführt hat, über in:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - b_1 x \frac{dy}{dx} + y \left(-\frac{b_0^2}{b_1^2} + b_0 x \right) = 0, \quad (110)$$

und dieser entspricht wenigstens Ein tadelloses partikuläres Integral:

$$y = C_1 e^{\frac{b_0}{b_1} x},$$

wie man sich auch durch unmittelbare Substitution leicht überzeugen kann; anstatt des zweiten partikulären Integrales jedoch, welches in der Formel (99) enthalten ist, und die so eben erwähnte Unzukömmlichkeit darbietet, können wir uns, von einer sehr bekannten Methode Gebrauch machend, ein anderes verschaffen. Ist nämlich allgemein die Gleichung zu integriren:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = 0,$$

und hat man ein partikuläres Integral

$$y = y_1$$

gefunden, so substituirt man

$$y = y_1 \int z \, dx,$$

und die vorgelegte Gleichung geht nach gehöriger Reduktion über in:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2 \, dy_1}{y_1} - X_1$$

und daraus durch Integration:

$$\log. \frac{z}{k} = -\log. y_1^2 - \int X_1 \, dx,$$

unter k eine willkürliche Constante verstanden.

In der Gleichung (110) ist nun

$$y_1 = e^{\frac{b_0}{b_1} x}, \quad X_1 = -b_1 x,$$

und somit

$$\log. \frac{z}{k} = -2 \frac{b_0}{b_1} x + \frac{b_1 x^2}{2},$$

$$z = k e^{-2 \frac{b_0}{b_1} x + \frac{b_1 x^2}{2}},$$

$$\int z \, dx = k \int e^{-2 \frac{b_0}{b_1} x + \frac{b_1 x^2}{2}} \, dx + C_1,$$

also

$$(111) \quad y = y_1 \int z \, dx = C_1 e^{\frac{b_0}{b_1} x} + C_2 e^{\frac{b_0}{b_1} x} \int e^{-2 \frac{b_0}{b_1} x + \frac{b_1 x^2}{2}} \, dx,$$

eine Formel, in welcher C_2 anstatt $C_1 k$ geschrieben ist, und die an die Stelle der (99) gesetzt werden kann. Allein dasselbe auf diesem Wege erhaltene allgemeine Integral hätten wir aber auch aus der Formel (99) unmittelbar ableiten können, ohne von der Methode der Variation der willkürlichen Constanten Gebrauch zu machen, in der That setzen wir:

$$\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2b_1}} + v \left(x - \frac{b_0}{b_1} \right) \frac{dv}{b_0 - b_1 v}, \quad (112)$$

und lassen beide Theile dieser Gleichung diejenige Reihe von Rechnungsoperationen erfahren, die durch die Formel:

$$b_0 - b_1 \frac{d}{dx}$$

angedeutet ist, so erhalten wir:

$$b_0 \xi - \frac{b_1 d \xi}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2b_1}} + v \left(x - \frac{b_0}{b_1} \right) dv = \sqrt{2b_1 \pi} e^{\frac{b_1}{2}} \left(x - \frac{b_0}{b_1} \right)^2. \quad (113)$$

Diese Differentialgleichung besitzt den integrierenden Faktor

$$e^{-\frac{b_0}{b_1} x},$$

und gibt mit demselben multipliziert und integrirt:

$$- b_1 \xi e^{-\frac{b_0}{b_1} x} = \sqrt{2b_1 \pi} \frac{b_0^2}{e^{2b_1^3}} \int e^{\frac{b_1}{2} x^2} - \frac{2b_0 x}{b_1} dx + C,$$

hieraus

$$\xi = - \frac{C}{b_1} e^{\frac{b_0}{b_1} x} - \sqrt{\frac{2\pi}{b_1}} \frac{b_0^2}{e^{2b_1^3}} e^{\frac{b_0 x}{b_1}} \int e^{\frac{b_1}{2} x^2} - \frac{2b_0 x}{b_1} dx; \quad (114)$$

diess ist aber ein Ausdruck, der mit dem obigen genau einerlei Form hat; der mit ξ bezeichnete partikuläre Werth hat daher die Eigenschaft trotz seiner scheinbaren Unbrauchbarkeit mit Hilfe einer passenden Transformation sogar das allgemeine Integral der Differentialgleichung (110) liefern zu können, so dass also hier aus einem einzigen gehörig umgestalteten partikulären Werthe, deren zwei hervorgehen, und es ist nicht schwer Beispiele aufzufinden, in denen auf ähnliche Weise eine Zerspaltung von einem partikulären Werthe, in deren drei, viere u. s. w. Statt findet, und offenbar verdanken wir diesen glücklichen Umstand der bekannten Vieldeutigkeit solcher bestimmter Integrale, bei denen die Funktion innerhalb der Integrationsgrenzen durch Unendlich durchgeht; hiedurch stellt sich aber dasjenige was auf einem andern Felde als Uebelstand zu betrachten wäre bei der Integration der Differentialgleichungen als Vortheil heraus. Auf ähnliche Weise können wir auch den ersten Bestandtheil des Werthes von y in der Formel (109) behandeln, wir setzen nämlich:

$$\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2}{e^{2b_1}} + v \left(x - \frac{b_0}{b_1} \right) \frac{dv}{(b_0 - b_1 v)^{A+1}},$$

und bringen dann an beide Theile dieser Gleichung diejenige Reihe von Rechnungsoperationen an, welche durch die Formel:

$$\left(b_0 - b_1 \frac{d}{dx} \right)^{A+1}$$

angedeutet ist, und erhalten so:

$$(115) \quad \left(b_0 - b_1 \frac{d}{dx}\right)^{A+1} \xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2b_1} + v\left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)} dv = \sqrt{2b_1} \pi e^{\frac{b_1}{2}\left(x - \frac{b_0}{b_1}\right)^2}.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung von linearer Form und mit constanten Coefficienten besteht wie bekannt aus zwei Theilen; dem eine gewisse Anzahl willkürlicher Constanten enthaltenden Integrale der reduzirten Gleichung, und einem singulären Werthe, der keine Constante in sich schliesst, auch den Zusatz einer solchen nicht verträgt, und die Eigenschaft hat der completten Gleichung Genüge zu leisten. Wir finden diesen letztern mittelst der FOURIER'schen Formel, nach welcher:

$$\xi = \sqrt{\frac{b_1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}}}{(b_0 - b_1 \alpha \sqrt{-1})^{A+1}} e^{\frac{b_1}{2}\left(\lambda - \frac{b_0}{b_1}\right)^2} d\alpha d\lambda$$

ein solcher Werth ist, wie man sich durch wirkliches Differenziren und Bilden des im ersten Theile der Gleichung (115) enthaltenen Ausdruckes:

$$\left(b_0 - b_1 \frac{d}{dx}\right)^{A+1} \xi,$$

alsogleich überzeugen kann. Der erstere aber erscheint in Form eines Productes aus einer Exponentielle:

$$e^{\frac{b_1}{2} x}$$

in eine ganze Funktion von x , in der die Constanten der Integration enthalten sind, welche man offenbar nicht so wird zu wählen haben, dass ξ dem oben bezeichneten bestimmten Integrale gleich wird, denn dieses ist vieldeutig, sondern so, dass der Differentialgleichung Genüge geleistet wird. Wir können hier nicht in die Einzelheiten dieser Rechnung eingehen, denn diess würde ermüden ohne deshalb erschöpfend alle vorkommende Fälle zu umfassen.

Und so wären wir denn in allen Fällen zu den allgemeinen, mit der gehörigen Anzahl von Constanten versehenen Integralen der Gleichungen gelangt, die im ersten Paragraphen der Betrachtung unterworfen wurden. Wir können also allgemein annehmen, dass eine jede Differentialgleichung von beliebig hoher Ordnung und mit Coefficienten, die nach der unabhängigen Variablen vom ersten Grade sind, durch unsere Methode vollständig integrirt werden könne, und dass diejenigen partikulären Integrale, aus welchen sich das Allgemeine zusammensetzt in drei verschiedenen Formen erscheinen, nämlich: in der eines bestimmten Integrales, ferner in der eines Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl, und endlich als Produkt aus einer Exponentielle in eine endliche oder unendliche, nach absteigenden Potenzen der Variablen geordneten Reihe. Wir wollen nunmehr die Wirksamkeit dieser Methode auch bei Gleichungen mit anders gestellten Coefficienten erproben.

§. 3.

Integration der Differentialgleichungen der zweiten Ordnung von der Form.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x (A_1 + B_1 x^m) \frac{dy}{dx} + (A_0 + B_0 x^m + C_0 x^{2m}) y = 0, \quad (1)$$

für beliebige Werthe des Exponenten m.

Die in den ersten zwei Paragraphen vorgetragene Integrationsmethode lässt sich nicht nur anwenden bei solchen Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze Functionen der ersten Ordnung der unabhängigen Veränderlichen sind, sondern auch bei mehreren anderen, die sich durch passende Substitution auf die Form solcher Gleichungen zurück bringen lassen, eine solche ist aber die Differentialgleichung (1) was auch immer die in ihr enthaltenen Coefficienten und der Exponent m für Werthe haben mögen, nur werden um dieselbe in eine solche mit linearen Coefficienten zu verwandeln, zwei aufeinander folgende Substitutionen nothwendig seyn, wir setzen nämlich:

$$x^m = t,$$

somit

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot m x^{m-1}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{dt^2} m^2 x^{2(m-1)} + \frac{dy}{dt} m(m-1) x^{m-2}, \end{aligned}$$

hiedurch geht die (1) über in:

$$m^2 t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} [t (A_1 m (m-1)) - m B_1 t^2] + (A_0 + B_0 t + C_0 t^2) y = 0, \quad (2)$$

hier setzen wir ferner:

$$y = t^k \cdot z$$

somit

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= t^k \frac{dz}{dt} + k t^{k-1} z, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= t^k \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 k t^{k-1} \frac{dz}{dt} + k(k-1) t^{k-2} z, \end{aligned}$$

diess in die Gleichung substituirt gibt:

$$m^2 t^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + t \frac{dz}{dt} [2 k m^2 + A_1 m + m(m-1) - m B_1 t]$$

$$+ z [k(k-1) m^2 + k (A_1 m + m(m-1)) + A_0 - B_1 k m t + B_0 t + C_0 t^2] = 0,$$

endlich wählen wir den bisher unbestimmt gelassenen Exponenten k so, dass

$$k(k-1)m^2 + k[A_1 m + m(m-1)] + A_0 = 0$$

wird, hiedurch wird eine weitere Division durch t möglich und wir erhalten folgende Differentialgleichung mit linearen Coefficienten:

$$(3) \quad m^2 t \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} [2k m^2 + A_1 m + m(m-1) - m B_1 t] + z(B_0 - m k B_1 + C_0 t) = 0$$

Hiermit wäre die Gleichung (1) vermittelt zweier auf einander folgender Substitutionen auf die Form der (28) des ersten Paragraphes gebracht worden, und kann somit genau auf dieselbe Weise integrirt werden wie jene. Auch kann bemerkt werden, dass man wegen des doppelten Werthes den k annimmt, welcher eine beliebige der zwei Wurzeln der Gleichung des zweiten Grades:

$$(4) \quad m^2 k^2 + m k (A_1 - 1) + A_0 = 0$$

ist, oft nur ein Integral der Differentialgleichung mit einer einzigen Constante benötigt, in welchem k vorkommen muss, und welches, wenn man demselben alle beide aus der Gleichung (4) hervorgehende Werthe der Reihe nach beilegt, zwei von einander verschiedene partikuläre Integrale liefert die zusammengesetzt das Allgemeine bilden. Es sei uns gestattet, um die ausnehmende Wirksamkeit der vorgetragene Methode in gewissen speziellen Fällen in ein helleres Licht zu stellen, als Beispiel diejenige Differentialgleichung der Betrachtung zu unterwerfen, die unter den Namen der RICATI'schen seit Langen bekannt geworden ist, und an der mehrere Mathematiker ihre Kräfte versucht haben:

$$(5) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \pm a^2 x^n y = 0.$$

Man fand, dass diese Gleichung in besondern Fällen in endlicher Form integrirbar sei, und namentlich so oft der Exponent n folgende Form besitzt:

$$(6) \quad n = -\frac{4r}{2r-1}$$

unter r eine beliebige ganze und positive Zahl verstanden, und das zwar mittelst r auf einander folgender Transformationen die nicht unbedeutende Rechnungsentwicklungen erheischen. Auch entwickelte man das Integral der RICATI'schen Gleichung in eine Reihe und suchte diese mittelst bestimmter Integrale zu summiren. (Man sehe die Arbeiten von KUMMER in *Crelles Journal* und LIOUVILLE im *Journal de l'école polytechnique*.) Unsere Methode führt hier unmittelbar beinahe ohne Rechnung zum Ziele. Es ist nämlich die RICATI'sche Gleichung ein sehr spezieller Fall der Gleichung (1) und geht aus derselben hervor, wenn man:

$$(7) \quad \begin{aligned} A_1 &= B_1 = A_0 = B_0 = 0, \\ C_0 &= \mp a^2, \quad n = 2m - 2, \end{aligned}$$

somit

$$m = \frac{n+2}{2}$$

setzt; woraus zu schliessen, dass dieselbe durch die Substitution:

$$t = x^{\frac{n+2}{2}}$$

umgestaltet werde in

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{n}{n+2} \frac{dy}{dt} \pm \frac{4a^2}{(n+2)^2} t y = 0. \quad (8)$$

Diess ist aber genau die Gleichung (48) des ersten Paragraphes, die wir dort un-
ständiglich integriren gelehrt haben, nur steht $\frac{n}{n+2}$ anstatt a und $\frac{2a}{n+2}$ anstatt b . Man
wird daher das Integral derselben, je nach der verschiedenen Beschaffenheit der darin
vorkommenden Coefficienten, aus einer der Formeln (56), (60), (61) des ersten Para-
graphes, oder (59), (60), (66), (76) des zweiten Paragraphes ableiten. Namentlich,
wenn $\frac{n}{n+2}$ positiv ist, und von den beiden Zeichen \pm in der Gleichung (7) das un-
tere gilt, dann tritt die (56, §. 1) in Anwendung und gibt:

$$y = C_1 \int_{-\frac{2a}{n+2}}^{+\frac{2a}{n+2}} \left(u^2 - \frac{4a^2}{(n+2)^2} \right)^{-\frac{n+4}{2n+4}} e^{ut} du + \quad (9)$$

$$+ C_2 \int_{\frac{2a}{n+2}}^{\infty} \left(u^2 - \frac{4a^2}{(n+2)^2} \right)^{-\frac{n+4}{2n+4}} e^{-u\sqrt{v}u} du,$$

dagegen wird man die (60) und (61) verwenden müssen, wenn von den beiden Zeichen
 \pm das obere gegeben ist, und man erhält folgenden Werth für y :

$$y = \int_0^{\frac{2a}{n+2}} \left(\frac{4a^2}{(n+2)^2} - v^2 \right)^{-\frac{n+4}{2n+4}} [B_1 \sin. vt + B_2 \cos. vt] dv + \quad (10)$$

$$+ C_3 \int_0^{+\infty} \left(v^2 + \frac{4a^2}{(n+2)^2} \right)^{-\frac{n+4}{2n+4}} e^{vt} dv.$$

Von den beiden Zeichen, die der Grenze des zweiten bestimmten Integrales an-
hängen, ist das obere für positive, das untere für negative t zu nehmen, B_1 , C_3 und B_2 sind
Constanten, von welchen die beiden ersten die Beziehungsgleichung:

$$B_1 + C_3 = 0 \quad (11)$$

erfüllen müssen, die dritte B_2 willkürlich bleibt.

Um hieraus das Integral der RICATI'schen Gleichung abzuleiten, ist nur nöthig anstatt t seinen Werth in Funktion von x , d. h. $x^{\frac{n+2}{2}}$ einzuführen. Thun wir diess, und setzen zugleich den positiven Werth von

$$(12) \quad \sqrt{\frac{4a^2}{(n+2)^2}} = b$$

führen ferner v in bv verwandelnd, eine neue Variable ein, um geschmeidigere Formeln zu erhalten, so bekommen wir als Resultat:

$$(13) \quad y = \int_0^1 (1-v^2)^{-\frac{n+4}{2n+4}} \left[B_1 \sin. b v x^{\frac{n+2}{2}} + B_2 \cos. b v x^{\frac{n+2}{2}} \right] dv +$$

$$+ C_3 \int_0^{+\infty} (v^2+1)^{-\frac{n+4}{2n+4}} e^{bv x^{\frac{n+2}{2}}} dv,$$

$$(14) \quad y = \int_{-1}^{+1} C_1 (v^2-1)^{-\frac{n+4}{2n+4}} e^{bv x^{\frac{n+2}{2}}} dv + C_2 \int_1^{\infty} (v^2-1)^{-\frac{n+4}{2n+4}} e^{\mp b v x^{\frac{n+2}{2}}} dv.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen drückt das Integrale aus von:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 x^n y = 0,$$

die zweite von folgender andern Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + e^2 x^n y = 0.$$

Von den beiden Zeichen \mp ist das obere oder untere zu wählen, letzteres aber nur dann, wenn der Werth von x so beschaffen ist, dass $x^{\frac{n+2}{2}}$ negativ wird. Ferner wird vorausgesetzt, dass der Bruch $\frac{n}{n+2}$ positiv ist, dass somit n entweder zwischen die Grenzen 0 und ∞ , oder zwischen -2 und $-\infty$ fällt. Wäre im Gegentheil n zwischen 0 und -2 enthalten, somit dieser eben erwähnte Bruch negativ, dann treten die im zweiten Paragraphen entwickelten Formeln, und namentlich die (76) in Anwendung, in der wir nur x in $x^{\frac{n+2}{2}}$ und a in $-\frac{n}{n+2}$ zu verwandeln haben, um zu erhalten:

$$(15) \quad y = C_1 e^{bx^{\frac{n+2}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda b (x^{\frac{n+2}{2}} - \lambda)^{-\frac{2}{2(n+2)}} \lambda^{-\frac{n}{2(n+2)}} d\lambda +$$

$$+ C_2 e^{-bx^{\frac{n+2}{2}}} \int_0^{\infty} e^{2\lambda b (x^{\frac{n+2}{2}} - \lambda)^{-\frac{2}{2(n+2)}} \lambda^{-\frac{n}{2(n+2)}} d\lambda.$$

Wir sagten, dass nach dem, was schon von älteren Analysten gefunden wurde, RICCATI's Gleichung integrirt werden könne in endlicher Form, so oft n eine Zahl ist, von folgender Form:

$$n = - \frac{4r}{2r \pm 1},$$

unter r eine ganze positive Zahl verstanden. Diess bestätigt auch unsere Analysis, denn es wird für solche Werthe von n der Bruch:

$$\frac{n}{n \pm 2} = \mp 2r,$$

gleich einer ganzen und geraden Zahl; wir wissen aber, dass in diesem Falle an die Stelle der (15) eine andere Form trete, die keine bestimmten Integrale, sondern vielmehr zwei mit willkürlichen Constanten multiplizierte Produkte enthält aus Exponentialen in ganze Funktionen von x , und die man aus den Formeln (60) und (66) §. 2 ableitet, $\frac{a}{2}$ durch $\pm r$ ersetzend und zugleich x in $x^{\frac{n+2}{2}}$ verwandelnd, die jedoch auch in der Formel (15) enthalten sind, und aus ihr abgeleitet werden können durch Entwicklung der $-\frac{n}{2n+4}$ ten Potenz des Binomes $(x^{\frac{n+2}{2}} - \lambda)$ mittelst der Binomialformel, und Berechnung der sodann zum Vorschein kommenden bestimmten Integrale. — Man sieht also, dass die RICCATI'sche Gleichung am aller bequemsten auf den von uns eingeschlagenen Wege integrirt werden könne.

Es lassen sich nicht bloss Gleichungen des zweiten Grades von der Form der (1), sondern auch viele andere höheren Ordnungen angehörige, von ähnlichem Baue auf dieselbe Weise mittelst der zwei früher gebrauchten Substitutionen, einzeln oder zusammen genommen angewendet, behandeln; z. B. folgende Gleichung der dritten Ordnung:

$$x^3 \frac{d^3 y}{d x^3} + x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} (A_2 + B_2 x^m) + x \frac{d y}{d x} (A_1 + B_1 x^m + C_1 x^{2m}) + \quad (16)$$

$$+ y (A_0 + B_0 x^m + C_0 x^{2m} + D_0 x^{3m}) = 0,$$

die, wenn man $x^m = t$ setzt, unmittelbar übergeht in folgende Einfachere mit der unabhängigen Veränderlichen t , wenn man genau so verfährt wie bei der ähnlich gebauten Gleichung (1):

$$m^3 t^3 \frac{d^3 y}{d t^3} + m^2 t^2 \frac{d^2 y}{d t^2} (3(m-1) + A_2 + B_2 t) + \quad (17)$$

$$+ m t \frac{d y}{d t} [(m-1)(m-2) + (m-1)A_2 + A_1 + (B_2(m-1) + B_1)t + C_1 t^2] +$$

$$+ y (A_0 + B t + C_0 t^2 + D_0 t^3) = 0,$$

und sich in eine nach unserer Methode integrirbare verwandelt, wenn

$$(18) \quad (m-1)(m-2) + (m-1)A_3 + A_1 = 0,$$

und

$$A_0 = B_0 = 0$$

wird, welche aber auch noch mittelst der zweiten Substitution:

$$y = t^r z$$

behandelt werden kann, wodurch sich die drei Bedingungsgleichungen auf zwei zurückziehen.

Um hier wieder ein einfaches Beispiel anzuführen, wählen wir die Gleichung:

$$(19) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \pm a^3 x^3 y = 0,$$

die in der (16) als spezieller Fall enthalten ist, und aus ihr hervorgeht, wenn man

$$D_0 = \pm a^3, m = 2, A_0 = B_0 = C_0 = A_1 = B_1 = C_1 = A_2 = B_2 = 0$$

setzt, somit durch die Substitution:

$$x^2 = t$$

verwandelt wird in:

$$(20) \quad 8t \frac{d^3 y}{dt^3} + 12 \frac{d^2 y}{dt^2} \pm a^3 t y = 0;$$

und um die Integration dieser letzteren handelt es sich jetzt.

Nun haben wir aber hier

$$(21) \quad U_0 = 12v^2, \quad U_1 = 8v^3 \pm a^3, \\ \int \frac{U_0}{U_1} dv = \frac{1}{2} \log. (v^3 \pm \frac{1}{8} a^3),$$

und zur Bestimmung der Integrationsgrenzen die Gleichung:

$$(22) \quad e^{vx} \sqrt{v^3 \pm \frac{1}{8} a^3} = 0.$$

Die Wurzeln dieser letzteren können bezeichnet werden mit:

$$r_1, r_2, r_3, \overline{+} \infty;$$

die drei ersten davon deuten die Wurzeln der Gleichung:

$$v^3 \pm \frac{1}{8} a^3 = 0$$

an, bei der vierten ist das obere oder untere Zeichen zu wählen, je nachdem x positiv oder negativ ist. Es kann daher das allgemeine Integral der Gleichung (20) auf folgende Weise geschrieben werden:

$$y = C_1 \int_0^{\bar{+\infty}} \frac{e^{U t} d u}{\sqrt{u^3 \pm \frac{1}{8} a^3}} + C_2 \int_0^{r_1} \frac{e^{U t} d u}{\sqrt{u^3 \pm \frac{1}{8} a^3}} +$$

$$+ C_3 \int_0^{r_2} \frac{e^{U t} d u}{\sqrt{u^3 \pm \frac{1}{8} a^3}} + C_4 \int_0^{r_3} \frac{e^{U t} d u}{\sqrt{u^3 \pm \frac{1}{8} a^3}}. \quad (23)$$

Die Constanten C_1, C_2, C_3, C_4 hängen durch die Bedingungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0, \quad (24)$$

oder durch folgende andere:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \frac{b}{\sqrt{\pm \frac{1}{8} a^3}} \quad (25)$$

zusammen; ersteres, wenn der zweite Theil der Gleichung (16) wirklich Null ist, letzteres, wenn derselbe von Null verschieden und gleich einer Constante b wird. Der erste Theil des viertheiligen Werthes von y , d. h. das Integral

$$\int_0^{\bar{+\infty}} \frac{e^{U t} d u}{\sqrt{u^3 \pm \frac{1}{8} a^3}},$$

bietet mitunter die Unbequemlichkeit dar aus zwei Theilen, einem reelen und einem imaginären zu bestehen; dieser auszuweichen wird es gestattet seyn, demselben, wo diess nothwendig ist, eines der folgenden zwei anderen Integrale zu substituiren:

$$\int_{-\frac{1}{2} a}^{-\infty} \frac{e^{U t} d u}{\sqrt{u^3 + \frac{1}{8} a^3}}, \quad \int_{\frac{1}{2} a}^{\infty} \frac{e^{U t} d u}{\sqrt{u^3 - \frac{1}{8} a^3}},$$

und die Constanten jetzt so zu wählen, dass C_1 willkürlich, und

$$C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

wird. Endlich wird man noch x^2 anstatt t setzen, und so aus (23) das Integral der Gleichung (19) erhalten; und so hätten wir den wieder mit äusserst geringem Rechenaufwande eine Differentialgleichung der dritten Ordnung allgemein integrirt.

LIUVILLE hat im *Journal de l'école polytechnique* eine Abhandlung veröffentlicht über die Integration der Gleichung:

$$s \frac{d^2 y}{d x^2} + (r + q x) \frac{d y}{d x} + (p + n x + m x^2) y = 0 \quad (26)$$

durch Differentiale mit allgemeiner Ordnungszahl; er fängt damit an diese mittelst der Substitution:

$$y = z e^{\int (\alpha + \beta x) dx} \quad (27)$$

umzuformen in:

$$(28) \quad s \frac{d^2 z}{dx^2} + [(2s\beta + q)x + 2\alpha s + r] \frac{dz}{dx} +$$

$$+ [x^2(s\beta + \beta q + m) + x(2\alpha\beta s + \alpha q + \beta r + n) + s\alpha^2 + s\beta + r\alpha + p] z = 0,$$

und wählt sodann α und β dergestalt, dass

$$s\beta^2 + \beta q + m = 0,$$

$$2\alpha\beta s + \alpha q + \beta r + n = 0,$$

wird, und so die obige Gleichung in die einfachere:

$$(29) \quad s \frac{d^2 z}{dx^2} + [(2s\beta + q)x + 2\alpha s + r] \frac{dz}{dx} + z[s\alpha^2 + s\beta + r\alpha + p] = 0$$

übergeht, die er dann durch Differentiale mit allgemeiner Ordnungszahl integrirt. Es ist aber klar, dass die letzte Gleichung (29) ganz in den Bereich der durch unsere Methode integrirbaren Formen falle, und so lassen sich denn Differentialgleichungen in grosser Anzahl anführen, die sämmtlich durch die in dieser Abhandlung auseinandergesetzte Methode integrirt werden können. Wir haben nicht im Sinne alle diese Formen complet aufzuzählen, begnügen uns daher zum Schlusse dieses Paragraphes noch auf eine allgemein integrirbare Differentialgleichung von beliebig hoher Ordnung, und mit ganz willkürlichen, darin enthaltenen constanten Coeffizienten aufmerksam zu machen, nämlich:

$$(30) \quad x^n \frac{d^n y}{dx^n} (a_n + b_n \log. x) + x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} (a_{n-1} + b_{n-1} \log. x) + \dots$$

$$+ x \frac{dy}{dx} (a_1 + b_1 \log. x) + (a_0 + b_0 \log. x) y = 0,$$

die durch die Substitution:

$$t = \log. x, \quad x = e^t$$

unmittelbar in eine bekannte Form wie:

$$(31) \quad \frac{d^n y}{dt^n} (A_n + B_n t) + \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} (A_{n-1} + B_{n-1} t) + \dots + y (A_0 + B_0 t) = 0$$

verwandelt wird

§. 4.

Integration der Differenzgleichungen von der Form:

$$\Delta^n y (a_n + b_n x) + (a_{n-1} + b_{n-1} x) \Delta^{n-1} y + (a_{n-2} + b_{n-2} x) \Delta^{n-2} y + \dots + (a_0 + b_0 x) y = 0. \quad (1)$$

Dieselbe Integrationsmethode, die wir bei Differentialgleichungen, deren Coefficienten die unabhängige Variable nur in der ersten Potenz enthalten angewendet haben, lässt sich auch beinahe unverändert zur Integration von ähnlich gestalteten Differenzgleichungen benutzen. Man setzt nämlich ein partikuläres Integral unter der Form:

$$y = \int_{u'}^{u''} e^{Ux} V du$$

voraus, und bekommt, so $\Delta x = h$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \Delta e^{Ux} &= e^{U(x+h)} - e^{Ux} = e^{Ux} (e^{Uh} - 1), \\ \Delta^2 e^{Ux} &= e^{Ux} (e^{Uh} - 1)^2, \\ \Delta^3 e^{Ux} &= e^{Ux} (e^{Uh} - 1)^3, \\ &\dots \\ \Delta^n e^{Ux} &= e^{Ux} (e^{Uh} - 1)^n, \end{aligned} \quad (2)$$

somit allgemein

$$\Delta^n y = \int_{u'}^{u''} e^{Ux} (e^{Uh} - 1)^n V du.$$

Setzt man also:

$$U_0 = a_n (e^{Uh} - 1)^n + a_{n-1} (e^{Uh} - 1)^{n-1} + \dots + a_1 (e^{Uh} - 1) + a_0, \quad (3)$$

$$U_1 = b_n (e^{Uh} - 1)^n + b_{n-1} (e^{Uh} - 1)^{n-1} + \dots + b_1 (e^{Uh} - 1) + b_0, \quad (4)$$

und denkt sich den obigen Werth von y in die vorliegende Differenzgleichung substituiert, so erhält man als Resultat offenbar:

$$\int_{u'}^{u''} (U_0 + U_1 x) e^{Ux} V du = 0, \quad (5)$$

eine Gleichung, die sich auch so schreiben lässt:

$$\int_{u'}^{u''} U_0 e^{Ux} V du + x \int_{u'}^{u''} U_1 e^{Ux} V du = 0. \quad (6)$$

Nun gibt das Verfahren der theilweisen Integration:

$$x \int U_1 e^{Ux} V du = e^{Ux} U_1 V - \int e^{Ux} d(U_1 V),$$

wodurch anstatt der Gleichung (6) folgende andere auftritt:

$$(7) \quad \left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''} + \int_{u'}^{u''} e^{Ux} \left[U_0 V \, dU - d(U_1 V) \right] = 0,$$

der nun Genüge geleistet werden wird, wenn man erstens für V eine solche Funktion der Veränderlichen u setzt, dass identisch für jedes u :

$$(8) \quad U_0 V \, dU - d(U_1 V) = 0$$

wird, und zweitens die Integrationsgrenzen u' u'' so wählt, dass auch

$$(9) \quad \left\{ e^{Ux} U_1 V \right\}_{u'}^{u''} = 0$$

ausfällt. Die Gleichung (8) oder was dasselbe ist, die folgende:

$$(10) \quad \frac{U_0}{U_1} dU - \frac{dV}{V} - \frac{dU_1}{U_1} = 0$$

liefert integrirt:

$$(11) \quad V = \frac{C}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} dU},$$

und es kann das im Exponenten der hier vorkommenden Exponentielle vorhandene Integral ohne sonderliche Mühe und andere Schwierigkeiten als diejenigen, denen das Zerlegen gebrochener Funktionen in Partialbrüche unterliegt, jederzeit ermittelt werden,

wiewohl der Bruch $\frac{U_0}{U_1}$ eine Funktion der transcendenten Grösse $e^{Uh} - 1$ ist. Man setzt nämlich:

$$\begin{aligned} e^{Uh} &= 1 + v, \\ Uh &= \log. (1 + v), \\ dU &= \frac{dv}{h(1+v)} \end{aligned}$$

und wird offenbar durch Einführung dieser Werthe ein jedes Integral einer transcendenten Funktion wie:

$$\int f(e^{Uh} - 1) dU$$

zurückführen auf ein algebraisches, nämlich:

$$\int f(v) \frac{dv}{h(1+v)};$$

hat man letzteres berechnet, und in die Gleichung (9), die auch so geschrieben werden kann:

$$(12) \quad \left\{ C e^{Ux} + \int \frac{U_0}{U_1} dU \right\}_{u'}^{u''} = 0,$$

substituirt, also v anstatt $e^{U h} - 1$, somit $\frac{\log. (1 + v)}{h}$ anstatt u gesetzt, und dasjenige, was aus U_0 und U_1 durch diese Substitutionen hervorgeht mit u_0 und u_1 bezeichnet, so erhält man anstatt der (12):

$$\left\{ C e^{\frac{x}{h} \log. (1 + v)} + \int \frac{u_0 dv}{h u_1 (1 + v)} \right\}_{v'}^{v''} = 0, \tag{13}$$

oder

$$\left\{ C (1 + v)^{\frac{x}{h}} e^{\int \frac{u_0 dv}{h u_1 (1 + v)}} \right\}_{v'}^{v''} = 0; \tag{14}$$

diess ist die zur Bestimmung der Grenzen dienende Gleichung, ihre Wurzeln seien:

$$v_1, v_2, v_3 \dots v_{n+1};$$

falls deren wirklich $n + 1$ an der Zahl aufgefunden werden können, so sind die der Gleichung (12):

$$u_1 = \frac{\log. (1 + v_1)}{h}, u_2 = \frac{\log. (1 + v_2)}{h}, u_3 = \frac{\log. (1 + v_3)}{h}, \dots u_{n+1} = \frac{\log. (1 + v_{n+1})}{h},$$

und es werden folgende partikuläre Integrale anstatt y gesetzt, der Differenzgleichung (1) Genüge leisten:

$$\begin{aligned} y &= \phi_1(x) \int_{u_1}^{u_2} e^{Ux} V du, \\ y &= \phi_2(x) \int_{u_1}^{u_3} e^{Ux} V du, \\ &\dots \dots \dots \\ y &= \phi_n(x) \int_{u_1}^{u_{n+1}} e^{Ux} V du. \end{aligned} \tag{15}$$

Unter $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \dots \phi_n$ sind solche Funktionen von x zu verstehen, die sich nicht ändern, wenn man x in $x + h$ verwandelt, also periodische, so wie z. B. $\sin. \frac{2 \pi x}{h}$.

Es können ferner einige der Werthe von y unbrauchbar werden, wenigstens in der Form, in welcher sie in der Gleichung (15) erscheinen, weil die Funktion unter dem Integralzeichen zwischen den betreffenden Grenzen ein oder mehrmal durch Unendlich geht. Diess wird entweder durch eine andere Combination der Grenzen, oder wenn eine solche nicht möglich wäre, durch eine solche Umformung des bestimmten Integrales vermieden, die wir im vorhergehenden Paragraphen vorgeschlagen haben. Weil endlich die vorgelegte Differentialgleichung linear ist, so wird auch die Summe der ermittelten partikulären Werthe derselben Genüge leisten, und wir gelangen sohin zu fol-

genden, n willkürliche periodische Funktionen der unabhängigen Veränderlichen in sich enthaltenden allgemeinen Integral:

$$(16) \quad y = \psi_1(x) \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V \, du + \psi_2(x) \int_{u_1}^{u_3} e^{ux} V \, du + \dots + \psi_n(x) \int_{u_1}^{u_{n+1}} e^{ux} V \, du,$$

wo

$$(17) \quad V = \frac{c}{U_1} e^{\int \frac{U}{U_1} \, du}$$

ist, diess jedoch unter der früher schon erwähnten Voraussetzung, dass man wirklich $n + 1$ Wurzeln der Gleichung (14) aufgefunden habe. Es ist hieraus ersichtlich, dass die Integration der Differenzgleichungen nicht grössern Schwierigkeiten unterliege, als die der Differentialgleichungen von ähnlichem Baue, und es wird das hiezu dienende Verfahren folgendes sein: Man bilde zunächst die mit U_0 und U_1 bezeichneten Polynome, indem man in der zu integrieren vorgelegten Differenzgleichung die Grössen:

$$\Delta^n y, \quad \Delta^{n-1} y, \quad \Delta^{n-2} y \dots y$$

bezüglich in die Potenzen

$$(e^{U_0} - 1)^n, \quad (e^{U_0} - 1)^{n-1}, \quad (e^{U_0} - 1)^{n-2} \dots (e^{U_0} - 1)^0$$

verwandelt, und die Summe aller derjenigen Glieder die kein x enthalten für U_0 , die Summe der übrigen, mit dem Faktor x verknüpften aber für U_1 , x nimmt, dann suche man

$$\int \frac{U}{U_1} \, du$$

und bilde aus dem gefundenen Werthe dieses Integrals den durch die Gleichung (11) gegebenen Werth von V , ingleichen den ersten Theil der Gleichung (12), von der man sich $n + 1$ Wurzeln zu verschaffen sucht, wenn sie deren so viele zulässt, substituirt die gefundenen Werthe in die Gleichung (16), so hat man das allgemeine Integral. Wären aber von den erwähnten $n + 1$ Wurzeln die der Gleichung (12) ihrer Natur nach zukommen können einige weggefallen, oder die ihnen entsprechenden partikulären Werthe aus einer der früher zur Sprache gebrachten Ursachen unbrauchbar geworden, so hat man kein allgemeines, sondern nur ein partikuläres mit der genügenden Anzahl willkürlicher periodischer Funktionen nicht versehenes Integral gefunden, welches durch den Zusatz eines oder einiger neuen partikulären Werthe vervollständig werden muss, welche letzteren in Form von Exponentiellen oder Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl zunächst erscheinen werden, und zwar: Wenn u_0 und u_1 einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen von der Form $v - v_1$, durch welchen der Bruch $\frac{u_0}{u_1}$ abgekürzt werden kann, so geht eine Wurzel v_1 der Gleichung (14) verloren, und es entspricht derselben ein partikuläres Integral:

$$\psi_1(x) (1 + v_1)^{\frac{x}{h}}, \tag{18}$$

unter ψ_1 eine periodische, sonst aber ganz willkürliche Funktion von x verstanden. Kommt der Faktor $v - v_1$ in u_0 und u_1 s -mal vor, so bekommt man ebenso um s Wurzeln der Gleichung (14) weniger, und denselben entsprechend, ein partikuläres Integral mit s willkürlichen Funktionen:

$$(1 + v_1)^{\frac{x}{h}} \left[\psi_1(x) + x \psi_2(x) + x^2 \psi_3(x) + \dots + x^{s-1} \psi_s(x) \right], \tag{19}$$

wo abermals unter $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x) \dots \psi_s(x)$, willkürliche Funktionen verstanden werden, die nur die Eigenschaft besitzen müssen, ihren Werth nicht zu ändern, wenn x in $x + h$ verwandelt wird.

Endlich werden auch diejenigen Werthe von U_1 , die dem Ausdruck

$$C e^{u x + \int \frac{U_1}{U_1} du}$$

einen unendlichen Werth ertheilen, wenn solche vorhanden sind, gerade wie bei den Differentialgleichungen eine Reihe partikulärer Werthe liefern, welche in Form von Differentialquotienten mit allgemeiner Ordnungszahl erscheinen, und gelegentlich, wo diess erspriesslich ist, verwandelt werden können, entweder in bestimmte Integrale oder Produkte aus Exponentialgrössen in endliche oder unendliche Polynome, geordnet nach absteigenden Potenzen von x . Es lässt sich in der That genau auf dieselbe Weise wie bei den Differentialgleichungen im ähnlichen Falle nachweisen, dass, wenn V einen Faktor $v - v_1$ im Nenner $m + 1$ -mal enthält, von welchem im Exponenten der in V enthaltenen Exponentielle keine Spur vorhanden ist, ein partikuläres Integral vorhanden sey, in Form eines m -ten Differentialquotienten, nämlich:

$$\left\{ \frac{d^m}{d v^m} \left[(1 + v)^{\frac{x}{h}} (v - v_1)^{m+1} V \right] \right\}_{v_1}; \tag{20}$$

dass aber der Ausdruck (19) unter der oben angedeuteten Bedingung, nämlich, dass die Polynome u_0 und u_1 den gemeinschaftlichen Faktor $(v - v_1)^s$ haben, der Differenzengleichung Genüge leiste, lässt sich auch durch unmittelbare Substitution mit Hilfe der folgenden allgemeinen Formel darthun:

$$\begin{aligned} \Delta^r P Q &= P \Delta^r Q + r \Delta P \left[\Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q \right] + \frac{r(r-1)}{2} \Delta^2 P \left[\Delta^{r-2} Q + 2 \Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q \right] \\ &+ \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} \Delta^3 P \left[\Delta^{r-3} Q + 3 \Delta^{r-2} Q + 3 \Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q \right] + \dots \end{aligned} \tag{21}$$

Diese Formel ist nicht blos für positive Werthe der Zahl r , sondern auch für negative, ganze und gebrochene, und allgemein für beliebige r brauchbar, wenn man nur übereinkommt die Gleichung:

$$(22) \quad \Delta^r \cdot e^{Ux} = e^{Ux} (e^{Uh} - 1)^r,$$

die sich für ganze und positive Werthe von r durch die direkte Operation des Differenznehmens ableiten lässt, für jedes r allgemein gültig vorauszusetzen, und somit als Definition der Differenzen mit allgemeiner Ordnungszahl zu betrachten. Um sie zu erweisen, ist nur nöthig, die beiden Faktoren des Produktes PQ durch ihre Entwicklungen in eine Reihe von Exponentiellen zu ersetzen, also etwa:

$$(23) \quad P = S [A_\alpha e^{\alpha x}], \quad Q = S [B_\beta e^{\beta x}],$$

somit:

$$(24) \quad PQ = S [A_\alpha B_\beta e^{(\alpha+\beta)x}]$$

und

$$(25) \quad \Delta^r PQ = S [A_\alpha B_\beta e^{(\alpha+\beta)x} (e^{(\alpha+\beta)h} - 1)^r]$$

zu setzen, ferner die letzte Gleichung zu schreiben wie folgt:

$$(26) \quad \Delta^r PQ = S [A_\alpha B_\beta e^{(\alpha+\beta)x} ((e^{\beta h} - 1) + (e^{\alpha h} - 1) ((e^{\beta h} - 1) + 1))^r],$$

und die r -te Potenz des hier vorkommenden Ausdruckes mittelst der Binomialformel zu entwickeln, indem man in demselben $e^{\beta h} - 1$ als erstes und $(e^{\alpha h} - 1) ((e^{\beta h} - 1) + 1)$ als zweites Glied des Binoms ansieht, schliesslich aber zu bemerken, dass allgemein für beliebige Werthe von p und q :

$$(27) \quad S [A_\alpha B_\beta e^{(\alpha+\beta)x} (e^{\alpha h} - 1)^p (e^{\beta h} - 1)^q] = \Delta^p P \cdot \Delta^q Q$$

ist. Nehmen wir also diese Formel als erwiesen an und setzen:

$$Q = e^{Ux}, \quad \Delta^r Q = e^{Ux} (e^{Uh} - 1)^r,$$

somit:

$$(28) \quad \begin{aligned} \Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q &= e^{Ux+Uh} (e^{Uh} - 1)^{r-1} \\ \Delta^{r-2} Q + 2\Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q &= e^{Ux+2Uh} (e^{Uh} - 1)^{r-2} \\ \Delta^{r-3} Q + 3\Delta^{r-2} Q + 3\Delta^{r-1} Q + \Delta^r Q &= e^{Ux+3Uh} (e^{Uh} - 1)^{r-3} \\ &\dots \end{aligned}$$

so wird

$$(29) \quad \begin{aligned} \Delta^r PQ &= \Delta^r \cdot P e^{Ux} = \\ &= e^{Ux} [P (e^{Uh} - 1)^r + r \Delta P e^{Uh} (e^{Uh} - 1)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2} \Delta^2 P e^{2Uh} (e^{Uh} - 1)^{r-2} + \\ &\quad + \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} \Delta^3 P e^{3Uh} (e^{Uh} - 1)^{r-3} + \dots]. \end{aligned}$$

Diess vorausgesetzt, denken wir uns in der Differenzgleichung (1) die abhängige Veränderliche y durch das Produkt PQ ersetzt, ferner mit U'_0 , U''_0 , $U'''_0 \dots$ die successiven Differentialquotienten von U_0 nach der darin enthaltenen Grösse $e^{Uh} - 1$ genommen, bezeichnet, und ebenso die ähnlichen Differentialquotienten von U_1 durch U'_1 ,

$U''_1, U'''_1 \dots$ angedeutet, so erhalten wir als Resultat der Substitution:

$$P(U_0 + U_1 x) + e^{v_h} \Delta P(U'_0 + U'_1 x) + \frac{1}{2} e^{2v_h} \Delta^2 P(U''_0 + U''_1 x) + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3} e^{3v_h} \Delta^3 P(U'''_0 + U'''_1 x) + \dots \quad (30)$$

Haben nun die Polynome U_0 und U_1 den Faktor

$$(v - v_1)^s = (e^{v_h} - 1 - v_1)^s$$

gemeinschaftlich, so verschwindet für $v = v_1$ nicht bloß U_0 und U_1 , sondern auch die successiven Differentialquotienten bis zum s -1ten inclusive, und somit ist der Ausdruck (30) identisch Null, wenn nur unter P eine Funktion verstanden wird, deren successive Differenzen von der s -ten angefangen der Nulle gleich sind, also eine Funktion wie:

$$\psi_1(x) + x \psi_2(x) + x^2 \psi_3(x) + \dots + x^{s-1} \psi_s(x) \quad (31)$$

unter $\psi_1(x), \psi_2(x) \dots \psi_s(x)$ periodische Funktionen von x verstanden, die ihren Werth nicht ändern, wenn x in $x+h$ übergeht, wodurch denn die Gültigkeit des Ausdruckes (19) als partikuläres Integral unter den entsprechenden Bedingungen nachgewiesen ist. Wir sehen also, dass die Differenzgleichungen eine ähnliche Behandlung wie die Differentialgleichungen zulassen, und im Ganzen nicht mehr und auch nicht weniger Schwierigkeiten darbiethen wie diese.

§. 5.

Integration der completen Differenzen- und Differentialgleichungen.

Diejenigen Gleichungen, die wir bisher zu integriren versucht hatten, enthielten sämmtlich kein Glied, das als eine reine Funktion von x ohne y erschienen wäre; wir wollen nun auch diejenigen betrachten, die ein solches enthalten, d. h. wir wollen sehen, wie man die Integrale der Gleichungen:

$$\frac{d^n y}{d x^n} (a_n + b_n x) + \frac{d^m y}{d x^m} (a_m + b_m x) + \dots + \frac{dy}{dx} (a_1 + b_1 x) + y (a_0 + b_0 x) = f(x), \quad (1)$$

oder

$$\Delta^n y (a_n + b_n x) + (a_{n-1} + b_{n-1} x) \Delta^{n-1} y + (a_{n-2} + b_{n-2} x) \Delta^{n-2} y + \dots + (a_0 + b_0 x) y = f(x) \quad (2)$$

zu ermitteln habe, wenn man die Integrale derjenigen Anderen bereits gefunden hat, die aus Diesem hervorgehen, wenn $f(x)$ durch die Nulle ersetzt wird, oder mit andern Worten, wir wünschen aus dem Integrale der reducirten Gleichung jenes der completen abzuleiten.

Bekanntlich dient zu diesem Zwecke die Methode der Variation der willkürlichen Constanten, deren Wirksamkeit sich auf alle linearen Differentialgleichungen mit beliebigen Coefficienten erstreckt, vorausgesetzt, dass man in dem Besitze des allgemeinen

Integrale der reducirten Gleichung ist. Diese Methode ist nun auch hier anwendbar, da sie aber zu einem Systeme von so viel gewöhnlichen Gleichungen des ersten Grades führt, als die Ordnungszahl der Differentialgleichung Einheiten in sich enthält, welche aufgelöst werden müssen, so resultiren hier meist in Bruchform erscheinende äusserst complicirte Formen, die man gerne vermeidet, daher denn die Methode der Variation der willkürlichen Constanten zwar ein allgemeines, jedoch nicht das bequemste Mittel ist, vom Integrale der reducirten Gleichung zu jenem der completen überzugehen, wir schlagen daher selbst bei der einfachsten Sorte linearer Differentialgleichungen, derjenigen nämlich mit constanten Coefficienten, gerne einen andern Weg ein, nach CAUCHY von der allbekannten FOURIER'schen Formel Gebrauch machend. Ist namentlich eine Differentialgleichung von linearer Form und constanten Coefficienten zu integriren, die in symbolischer Form hingeschrieben so aussieht:

$$(3) \quad F\left(\frac{d}{dx}\right)y = f(x),$$

und man hat das allgemeine Integral der reducirten Gleichung

$$(4) \quad F\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$$

bereits gefunden in folgender Form

$$(5) \quad y = C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x} + \dots + C_n e^{\theta_n x}$$

unter $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ die n Wurzeln der Gleichung

$$(6) \quad F(\theta) = 0$$

verstanden, so erhält man offenbar das allgemeine Integral der Gleichung (3), wenn man zu dem in (5) gegebenen Ausdruck noch eine Funktion von x , die gar keine willkürliche Constante in sich zu schliessen braucht, hinzufügt, die der (3) Genüge leistet, und die man auf folgende Weise finden kann. Man setze:

$$(7) \quad y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} \varphi \, d\alpha \, d\lambda$$

wobei φ eine noch zu bestimmende Funktion von α und λ bedeutet, man substituirt diesen Werth von y in (3), wodurch

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} F(\alpha\sqrt{-1}) e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} \varphi \, d\alpha \, d\lambda = f(x),$$

erhalten wird, und in eine identische Gleichung übergeht, wenn

$$(8) \quad \varphi = \frac{f(\lambda)}{F(\alpha\sqrt{-1})}$$

ist. Das gesuchte allgemeine Integral sieht daher so aus:

$$(9) \quad y = C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x} + \dots + C_n e^{\theta_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} \frac{f(\lambda)}{F(\alpha\sqrt{-1})} \, d\alpha \, d\lambda$$

und es lässt sich die Identität desselben mit dem durch die Methode der Variation der willkürlichen Constanten gelieferten ohne Schwierigkeit dadurch nachweisen, dass man in dem hier enthaltenen Doppelintegrale die Integration nach α wirklich vollbringt. Es muss zu diesem Behufe der Bruch $\frac{1}{F(\alpha\sqrt{-1})}$ in Partialbrüche zerlegt werden, deren einen wir mit

$$\frac{A}{\alpha\sqrt{-1} - \theta} \tag{10}$$

bezeichnen wollen, und dem als Bestandtheil von y ein Doppelintegral:

$$\frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{\alpha(x-\lambda)\sqrt{-1}} \frac{f(\lambda)}{\alpha\sqrt{-1} - \theta} d\alpha d\lambda = \xi \tag{11}$$

entsprechen wird. Man bilde nun aus dieser letzten Gleichung

$$\frac{d\xi}{dx} - \theta\xi = Af(x) \tag{12}$$

und bemerke, das der integrierende Faktor dieser Differentialgleichung $e^{-\theta x}$

sey, und man somit integrierend erhalte:

$$\xi = Ae^{\theta x} \int e^{-\theta x} f(x) dx. \tag{13}$$

Einem jeden der früher erwähnten Partialbrüche entspricht aber ein ähnlicher Bestandtheil von y , es wird sich also der Werth dieser Grösse auch so schreiben lassen:

$$y = C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x} + \dots + C_n e^{\theta_n x} + A_1 e^{\theta_1 x} \int e^{-\theta_1 x} f(x) dx + A_2 e^{\theta_2 x} \int e^{-\theta_2 x} f(x) dx + \dots + A_n e^{\theta_n x} \int e^{-\theta_n x} f(x) dx \tag{14}$$

und diess ist genau der Werth, den die Methode der Variation der Constanten liefert. Der bisher ausser Acht gelassene Fall, wo die Gleichung

$$F(\theta) = 0$$

gleiche Wurzeln hat, wollen wir, da derselbe keinerlei Schwierigkeiten unterliegt, hier zu erörtern unterlassen, und wenden uns allsogleich zu der Gleichung (1) oder (2), deren allgemeines Integral offenbar auch aus zwei Theilen zusammengesetzt werden kann, nämlich dem allgemeinen n willkürliche Constanten oder periodische Functionen von x in sich schliessenden Integrale der reducirten Gleichung, und einer besonderen Auflösung der completen. Wie erstere gefunden werde, ist im Laufe dieser Abhandlung gezeigt worden, letztere aber kann mit Hilfe mehrerer Formeln von der Natur der FOURIER'schen, ja durch die FOURIER'sche selbst ermittelt werden auf folgende Weise:

Man setze

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{u'}^{u''} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{ux} v dU d\alpha d\lambda \tag{15}$$

unter V eine Function von U , α und λ verstanden, unter u' und u'' aber schicklich gewählte Integrationsgrenzen, so dass der Gleichung (1) durch diesen Werth von y Genüge geleistet wird; es wird aber diese durch die Substitution des eben hingeschriebenen Werthes gebracht auf

$$(16) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{u'}^{u''} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (U_0 + U_1 x) e^{Ux} V dU d\alpha d\lambda = f(x),$$

und durch Scheiden des hier vorkommenden bestimmten Integrales in zwei Theile, dem ohne und dem mit dem Factor x , und theilweises Integriren des letzteren auf

$$(17) \quad \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} U_1 V e^{Ux} d\alpha d\lambda \right\}_{u'}^{u''} + \frac{1}{2\pi} \int_{u'}^{u''} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (U_0 V - \frac{d}{dU}(U_1 V)) e^{Ux} dU d\alpha d\lambda = f(x).$$

Nun nehme man V so an, dass

$$(18) \quad U_0 V - \frac{d}{dU}(U_1 V) = 0,$$

also

$$(19) \quad V = \frac{\varphi}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} dU}$$

ist, wo φ eine nach U constante Grösse bedeutet, die aber noch immer α und λ in sich enthalten kan. Die Gleichung (17) geht hiedurch über in

$$(20) \quad \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \varphi e^{Ux + \int \frac{U_0}{U_1} dU} d\alpha d\lambda \right\}_{u'}^{u''} = f(x),$$

und es wird ihr Genüge geleistet, wenn man $u'' = \alpha \sqrt{-1}$, u' gleich einer beliebigen Wurzel der Gleichung

$$(21) \quad c^{Ux} + \int \frac{U_0}{U_1} dU = 0,$$

und φ gleich einer solchen Function von α und λ nimmt, dass:

$$(22) \quad \varphi \left\{ e^{\int \frac{U_0}{U_1} dU} \right\}_{\alpha \sqrt{-1}} = e^{-\alpha \lambda \sqrt{-1}} f(\lambda)$$

wird, also

$$(23) \quad \varphi = e^{-\alpha \lambda \sqrt{-1}} \left\{ e^{-\int \frac{U_0}{U_1} dU} \right\}_{\alpha \sqrt{-1}} f(\lambda);$$

die gesuchte besondere Auflösung ist somit:

$$(24) \quad y = \frac{1}{2\pi} \int_{u'}^{\alpha \sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{Ux - \alpha \lambda \sqrt{-1}} + \left\{ \int \frac{U_0}{U_1} dU \right\}_{\alpha \sqrt{-1}}^u \frac{f(\lambda)}{U_1} dU d\alpha d\lambda,$$

und es wird hier offenbar vorausgesetzt, dass die erste der drei hier vorzunehmenden

Integrationen, die nach U sey. Da man für u' eine beliebige der Wurzeln der Gleichung (21) nehmen kann, und es sich sehr oft trifft, dass $u' = \pm \infty \sqrt{-1}$ eine solche ist, so wird man diese, falls sie vorhanden ist, allen anderen vorziehen, ist sie aber nicht vorhanden, so wird man besser thun, um complicirten Erörterungen über den Sinn eines bestimmten Integrales mit gemischt reelen und imaginären Grenzen auszuweichen, die gesuchte besondere Auflösung hinzustellen als Differenz zweier bestimmter Integrale, nämlich:

$$y = \frac{1}{2\lambda} \int_0^{a\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{Ux - a\sqrt{-1}} + \left\{ \int_{U_1}^{U_0} dU \right\}^u \frac{f(\lambda)}{U_1} dU d\alpha d\lambda - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{u''} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{Ux - a\sqrt{-1}} + \left\{ \int_{U_1}^{U_0} dU \right\}^u \frac{f(\lambda)}{U_1} dU d\alpha d\lambda,$$

eine Formel, die im Grunde mit der früheren übereinstimmt, und im Wesentlichen nur den Zweck erreicht, den etwa zweifelhaften Sinn eines solchen bestimmten Integrales mit imaginären Grenzen näher anzugeben. Und dieser eben gewonnene Ausdruck zu dem allgemeinen Integral der reducirten Gleichung hinzugefügt liefert das allgemeine der completen.

Es kann hier noch bemerkt werden, dass es nicht immer nöthig sey, von der FOURIER'schen Formel Gebrauch zu machen, sehr oft und namentlich dann, wenn $f(x)$ sich auf eine constante reducirt, erhält man das allgemeine Integral der completen Gleichung aus jenem der reducirten durch eine entsprechende Veränderung der zwischen den Constanten der Integration stattfindenden Beziehungsgleichungen; so wird man z. B. das Integral der completen Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} \pm axy = b$$

genau in derselben Form wie das der reducirten, nämlich durch die Formel (81) §. 1. wiedergeben, nur wird zwischen den $(n + 1)$ Constanten nicht mehr die Beziehungsgleichung:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_{n+1} = 0,$$

sondern folgende andere

$$C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_{n+1} = b$$

statfinden.

Dieselbe Behandlung mittelst der FOURIER'schen Formel, die wir hier den Differentialgleichungen angedeihen liessen, gestatten auch die Differenzgleichungen und zwar, sowohl die mit constanten Coefficienten, als auch diejenigen, die wir hier speziell der Betrachtung unterwarfen.

Und nun finden wir für gut, diese Abhandlung über die Integration der linearen Differenzen- und Differentialgleichungen, deren Coefficienten nach der unabhängigen Veränderlichen dem ersten Grade angehören und derjenigen, die sich durch passende

Umformungen auf solche zurückführen lassen, zu schliessen. Wir wenden uns zunächst zu anderen linearen Differentialgleichungen, die auf die Form der hier betrachteten nicht mehr zurückgeführt werden können; dann wollen wir auch die partiellen Differentialgleichungen in den Kreis unserer Untersuchungen ziehen, und endlich zu einigen Anwendungen der gewonnenen Resultate auf die Theorie des Lichtes übergehen.

Es wird dem aufmerksamen Leser nicht entgehen, dass im Verlaufe dieser Abhandlung und zwar hauptsächlich, um dieselbe nicht zu einer ungebührlichen Dicke anschwellen zu lassen, vor der Hand manches ausser Acht gelassen oder nur mit wenigen Worten berührt wurde, was zur streng wissenschaftlichen Feststellung der entwickelten Begriffe, bewiesener Formeln u. s. w. dienlich gewesen wäre; so wäre man im Grunde verpflichtet, bei jedem gewonnenen Integrale einer linearen Differentialgleichung, das man für ein Allgemeines hält, zu beweisen, dass all die partikulären Integrale, aus welchen es zusammengesetzt ist, auch wirklich von einander verschieden sind, und dass keines derselben aus den übrigen durch Multiplikation mit gewissen Constanten und Addition hervorgehe, ein Beweis, der nicht immer leicht zu führen ist. Eben so hätten die Gleichungen mit gebrochener oder allgemeiner Ordnungszahl, der darin vorkommenden Differentialquotienten einen eigenen Paragraph verdient; wir halten es aber für besser, diese Feinheiten erst bei solchen Differentialgleichungen zur Sprache zu bringen, die die Auflösung eines physikalischen Problems in sich enthalten und eben dadurch ein gesteigertes Interesse erregen, und zu sorgfältigerer Discussion veranlassen können, weil hierdurch nach unserem Bedünken mehr Klarheit erstrebt, und Wiederholungen vermieden werden.
